البحث الأول

المتتاليات

التعبير عن المتتالية

اعطاء الحد العام U_n بدلالة n	اعطاء صيغة تدريجية	سلسلة
$\boxed{U_n = f(n)}$	$\boxed{U_0 = \dots \quad U_{n+1} = f(U_n)}$	يعطى U_n بشكل مجموع $\boxed{U_n = \dots + \dots + \dots}$

دراسة اطراد المتتالية

هنالك أربعة طرق

نوجد الفرق	نوجد النسبة	اذا كانت معطاة بالحد العام	اذا كانت معطاة بالصيغة التدريجية
$\boxed{U_{n+1} - U_n}$ ونقارنه مع الصفر أكبر من الصفر ← متزايدة اصغر من الصفر ← متناقصة يساوي الصفر ← ثابتة	$\boxed{\dfrac{U_{n+1}}{U_n}}$ ونقارنها مع الواحد أكبر من الواحد ← متزايدة اصغر من الواحد ← متناقصة تساوي الواحد ← ثابتة بشرط جميع حدود المتتالية موجبة	$U_n = f(n)$ $\boxed{\text{ندرس اطراد التابع } f(x)}$ على المجال $[a, \infty[$ فيكون اطراد المتتالية مثل اطراد التابع	$U_{n+1} = f(U_n)$ نوجد حدود اولى منها وناخذ فكرة عنها متزايدة او متناقصة ثم نثبت اطرادها $\boxed{\text{بالتدريج}}$ متزايدة نثبت $U_{n+1} \geq U_n$ متناقصة نثبت $U_{n+1} \leq U_n$

الاثبات بالتدريج

لاثبات علاقة من أجل $n \geq n_0$ نستخدم الاثبات بالتدريج وفق

1. العلاقة $E(n)$ هي «نكتب العلاقة المطلوب اثباتها»
2. نثبت $E(n_0)$ «نعوض في العلاقة n بـ n_0 فتكون محققة»
3. نفرض $E(n)$ صحيحة ونثبت صحة $E(n+1)$ «ننطلق من $E(n)$ حتى نحصل على $E(n+1)$»

أ. أنس درعون

المدرس: أنس درعون

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

من حيث	الحسابية	الهندسية
التعريف	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت r أساس المتتالية $u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2, \dots, u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}, \dots$	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بضربه بعدد ثابت q أساس المتتالية $u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2, \dots, u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}, \dots$
الشرط	$u_{n+1} - u_n = \boxed{r}$ عدد ثابت	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \boxed{q}$ عدد ثابت
الحد العام u_n بدلالة u_0	$\boxed{u_n = u_0 + nr}$	$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$
العلاقة بين حدين u_p و u_m	$\boxed{u_m - u_p = (m-p)r}$ $u_m = u_p + (m-p)r$	$\boxed{\dfrac{u_m}{u_p} = q^{m-p}}$ $u_m = u_p \cdot q^{m-p}$
مجموع n حد؟	$\boxed{S = n \cdot \dfrac{a+\ell}{2}}$ حيث: n عدد الحدود a الحد الأول ℓ الحد الأخير	$\boxed{S = a\dfrac{1-q^n}{1-q}}$ a: الحد الأول n: عدد الحدود q: الأساس
a و b و c ثلاثة حدود متتالية	$\boxed{b = \dfrac{a+c}{2}}$	$\boxed{b = \sqrt{a \cdot c}}$

"نهاية المتتاليات"

المدرس: أنس درغام

البحث الثاني

النهايات والاستمرار

حالات عدم التعيين

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	$0.(\infty)$
• نضرب البسط والمقام بالمرافق اذا وجد جذر • نحلل البسط والمقام • نختصر ثم نوجد النهاية	• نخرج عامل مشترك • نختصر ثم نوجد النهاية	هنالك طريقتان ط1: نضرب ونقسم بالمرافق ط2: نخرج عامل مشترك	غالباً اذا وجد $\frac{1}{x}$ نسعى لتغيير المتحول نفرض $\frac{1}{x} = t$

مبرهنات الاحاطات

الاحاطات 1

اذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

وكان

$$\left.\begin{array}{l} \lim g(x) = \ell \\ \lim h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x) = \ell$$

الاحاطات 2

اذا كان $|f(x) - \ell| \leq g(x)$

وكان

$$\lim g(x) = 0$$

عندئذ

$$\lim f(x) = \ell$$

المقارنة

اذا كان $f(x) \geq g(x)$

$$\lim g(x) = \infty \Rightarrow \lim f(x) = \infty$$

$$\lim f(x) = -\infty \Rightarrow \lim g(x) = -\infty$$

المدرس: أنس درغام

نهاية مقدسة

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

تذكرة

- $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

$$\boxed{-1 \leq \begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix} \leq 1}$$

$$\boxed{0 \leq \begin{matrix}\sin^2 x \\ \cos^2 x\end{matrix} \leq 1}$$

$$\boxed{x - 1 < E(x) \leq x}$$

المقاربات

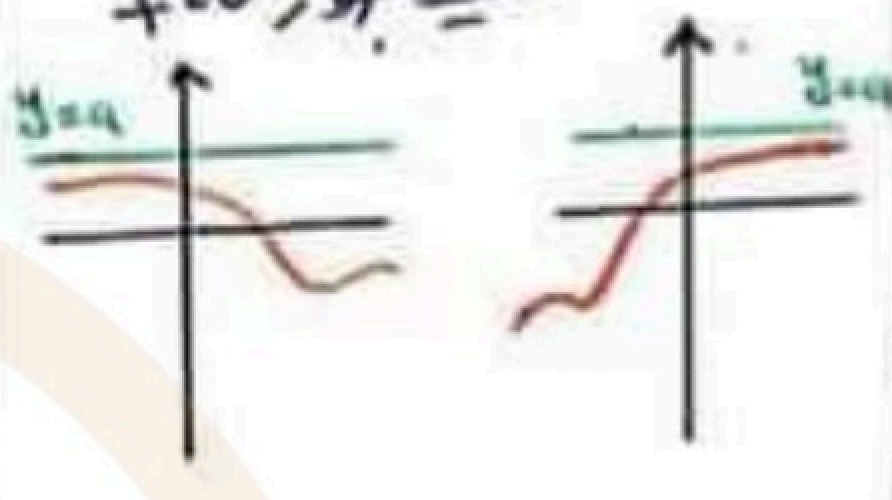
المقارب الأفقي

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \boxed{\ell}$$

عدد

$y=\ell$ مقارب أفقي

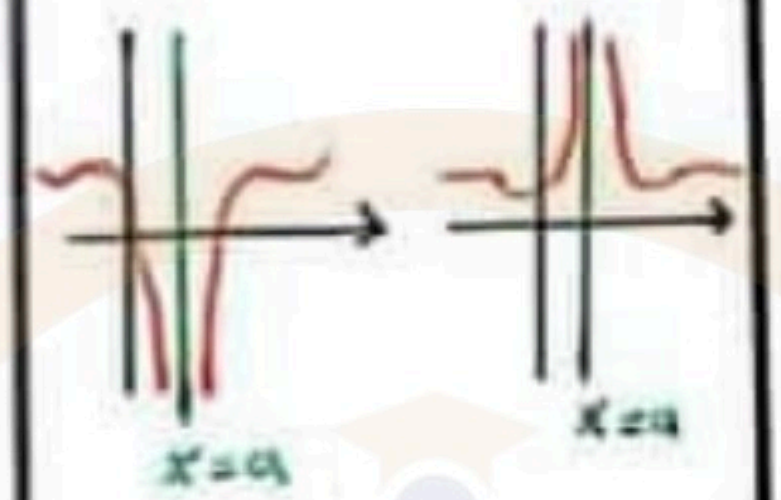
في جوار $\mp\infty$



المقارب الشاقولي

$$\lim_{x\overset{>}{\underset{<}{\to}}\boxed{a}} f(x) = \mp\infty$$

$x=a$ مقارب شاقولي



المقارب المائل

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

قد يوجد مقارب مائل

• لنثبت $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل للخط C نثبت

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-y_\Delta\right]=0$$

إيجاد معادلة المقارب المائل

هنالك ثلاث طرق

تابع كسري $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

• نقسم قسمة اقليدية فيكون

$$f(x)=\underbrace{ax+b}_{y_\Delta}+\frac{c}{h(x)}$$

• فيكون $\Delta: y=ax+b$ مقارب للخط C بجوار $\mp\infty$

لأنه:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{c}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

تابع جذري $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

• نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية

$$f(x)=\sqrt{(ax+b)^2\pm c}$$

• فيكون $\boxed{\Delta_1: y=ax+b}$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

$\boxed{\Delta_2: y=-(ax+b)}$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

• نثبت ذلك ....

بشكل عام $f(x)$

• يوجد $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$

• للتابع f مقارب مائل من الشكل $y=ax+b$ حيث

$$\boxed{a=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-ax\right]}$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$

الاستمرار

اذا كان التابع f يكتب بشكل فرعي واحد

$f(x) = \ldots\ldots$

فهو مستمر على كل مجال من مجالات مجموعة تعريفه D_f

اذا كان f يكتب بشكل فرعين او اكثر

$$f(x) = \begin{cases} \text{---} & x < a \\ \text{---} & x \geq a \end{cases}$$

ندرس استمرار التابع f عند النقطة a اذا تحقق الشرط

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a)$$

حل المعادلات

$f(x) = m$

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في المجال $[a,b]$ اذا تحقق

- f مستمر ومطرد على المجال $[a,b]$
- $m \in f([a,b])$

- يكون الجذر α يقع بين $a < \alpha < b$ اذا كان m يقع بين $f(b)$, $f(a)$

$f(x) = 0$

يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $[a,b]$ اذا تحقق

- f مستمر ومطرد على المجال $[a,b]$
- $0 \in f([a,b])$

أو $f(a) \cdot f(b) = $ مقدار سالب

- يكون الجذر α يقع بين $a < \alpha < b$ اذا كان $f(b)$, $f(a)$ من اشارتين مختلفتين

نهاية البحث الثاني

المدرس: أنس درغام

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق عند عدد a

- يكون التابع f قابل للاشتقاق عند العدد a (من مجموعة التعريف) اذا تحقق الشرط

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \boxed{\underbrace{\ell}_{\text{عدد}}}}$$

- نسمي العدد ℓ العدد المشتق ونكتب $f'(a) = \ell$

((القيمة المشتق في النقطة a))

تطبيقات الاشتقاق

معادلة المماس

لإيجاد معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها a

ط1

- نوجد نقطة التماس $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = f(a) \end{cases}$
- نوجد ميل المماس $\boxed{m = f'(a)}$
- نعوض في معادلة المماس

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

ط2

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

التقريب التآلفي

القيمة التقريبية لـ $f(a+h)$

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \cdot h$$

ايجاد نهايات تابع

اذا كانت

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$$

يمكن ازالة حالة عدم التعيين باستخدام العدد المشتق

- نكتب $f(x)$ بالشكل

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

- نوجد $g(x)$ و $g(a)$ و $g'(a)$
- نعوض

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \underbrace{g'(a)}_{\text{نعوضها}}$$

اطراد تابع

- $f'(x) > 0 \Leftarrow$ f متزايد تماماً
- $f'(x) < 0 \Leftarrow$ f متناقص تماماً
- $f'(x) = 0 \Leftarrow$ قيمة حدية

القيم الحدية

القيمة الحدية الصغرى

$f(c)$ قيمة حدية صغرى

يوجد جوار لـ c وليكن I يحقق.

