# نموذج امتحاني

$\boxed{1}$ متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ فيها:

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_3 + u_6 = 19 \end{cases}$$

إن قيمة المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_6 + u_7 + u_8$$

هي:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 32 | B | 48 | C | 51 | D | 58 |

**الحل:**

$$u_n = u_0 + nr \Rightarrow \begin{cases} u_3 = -4 + 3r \\ u_6 = -4 + 6r \end{cases}$$

نعوض في العلاقة: $u_3 + u_6 = 19$

$$-4 + 3r - 4 + 6r = 19$$

$$\Rightarrow 9r = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = -4 + 3n$$

$$u_2 = -4 + 3(2) = 2$$

$$u_6 = -4 + 3(6) = 14$$

$$u_8 = -4 + 3(8) = 20$$

$$u_0 + u_1 + u_2 = n\left(\frac{u_0 + u_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_0 + u_1 + u_2 = 3\left(\frac{-4 + 2}{2}\right) = -3$$

$$u_6 + u_7 + u_8 = n\left(\frac{u_6 + u_8}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_6 + u_7 + u_8 = 3\left(\frac{14 + 20}{2}\right) = 51$$

$$S = -3 + 51 = 48$$

الخيار الصحيح هو $B$

---

$\boxed{2}$ في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا الكرة:

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

عندها الكرة تمس أحد المستويات الآتية، دل عليه:

| | |
|---|---|
| A | $2x - 2y - z - 4 = 0$ |
| B | $x + y + z - 1 = 0$ |
| C | $2x - y + 3z - 1 = 0$ |
| D | $x - y + z = 2$ |

**الحل:**

الكرة $S$ مركزها $A(1,2,3)$ ونصف قطرها 3

نحسب بعد مركز الكرة عن كل من المستويات الأربعة إذا حققت أن: $dist(A,P) = R$

اختبار $A$:

$$dist(A,P) = \frac{|2 - 4 - 3 - 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{3} = 3 = R$$

الخيار الصحيح هو $A$

---

$\boxed{3}$ لدينا العدد العقدي $z = \frac{i\sqrt{2}}{1-i} e^{\frac{\pi}{3}i}$ فإن $arg(z)$ هي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $-\frac{\pi}{12}$ | B | $\frac{\pi}{12}$ |
| C | $\frac{13\pi}{12}$ | D | $\frac{11\pi}{12}$ |

**الحل:**

$$\arg(i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

الخيار الصحيح هو $C$

---

4 ليكن $C_f$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax+b-\frac{\ln(x)}{x}$

إذا علمت أن المماس للخط البياني $C_f$ في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم الذي معادلته: $y=3x$

فإن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ هما:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $a=4$, $b=4$ | B | $a=-4$, $b=-4$ |
| C | $a=4$, $b=-4$ | D | $a=-4$, $b=2$ |

الحل:

$$f(1)=0\Rightarrow a+b-\frac{\ln(1)}{1}=0$$

$$\Rightarrow a+b=0\ldots(1)$$

$$f'(x)=a-\frac{\frac{1}{x}.x-\ln(x)}{x^2}=a-\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(1)=m_T=3$$

$$a-\frac{1-\ln(1)}{1}=3\Rightarrow a=4$$

نعوض في (1): $4+b=0\Rightarrow b=-4$

الخيار الصحيح هو $C$

5 تتألف مجلس إدارة احدى الشركات من 3 شباب و3 بنات، نريد تشكيل لجنة مكونة من مدير ونائب مدير وأمين سر شرط أن تحتوي هذه اللجنة على ذك واحد على الأقل، إن عدد طرق تشكيل هذه اللجنة هو:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 42 | B | 114 | C | 60 | D | 120 |

الحل:

$(M,M,M)$ أو $(M,M,F)\times 3$ أو $(M,F,F)\times 3$

$$3\times 2\times 1+3\times 3\times 2\times 3+3\times 2\times 3\times 3$$

$$=6+54+54=114$$

الخيار الصحيح هو $B$

6 ليكن $f$ تابع معرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^x+\ln(x)$$

إن جدول التغيرات الموافق للتابع $f$ هو:

A

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

B

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

C

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

الحل:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1-\infty=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}>0$$

الخيار الصحيح هو $D$

7 نجد فيما يلي جدول قانون احتمالي لمتحول عشوائي $x$ في تجربة احتمالية:

| $x$ | $n$ | $1$ | $6$ |
|---|---|---|---|
| $P(x=x)$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

إن قيمة $n$ التي تجعل $E(x)=-\frac{1}{6}$ هي:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $-2$ | B | $2$ | C | $3$ | D | $4$ |

الحل:

$$E(x)=-\frac{1}{6}$$

$$n\left(\frac{4}{6}\right)+1\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 1+4n+6=-1$$

$$\Rightarrow 4n=-8\Rightarrow n=-2$$

الخيار الصحيح هو $A$

**8** متتالية معرفة تدريجياً $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (3\lambda - 1)u_n + 6 \end{cases}$$

**إن قيمة $\lambda$ التي تجعل $u_n$ متتالية ثابتة:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $1$ | $B$ | $2$ | $C$ | $\frac{1}{3}$ | $D$ | $-\frac{1}{3}$ |

