# ملخصات

# التميز X الرياضيات

التميز فى الرياضيات أ/ محمود رجب 01227742878

# ملخص أهم نقاط التفاضل والتكامل

## أهم النقاط المرتبطة بالعدد (هـ)

* العدد النيبيرى (هـ) هو عدد غير نسبى ٢ < هـ < ٣

هـ = ١ + $\frac{١}{\underline{|١}}$ + $\frac{١}{\underline{|٢}}$ + $\frac{١}{\underline{|٣}}$ + ..... = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{\underline{|ن}}$ (متسلسلة تايلور)

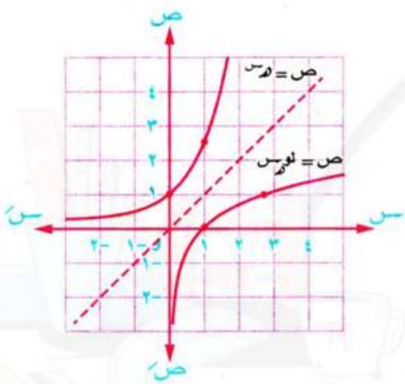
العدد هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨

⊙ **الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى :**

د : ح ⟵ ح$^{+}$ حيث د (س) = هـ$^{س}$

دالة أسية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح

، مداها = ح$^{+}$ ومنحناها يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)




⊙ **دالة اللوغاريتم الطبيعى :**

د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = لو$_{هـ}$ س

دالة لوغاريتمية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح$^{+}$

، مداها = ح ومنحناها يمر بالنقطتين (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

**لاحظ أن**

* **من الشكل السابق نجد أن :** $\lim_{س \to \infty}$ لو$_{هـ}$ س = ∞ ، $\lim_{س \to ٠^{+}}$ لو$_{هـ}$ س = − ∞

✪ **بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى :**

إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، ن ∈ ح مع مراعاة أن يكون الأساس للوغاريتم ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن :

(١) لو$_{هـ}$ هـ = ١

(٢) لو$_{هـ}$ ١ = صفر

(٣) لو$_{هـ}$ س$^{ن}$ = ن لو$_{هـ}$ س

(٤) هـ$^{لو_{هـ} س}$ = س

(٥) لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص

(٦) لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س − لو$_{هـ}$ ص

(٧) لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} ص}$

(٨) لو$_{هـ}$ س × لو$_{س}$ هـ = ١

# نهايات الدوال المرتبطة بالعدد هـ

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} (\text{١} + \text{س})^{\frac{\text{١}}{\text{س}}} = \text{هـ}$

## لاحظ أن

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{أس}} = \text{هـ}^{\text{أ}}$

② $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{س} + \text{أ}} = \text{هـ}$

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} + \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{أ}}$

④ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} - \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\text{س} + \text{ك}} = \text{هـ}^{-\text{أ}}$

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\text{١} + \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{أ}}} = \text{هـ}$

② $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \text{هـ}^{\text{س}} = \text{١}$

③ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{أ}} (\text{١} + \text{س})}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{هـ}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{١} + \text{س})}{\text{س}} = \text{١}$

④ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}^{\text{س}} - \text{١}}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{١}}{\text{س}} = \text{١}$

# الاشتقاق

### مشتقة الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية :

① إذا كانت : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

② إذا كانت : $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}^{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}$

③ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$

④ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\, \text{هـ}}{\text{س}}$

**وبصفة عامة :**

① إذا كانت : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}$

② إذا كانت : $\text{ص} = \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) \times \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}$

③ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{د}(\text{س})$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$

④ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{د}(\text{س})$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} \times \text{لو}_{\text{أ}}\, \text{هـ}$

**لاحظ أن**

إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ | د (س) | فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د'(س)}{د(س)}$

، إذا كان : ص = لو$_{م}$ | د (س) | فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د'(س)}{د(س)} \times$ لو$_{م}$ هـ

## اشتقاق الدوال المثلثية :

(١) إذا كان : ص = جاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس

(٢) إذا كان : ص = جتاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − جاس

(٣) إذا كان : ص = ظاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا$^{2}$ س

(٤) إذا كان : ص = ظتاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − قتا$^{2}$ س

(٥) إذا كان : ص = قاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قاس ظاس

(٦) إذا كان : ص = قتاس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − قتاس ظتاس

**وبصفة عامة إذا كان :**

(١) ص = جا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = د'(س) جتا د (س)

(٢) ص = جتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − د'(س) جا د (س)

(٣) ص = ظا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = د'(س) قا$^{2}$ د (س)

(٤) ص = ظتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − د'(س) قتا$^{2}$ د (س)

(٥) ص = قا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = د'(س) قا د (س) ظا د (س)

(٦) ص = قتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − د'(س) قتا د (س) ظتا د (س)

## الاشتقاق الضمنى

**اشتقاق علاقة بين متغيرين (أو أكثر) بالنسبة لأحدهما دون الحاجة إلى فصل المتغيرين**

مع ملاحظة أن : $\frac{ءس^{ن}}{ءس}$ = ن س$^{ن-1}$ **بينما** $\frac{ءص^{ن}}{ءس}$ = ن ص$^{ن-1}$ . $\frac{ءص}{ءس}$

## الاشتقاق البارامترى

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) هما معادلتا منحنى على الصورة البارامترية حيث :

د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

## المشتقات العليا للدالة

المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة $ن$ كما يلى :

$ص^{(ن)} = \frac{ء^{ن} ص}{ء س^{ن}} = د^{(ن)}(س)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب.