وما يكون $f(c) \le f(x) \Leftarrow x \in I \cap D_f$

$f'(c) = 0$

القيمة الحدية الكبرى

$f(c)$ قيمة حدية كبرى

يوجد جوار لـ c وليكن I يحقق

وما يكون $f(c) \ge f(x) \Leftarrow x \in I \cap D_f$

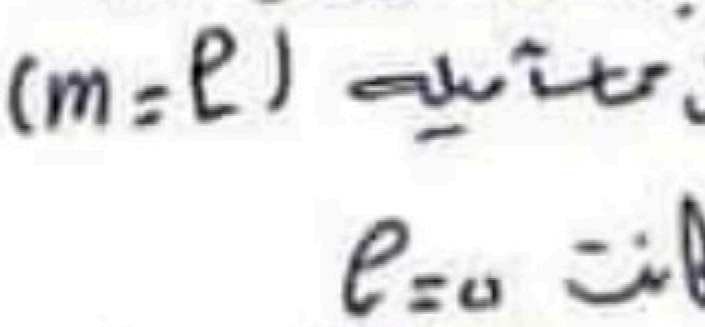
$f'(c) = 0$

مناقشة هامة جداً لقابلية الاشتقاق

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

عدد

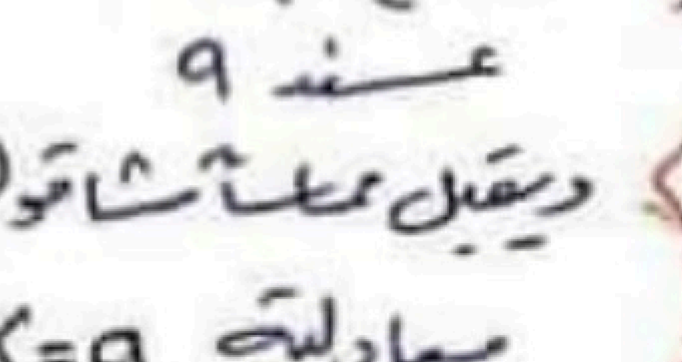
- f قابل للاشتقاق عند a ويقبل مماساً ميله $(m = \ell)$
- اذا كانت $\ell = 0$ يقبل مماساً افقياً معادلته $y =$



مماس افقي

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

- f غير قابل للاشتقاق عند a ويقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$



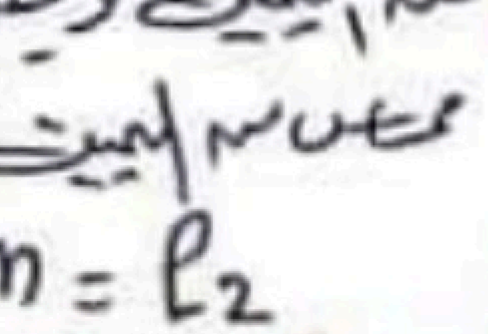
مماس شاقولي

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_1$$

f قابل للاشتقاق عند a من اليسار ويقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = \ell_1$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_2$$

f قابل للاشتقاق عند a من اليمين ويقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = \ell_2$



نصفي مماس من اليمين ومن اليسار

!!!! تذكر تابع القيمة المطلقة $|x|$ يكتب بفرعين

إثبات متراجحة (هام جداً جداً)

لإثبات صحة متراجحة مثلاً

$$\boxed{f(x) < g(x)}$$

نتبع الخطوات:

① ننقل الطرف الصغير إلى الكبير

$$\underbrace{g(x) - f(x)}_{h(x)} > 0$$

② ندرس اطراد الشكل $h(x) = g(x) - f(x)$

x		a	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$h(a)$	$\nearrow$

③ $h(a) = \ldots$ قيمة حدية صغرى

$h(x) \geq h(a)$:

$h(x) > 0$

$g(x) - f(x) > 0$

$g(x) > f(x)$

نتائج هامة جداً (هام جداً)

① التابع f يبلغ قيمة حدية عند a قيمتها b هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{①} \\ f'(a) = 0 \quad \text{②} \end{array}}$$

② المماس للخط c في النقطة (a,b) أفقي هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{①} \\ f'(a) = 0 \quad \text{②} \end{array}}$$

③ المماس للخط c في النقطة (a,b) ميله (m) هذا يعني

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = b \quad \text{①} \\ f'(a) = m \quad \text{②} \end{array}}$$

مشتق تركيب تابعين

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال ①

$$(f(\sqrt{x}))'$$

$$= f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

مثال ②

$$(f(\sin x))'$$

$$= f'(\sin x) \cdot (\sin x)'$$

"نهاية الاشتقاقات"

المدرس: أنس درغام

المدرس: أنس درغام Phone: 0944709526 e-mail: Anas.derghan@gmail.com

البحث الرابع

نهاية متتالية

المتتاليات المحدودة

* نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الادنى بالعدد m اذا تحقق الشرط

$$\boxed{u_n \geq m} \rightarrow \text{العنصر القاصر}$$

* نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الاعلى بالعدد M اذا تحقق الشرط

$$\boxed{u_n \leq M} \rightarrow \text{العنصر الراجح}$$

* نقول أن المتتالية محدودة اذا كان : $m \leq u_n \leq M$

تقارب المتتاليات

من الشكل $u_n = f(n)$

نوجد نهايتها كما تعلمنا سابقاً إيجاد نهاية تابع $f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$

ونميز حالتين

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ← عدد: متقاربة من العدد ℓ
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mp\infty$ ← متباعدة نحو $\mp\infty$

هندسية أساسها q

نميز ثلاث حالات بحسب قيمة الأساس q

- $\boxed{-1<q<1}$ ← $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
- $\boxed{q>1}$ ← $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$
- $\boxed{q<-1}$ ← ليس لها نهاية

من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

نثبت أنها متقاربة بإحدى الطريقتين

- إما نثبت انها متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة
- أو نثبت انها متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة
- وفي الحالتين نهايتها هو العدد ℓ حل المعادلة

$$f(\ell) = \ell$$

ملاحظات !!!

اذا كانت متزايدة وغير محدودة من الاعلى فهي متباعدة نحو $+\infty$

وكذلك اذا كانت متناقصة وغير محدودة من الادنى فهي متباعدة نحو $-\infty$

المدرس: أ. أنس دوغان

المتتاليتان المتجاورتان

نقول أن المتتاليتان U_n و V_n متجاورتان اذا تحقق الشرطان

① احدهما متزايدة والاخرى متناقصة

② لهما نفس النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} U_n - V_n = 0$

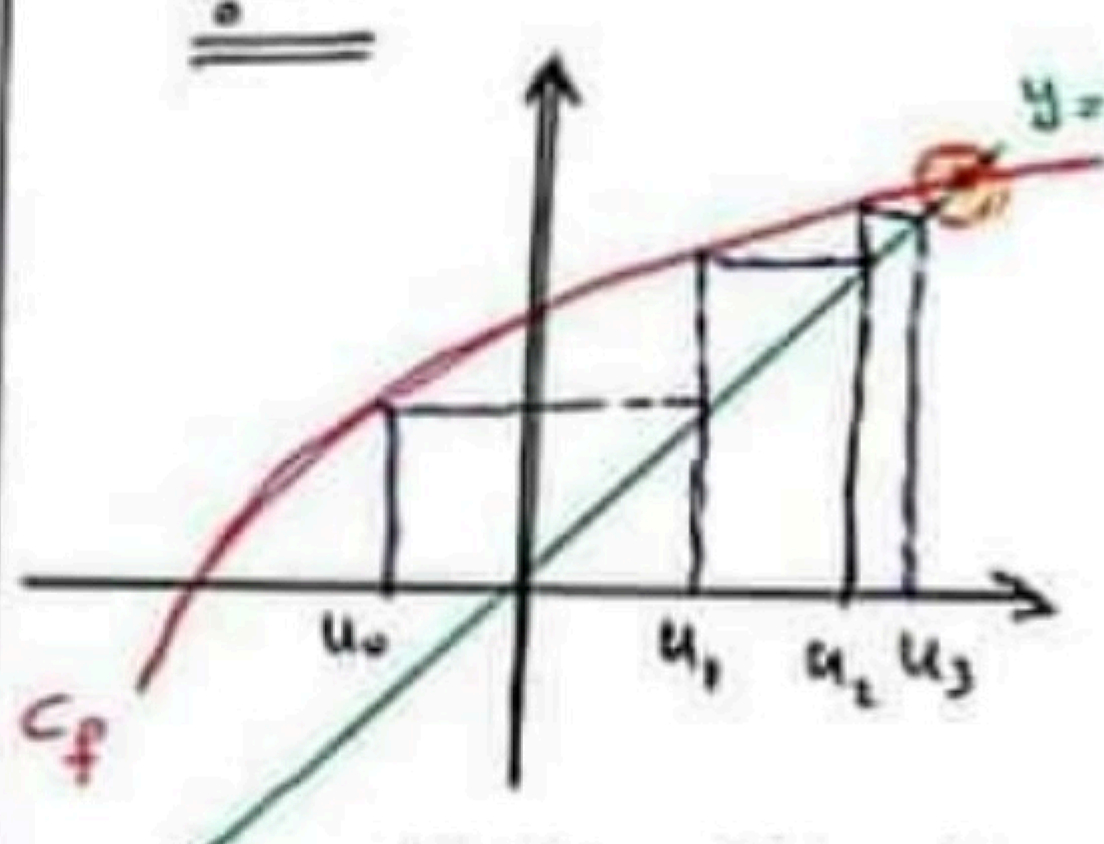
تمثيل الحدود الأولى لمتتالية $U_{n+1} = f(U_n)$

- نرسم الخط البياني C_f للتابع $f(x)$
- نرسم المستقيم $y = x$ منصف الربعين الأول والثالث ((مع ايجاد نقطة التقاطع مع C_f ان وجدت))
- نعين الحد U_0 على محور الفواصل ثم نصعد الى C_f ومنه إلى $y=x$ ثم ننزل الى محور الفواصل فنكون قد حصلنا على U_1

