قواعد التكامل:

	التابع	تكاملة
1	$f(x)=a$	$F(x)=ax$
2	$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $n\neq -1$
3	$f(x)=\sin(ax+b)$ $a\neq 0$	$F(x)=\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
4	$f(x)=\cos(ax+b)$ $a\neq 0$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
5	$f(x)=e^{ax+b}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}$
6	$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
7	$f(x)=1+\tan^2 x$ $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x$
8	$f(x)=1+\cot^2 x$ $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\cot(x)$
9	$f(x)=U'\sin(U)$	$F(x)=-\cos(U)$
10	$f(x)=U'\cos(U)$	$F(x)=\sin(U)$
11	$f(x)=U'\cdot e^U$	$F(x)=e^U$
12	$f(x)=U'\cdot U^\alpha$ $\alpha\neq -1$	$F(x)=\frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
13	$f(x)=\frac{U'}{U}$	$F(x)=\ln\lvert U\rvert$ $\ln(U)$: $]0,\infty[$; $\ln(-U)$: $]-\infty,0[$
14	$f(x)=\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$F(x)=2\sqrt{U}$
14	$f\mp g$	$F\mp G$
	$\lambda . f$	λF
	$f(x)=\frac{1}{\cos^2 ax}$	$F(x)=\frac{1}{a}\tan x$
	$f(x)=\frac{1}{\sin^2 ax}$	$F(x)=\frac{-1}{a}\tan x$

قوانين التخفيض:

$\boxed{1}$: $\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$

$\boxed{2}$ _ $\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$

ملاحظة: لا يوجد تكامل مباشر ل
$\cos^4 x$ ، $\cos^2 x$ و $\sin^4 x$ و $\sin^2 x$

$$\sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(ax+b)+\sin(a-b)]$$
$$\cos a.\sin b=\frac{1}{2}[\sin(ax+b)-\sin(a-b)]$$
$$\cos a.\cos b=\frac{1}{2}[\cos(ax+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a.\sin b=\frac{-1}{2}[\cos(ax+b)-\cos(a-b)]$$

ملاحظة: عند ما تكون درجة البسط تساوي درجة المقام ⟸ قسمة إقليدية أو تفريق كسور

مثال

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

ط 2

$$f(x)=\frac{x+1-3+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$$
$$\Rightarrow F(x)=x+\ln|x-2|$$

ط 1

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ x-2 & 1 \\ \hline 0\;\;3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=1+\frac{3}{x-2}$$
$$\Rightarrow F(x)=x+\ln|x-2|$$

التكامل والتوابع الأصلية

* التابع الأصلي:

تعريف: لنفرض f تابع معرف ومستمر على المجال: $I \subseteq D_f$، عندئذٍ فإن: F تابع أصلي لـ f على I

$\Longleftrightarrow$ F اشتقاقي على I : $\boxed{F'(x)=f(x)}$

مثال: $f(x)=3x^2$ ، $F(x)=x^3$ ، $I=\mathbb{R}$.

إن F تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$ لأن:

F اشتقاقي على I (كثير حدود)

$F'(x)=3x^2=f(x)$

نتائج: 1- شرط وجود تابع أصلي للتابع f على I هو أن يكون f مستمراً على I.

2- يوجد عدد غير منتهٍ من التوابع الأصلية للتابع f على I لها الشكل: $F(x)+k$ حيث k ثابت حقيقي.

3- نسمي الخط البياني للتابع F بالمنحني التكاملي.

قاعدة: إذا كان الفرق بين F و G يساوي عدد ثابت: $\boxed{G-F = \text{عدد ثابت}}$

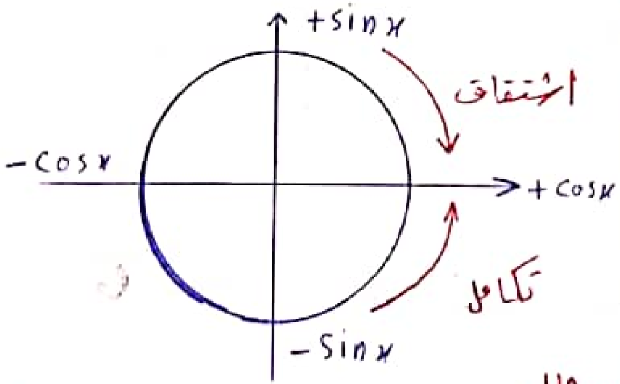
فإن كل منهما يكون تابعاً أصلياً لنفس التابع f.

أو: إذا كان $\boxed{F'(x)-G'(x)=0}$

أو: إذا كان $\boxed{F'(x)=G'(x)}$

فأن F و G تابعان أصليان لنفس التابع f.