### لاحظ أن

* $\frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص} = ١$ **بينما** $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} \times \frac{ء^{٢}س}{ءص^{٢}} \neq ١$

* $\frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{ءص}{ءس}$ **بينما** $\frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}} \times \frac{ء^{٢}ع}{ءس^{٢}} \neq \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

«حيث لا توجد قاعدة سلسلة فى المشتقة الثانية».

* $\frac{ء}{ءس}\left[ص \ \frac{ءص}{ءس}\right]$ = الأول × مشتقة الثانى + الثانى × مشتقة الأول

$= ص \ \frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) + \left(\frac{ءص}{ءس}\right) \times \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ص \ \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$

* معدل تغير ميل المماس للمنحنى $ص = د(س)$ يساوى $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

* إذا كانت : $ص = (د \circ ر)(س) = د\left(ر(س)\right)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = دَ\left(ر(س)\right) \cdot رَ(س)$

* إذا كان : $ص = جا \ أ س$ فإن : $ص^{(ن)} = أ^{ن} \ جا\left(أ س + \frac{ن \pi}{٢}\right)$

* إذا كان : $ص = جتا \ أ س$ فإن : $ص^{(ن)} = أ^{ن} \ جتا\left(أ س + \frac{ن \pi}{٢}\right)$

* إذا كان : $\boxed{ص = جا \ أ س}$ ، أ $\boxed{ص = جتا \ أ س}$

فإن : $\boxed{ص^{(ن)} = أ^{ن} ص}$ حيث $ن$ عدد يقبل القسمة على ٤

## تطبيقات على المشتقة الأولى (معادلتا المماس والعمودى على منحنى)

إذا كانت : $أ(س_{١} ، ص_{١})$ نقطة على منحنى الدالة د حيث :

$ص = د(س)$ فإن :

* ميل المماس للمنحنى عند $أ = \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_{١} ، ص_{١})}$

* ميل العمودى على المنحنى عند $أ = \frac{-١}{\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_{١} ، ص_{١})}}$

### لاحظ أن

* ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
* العمودى على المنحنى هو العمودى على المماس عند نقطة التماس.

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ هى : $\boxed{ص - ص_{١} = م(س - س_{١})}$

* معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ هى : $\boxed{ص - ص_{١} = \frac{-١}{م}(س - س_{١})}$

## المعدلات الزمنية المرتبطة

⊙ إذا كانت لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن نحصل على علاقة بين المعدلات الزمنية : $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

⊙ **إذا كان المتغير س**

| | | |
|---|---|---|
| يتزايد/يبتعد/يتمدد/يُصب/يتراكم | بتزايد الزمن فإن $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ يكون | موجبًا |
| يتناقص/يقترب/ينكمش/يتسرب/ينصهر | | سالبًا |

### ملاحظات

* إذا كانت $\text{س}_{\cdot}$ القيمة الابتدائية للمتغير س عند (ن = ٠)

، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ثابت ، س قيمة المتغير بعد زمن ن

فإن : $\boxed{\text{س} = \text{س}_{\cdot} + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ن}}$

* المسافة بين أى نقطتين $(\text{س}_{١} \text{ ، } \text{ص}_{١})$ ، $(\text{س}_{٢} \text{ ، } \text{ص}_{٢})$

هى $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

* حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتى المركز طولا نصفى

قطريهما $\text{نق}_{١}$ ، $\text{نق}_{٢}$ يساوى $\frac{٤}{٣}\pi(\text{نق}_{٢}^{٣} - \text{نق}_{١}^{٣})$

* إذا كانت : ك = س × ص × ع (ثلاثة متغيرات)

فإن : $\frac{\text{ءك}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ص ع} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \text{س ع} + \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \times \text{س ص}$

* بُعد النقطة $(\text{س}_{١} \text{ ، } \text{ص}_{١})$ عن المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠

هو : $\frac{|\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$

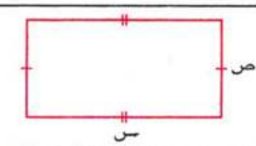
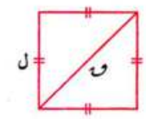
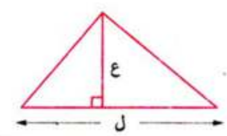
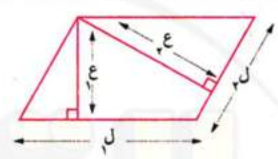
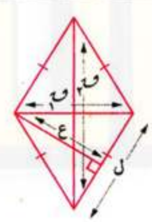
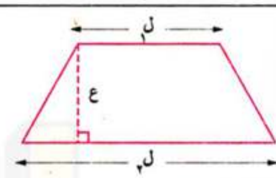
* إذا كان س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

① $\frac{\text{ء(جاس)}}{\text{ءن}} = (\text{جتاس}) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

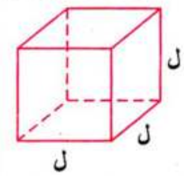
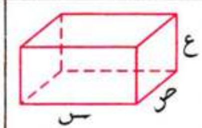
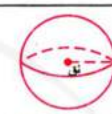
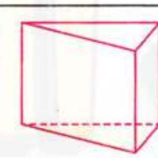
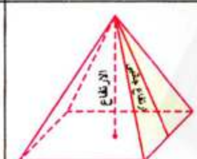
② $\frac{\text{ء(طاس)}}{\text{ءن}} = (\text{قا}^{٢}\text{س}) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

③ $\frac{\text{ء(جتاس)}}{\text{ءن}} = (-\text{جاس}) \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

# مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية

| | | |
|---|---|---|
| المستطيل |  | المحيط = ٢ (س + ص)<br>المساحة = س × ص |
| المربع |  | المحيط = ٤ ل<br>المساحة = ل$^{2}$ = $\frac{1}{2}$ و$^{2}$ |
| المثلث |  | المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة<br>المساحة = $\frac{1}{2}$ × ل × ع<br>= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين<br>× جيب الزاوية المحصورة بينهما |
| متوازى الأضلاع |  | المحيط = ٢ (ل$_1$ + ل$_2$)<br>المساحة = ل$_1$ × ع$_1$ = ل$_2$ × ع$_2$ |
| المعين |  | المحيط = ٤ ل<br>المساحة = ل × ع = $\frac{1}{2}$ و$_1$ × و$_2$ |
| شبه المنحرف |  | المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة<br>المساحة = $\frac{1}{2}$ (ل$_1$ + ل$_2$) × ع |
| الدائرة |  | المحيط = ٢ $\pi$ نق<br>المساحة = $\pi$ نق$^{2}$ |
| القطاع الدائرى |  | المحيط = ٢ نق + ل<br>المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ هـ نق$^{2}$ |
| القطعة الدائرية |  | المساحة = $\frac{1}{2}$ نق$^{2}$ (هـ − حا هـ) |

## مساحات وحجوم بعض المجسمات

| المجسم | | المساحة الجانبية | المساحة الكلية | الحجم |
|---|---|---|---|---|
| المكعب |  | ٤ $ل^{٢}$ | ٦ $ل^{٢}$ | $ل^{٣}$ |
| متوازى المستطيلات |  | ٢ (س + ص) × ع | ٢ (س ص + ص ع + ع س) | س × ص × ع |
| الأسطوانة الدائرية القائمة |  | ٢ $\pi$ نق ع | ٢ $\pi$ نق ع + ٢ $\pi$ $نق^{٢}$ <br> = ٢ $\pi$ نق (ع + نق) | $\pi$ $نق^{٢}$ ع |
| الكرة |  | – | ٤ $\pi$ $نق^{٢}$ | $\frac{٤}{٣}$ $\pi$ $نق^{٣}$ |
| المخروط |  | $\pi$ نق ل | $\pi$ نق ل + $\pi$ $نق^{٢}$ | $\frac{١}{٣}$ $\pi$ $نق^{٢}$ ع |
| المنشور |  | محيط القاعدة <br> × الارتفاع | المساحة الجانبية <br> + مجموع مساحتى القاعدتين | مساحة القاعدة <br> × الارتفاع |
| الهرم المنتظم |  | $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة <br> × الارتفاع الجانبى | المساحة الجانبية <br> + مساحة القاعدة | $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة <br> × الارتفاع |

## النقطة الحرجة

يكون للدالة د المتصلة على الفترة ]أ ، ب[ نقطة حرجة (حـ ، د (حـ)) حيث حـ ∈ ]أ ، ب[

إذا كان : دَ (حـ) = صفر أو دَ (حـ) غير موجودة

النقطة الحرجة عند س = أ لابد وأن تنتمى لمجال الدالة د أى أن : د (أ) تكون معرفة.

## تزايد وتناقص الدوال

(١) الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة عليه فى هذه الفترة موجبًا.

أى أن : إذا كان دَ (س) > ٠ لكل س ∈ ]أ ، ب[ فإن الدالة تزايدية.

(٢) الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة عليه فى هذه الفترة سالبًا.

أى أن : إذا كان دَ (س) < ٠ لكل س ∈ ]أ ، ب[ فإن الدالة تناقصية.

**ولذلك نستخدم المشتقة الأولى فى خطوات بحث تزايد وتناقص الدالة كالآتى :**

(١) نحدد مجال الدالة. (٢) نوجد دَ (س)

(٣) نوجد النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = ٠ أ، دَ (س) غير موجودة]

(٤) نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال الدالة بهذه النقط.

(٥) نعين إشارة دَ (س) فى كل فترة من هذه الفترات وبذلك يتم تعيين فترات التزايد حيث [دَ (س) > ٠] وفترات التناقص حيث [دَ (س) < ٠]

## القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

*** استخدام المشتقة الأولى فى تحديد القيم العظمى والصغرى المحلية :**

إذا كانت (حـ ، د (حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

(١) دَ (س) > ٠ عندما س < حـ ، دَ (س) < ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة عظمى محلية.

(٢) دَ (س) < ٠ عندما س < حـ ، دَ (س) > ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة صغرى محلية.

(٣) إذا لم يحدث تغيير فى إشارة دَ (س) على جانبى حـ فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند حـ

*** استخدام المشتقة الثانية :**

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى حـ حيث دَ (حـ) = ٠ وكانت :

(١) دً (حـ) < ٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية.

(٢) دً (حـ) > ٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية.

(٣) دً (حـ) = ٠ فإن : اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة (حـ ، د (حـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية.

**ملاحظات**

(١) نقط القيم العظمى والصغرى المحلية تكون نقط حرجة ولكن العكس غير صحيح أى أنه ليس بالضرورة أن تكون النقط الحرجة عظمى أو صغرى محلية.

(٢) إذا كانت الدالة د تزايدية (أو تناقصية) فقط فى فترة ما فليس لهذه الدالة قيم عظمى (أو صغرى) محلية فى هذه الفترة.