ومن U_1 نصعد الى C_f ثم $y=x$ ثم محور الفواصل فنحصل على U_2 ... وهكذا

أمثلة

$U_0 = -1$

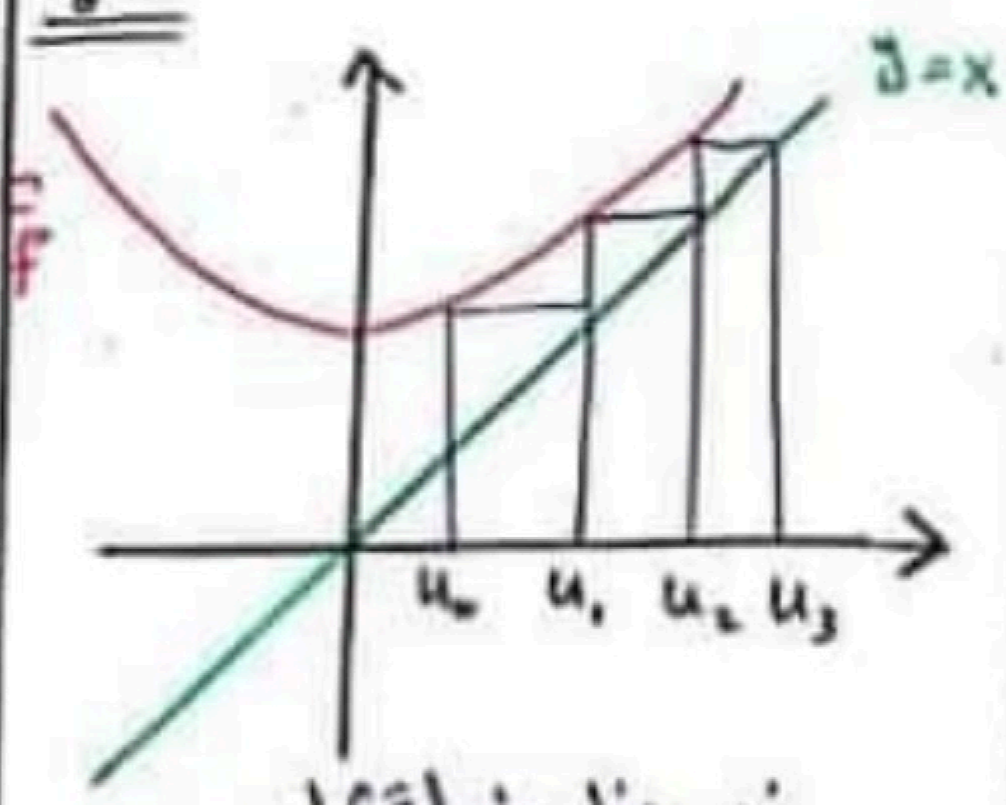


نلاحظ من التمثيل

- المتتالية متزايدة تماماً
- المتتالية محدودة من الأعلى

((أي المتتالية متقاربة)) من العدد ℓ فاصلة نقطة التقاطع

$U_0 = 1$

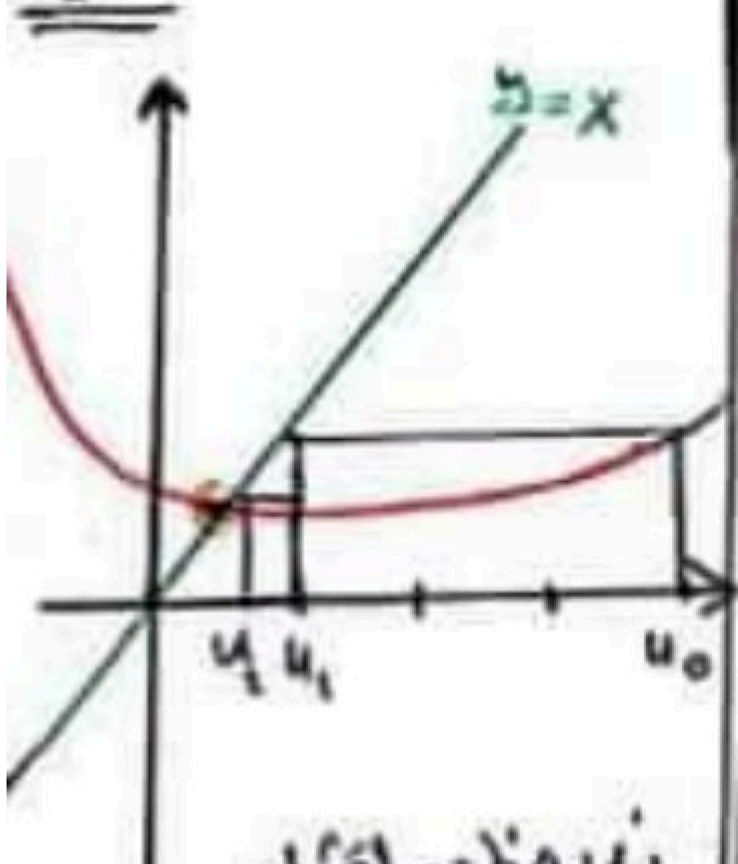


نلاحظ من التمثيل

- المتتالية متزايدة
- المتتالية غير محدودة من الأعلى

((فالمتتالية متباعدة)) نحو $+\infty$

$U_0 = 4$



نلاحظ من التمثيل

المتتالية متناقصة

محدودة من الأدنى

فهي متقاربة من العدد ℓ

فاصلة نقطة التقاطع

نهاية البحث الرابع

التابع اللوغاريتمي

مجموعة التعريف

$f(x)=\ln g(x)$

معرف بشرط ما وراء اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر

$\boxed{g(x)>0}$

ملاحظة

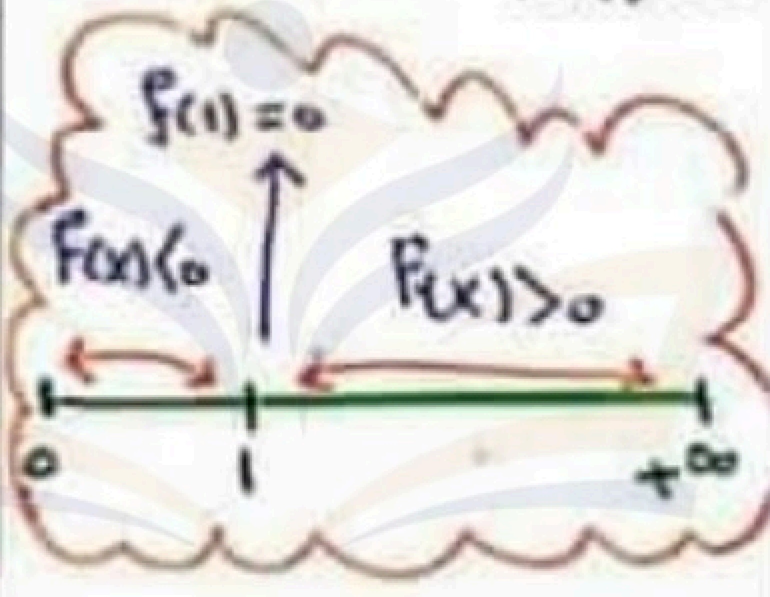
$f(x)=\ln|g(x)|$

معرف على R ماعدا القيم التي تعدم القيمة المطلقة

مجموعة القيم

$f(x)=\ln g(x)$

- $g(x)<1 \Rightarrow f(x)<0$ سالب
- $g(x)>1 \Rightarrow f(x)>0$ موجب
- $g(x)=1 \Rightarrow f(x)=0$



خواص اللوغاريتم

1. $\ln(1)=0$
2. $\ln a \lesseqgtr \ln b \Leftrightarrow a \lesseqgtr b$
3. $\ln x = m \Leftrightarrow x=e^m$
4. $\ln a+\ln b=\ln a.b$
5. $\ln a-\ln b=\ln \frac{a}{b}$
6. $\ln a^n = n\ln a$
7. $\ln \frac{1}{a}=-\ln a$
8. $\ln\sqrt{a}=\ln a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln a$

حل المعادلات والمتراجحات

نميز ثلاث حالات

$\ln f(x) \gtreqless \ln g(x)$

① نوجد شرط الحل

$D_1: f(x)>0$, $D_2: g(x)>0$

$D=D_1\cap D_2$

② نحذف اللوغاريتمات نحصل على معادلات أو متراجحات نحلها ...

③ نناقش الحل

- معادلات (مرفوض) (مقبول)
- متراجحة بالتقاطع مع شرط الحل D

$\ln f(x) \gtreqless m$

① نوجد شرط الحل D

② $\ln f(x) \gtreqless m$

$\Rightarrow f(x) \gtreqless e^m$

نحل المعادلات أو المتراجحات ---

③ نناقش الحل

غير الشكلين السابقين

① نوجد شرط الحل ---

② نستخدم خواص اللوغاريتم لتحويل المعادلات أو المتراجحة إلى أحد الشكلين السابقين

③ نحلها ----

المدرس: أنس دغام

دراسة التابع اللوغاريتمي

النهايات

مصطلحات

$$\ln 0 = -\infty$$
$$\ln \infty = \infty$$

مبرهنات

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

!!! $\ln x < x$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$$

الاشتقاق

$$f(x) = \ln g(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{\text{مشتق ما وراء اللوغاريتم}}{\text{ما وراء اللوغاريتم}}$$

f اشتقاقي على كل مجال مستمر من مجموعة تعريفه

التابع الاصلي

① نوجد التابع الاصلي للوغاريتم بالتجزئة

$$\boxed{f(x) = \ln x}$$
$$F(x) = \int \ln x \, g(x)$$
$$u = \ln x \longrightarrow u' = \dots$$
$$v' = 1 \longrightarrow v = \dots$$
$$F(x) = u.v - \int v.u' \, dx$$

② $$\boxed{f(x) = g(x).\ln x}$$
$$F(x) = \int \underbrace{g(x)}_{v'}.\underbrace{\ln x}_{u} \, dx$$

نستخدم التجزئة أيضاً

③ $$\boxed{f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$
بسط مشتق المقام

$$F(x) = \ln|u(x)|$$

" نهاية التابع اللوغاريتمي !!

المدرس أنس دريغم

التابع الأسي

مجموعة التعريف

$f(x) = e^{g(x)}$

مجموعة تعريفه هي مجموعة تعريف الأس $g(x)$

مجموعة القيم

$$\boxed{e^{g(x)} > 0}$$

التابع الأسي أكبر تماماً من الصفر دوماً

خواص التابع الأسي

① $e^x \gtreqless e^y \Leftrightarrow x \gtreqless y$

② $e^x \gtreqless m \Leftrightarrow x \gtreqless \ln m$

③ $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

④ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

⑤ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

⑥ $[e^a]^b = e^{a \cdot b}$

!!!

$e^x \cdot e^{-x} = 1$

$(e^x)^2 = e^{2x}$

⑦ $\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$ انتبه هام

المدرس أنس درغام

حل المعادلات والمتراجحات

الأساس e

① $e^{f(x)} \gtreqless e^{g(x)} \Rightarrow f(x) \gtreqless g(x)$

② $e^{f(x)} \gtreqless m \Rightarrow f(x) \gtreqless \ln m$

③ $a e^{2x} + b e^x + c \gtreqless 0$

- معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول e^x نحلها بالتحليل المباشر أو الـ Δ نوجد e^x ثم نستنتج x
- أو متراجحة بنفس الطريقة ثم نشكل جدول إشارة ...

الأساس a

① $a^{f(x)} \gtreqless a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \gtreqless g(x)$

② $a^{f(x)} \gtreqless b^{g(x)} \Rightarrow e^{f(x)\ln a} \gtreqless e^{g(x)\ln b}$

$\Rightarrow f(x)\ln a \gtreqless g(x)\ln b$ حالاً

③ $a_1 a^{2x} + b_1 a^x + c_1 \gtreqless 0$

- معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول a^x نحلها ثم نوجد a^x ونستنتج x
- أو متراجحة بنفس الطريقة

e-mail: Anas.derghams@gmail.com Phone: 0944709520 المدرس: أنس درغام

دراسة التابع الأسي

النهايات

مصطلحات

$e^{-\infty} = 0$

$e^{\infty} = \infty$

مقدسات

$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

!!! $e^x > x$

$\lim_{x \to -\infty} x . e^x = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

نهاية مميزة

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

نكرة

اذا كانت $\lim f(x) = 1^{\infty}$ فهي حالة عدم تعيين نزيلها بالاستفادة من المقدسة

• نكتب f بالشكل $f(x) = \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^n$

فتكون $\lim f(x) = e^n$

الاشتقاق

$f(x) = e^{g(x)}$

$f'(x) = g'(x) . e^{g(x)}$

مشتق الأس بالقوة نفسها

f اشتقاقي على كل مجال مستمر من مجموعة تعريفه

التابع الأصلي

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

$f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$

$f(x) = u' . e^u \Rightarrow F(x) = e^u$

$f(x) = g(x)\, e^{ax}$

نستخدم التكامل بالتجزئة

$F(x) = \int \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{e^{ax}}_{v'} dx$

المعادلات التفاضلية

من الشكل $y' = ay$

الحل العام هو

$y = f_k(x) = k e^{ax}$

من الشكل $y' = ay + b$

الحل العام هو

$y = f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

• اذا طلب منا الحل الذي يحقق الشرط المعطى

• نوجد الحل العام ثم نعوض في الشرط المعطى لإيجاد k

• نوجد k ثم نعوضها في الحل العام

• اذا طلب منا هل التابع f حل للمعادلة

• نوجد $f'(x)$ ثم نعوض $y = f(x)$ و $y' = f'(x)$ في المعادلة التفاضلية اذا كانت محققة فهو حل وعندئذ فهو ليس حلاً .