**الحل:**

$u_n$ ثابتة: $u_1 = u_0$

$$(3\lambda - 1)u_0 + 6 = u_0$$

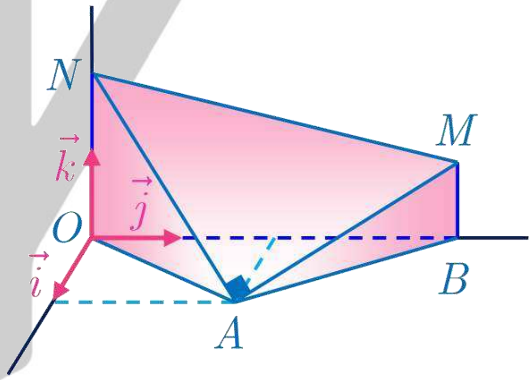
$$\Rightarrow (3\lambda - 1)2 + 6 = 2 \Rightarrow 2(3\lambda - 1) = -4$$

$$\Rightarrow 3\lambda - 1 = -2 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

الخيار الصحيح هو $D$

**9** في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ عددان $m$ و $n$ حقيقيان يحققان: $n > m$ و $n.m = 6$ نتأمل النقاط: $A(\sqrt{3}, 3, 0)$ , $B(0, 6, 0)$

$M(0, 6, m)$ , $N(0, 0, n)$




**إن قيمة $m$ و $n$ التي يكون عندها حجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$ هي:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $m = 1$<br>$n = 6$ | $B$ | $m = \sqrt{2}$<br>$n = 3\sqrt{2}$ |
| $C$ | $m = 2$<br>$n = 3$ | $D$ | $m = 4$<br>$n = \frac{3}{2}$ |

**الحل:**

$$V = \frac{1}{3} S_{OBMN} . h$$

$$5\sqrt{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{m+n}{2}\right) \times 6 \times \sqrt{3} \Rightarrow m + n = 5$$

الخيار الصحيح هو $C$

**10** إن مجموعة النقاط $M(x, y)$ تكافئ:

$$\ln(x - 2) - \ln(y - 1) = 0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | نصف مستقيم عدا النقطة $(2,1)$ | $B$ | قطع زائد |
| $C$ | قطع مكافئ | $D$ | مستقيم مائل |

**الحل:**

$$\ln(x - 2) - \ln(y - 1) = 0$$

$$x > 2 \Rightarrow D_x: ]2, +\infty[$$

$$y > 1 \Rightarrow D_y: ]1, +\infty[$$

$$\ln(x - 2) = \ln(y - 1)$$

$$x - 2 = y - 1 \Rightarrow y = x - 1$$

نصف مستقيم عدا النقطة $(2,1)$

الخيار الصحيح هو $A$

**11** لدينا المثلث $ASD$ مباشر التوجيه القائم في $S$ ومتساوي الساقين، فإن $S$ يكتب بدلالة $a$ و $d$ وفق

| | |
|---|---|
| $A$ | $s = \frac{1}{2}((a - d) + (a + d)i)$ |
| $B$ | $s = \frac{1}{2}((a + d) + (a - d)i)$ |
| $C$ | $s = \frac{1}{2}((a + d) + (a + d)i)$ |
| $D$ | $s = \frac{1}{2}((-a - d) + (a + d)i)$ |

**الحل:**

$A$ صورة $D$ وفق دوران مركزه $S$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a - s = e^{\frac{\pi}{2}i}(d - s)$$

$$a - s = id - is \Rightarrow is - s = -a + id$$

$$\Rightarrow s(-1 + i) = -a + id$$

$$\Rightarrow s = \frac{(-1 + id)}{(-1 + i)} \cdot \frac{(-1 - i)}{(-1 - i)}$$

$$\Rightarrow s = \frac{a + ai - id + d}{2} = \frac{a + d}{2} + \frac{a - d}{2}i$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2}((a + d) + (a - d)i)$$

الخيار الصحيح هو $B$

**12** $f$ معرف على $R$ وفق:

$$f(x) = |e^x - 2| + 3x$$

إن معادلة المماس في نقطة فاصلتها $(0)$ هي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y = -x + 1$ | $B$ | $y = x$ | $A$ |
| $y = -2x + 1$ | $D$ | $y = 2x + 1$ | $C$ |

الحل:

عند 0: $e^0 - 1 = -1$ لأن $e^x - 2 < 0$

$$\Rightarrow |e^x - 2| = 2 - e^x$$
$$f(x) = 2 - e^x + 3x$$
$$f'(x) = -e^x + 3$$
$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 2$$
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = 2x + 1$$

الخيار الصحيح هو $C$

**13** ليكن لدينا المتتالية $u_n$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

إن المتتالية متقاربة من:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | $D$ | $0$ | $C$ | $1$ | $B$ | $\frac{1}{2}$ | $A$ |

الحل:

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n = 1 - \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