(٣) النقطة الحرجة التى عندها المشتقة الأولى = صفر أى المماس للمنحنى عندها يكون أفقيًا يطلق عليها أحيانًا نقطة التوقف.

(٤) الدالة كثيرة الحدود من الدرجة ن بها (ن − ١) على الأكثر من القيم العظمى أو الصغرى المحلية.

* **خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال المتصلة الغير مشتملة على دالة ثابتة :**

(١) نحدد مجال الدالة. (٢) نوجد دَ (س)

(٣) نوجد قيم النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = صفر أ، غير موجودة]
وليكن إحداثيها السينى $س_١$

(٤) اختبار نوع النقط الحرجة من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية : باستخدام إشارة المشتقة الأولى أو المشتقة الثانية كما سبق.

## تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

لحل مسائل التطبيقات نعبر عن المتغير المراد إيجاد أكبر أو أقل قيمة له كدالة فى متغير واحد وذلك بالاستعانة بمعطيات المسألة ثم نوجد القيم العظمى أو الصغرى لهذه الدالة **مع ملاحظة أنه :**

* عند إيجاد أكبر حجم (ح) نضع $\frac{ءح}{ءس} = ٠$ ، ونتأكد من أن : $\frac{ء^٢ح}{ءس^٢} <$ صفر

* عند إيجاد أقل تكاليف (ت) نضع $\frac{ءت}{ءس} = ٠$ ، ونتأكد من أن : $\frac{ء^٢ت}{ءس^٢} >$ صفر وهكذا ...

### تذكر

(١) مساحة المثلث المتساوى الساقين ومحيطه ثابت تكون أكبر ما يمكن عندما يكون متساوى الأضلاع.

(٢) مساحة المثلث القائم الزاوية وطول وتره ثابت تكون أكبر ما يمكن عندما يكون متساوى الساقين.

(٣) مساحة المستطيل المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثابت تكون أكبر ما يمكن عندما يكون مربعًا.

(٤) حجم متوازى المستطيلات الذى قاعدته مربعة ومجموع أبعاده ثابت يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مكعبًا.

## القيم القصوى ( العظمى والصغرى المطلقة )لدالة على فترة مغلقة

**بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة فى فترة مغلقة [أ ، ب] :**

إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]

(١) نعين النقط الحرجة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة والتى تنتمى للفترة [أ ، ب]

(٢) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة وقيمتى النقط الحدية د (أ) ، د (ب)

(٣) نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون أكبر هذه القيم هى القيمة العظمى المطلقة فى [أ ، ب]
، أصغر هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة فى [أ ، ب]

### ملاحظة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] وكانت :

(١) دَ (س) > ٠

**أى أن :** الدالة تزايدية على نفس الفترة.

فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (أ)
* القيمة العظمى المطلقة = د (ب)

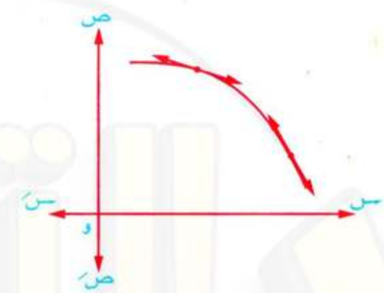
(٢) دَ (س) < ٠

**أى أن :** الدالة تناقصية على نفس الفترة.

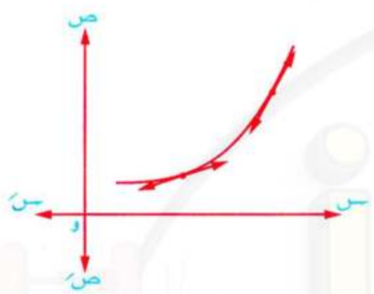
فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (ب)
* القيمة العظمى المطلقة = د (أ)

## التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقطة الانقلاب

**التحدب لأعلى :** المنحنى يقع أسفل مماساته.




**التحدب لأسفل :** المنحنى يقع أعلى مماساته.




(١) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ]أ ، ب[ يكون منحنى الدالة د

(١) محدبًا لأسفل إذا كانت دَ متزايدة على ]أ ، ب[

(٢) محدبًا لأعلى إذا كانت دَ متناقصة على ]أ ، ب[

(٢) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة ]أ ، ب[

(١) وكان : دً (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ]أ ، ب[ فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة ]أ ، ب[

(٢) وكان : دً (س) < ٠ لجميع قيم س ∈ ]أ ، ب[ فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة ]أ ، ب[

**نقطة الانقلاب :** إذا كانت حـ ∈ مجال الدالة د فإن النقطة (حـ ، د (حـ)) تكون نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تحقق ما يلى :

(١) منحنى الدالة د متصل عند حـ

(٢) يمكن رسم مماس وحيد لمنحنى الدالة د عند حـ

أى أن : [دَ (حـ) ∈ ح أ ، دَ (حـ) = ∞ أى المماس رأسى]

(٣) تتغير إشارة دً (س) قبل وبعد النقطة حـ  أى أن : [دً (حـ) = صفر أ ، غير موجودة]

**خطوات بحث فترات التحدب ونقط الانقلاب :**

(١) نوجد دً (س) ثم نوجد قيم س التى تجعل دً (س) = صفر أو غير موجودة.

٢ نعين إشارة دً (س) لتعيين فترات التحدب لأعلى حيث [دً (س) < ٠] وفترات التحدب لأسفل حيث [دً (س) > ٠]

٣ نحدد نقط الانقلاب من النقط التى حصلنا عليها حيث تتغير إشارة دً (س) على يمين ويسار كل نقطة من هذه النقط.