المدرس أنس درغام

المدرس: أنــس درغــام
e-mail: Anas.dorgham@gmail.com Phone: 0944709520

التكامل والتوابع الأصلية

- F تابع أصلي للتابع f $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
- F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه $\Leftrightarrow F'(x) = G'(x)$
  أو $\boxed{[F(x) - G(x)]' = 0}$
- نسمي الخط البياني للتابع الأصلي F ((المنحني لتكامل))
- اذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع f عندئذ $\boxed{F(x)+c}$ تابعاً أصلياً أيضاً لـ f

قواعد التابع الأصلي

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = ax$	$f(x) = a$
$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = x^n$, $n \neq -1$
$F(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$F(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$F(x) = -\cos x$	$f(x) = \sin x$
$F(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
$F(x) = \tan x$	$f(x) = 1 + \tan^2 x$
$F(x) = \cot x$	$f(x) = 1 + \cot^2 x$

التابع من شكل $f(ax+b)$

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = (ax+b)^n$, $n \neq -1$
$F(x) = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$f(x) = \frac{1}{ax+b}$
$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$	$f(x) = e^{ax+b}$
$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$

((ضربنا بـ $\frac{1}{a}$))

المدرس، أنس دعنام

التوابع الأصلية لتركيب تابعين $u'_x . f(u_x)$

$f(x) = u' . e^u \Rightarrow$ $F(x) = e^u$	$f(x) = \frac{u'}{u} \Rightarrow$ البسط مشتق المقام $F(x) = \ln\lvert u\rvert$	$f(x) = u' . u^n \Rightarrow$ $F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$$f(x) = u' . \sin u \Rightarrow F(x) = -\cos u$$
$$f(x) = u' . \cos u \Rightarrow F(x) = \sin u$$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x) . dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

تفريق الكسر

اذا كان f كسر ومشابه من الدرجة الثانية

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ودرجة البسط أصغر من درجة المقام
نفرق الكسر

① نحلل المقام ونفرق

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{cx+d}$$

② نوحد المقامات ونختزلها

$$g(x) = \alpha(cx+d) + \beta(ax+b)$$

③ لإيجاد α نعوض $x = \frac{-a}{b}$

لإيجاد β نعوض $x = -\frac{d}{c}$

التكامل بالتجزئة

$$\int_a^b u . v' dx = [u . v]_a^b - \int_a^b v u'$$

$$\left(\begin{matrix} u & \text{-----} & u' \\ v' & \text{-----} & v \end{matrix}\right)$$

$$\int \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} dx$$
$$\int \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$
$$\int \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx$$
$$\int \underbrace{g(x)}_{v'} \underbrace{\ln x}_{u} dx$$

!!!

أنس درغام

المدرس: أنس درغام
e-mail: Anas.dergham@gmail.com Phone: 0944709526

نتيجة هامة (تكامل كسري)

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي المقام	درجة البسط أصغر من المقام
لوغاريتم المقام بالقيمة المطلقة.	قسمة إقليدية وقد نحتاج إلى تجزئة	نفرق كسر

الأستاذ أنس درغام

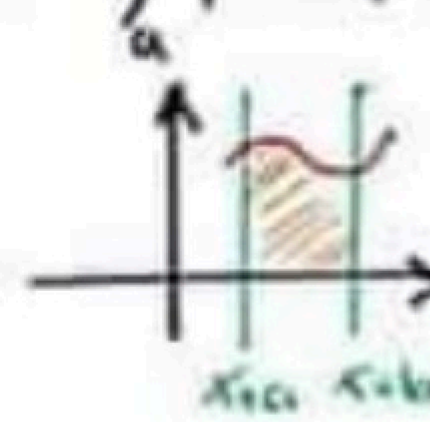
حساب المساحة والحجم

مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

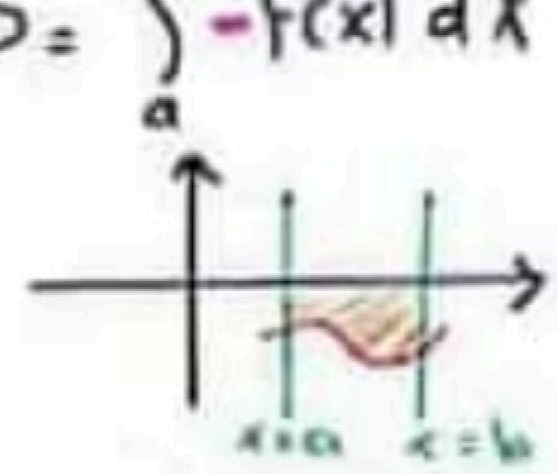
C فوق محور الفواصل

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



C تحت محور الفواصل

$$S=\int_a^b -f(x)\,dx$$

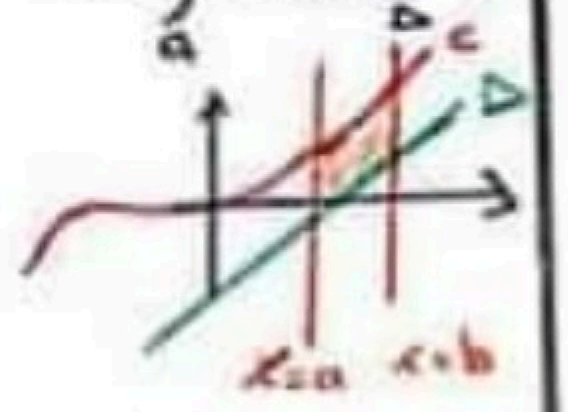


مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

$$S=\int_a^b |f(x)-y_\Delta|\,dx$$

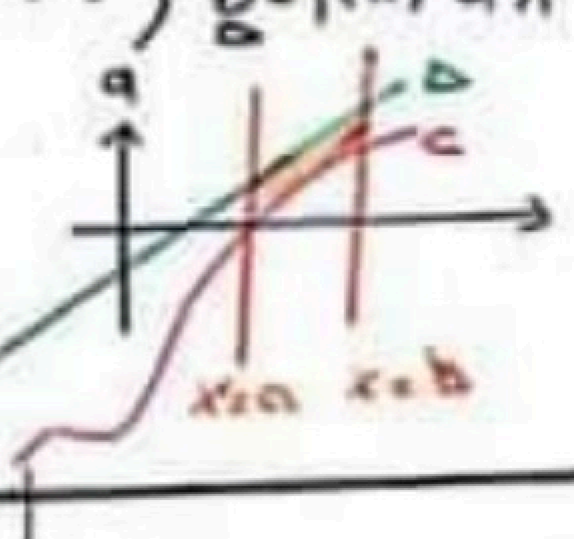
C فوق Δ

$$S=\int_a^b f(x)-y_\Delta\,dx$$



C تحت Δ

$$S=\int_a^b y_\Delta-f(x)\,dx$$



حجم المجسم الناتج عن دوران السطح حول $x'x$ دورة كاملة

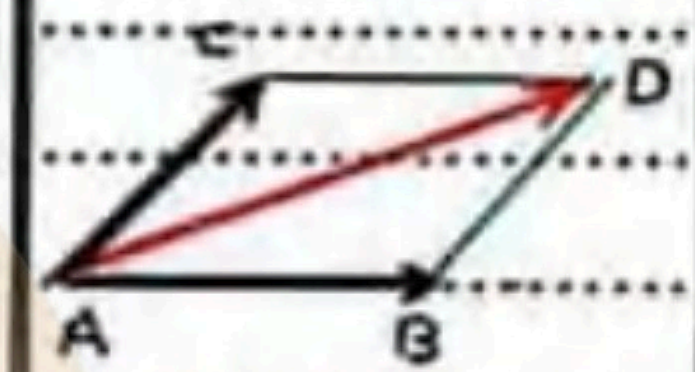
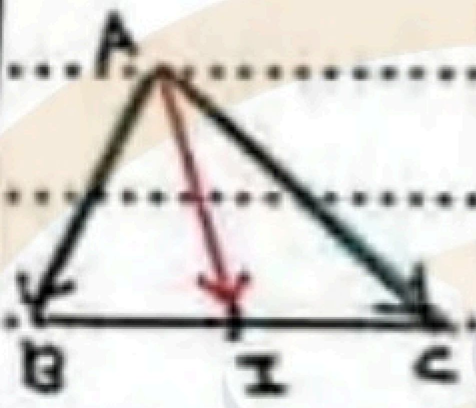
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

((لأن مقطع المجسم بمستوٍ عمودي مع $x'x$ هو دائرة نصف قطرها $(R=f(x))$))

الأشعة في الفراغ

العمليات على الأشعة

جمع الأشعة

لهما البداية نفسها	متتاليان	خاصية المتوسط
	نهاية الأول هي بداية الثاني علاقة شال	
$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$ قطر متوازي الأضلاع	$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$	$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AI}$

طرح الأشعة

لهما البداية نفسها
لا يمكن طرح شعاعين إلا إذا كان لهما البداية نفسها
$\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{BC}$

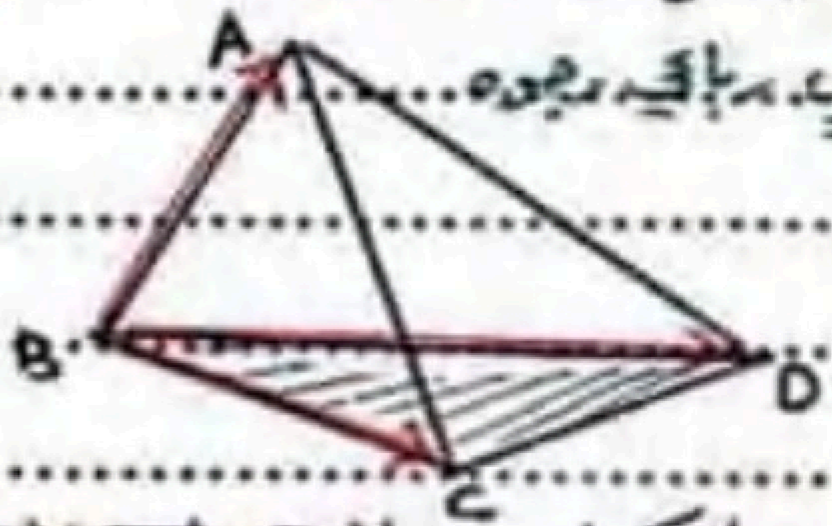
المعلم في الفراغ

((الإثباتات علاقة نستخدم معلماً كيفياً ومن حساب أطوال أو جداء أو معادلة مستوٍ نختار معلماً متجانساً))