ملاحظة: التكامل هو عكس الإشتقاق



مثال:

$f(x)=\sin(x) \Rightarrow F(x)=-\cos(x)$

$f(x)=\cos(x) \Rightarrow F(x)=+\sin(x)$

$f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=-\sin(x)$

★ البحث عن تابع أصلي:

مثال: ليكن $f(x)$ التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x^2e^x$

جد تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=P(x).e^x$ حيث P كثير حدود من الدرجة الثانية

الحل:

$[F(x)]' = f(x)$

$\Rightarrow [P(x).e^x]' = x^2.e^x$

$\Rightarrow P'(x).e^x + e^x.P(x) = x^2.e^x$

$\xRightarrow{\div e^x} P'(x)+P(x) = x^2$

$P(x)=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow P'(x)=2ax+b$

$\Rightarrow ax^2+bx+c+2ax+b = x^2$

$\Rightarrow ax^2+(2a+b)x+b+c = x^2$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

$\Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-2}$

$\Rightarrow b+c=0 \Rightarrow -2+c=0$

$\Rightarrow \boxed{c=2}$

ومنه

$P(x)=x^2-2x+2$

$\Rightarrow F(x)=(x^2-2x+2).e^x.$

قواعد:

1- $\int_a^b (f \mp g) = \int_a^b f \mp \int_a^b g$

2- $\int_a^b \lambda f = \lambda . \int_a^b f$

3- $\int_a^b f = \int_b^a f$

4- $\int_a^a f = 0$.

5- $\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

6- علاقة شال:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

تستخدم علاقة شال عند وجود قيمة مطلقة وتستخدم في حساب مساحة سطح (فوق، تحت).

* التكامل بالتجزئة:

$$\int_a^b u.v' = [u.v]_a^b - \int_a^b u'.v\,dx$$

(كثير حدود) . $\ln(?)$	(كثير حدود) . $\cos(?)$ $\sin(?)$ $e^{(?)}$	$\cos(?)$ $\sin(?)$. $e^{(?)}$
(كثير حدود) $\Downarrow$ v' ، $\ln(?)$ $\Downarrow$ u	(كثير حدود) $\Downarrow$ u ، $e^{(?)}$ $\Downarrow$ v'	$\cos(?)$ $\sin(?)$ $\Downarrow$ u ، $e^{(?)}$ $\Downarrow$ v' ، أو v' ، u

مثال: أوجد تكامل:

$$I = \int_1^e x.\ln x\,dx$$

المشتق ، أصلي

$u(x) = \ln x$	$v'(x) = x$
$u'(x) = \frac{1}{x}$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$I = [u.v']_a^b - \int_a^b u'.v$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}.\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$I = \left(\frac{e^2}{2}(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)\right) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$I = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$I = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

مثال:

$$I = \int_0^\pi (x-1).\cos x\,.dx$$

$u(x) = x-1$	$v'(x) = \cos x$
$u'(x) = 1$	$v(x) = \sin x$

$$I = [(x-1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$I = (\pi-1)(0) - 0 + [+\cos x]_0^\pi = +(-1-1) = -2$$

* إيجاد تابع أصلي باستخدام التكامل:

مثال: جد تابعاً أصلياً لـ f على I:

$f(x) = \ln(x)$; $I =]0,+\infty[$.

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt = \int_1^x \ln(t).dt$$

$u(t) = \ln(t)$	$v'(t) = 1$
$u'(t) = \frac{1}{t}$	$v(t) = t$

$$F(x) = [t.\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\,dt$$

$$F(x) = x.\ln(x) - 0 - [t]_1^x$$

$$F(x) = x.\ln(x) - x + 1$$

حذف

حفظ

$$\Rightarrow F(x) = x\ln(x) - x$$

تكاملات الكسور الجزئية:

1 - درجة البسط أصغر من درجة المقام:

نحلل المقام إلى: $(x-x_0)(x+x_0)$

ثم نكتب f بالصيغة: $f(x)=\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)}$

حيث A و B عددان حقيقيان.

ثم نوحد المقامات ونقارن مع التابع f الأساسي.

مثال:

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$$

أوجد التابع الأصلي للتابع f

$$\boxed{f(x)=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}} \Rightarrow f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

نقارن مع *:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A-B=3 \end{array}\right\} \text{بالجمع} \Rightarrow 2A=4 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$\Rightarrow 2+B=1 \Rightarrow \boxed{B=-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow F(x)=2\ln|x-1|-\ln|x+1|$$

2 - درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

نجري قسمة إقليدية:

مثال:

$$f(x)=\frac{4x^2-5x+1}{x+3}$$

نجري قسمة إقليدية ونحول التابع إلى الشكل:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 4x-17 \\ \hline x+3 & 4x^2-5x+1 \\ & -4x^2\mp 12x \\ \hline & -17x+1 \\ & \pm 17x\pm 51 \\ \hline & 0+52 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=4x-17+\frac{52}{x+3}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{4x^2}{2}-17x+52\ln|x+3|$$

ملاحظة: عند إيجاد التابع الأصلي لا يجب أن يحتوي على أس سالب أو كسر.