وإذا لم تتغير إشارة دً (س) حول أى من هذه النقط فإنها لا تكون نقطة انقلاب.

## ملاحظات

١ نقطة الانقلاب عند س = ٩ لا بد وأن تنتمى لمجال الدالة د أى أن : د (٩) تكون معرفة.

٢ نقطة الانقلاب هى النقطة التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى وإلى أسفل.

٣ المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة.

٤ النقطة الحرجة للدالة د هى النقطة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير معرفة وإذا تغيرت إشارة دَ (س) حول هذه النقطة فإنها تكون عظمى أو صغرى محلية.

كذلك نجد أن : النقطة الحرجة للدالة دَ هى النقطة التى عندها دً (س) = صفر أو غير معرفة وإذا تغيرت إشارة دً (س) حول هذه النقطة فإنها تكون انقلاب للدالة د

٥ نقط الانقلاب للدالة د القابلة للاشتقاق مرتين هى نقط عظمى أو صغرى محلية للدالة دَ

٦ إذا كانت النقطة (حـ ، هـ) ∈ لمنحنى دالة قابلة للاشتقاق مرتين وكانت :

( أ ) (حـ ، هـ) نقطة انقلاب فإن : دً (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

(ب) (حـ ، هـ) نقطة عظمى محلية أو صغرى محلية أو حرجة فإن : دَ (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

## رسم منحنيات دوال كثيرة الحدود

*** خطوات رسم منحنى الدالة د (حيث د كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل)**

١ نحدد مجال الدالة د ثم نحدد تماثل الدالة د إن وجد حيث :

( أ ) د (− س) = د (س) لكل س ∈ مجال د

∴ الدالة د زوجية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات.

(ب) د (− س) = − د (س) لكل س ∈ مجال د

∴ الدالة د فردية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

٢ نوجد دَ (س) ، دً (س)

٣ **نستخدم دَ (س) فى تعيين :**

( أ ) مناطق التزايد حيث [دَ (س) > ٠] ، مناطق التناقص حيث [دَ (س) < ٠]

(ب) نقط القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) حيث دَ (س) = ٠

(لاحظ أن الدالة قابلة للإشتقاق وتتغير إشارة دَ (س) قبل وبعد النقطة.

④ **نستخدم دً (س) فى تعيين :**

( أ ) مناطق التحدب إلى أعلى حيث [دً (س) < ٠] ، مناطق التحدب إلى أسفل حيث [دً (س) > ٠]

(ب) نقط الانقلاب (إن وجدت) حيث دً (س) = صفر (لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق مرتين) وتتغير إشارة دً (س) قبل وبعد النقطة.

⑤ **نعين بعض النقط المساعدة فى الرسم مثل :**

( أ ) نقط التقاطع مع محور السينات بوضع د (س) = ٠

(ب) نقط التقاطع مع محور الصادات بوضع س = ٠

(جـ) بعض النقط الإضافية الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة وإيجاد قيمة د (س)

⑥ **نرتب النقط التى حصلنا عليها فى جدول ونمثلها بيانيًا ثم نكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط مع أخذ ما يلى فى الاعتبار :**

| إشارات دَ (س) ، دً (س) | خواص منحنى الدالة د | شكل المنحنى |
|---|---|---|
| دَ (س) > ٠ ، دً (س) > ٠ | متزايد ، محدب لأسفل |  |
| دَ (س) > ٠ ، دً (س) < ٠ | متزايد ، محدب لأعلى |  |
| دَ (س) < ٠ ، دً (س) > ٠ | متناقص ، محدب لأسفل |  |
| دَ (س) < ٠ ، دً (س) < ٠ | متناقص ، محدب لأعلى |  |

## التكامل غير المحدد

* **التكاملات الأساسية (القياسية) :**

① $\int \text{أ}\,\text{ءس} = \text{أ س} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

③ $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ث}$

④ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{هـ}^{\text{ك س}+\text{ب}}\,\text{ءس} = \frac{\text{هـ}^{\text{ك س}+\text{ب}}}{\text{ك}} + \text{ث}$

⑥ $\int \text{أ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}} + \text{ث}$

⑦ $\int \text{أ}^{\text{ك س}+\text{ب}}\,\text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{ك س}+\text{ب}}}{\text{ك}\;\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}} + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}| + \text{ث}$

## أهم قواعد التكامل

(١) $\int \left(\text{د}(\text{س})\right)^{\text{ن}} \text{دَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \dfrac{\left(\text{د}(\text{س})\right)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}\, \text{دَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}\, \text{دَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \dfrac{\text{أ}^{\text{د}(\text{س})}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{أ}} + \text{ث}$

(٤) $\int \dfrac{\text{دَ}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left|\text{د}(\text{س})\right| + \text{ث}$

(٥) $\int \dfrac{\text{دَ}(\text{س})}{\sqrt{\text{د}(\text{س})}}\, \text{ءس} = ٢\sqrt{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

## بعض خواص التكامل غير المحدد

(١) $\int \text{أ}\, \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$ حيث $\text{أ} \neq ٠$

(٢) $\int [\text{د}(\text{س}) \pm \text{ر}(\text{س})]\, \text{ءس} = \int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} \pm \int \text{ر}(\text{س})\, \text{ءس}$

(٣) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}(\text{س})$

(٤) $\int \dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}} [\text{د}(\text{س})]\, \text{ءس} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$

(٥) $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} - \int \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} =$ ثابت (وليس بالضرورة صفر)