المعلم الكيفي

ليس بالضرورة أشعة الواحدة متعامدة أو طول كل منها الواحد

مثال: رباعي وجوه



نختار معلماً كيفياً $(B;\vec{BC},\vec{BD},\vec{BA})$

$B(0,0,0)$ ... $C(1,0,0)$ ... $D(0,1,0)$

$A(0,0,1)$

المعلم المتجانس

أشعة الواحدة متعامدة وطول كل منها (1)

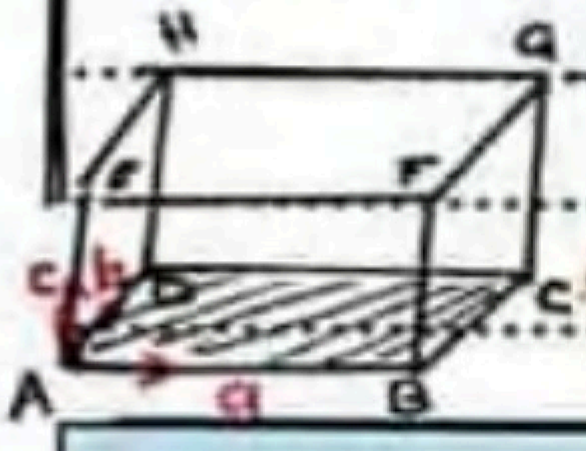
مثال: مكعب طول حرفه a نختار معلماً متجانساً

$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{a}\vec{AD},\frac{1}{a}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ ... $B(a,0,0)$ ... $C(a,a,0)$ ... $D(0,a,0)$

$E(0,0,a)$ ... $F(a,0,a)$ ... $G(0,a,a)$ ... $H(a,a,a)$

كذلك متوازي مستطيلات نختار معلماً متجانساً



$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{b}\vec{AD},\frac{1}{c}\vec{AE})$

الهندسة التحليلية في الفراغ

① مركبات شعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$$

② نظيم شعاع

① نظيم الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ هو

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

② نظيم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو «طول القطعة المستقيمة AB»

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

③ تساوي شعاعين

$$\vec{u}=\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \\ z_1=z_2 \end{cases}$$

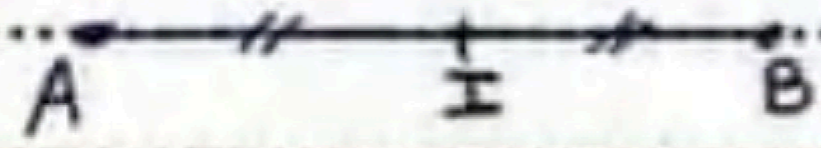
④ جمع وطرح شعاعين

$$\vec{u}\pm\vec{v}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2)$$

⑤ ضرب شعاع بعدد

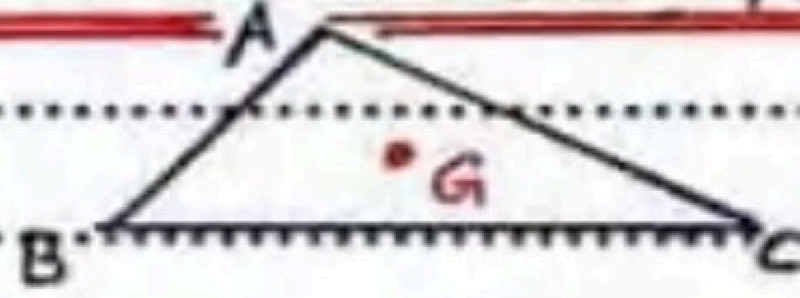
$$\alpha\vec{u}=(\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z)$$

⑥ احداثيات منتصف قطعة مستقيمة



$$I\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

⑦ احداثيات مركز ثقل مثلث



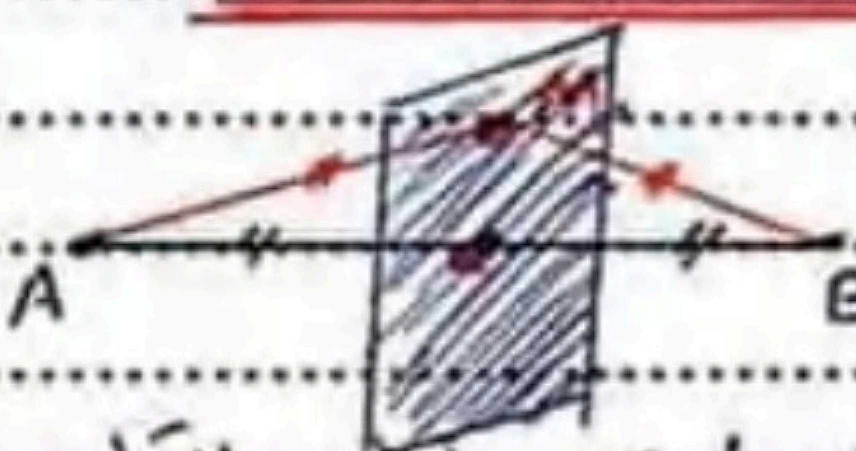
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

⑧ معادلة الكرة

- مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$
- نصف قطرها R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

⑨ المستوي المحوري



كل نقطة من المستوي المحوري للقطعة AB

$\boxed{MA=MB}$ متساوية البعد عن طرفيها

الارتباط الخطي

الارتباط الخطي لشعاعين

شعاعياً

إذا ساوى أحدهما الآخر مضروباً بعدد k

$\boxed{\vec{u} = k\vec{v}}$ $\boxed{\vec{v} = k\vec{u}}$

تحليلياً

إذا كانت المركبات متناسبة

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$$

الاستفادة

① لإثبات شعاعين متوازيين نثبت أنهما مرتبطان خطياً.

② لإثبات ثلاث نقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة نثبت شعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطين خطياً.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

شعاعياً

$$\boxed{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$$

حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

• إذا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً فالأشعة الثلاثة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً.

تحليلياً نختار شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مثلاً ونميز حالتين

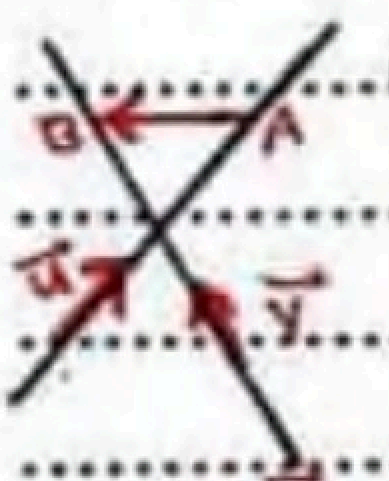
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً فالأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً نبحث عن عددين a و b يحققان

$$\boxed{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$$

الاستفادة

① لإثبات أربع نقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد نثبت الأشعة الثلاثة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ مرتبطة خطياً.

② لإثبات مستقيمين متقاطعين نثبت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{AB}$ مرتبطة خطياً.



③ لإثبات مستقيم يوازي مستوٍ نثبت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً.

مركز الأبعاد المتناسبة

لنقطتين (A,α) و (B,β)

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$$

$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

$\alpha+\beta\neq 0$

خواص

1. A و B و G تقع على استقامة واحدة
2. يمكن ضرب الثقيلات α و β بنفس العدد k
3. اذا كانت A و B مثقلتان بنفس العدد فإن G تقع منتصف AB
4. مهما تكن M نقطة من الفراغ

هام جداً

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}=(\alpha+\beta)\vec{MG}$$

استبدلنا شعاعين بشعاع

لثلاث نقاط (A,α) (B,β) (C,γ)

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$$

$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

خواص

1. A و B و C و G تقع في مستوٍ واحد
2. يمكن ضرب الثقيلات α و β و γ بنفس العدد k
3. اذا كانت A و B و C مثقلات بنفس العدد فإن G مركز ثقل المثلث ABC
4. مهما تكن M نقطة من الفراغ

هام جداً

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MD}=(\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$$

استبدلنا ثلاثة أشعة بشعاع

لأربع نقاط (A,α) (B,β) (C,γ) (D,λ)

$$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}+\lambda\vec{GD}=\vec{0}$$

$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\vec{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\vec{AC}+\frac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\vec{AD}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$

خواص

1. ———
2. يمكن ضرب الثقيلات α و β و γ و λ بنفس العدد k
3. اذا كانت A و B و C و D مثقلات بنفس العدد (في الفراغ) فإن G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD
4. مهما تكن M نقطة من الفراغ

هام جداً

$$\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC}+\lambda\vec{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\lambda)\vec{MG}$$

استبدلنا أربع أشعة بشعاع

* إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة:

لنقطتين (A,α) و (B,β)

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B}{\alpha + \beta}$$

لثلاث نقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B + \gamma X_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

هام * الخاصية التجميعية

① إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

$(I,\alpha+\beta)$

وكانت I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β)

عندئذ تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ)

② إذا كانت G مركز أبعاد متناسبة لأربع نقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,λ)

$(I,\alpha+\beta)$ ، $(J,\gamma+\lambda)$

وكانت I مركز أبعاد متناسبة لـ (A,α) و (B,β)

و J " " " " (C,γ) و (D,λ)

عندئذ تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\lambda)$

• ملاحظة:

يمكن التجميع بطريقة أخرى (A,α) (B,β) (C,γ) (D,λ)

$(I,\alpha+\beta+\gamma)$

عندئذ G مركز أبعاد متناسبة لـ $(I,\alpha+\beta+\gamma)$ و (D,λ)

* الاستفادة من مركز الابعاد المتناسبة

1. إثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة
نثبت أن إحدى هذه النقاط هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين

2. إثبات أربع نقاط في مستوٍ واحد
نثبت أن إحدى هذه النقاط هي مركز الأبعاد متناسبة للنقاط الثلاث الباقية

3. إثبات تقاطع مستقيمين AB و CD
نثبت أن مركز الأبعاد المتناسبة لـ A و B هي نفسه مركز الأبعاد المتناسبة لـ C و D
فالمستقيمان متقاطعان في النقطة التي هي مركز الابعاد المتناسبة

4. إثبات تقاطع ثلاث مستقيمات
AB و CD و EF
نثبت أن مركز الابعاد لـ A و B
هي نفسه مركز الابعاد لـ C و D
وهي نفسه مركز الابعاد لـ E و F

5. استبدال شعاعين بشعاع
مثال:
$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
حيث أن
G م.أ.م لـ (A,α) و (B,β)

6. استبدال ثلاث أشعة بشعاع
مثال:
$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
حيث أن
G م.أ.م لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ)

* ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ

$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\| = a$ ← عدد

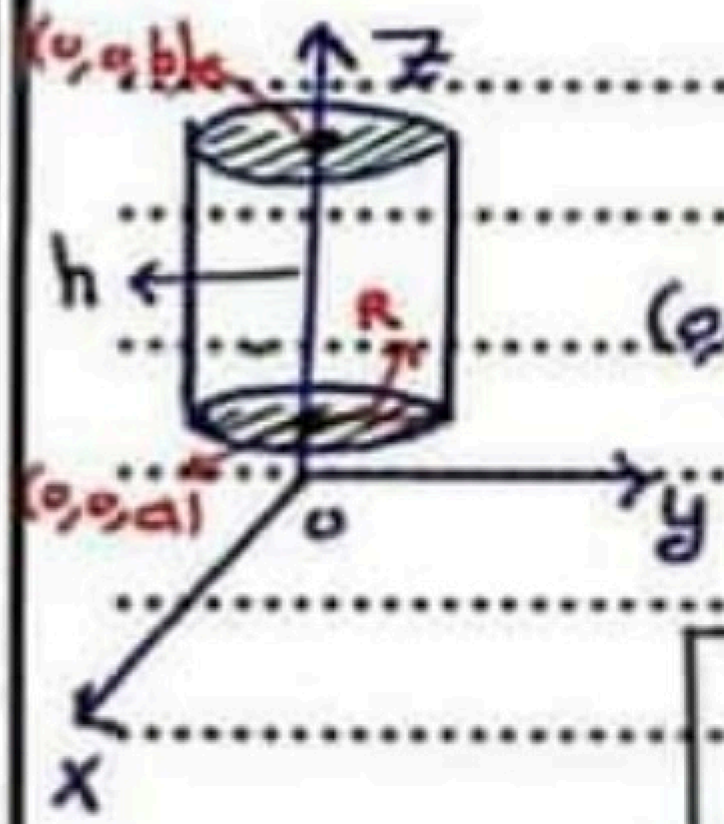
تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\|\overrightarrow{AB}\|$
أو كرة مركزها G ونصف قطرها a