$u_n$ متقاربة من الصفر

الخيار الصحيح هو $C$

**14** إذا علمت أن: $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 4x) = 2$

عندها معادلة المقارب المائل للخط البياني $C_f$ تعطى بأحد الخيارات، دل عليه:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y = -4x - 2$ | $B$ | $y = 4x + 2$ | $A$ |
| $y = 4x - 2$ | $D$ | $y = -4x + 2$ | $C$ |

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 4x - 2) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (-4x + 2)\big) = 0$$

$y = -4x + 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الخيار الصحيح هو $C$

**15** صندوق يحوي على 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $(0, 1, 1, 1, 2, 2)$ نسحب من الصندوق ثلاث بطاقات على التتالي دون إعادة فإن احتمال الحصول على بطاقات مجموع أرقامها يساوي 3 هو:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | $D$ | 0,4 | $C$ | 0,35 | $B$ | 0,6 | $A$ |

الحل:

$(1,1,1)$ أو $(0,1,2) \times 3!$

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times 6$$

$$P(A) = \frac{1}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0.35$$

الخيار الصحيح هو $B$

**16** $f$ تابع معرف وفق: $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

إن التابع الأصلي $F$ للتابع $f$ الذي يحقق الشرط $F(0) = 0$ هو:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{2x}{1 - x^2}$ | $B$ | $\frac{x^2}{2(1 - x^2)}$ | $A$ |
| $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ | $D$ | $\frac{-x^2}{2(1 - x^2)}$ | $C$ |

الحل:

$$f(x) = x(x^2 - 1)^{-2} = \frac{1}{2} . 2x(x^2 - 1)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} . \frac{(x^2 - 1)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{2(x^2 - 1)} + C$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2(-1)} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{-1 - (x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)} = \frac{-1 - x^2 + 1}{2(x^2 - 1)}$$

$$F(x) = \frac{-x^2}{2(x^2 - 1)} = \frac{x^2}{2(1 - x^2)}$$

الخيار الصحيح هو $A$

**17** بفرض $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ليكن $A = \alpha + \alpha^4$ عندئذ $A$ يساوي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ | $B$ | $2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ | $A$ |
| $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ | $D$ | $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ | $C$ |

**الحل:**

$$\alpha + \alpha^4 = e^{\frac{2\pi}{5}i} + \left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^4 = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{\frac{8\pi}{5}i}$$

$$\frac{8\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} - 2\pi = -\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow A = e^{\frac{2\pi}{5}i} + e^{-\frac{2\pi}{5}i} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

الخيار الصحيح هو $C$

**18** $f$ تابع معرف على $R$ وفق:

$$f(x) = 3\sin^2(x) - 2\cos^3(x)$$

إن مشتق التابع $f$ يكتب بالشكل:

| | |
|---|---|
| $f'(x) = 6\sin(x).\cos^2(x)$ | $A$ |
| $f'(x) = 6\sin(2x)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ | $B$ |
| $f'(x) = 6\sin(2x)\,(1-\cos(x))$ | $C$ |
| $f'(x) = 6\sin(2x)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ | $D$ |

**الحل:**

$$f'(x) = 6\sin(x)\cos(x) - 6\cos^2(x)\,(-\sin(x))$$

$$f'(x) = 6\sin(x)\cos(x)\,(1+\cos(x))$$

$$f'(x) = 3\times 2\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$f'(x) = 6\sin(2x)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

الخيار الصحيح هو $D$

**19** في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا المستوي:

$$P: x + y + 2z - 11 = 0$$

ولدينا النقطة $A(2,1,1)$ إن $A'$ مسقط $A$ على $P$ هي

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A'(1,1,2)$ | $B$ | $A'(3,2,3)$ | $A$ |
| $A'(1,2,-11)$ | $D$ | $A'(1,2,3)$ | $C$ |

**الحل:**

نصنع المستقيم: $A(2,1,1)$ و $\vec{u}(1,1,2)$

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \quad ; t \in R \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

نقاطع $d$ مع $P$ فنجد:

$$2 + t + 1 + t + 2 + 4t - 11 = 0$$

$$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$$

نعوض في $d$: $x = 3\ ,\ y = 2\ ,\ z = 3$

$$A'(3,2,3)$$

الخيار الصحيح هو $A$

**20** في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,2,1)$ و $B(3,3,2)$ إن المستقيم $(AB)$ يعامد أحد المستويات الآتية، دل عليه:

| | |
|---|---|
| $P: 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ | $A$ |
| $P: 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ | $B$ |
| $P: -4x + 2y - 2z - 5 = 0$ | $C$ |
| $P: 4x - 2y - 3z + 4 = 0$ | $D$ |

**الحل:**

نوجد شعاع الموجه للمستقيم $(AB)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2,1,1)$$

حتى يكون $P \perp (AB)$ يجب أن يكون $\overrightarrow{AB}$ مرتبط خطياً مع ناظم المستوي:

نناقش الخيار $A$:

$$\vec{n}(4,2,-2)$$

ندرس الارتباط الخطي: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-2}$

الخيار $A$ خطأ

نناقش الخيار $B$:

$$\vec{n}(4,2,2)$$

ندرس الارتباط الخطي: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

الخيار الصحيح هو $B$

😊 😊 مع تمنياتنا بالنجاح والتوفيق 😊 😊