## تكامل الدوال المثلثية

(١) $\int \text{جا}\, \text{س}\, \text{ءس} = -\text{جتا}\, \text{س} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{جتا}\, \text{س}\, \text{ءس} = \text{جا}\, \text{س} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{قا}^{٢}\, \text{س}\, \text{ءس} = \text{ظا}\, \text{س} + \text{ث}$

(٤) $\int \text{قتا}^{٢}\, \text{س}\, \text{ءس} = -\text{ظتا}\, \text{س} + \text{ث}$

(٥) $\int \text{قا}\, \text{س}\, \text{ظا}\, \text{س}\, \text{ءس} = \text{قا}\, \text{س} + \text{ث}$

(٦) $\int \text{قتا}\, \text{س}\, \text{ظتا}\, \text{س}\, \text{ءس} = -\text{قتا}\, \text{س} + \text{ث}$

### نتائج

(١) $\int \text{جا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = -\dfrac{١}{\text{أ}} \text{جتا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

(٢) $\int \text{جتا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{١}{\text{أ}} \text{جا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

(٣) $\int \text{قا}^{٢}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{١}{\text{أ}} \text{ظا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

(٤) $\int \text{قتا}^{٢}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = -\dfrac{١}{\text{أ}} \text{ظتا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

(٥) $\int \text{قا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ظا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = \dfrac{١}{\text{أ}} \text{قا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

(٦) $\int \text{قتا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ظتا}\, (\text{أس}+\text{ب})\, \text{ءس} = -\dfrac{١}{\text{أ}} \text{قتا}\, (\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

## تذكر أن

١) $\int \text{طا س}\ \text{ءس} = \int \dfrac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}\ \text{ءس} = -\int \dfrac{(-\text{حا س})}{\text{حتا س}}\ \text{ءس}$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{حتا س}| + \text{ث}} = \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا س}| + \text{ث}}$

٢) $\int \text{ظتا س}\ \text{ءس} = \int \dfrac{\text{حتا س}}{\text{حا س}}\ \text{ءس}$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{حا س}| + \text{ث}}$

٣) $\int \text{قا س}\ \text{ءس} = \int \dfrac{\text{قا س}\ (\text{قا س} + \text{طا س})}{(\text{قا س} + \text{طا س})}\ \text{ءس}$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قا س + طا س)»

$= \int \dfrac{\text{قا س طا س} + \text{قا}^{2}\text{ س}}{(\text{قا س} + \text{طا س})}\ \text{ءس}$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قا س} + \text{طا س}| + \text{ث}}$

٤) $\int \text{قتا س}\ \text{ءس} = \int \dfrac{\text{قتا س}\ (\text{قتا س} + \text{ظتا س})}{\text{قتا س} + \text{ظتا س}}\ \text{ءس}$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قتا س + ظتا س)»

$= \int \dfrac{\text{قتا س ظتا س} + \text{قتا}^{2}\text{ س}}{\text{قتا س} + \text{ظتا س}}\ \text{ءس}$

$= -\int \dfrac{-\text{قتا س ظتا س} - \text{قتا}^{2}\text{ س}}{\text{قتا س} + \text{ظتا س}}\ \text{ءس}$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتا س} + \text{ظتا س}| + \text{ث}}$

## تعميم

١) $\int \text{حا}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = -\text{حتا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

٢) $\int \text{حتا}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = \text{حا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

٣) $\int \text{قا}^{2}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = \text{طا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

٤) $\int \text{قتا}^{2}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = -\text{ظتا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

٥) $\int \text{قا}\big(\text{د (س)}\big)\ \text{طا}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = \text{قا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

٦) $\int \text{قتا}\big(\text{د (س)}\big)\ \text{ظتا}\big(\text{د (س)}\big) \times \text{د}'\text{(س) ءس} = -\text{قتا}\big(\text{د (س)}\big) + \text{ث}$

### * طرق التكامل :

**(١) التكامل بالتعويض :**

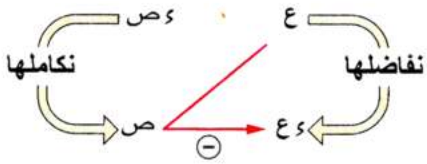
* إذا كان التكامل المعطى على الصورة $\int \text{د}\,(\text{ر}\,(\text{س}))\,\text{ر}'\,(\text{س})\,\text{ء س}$ نستخدم التعويض $\boxed{\text{ر}\,(\text{س}) = \text{ع}}$

* إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النونى لدالة أى $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}\,(\text{س})}$ نستخدم التعويض :

$$\boxed{\text{ر}\,(\text{س}) = \text{ع}^{\text{ن}}} \text{ أ، } \boxed{\text{ر}\,(\text{س}) = \text{ع}}$$

* فى بعض المسائل نستخدم تعويضًا معينًا مناسبًا لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية.