$\boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MA}\|}$

تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة GA

* معادلتي الاسطوانة والمخروط

الاسطوانة



• محورها oz

مركز القاعدة السفلى (0,0,a)

مركز العليا (0,0,b)

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2+y^2=R^2 \\ a\le z\le b \end{array}}$$

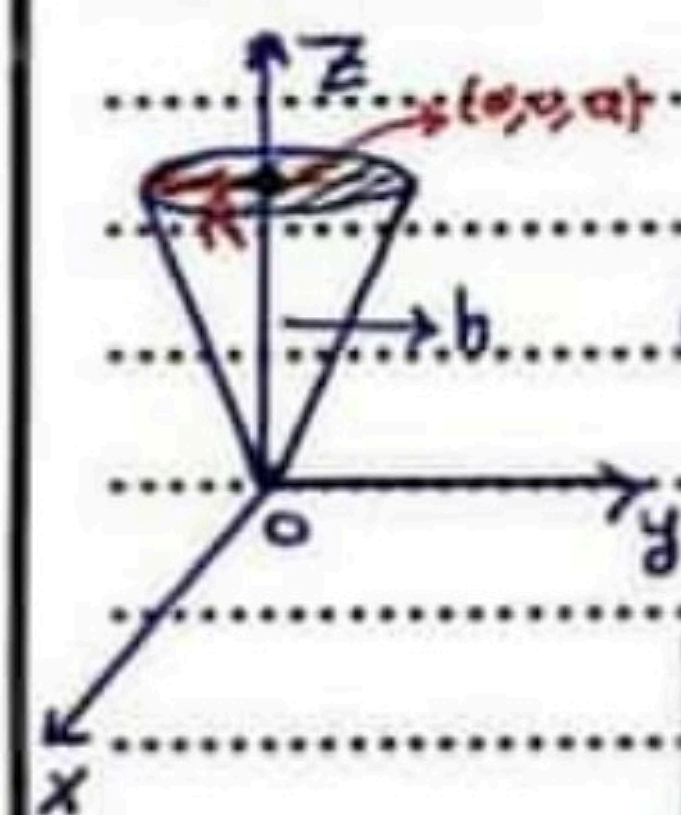
حيث

ارتفاعها h $\boxed{h=b-a}$

نصف قطر القاعدة R

(لا تشكيله محورها ox أو oy)

المخروط



محوره oz

رأسه المبدأ O(0,0,0)

مركز قاعدته (0,0,a)

نصف قطرها R

وارتفاعه h

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0 \\ 0\le z\le a \end{array}}$$

(لا تشكيله محور ox أو oy)

الجداء السلمي

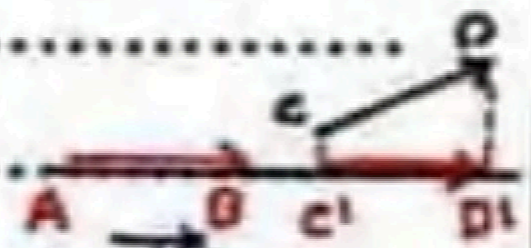
علاقات الجداء السلمي

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

② $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

③ $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$ (تحليلياً)

④ $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}\cdot\vec{C'D'}$



حيث $\vec{C'D'}$ مسقط $\vec{CD}$ على AB

حالات خاصة

① $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً بنفس الجهة

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

② $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً بجهتين متعاكستين

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$

③ $\vec{u},\vec{v}$ متعامدان

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

④ $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

نتيجة هامة

لإيجاد $\cos\theta$ الزاوية بين الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

معادلة المستوي

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

حيث $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

حيث $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي

(x_0,y_0,z_0) نقطة من المستوي

نتيجة ①

لإيجاد معادلة مستوٍ نحتاج إلى:

نقطة (x_0,y_0,z_0)

وناظم $\vec{n}(a,b,c)$

ونميز أربع حالات:

- مستوٍ يمر بثلاث نقاط
- مستوٍ يمر بنقطتين عمودياً على مستوٍ آخر
- مستوٍ يمر بنقطة عمودياً على مستويين
- المستوي المحوري

نتيجة ②

- يتوازى مستويان اذا توازى ناظماهما.
- يتقاطع مستويان اذا تقاطع ناظماهما (تخالفا)
- يتعامد مستويان اذا تعامد ناظماهما.

حالات معادلة المستوي

① مستوي يمر بثلاث نقاط A و B و C

- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ ......①

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC}=0$ ......②

نحصل على علاقتين بثلاث مجاهيل

- نفرض $\boxed{c=1}$ مثلاً ونعوض في ① و ② لنجد a و b
- نختار إحدى النقاط A أو B أو C ونعوض في معادلة المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

② مستوي يمر بنقطة A ويعامد مستويين آخرين P و Q

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{n_P} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n_P}=0$ ......①

$\vec{n} \perp \vec{n_Q} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n_Q}=0$ ......②

نفرض $\boxed{c=1}$ لنوجد a و b

نختار A (المعطاة) ونعوض في معادلة المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

③ مستوي يمر بنقطتين A و B ويعامد مستوي آخر P

- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ ......①

$\vec{n} \perp \vec{n_P} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n_P}=0$ ......②

- نفرض $\boxed{c=1}$ ونوجد a ثم b
- نختار إحدى النقطتين A أو B ونعوض في معادلة المستوي

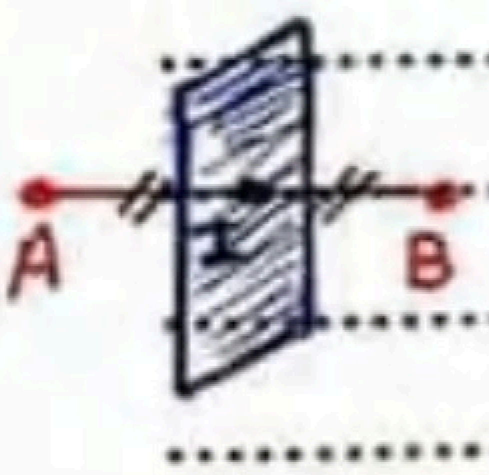
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

④ المستوي المحوري

لإيجاد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة AB نحتاج النقطة والناظم

- الناظم $\vec{n}=\vec{AB}$
- النقطة I منتصف AB

ونعوض في معادلة المستوي



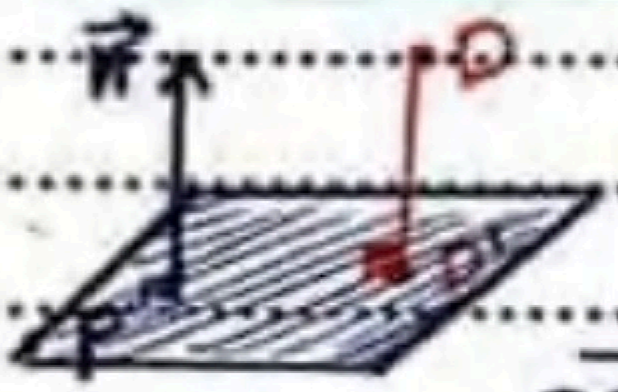
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

((بعض هذه الحالات يمكن اختصارها بالبحث عن ناظم والنقطة))

Phone: 0944709520
Mail: Anas.dorgham@gmail.com

المسقط القائم لنقطة D

المسقط القائم لنقطة D على المستوي P



① نفرض المسقط القائم $D'(x,y,z)$

② $\overrightarrow{DD'} \parallel \vec{n}$

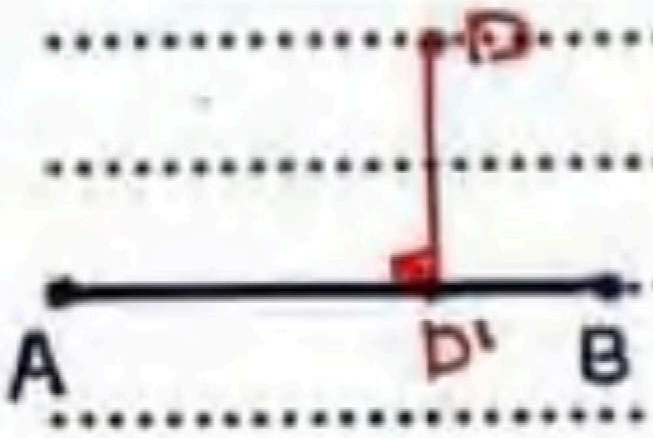
$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DD'} = k\,\vec{n}}$

نعوض فنحصل على x و y و z بدلالة K

③ نعوض x و y و z بدلالة K بحيث معادلة المستوي P فنحصل على K

④ نعوض K بحيث x و y و z فنحصل على D'

المسقط القائم لنقطة D على مستقيم AB



① نفرض المسقط القائم $D'(x,y,z)$

② $\overrightarrow{DD'} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0}$ (*)

نحصل على علاقة نسميها (*)

③ $\overrightarrow{AD'} \parallel \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD'} = K\,\overrightarrow{AB}$

نعوض فنحصل على x و y و z بدلالة K

④ نعوض x و y و z بدلالة K في العلاقة (*) فنحصل على K

⑤ نعوض K في x و y و z

المسقط القائم لنقطة على مستقيم بشكل عام

① نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم

② نوجد نقطتين من التمثيل الوسيطي
نعطي قيمة $t=0$ فنحصل على النقطة A
نعطي قيمة $t=1$ فنحصل على النقطة B

③ نتابع كما في حالة المسقط القائم لنقطة على مستقيم AB

بعد النقطة

* بعد نقطة عن مستوي

$$dist(A,P) = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

* بعد نقطة عن مستقيم

هنا لدينا طريقتان

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
نوجد المسقط القائم للنقطة A على المستقيم وليكن A'	نوجد نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم بدلالة أحد المجاهيل
عندئذ يكون $dist(A,d) = AA'$	نوجد MA ونتمم لمربع كامل
	نعتبر أصغر قيمة لـ MA تكون هي بعد A عن المستقيم d

التمثيل الوسيطي للمستقيم

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

حيث:

$\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم

(x_0,y_0,z_0) نقطة من المستقيم

ملاحظة:

$t \in \mathbb{R}$ مستقيم (AB)

$t \in [0,1]$ قطعة مستقيمة AB

$t \in [0,+\infty[$ نصف مستقيم [AB)

$t \in]-\infty,1]$ نصف مستقيم (AB]

* التمثيل الوسيطي للمستقيم AB

$\vec{u} = \vec{AB}(a,b,c)$

نختار A أو B ونعوض في التمثيل الوسيطي

* التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويين

• نحل جملة معادلتي المستويين فنجد x و y بدلالة (z)

• نفرض $z = t$ ونعوض في التمثيل الوسيطي

* التمثيل الوسيطي لمستقيم عمودي على مستوي P ويمر بنقطة

$\vec{u} = \vec{n}(a,b,c)$

نعوض في التمثيل الوسيطي

الوضع النسبي

وضع مستقيمين d و d'

ندرس الارتباط الخطي لشعاعي التوجيه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$

- مرتبطان خطياً:
  - متوازيان تماماً (مستحيلة الحل)
  - منطبقان (عدد غير منتهٍ من الحلول)
- غير مرتبطان خطياً:
  - متقاطعان بنقطة (حل وحيد)
  - متخالفان (مستحيلة الحل)

وضع مستويين P_1 و P_2

ندرس الارتباط الخطي لشعاعي الناظم $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$

- مرتبطان خطياً: متوازيان
- غير مرتبطان خطياً: متقاطعان وفق مستقيم يمثل الفصل المشترك

وضع مستقيم d ومستوي P

ندرس تعامد شعاع التوجيه $\vec{u}$ مع الناظم $\vec{n}$

نحسب الجداء $\vec{n}\cdot\vec{u}$

- $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$: المستقيم يوازي المستوي
- $\vec{n}\cdot\vec{u} \neq 0$: المستقيم يقطع المستوي، نوجد نقطة التقاطع بالحل المشترك

المدرس: أنس درغام · Anas.darghamm@gmail.com · 0944709628

تموضع ثلاث مستويات P_1, P_2, P_3

• نحل جملة الثلاث معادلات بالمجاهيل الثلاث.