مثال:

$$F(x)=x^{-1} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{x}$$

$$F(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x)=\sqrt{x}$$

$\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$

التكامل:

التكامل المحدد:

نفرض f تابع معرف ومستمر على I عندئذٍ نعرف التكامل المحدد للتابع f من a إلى b بأنه العدد الحقيقي:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=\left[F(b)-F(a)\right]$$

مثال:

$$I=\int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx$$

$$I=\left[x^2-x\right]_{-1}^{2}=((2)^2-2)-((-1)^2-(-1))$$

$$I=2-2=0$$

مثال:

$$I=\int_0^{\ln 2}e^{2x}\,dx$$

$$I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}=\left(\frac{1}{2}(4)\right)-\left(\frac{1}{2}(1)\right)$$

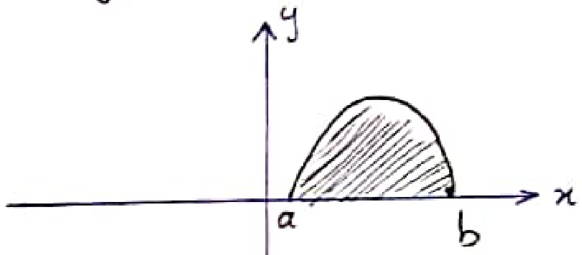
$$I=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لا يتعلق حساب التكامل بالمتحول أي مستقل عنه:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\ldots\ldots$$

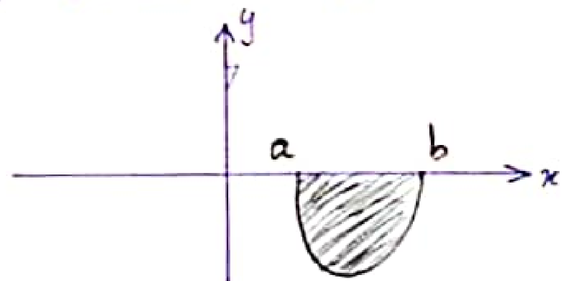
* حساب مساحة السطح :

1 - السطح فوق محور الفواصل



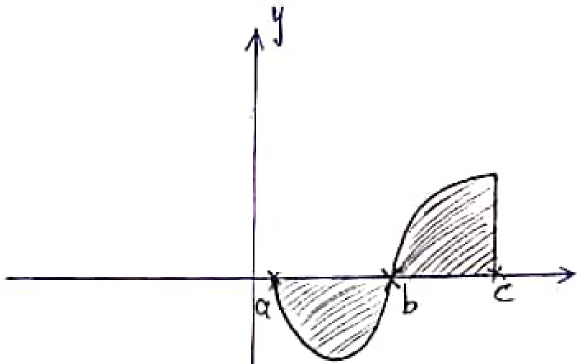
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2 - السطح فوق محور الفواصل :



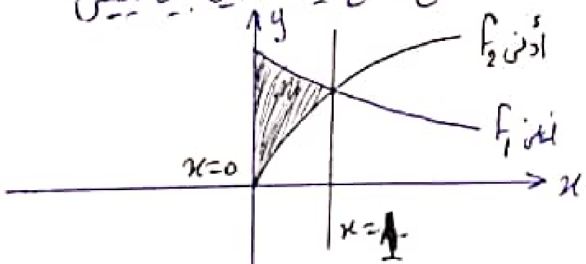
$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$

3 - السطح يقطع محور الفواصل :



$$S=\int_a^c |f(x)|\,dx$$

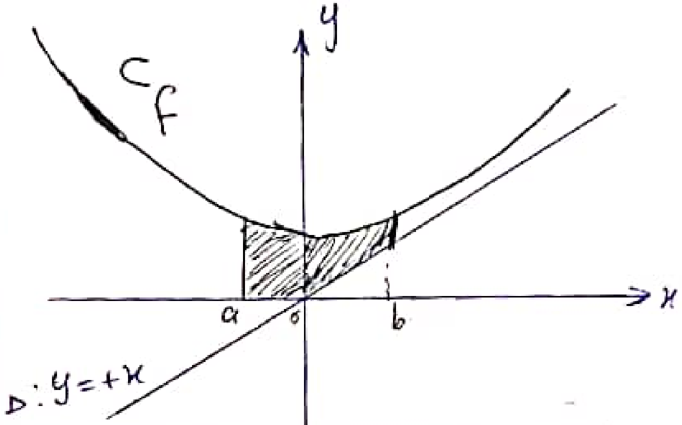
4 - السطح يقع بين خطي بيانيين



$$S=\int_a^b \left(f_{\text{أعلى}}-f_{\text{أدنى}}\right)dx$$

في حالتنا : $S=\int_0^1 (f_1-f_2)\,dx$

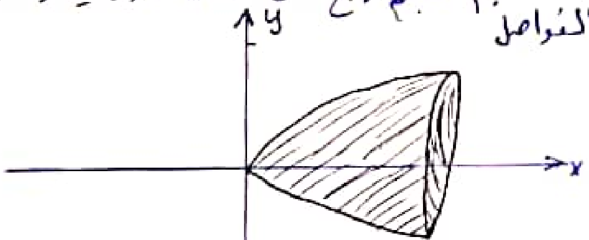
5 - السطح بين مستقيم و خط بياني :



$$S=\int_a^b \left(f_{\text{أعلى}}-f_{\text{أدنى}}\right)dx$$

في حالتنا : $S=\int_a^b (f(x)-y_\Delta)$

6 - حجم مجسم ناتج عن دوران خط بياني حول محور الفواصل



$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$