**(٢) التكامل بالتجزئ :**




$$\therefore \boxed{\int \text{ع ءص} = \text{ص ع} - \int \text{ص ء ع}}$$

## التكامل المحدد

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\boxed{\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = \text{ت}\,(\text{ب}) - \text{ت}\,(\text{أ})}$

### * خواص التكامل المحدد :

(١) إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ، حـ ∈ ]أ ، ب[ فإن :

(١) $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س}$ (٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = \text{صفر}$

(٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س}$

(٢) إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [- أ ، أ]

فإن : $\boxed{\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = \text{صفر}}$

(٣) إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [- أ ، أ]

فإن : $\boxed{\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = ٢ \int_{٠}^{\text{أ}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س}}$

(٤) إذا كانت : د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] فإن :

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}\,(\text{س}) \pm \text{ر}\,(\text{س})]\,\text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر}\,(\text{س})\,\text{ء س}$

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,.\,\text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}\,(\text{س})\,\text{ء س}$ حيث ك ∈ ح

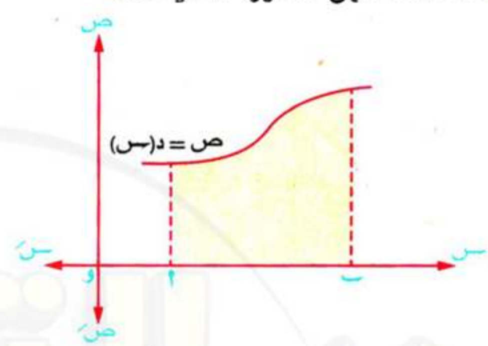
# التكامل المحدد والمساحات فى المستوى

## أولاً مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ ، ب]

* إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب وكانت :

① $د(س) \geq ٠$

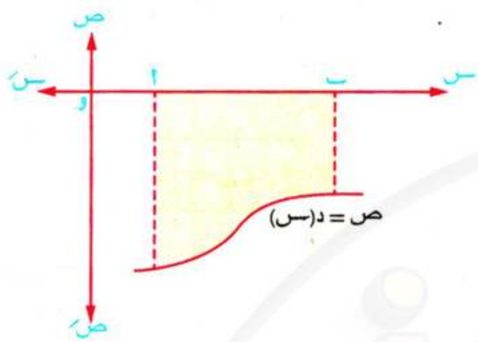
أى : «المنطقة فوق محور السينات»




فإن : $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

② $د(س) \leq ٠$

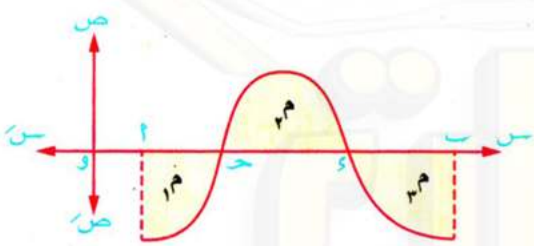
أى : «المنطقة تحت محور السينات»




فإن: $م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$

* إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = حـ ، س = ء

حيث حـ ، ء ينتميان للفترة [أ ، ب] كما بالشكل المقابل :




نجد أن : $د(س) \geq ٠$ لكل $س \in [حـ ، ء]$

، $د(س) \leq ٠$ لكل $س \in [أ ، حـ]$ ، $س \in [ء ، ب]$

∴ المساحة المظللة (م) = $م_١ + م_٢ + م_٣$

أى أن : $م = \left| \int_{أ}^{حـ} د(س)\, ءس \right| + \int_{حـ}^{ء} د(س)\, ءس + \left| \int_{ء}^{ب} د(س)\, ءس \right|$

**لاحظ أنه**

تم وضع علامة القيمة المطلقة للمنطقتين $م_١$ ، $م_٣$ لأنهما تقعان أسفل محور السينات.

## ملاحظات

(١) يفضل الاستعانة برسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

(٢) نظرًا لصعوبة رسم كثير من المسائل بيانيًا فيفضل إيجاد أصفار الدالة (حتى إذا علم حدود التكامل) والتى تجزئ مجال الدالة [أ ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية ثم نحدد إشارة الدالة فى كل فترة جزئية ومنها يتم تحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

(٣) قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة تكون دائمًا موجبة.

(٤) بصفة عامة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أى دالة متصلة : ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هى : $\boxed{م = \int_{أ}^{ب} |د(س)| \, ء س}$

**ثانيًا مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين**

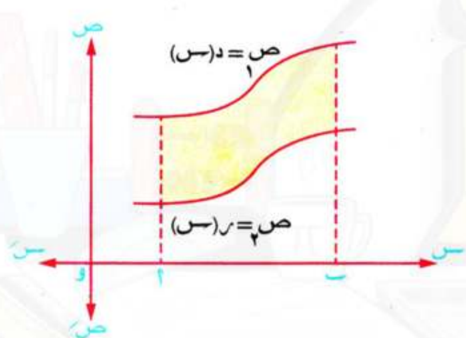
إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب]

وكانت د (س) ≥ ر (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين

$ص_1$ = د (س) ، $ص_2$ = ر (س)

والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة



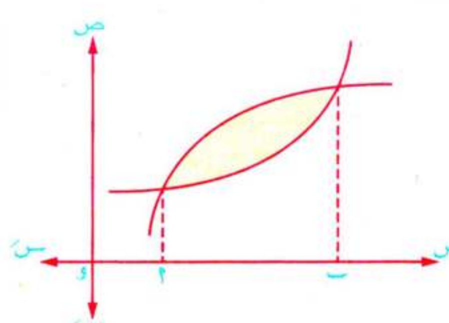

$\boxed{م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)] \, ء س}$

## ملاحظات

(١) سوف نتعرف على الدالة الأكبر $ص_1$ ≥ $ص_2$ لكل س ∈ [أ ، ب] باستخدام الرسم أو بأخذ قيمة اختيارية لـ س ∈ [أ ، ب] والتعويض بها فى معادلتى الدالتين ويمكن الاستغناء عن معرفة ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة كما يلى :

المساحة (م) = $\left| \int_{أ}^{ب} \right.$ (أى دالة – الدالة الأخرى) ء س $\left. \right|$

(٢) عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى الإحداثيات السينية لنقط التقاطع والتى نوجدها بحل معادلتى المنحنيين جبريًا.