بمجاهيل ونميز ((الطريقة غاوس مثلاً))

- حل وحيد ← تتقاطع بنقطة
- حل بدلالة احد المجاهيل ← تتقاطع بفصل مشترك
- مستحيلة الحل ← متوازية
- عدد غير منتهٍ من الحلول ← منطبقة

تموضع مستوٍ مع كرة

نوجد بعد مركز الكرة Ω عن المستوي P

$dist(\Omega, P)$

- $dist(\Omega, P) = R$ ← المستوي يمس الكرة
- $dist(\Omega, P) < R$ ← المستوي يقطع الكرة
- $dist(\Omega, P) > R$ ← المستوي لا يشترك مع الكرة

ملاحظة هامة

★ لإثبات نقطة H ملتقى الارتفاعات في المثلث ABC

نثبت $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

فيكون H نقطة تلاقي ارتفاعين في مثلث فهي نقطة تلاقي الارتفاعات.

أفكار من سنوات سابقة

حجم الهرم

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S \cdot h}$$

S: مساحة قاعدة الهرم

h: ارتفاع الهرم ((البعد الرأس عن القاعدة))

• مساحة المثلث

$$\boxed{\text{المساحة} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}}$$

• مساحة مثلث قائم

$$\boxed{\text{المساحة} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}}$$

• مساحة المثلث متساوي الأضلاع

$$\boxed{\text{المساحة} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}$$

حيث a طول الضلع

• مساحة متوازي الأضلاع

$$\boxed{\text{المساحة} = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}$$

• مساحة المستطيل

$$\boxed{\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض}}$$

• مساحة المربع

$$\boxed{\text{المساحة} = (\text{طول الضلع})^2}$$

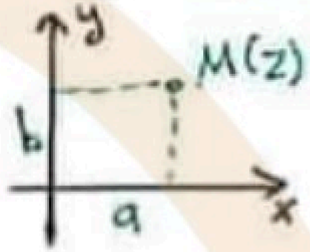
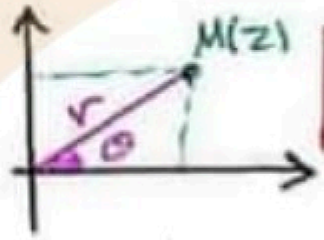
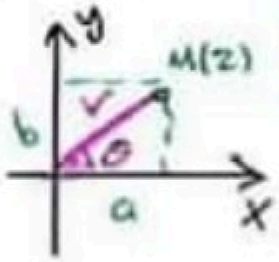
• مساحة شبه المنحرف

$$\boxed{\text{المساحة} = \frac{\text{القاعدة الصغرى} + \text{الكبرى}}{2} \times \text{الارتفاع}}$$

البحث الرابع

الأعداد العقدية C

المدرس أنس درغام

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
التمثيل	 $\boxed{Z=a+ib}$ a: الحقيقي $Re(z)$ b: التخيلي $Im(z)$	 $\boxed{Z=r[\cos\theta+i\sin\theta]}$ $\arg(z)=\theta+2\pi k$	 $\boxed{Z=re^{i\theta}}$ $\arg(z)=\theta+2\pi k$
الطويلة	$\lvert Z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert Z\rvert=r$ (حقيقي موجب r)	$\lvert Z\rvert=r$
المرافق	$\bar{Z}=a-ib$	$\bar{Z}=r[\cos\theta-i\sin\theta]$	$\bar{Z}=re^{-i\theta}$
التساوي	$Z_1=Z_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$	$Z_1=Z_2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1=\theta_2+2\pi k \\ r_1=r_2 \end{cases}$	$Z_1=Z_2 \begin{cases} \theta_1=\theta_2+2\pi k \\ r_1=r_2 \end{cases}$
الجمع والطرح	$Z_1\mp Z_2=(a_1\mp a_2)+i(b_1\mp b_2)$	—	—
الضرب	$Z_1\cdot Z_2=(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)$ ننشر مع مراعاة $i^2=-1$	$Z_1\cdot Z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ نضرب الأثرات ونجمع الستات	$Z_1Z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
القسمة	$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام	$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ نقسم الأثرات ونطرح الستات	$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
القوة	$Z^n=(a+ib)^n$ ننشر أو متطابقات	$Z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ "دستور دموافر"	$Z^n=r^ne^{in\theta}$ "دستور دموافر"

المدرس: أنس درغام Phone: 0944709526 email: Anas.dergham@gmail.com

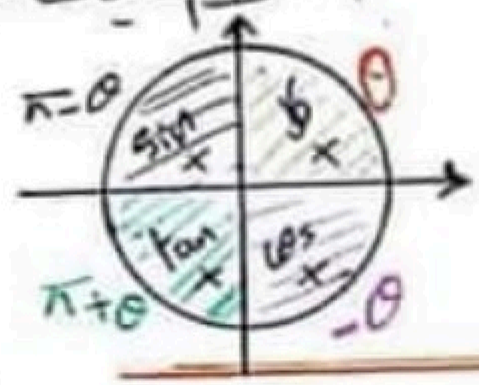
الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي والأسي

$$Z = a + ib$$

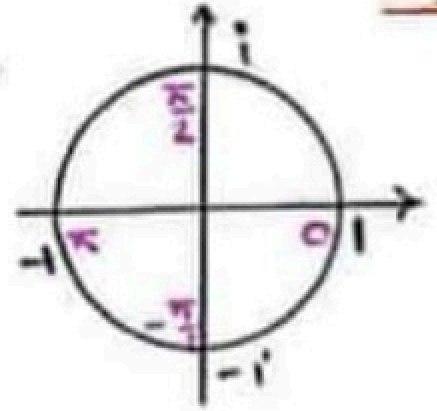
1. نوجد الطويلة r : $r = \sqrt{a^2+b^2}$
2. نخرج r عامل مشترك

$$Z = r\left[\underbrace{\frac{a}{r}}_{\cos\theta} + i\underbrace{\frac{b}{r}}_{\sin\theta}\right]$$

3. نستنتج الزاوية θ من الدائرة المثلثية بحسب الربع الواقعة فيه



انتبه



$$1 = e^{0i}$$
$$-1 = e^{\pi i}$$
$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$
$$-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

انتبه

- لإيجاد قسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z_1 ثم Z_2 ثم نوجد القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$
- لإيجاد Z^n بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z ثم نوجد Z^n (دموافر)

الجذور التربيعية

بالشكل الجبري

$$\boxed{Z = a + ib}$$

1. نفرض الجذر w من الشكل : $\boxed{w = x + iy}$

$$w^2 = Z$$

2. نكتب العلاقات

حفظ

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{-----} (1)$$
$$x^2 - y^2 = a \quad \text{-----} (2)$$
$$x \cdot y = \frac{b}{2} \quad \text{--} (3)$$

3. نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً بالجمع نجد $x = \mp$ و $y = \mp$
4. من (3) نناقش إشارة x و y فيكون

$x \cdot y > 0 \Leftarrow$ x و y لهما نفس الإشارة

$x \cdot y < 0 \Leftarrow$ x و y من إشارتين مختلفتين

بالشكل الأسي

$$\boxed{Z = re^{i\theta}}$$

1. نفرض الجذر من الشكل $\boxed{w = Re^{i\alpha}}$

$$w^2 = Z$$

2. نكتب العلاقات

حفظ

$$R = \sqrt{r}$$
$$\alpha = \frac{\theta}{2} + \pi k$$

3. نفرض $k = 0 \Leftarrow \alpha = \dots \Leftarrow w_0 = \text{---}$ الجذر الأول

$k = 1 \Leftarrow \alpha = \dots \Leftarrow w_1 = \text{---}$ الجذر الثاني

المدرس: أنس درغام
e-mail: Anas.dergham@gmail.com Phone: 0944709526

خواص المرافق $\bar{Z}$

① $z.\bar{z}=|z|^2$

② اذا كانت $|z|=1$ فإن $\bar{z}=\frac{1}{z}$ مهم

③ Z حقيقي $\Leftrightarrow$ $\bar{Z}=Z$
Z تخيلي بحت $\Leftrightarrow$ $\bar{Z}=-Z$ مهم

④ $\bar{\bar{Z}}=Z$

$\bar{Z}$ نظير Z بالنسبة للمحور $x'x$

مجموعة النقاط M

لإيجاد مجموعة النقاط M التي تحقق علاقة معطاة

- نفرض $Z=x+iy$
- نعوض في العلاقة فنحصل ع علاقة تحوي x و y
- اذا كانت من الدرجة الاولى (مستقيم)
  " " " الثانية ((دائرة))

بالاعتماد المربع الكامل نوجد مركزها ونصف قطرها

المدرس أنس درغام

حل المعادلات

تحوي Z و $\bar{Z}$

- نفرض $Z=a+ib$
  $\bar{Z}=a-ib$
- نعوض في المعادلة نحصل ع معادلتين بمجهولين a و b
- نحل جملة المعادلتين فنحصل ع a و b
  ويكون $Z=a+ib$

من الشكل $aZ^2+bZ+c=0$

نوجد $\Delta=b^2-4ac$ ونميز ثلاث حالات

$\Delta>0$: لها حلان حقيقيان

$$Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta=0$: لها حل واحد

$$Z=\frac{-b}{2a}$$

$\Delta<0$: لها حلان عقديان مترافقان

$$Z_1=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$$

$$Z_2=\bar{Z_1}$$

من الشكل $Z^2=a+ib$

حل المعادلة هو الجذر التربيعي للمقدار $a+ib$

نوجده كما درسنا سابقاً

المدرس: أنس درغام
Phone: 0944709526
e-mail: Anas.dergham@gmail.com

تطبيقات الأعداد العقدية

قوانين هامة

- كل نقطة $M(x,y)$ تمثل بعدد عقدي : $z_M = x+iy$
- كل شعاع $\vec{u}(x,y)$ يمثل بعدد عقدي : $z_{\vec{u}} = x+iy$
- العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