(٣) إذا كان المنحنيان يتقاطعان فى نقطة

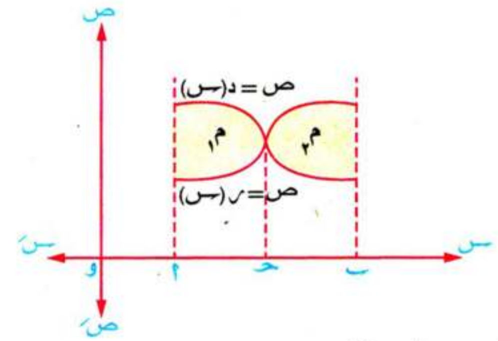
وكانت : $\text{حـ} \in ]\text{أ} ، \text{ب}[$

وكان : $\text{د}(\text{س}) \le \text{ر}(\text{س})$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{حـ}]$

وكان : $\text{ر}(\text{س}) \le \text{د}(\text{س})$ لكل $\text{س} \in [\text{حـ} ، \text{ب}]$

فإن : $\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} [\text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س})] \, \text{ء س} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} [\text{ر}(\text{س}) - \text{د}(\text{س})] \, \text{ء س}$$

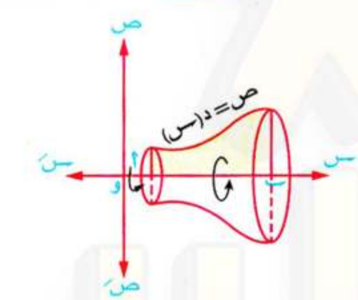



## حجوم الأجسام الدورانية

* **المجسم الدورانى :** هو المجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى «محور الدوران».

### حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

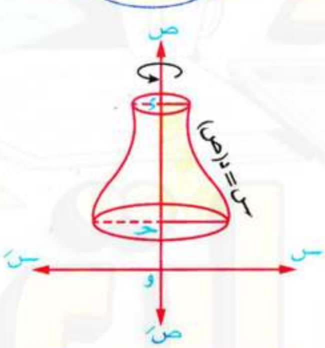
**السينات**




$$\text{ع} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$$

$$= \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س})]^2 \, \text{ء س}$$

**الصادات**



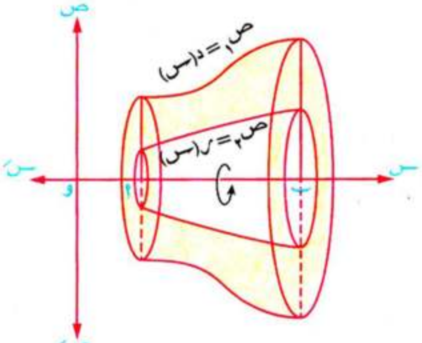

$$\text{ع} = \pi \int_{\text{حـ}}^{\text{ء}} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$$

$$= \pi \int_{\text{حـ}}^{\text{ء}} [\text{د}(\text{ص})]^2 \, \text{ء ص}$$

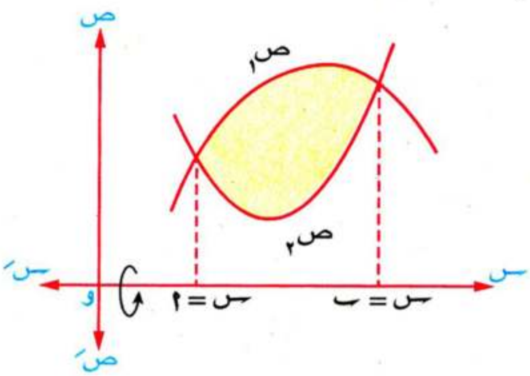
* حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين :

$$\text{ع} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ص}_1^2 - \text{ص}_2^2) \, \text{ء س}$$

$$= \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left[ \left(\text{د}(\text{س})\right)^2 - \left(\text{ر}(\text{س})\right)^2 \right] \text{ء س}$$



① إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $ص_1 = د\,(س)$




، $ص_2 = ر\,(س)$ حيث $ص_1 \le ص_2$

لكل $س \in [أ ، ب]$ دورة كاملة حول محور السينات

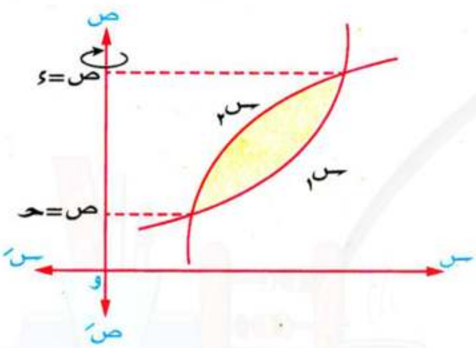
فإن الإحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما

حدود التكامل أ ، ب حيث أ < ب ويكون

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [(ص_1^2 - ص_2^2)]\, ءس$$

أى : $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص_1^2\, ءس - \pi \int_{أ}^{ب} ص_2^2\, ءس$

② إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين




$س_1 = د\,(ص)$ ، $س_2 = ر\,(ص)$

حيث $س_1 \le س_2$

لكل $ص \in [جـ ، ء]$ دورة كاملة حول محور الصادات

فإن الإحداثيين الصاديين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما

حدود التكامل جـ ، ء حيث جـ < ء ويكون

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} [(س_1^2 - س_2^2)]\, ءص$ أى : $ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س_1^2\, ءص - \pi \int_{جـ}^{ء} س_2^2\, ءص$