- طول قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{AB = |\overrightarrow{AB}| = |z_B - z_A|}$$

- منتصف قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$$

- مركز ثقل مثلث ABC

$$\boxed{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

- مركز الأبعاد المتناسبة (A,α) (B,β) (C,γ)

$$\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$$

الزاوية الموجهة

- $(\vec{u}, \vec{v}) = \arg \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

نتيجة هامة جداً جداً

① لإثبات تعامد مستقيمين AB و CD نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \text{تخيلي بحت}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{AB \perp CD}$$

② لإثبات توازي مستقيمين AB و CD نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \text{حقيقي}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = 0 \text{ أو } \pi \Rightarrow \boxed{AB \parallel CD}$$

التحويلات الهندسية

① الانسحاب T

M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}$ يمثله العدد العقدي b

$$\boxed{z' = z + b}$$

الصورة — شعاع الانسحاب

② التحاكي H

M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه w ونسبته k

$$\boxed{z' - w = k(z - w)}$$

الصورة — المركز — النسبة

③ التناظر المركزي S

M' صورة M وفق تناظر مركزه w

$$\boxed{z' - w = -(z - w)}$$

④ التناظر المحوري محوره ox

M' صورة M وفق تناظر محوره ox

$$\boxed{z' = \bar{z}}$$

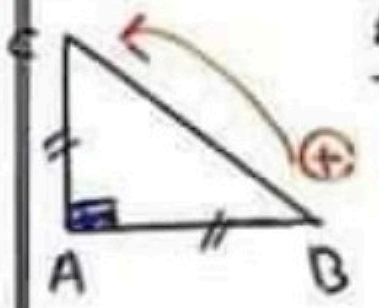
⑤ الدوران R

M' صورة M وفق دوران مركزه w وزاويته θ

$$\boxed{z' - w = e^{i\theta}(z - w)}$$

الصورة — المركز — الزاوية

تطبيقات هامة بالدوران



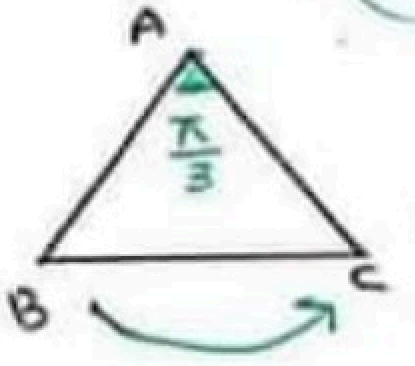
① • إذا كان ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A عندئذ

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c - a = i(b - a)$$

• أو B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b - a = -i(c - a)$$



② إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$c - a = e^{\frac{\pi}{3}i}(b - a)$$

((وكذلك بالنسبة لـ B و A))

مجموعتان خاصتان

$$\boxed{|z - w| = r}$$

الدائرة مركزها يمثله العدد العقدي w ونصف قطرها (R)

$$\boxed{|z - a| = |z - b|}$$

محور القطعة المستقيمة AB حيث A يمثله a و B يمثله b

المدرس: أنس درغام
Phone: 0944709526
e-mail: Anas.dergham@gmail.com

نتيجة هامة

* لاثبات ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A مثلا

طريقة أولى

نوجد النسبة

$$\frac{Z_{AB}}{Z_{AC}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \mp i \text{ تخيلي بحت}$$

نأخذ arg

$$\arg \frac{Z_{AB}}{Z_{AC}} = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow ABC \text{ قائم في } A$$

نأخذ الطويلة

$$\left|\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}}\right| = |\mp i| \Rightarrow \frac{|Z_{\vec{AB}}|}{|Z_{\vec{AC}}|} = 1 \Rightarrow |Z_{\vec{AB}}| = |Z_{\vec{AC}}|$$

$$\Rightarrow AB = AC$$

متساوي الساقين

طريقة ثانية

نثبت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\pm \frac{\pi}{2}$

فيكون ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A

الجذور التكعيبية

لإيجاد الجذر التكعيبي للعدد $Z = re^{i\theta}$

• نفرض الجذر $w = Re^{i\alpha}$

$$w^3 = Z$$

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \sqrt[3]{r} \\ \alpha &= \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi k}{3} \end{aligned}}$$

الجذور التكعيبية الثلاثة نستخدم !!!

نعوض $k=0$ نوجد الجذر الأول w_0

نعوض $k=1$ نوجد الجذر الثاني w_1

نعوض $k=2$ نوجد الجذر الثالث w_2

ملاحظة:

حل المعادلة $Z^3 = re^{i\alpha}$

هو الجذر التكعيبي للمقدار $re^{i\alpha}$

المدرس: أنس درغام

6

البحث السادس

التحليل التوافقي

التباديل $n!$

- $n! = n(n-2) \cdots \times 1$
- $n! = n(n-1)!$
  $= n(n-1)(n-2)!$
  $= \cdots$
- $0! = 1$, $1! = 1$

عدد تباديل مجموعة مؤلفة من n عنصراً هو $n!$

التراتيب P_n^r ، $n \geq r$

- $P_n^r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{r \text{ مرة}}$
- $P_n^n = n!$
- $P_n^1 = n$

★ لاختيار r عنصراً مختلفاً من مجموعة تحوي n عنصراً (الاسلوب الهام لترتيب العناصر المختارة) نستخدم P_n^r التراتيب

★ لتوزيع أو (ترتيب) r عنصراً مختلفاً على n مكاناً نستخدم P_n^r

التوافيق $\binom{n}{r}$ ، $n \geq r$

- $\binom{n}{r} = \dfrac{P_n^r}{r!}$
- $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ هامة في حل مسائل وإثبات مبرهنات
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- هام: $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$ إما $r_1 = r_2$ أو $r_1 + r_2 = n$

لاختيار r عنصراً من مجموعة تحوي n عنصراً (لا الاسلوب الهام لترتيب العناصر المختارة) نستخدم التوافيق $\binom{n}{r}$

أ. خضر
المدرس: أنس درغام

منشور ذو الحدين

$$(a\mp b)^n=\underbrace{\binom{n}{0}a^n\cdot b^0}_{a^n}\mp\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2\mp\cdots+\underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r}_{t_r\ \text{الحد ذو الدليل}\ r}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^0\cdot b^n}_{b^n}$$

نتائج

- عدد الحدود $n+1$ والحد الأول a^n والأخير b^n
- الحد ذو الدليل r يعطى بالعلاقة $t_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

وفي حالة $(a-b)^n$ عندئذٍ $t_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r(-1)^r$

تنبيهات هامة

- اذا طلب الحد الذي يحوي X^9 نوجد t_r ثم نعوض
الحد الذي يحوي X^9 يحقق الأس يساوي 9
نحل المعادلة فنوجد r ثم نحسب الحد t_r
- اذا طلب الحد الثابت (المستقل عن X)
نحل بنفس الطريقة ونعوض الأس يساوي
الصفر نوجد r ثم t_r
((n و r عدد طبيعيان))

قوى النسب المثلثية $\cos^n x$, $\sin^n x$

أويلر

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

!!!

لإيجاد $\sin^n x$ أو $\cos^n x$
نستخدم دستورا أويلر لـ $\sin$
أو $\cos$
ثم نوجد $\sin^n x$ أو $\cos^n x$

المدرس أيمن ديوب

البحث السابع — الاحتمالات

① العمليات على الاحداث

- $A\cap B$: A تقاطع B تعني وقوع A و B معاً
- $A\cup B$: A اتحاد B تعني وقوع احد الحدثين على الأقل
- A' : متمم A يعني عدم وقوع الحدث A

② قانون الاحتمال

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$n(A)$ ← عدد الحالات الموافقة

$n(\Omega)$ ← عدد الحالات الكلية

دمورغان:

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$0\le P(A)\le 1$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A')=1-P(A)$$

③ الاستقلال الاحتمالي

يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً اذا تحقق الشرط

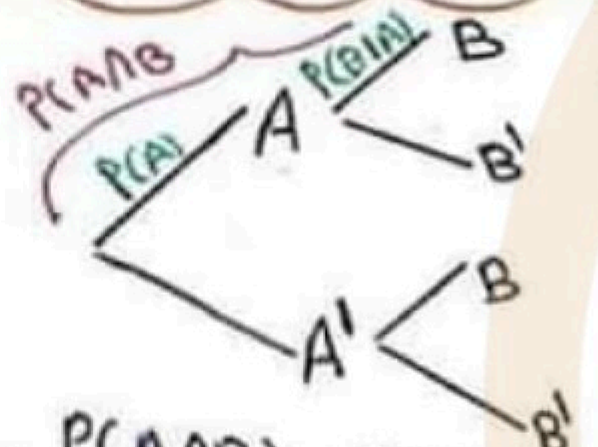
$$P(A).P(B)=P(A\cap B)$$

④ الاحتمال المشروط والمخطط الشجري

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{?}{?}$$

((الاحتمال A شرط B))

⑤ المخطط الشجري



$\star$ $P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$

!!!

ملاحظة ①

$P(B|A)$ نوجده مباشرة من المخطط الشجري

$P(A|B)$ نكتب القانون ثم نعوض فيه

ملاحظة ②

في مسائل سحب الكرات أو البطاقات

- معاً ((توافيق))
- تتالي دون اعادة ((توافيق))
- تتالي مع اعادة ((برنولي))

المتحول العشوائي

قيم المتحول X

$$X=\{X_1, X_2, X_3 \dots X_i\}$$

قانونه الاحتمالي

- $P(X=X_1)=\dots$
- $P(X=X_2)=\dots$

⋮

- $P(X=X_i)=\dots$

المجموع = 1

X_i	X_1	X_2	...	X_i
$P(X_i)$	$P(X_1)$	$P(X_2)$	--	$P(X_i)$
$X_i P(X_i)$	$X_1 P(X_1)$	$X_2 P(X_2)$	--	$X_i P(X_i)$

التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum X_i P(X_i)$$

التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

الانحراف المعياري

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

المتحولان العشوائيان المستقلان

اذا كان المتحول X والمتحول Y عندئذ جدول القانون الاحتمالي لزوج المتحولين (X,Y) هو:

$X \backslash Y$	X_1	X_2	----	Y_j	قانون X
X_1	$P(X_1\cap Y_1)$	$P(X_1\cap Y_2)$	----	$P(X_1\cap Y_j)$	$P(X_1)$
X_2	$P(X_2\cap Y_1)$	$P(X_2\cap Y_2)$	---	$P(X_2\cap Y_j)$	$P(X_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
X_i	$P(X_i\cap Y_1)$	$P(X_i\cap Y_2)$	---	$P(X_i\cap Y_j)$	$P(X_i)$
قانون Y	$P(Y_1)$	$P(Y_2)$	---	$P(Y_j)$	1

يكون المتحولان X وY مستقلان احتمالياً اذا تحقق الشرط

$$P(X_i)\cdot P(Y_i)=P(X_i\cap Y_i)$$

التجارب البرنولية

اذا كانت التجربة تتكرر n مرة ونريد ايجاد وقوع حدث ما k مرة فالتجربة برنولية

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

حيث

- n عدد مرات تكرار التجربة
- k عدد المرات المطلوبة
- p احتمال وقوع الحدث في المرة الواحدة
- q متمم لـ p: $q=1-p$

التوقع الرياضي

$$E(X)=n\cdot p$$

التباين

$$V(X)=n\cdot p\cdot q$$

الانحراف المعياري

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

المدرس: أنس درغام
Phone: 0944709526
e-mail: Anas.dergham@gmail.com