مراجعة المتتاليات مع نهايتها

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\int \overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

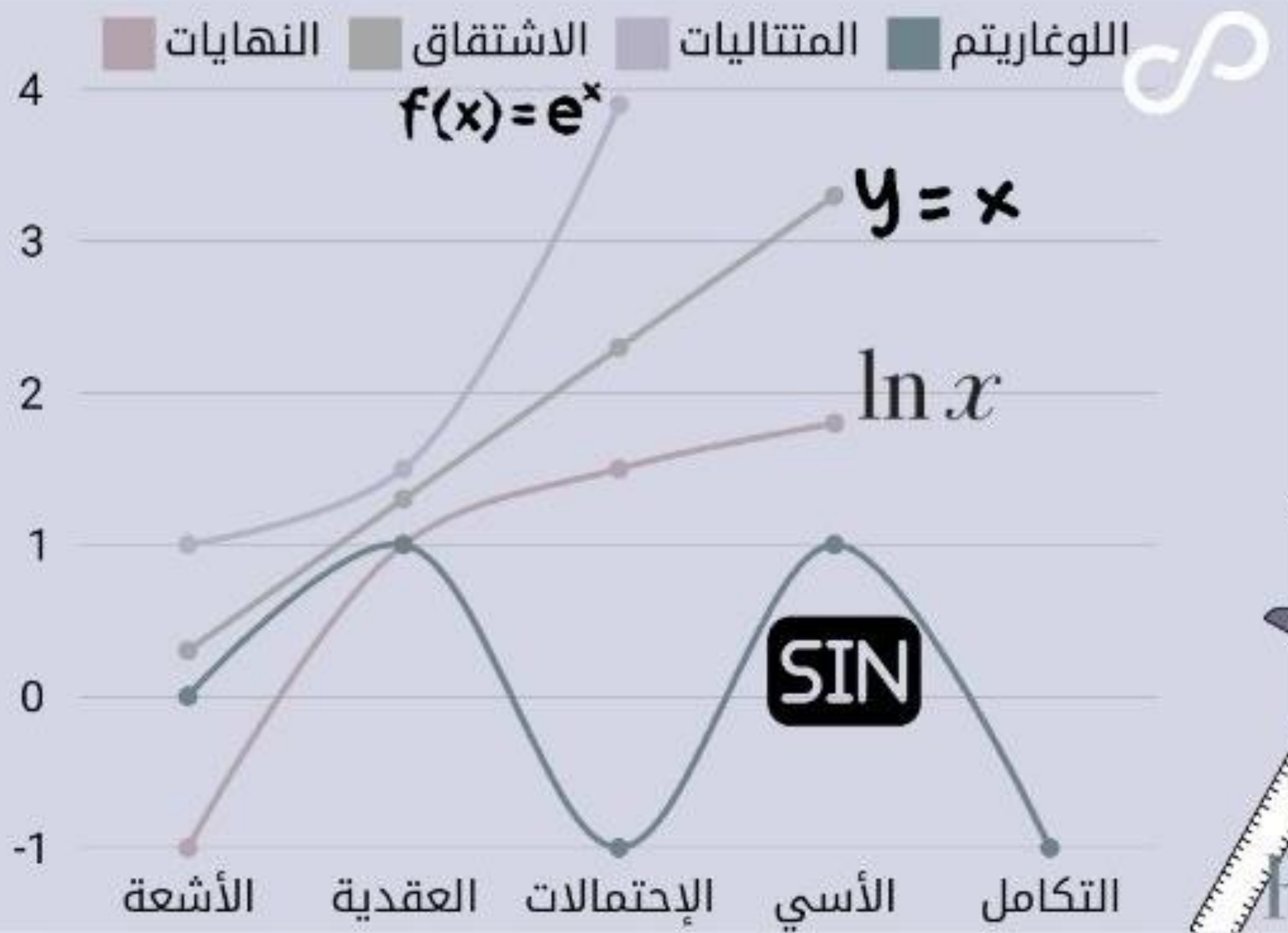
0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$ $\qquad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\qquad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\qquad$ $10a + 3b - 2c$



${}^{n}P_{r}$

$P(A)$

بسم الله الرحمن الرحيم موافقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة المتتاليات ونهايتها مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح "الطباعة ملون حصرا"

المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$: هي تابع مجموع تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية N

أنواع المتتاليات

المتتالية الصريحة	متتالية المجاميع	المتتالية التدريجية
مثال	مثال	مثال
$u_n = 3n + 5$	$u_n = 1 + 2 + .. + n$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$
وهي تسلك سلوك تابع يمكن حساب كل حد بتعويض بدل n	يمكن حساب كل حد بإضافة عدد للذي قبله	يمكن حساب كل حد بدلالة اللذي قبله

مثال: لدينا لمتتالية $u_n = 2^n + 5n$ إن الحدود الخمسة الأولى حيث $n \geq 1$ هي

A	7,14,23,36,57	B	6,12,24,25,35
C	5,11,21,35,56	D	5,14,23,36,57

لدينا المتتالية بالشكل الصريح لإنها بدلالة n إذا" نعوض في المتتالية بدءا" من 1

$n = 1 \quad u_1 = 2^1 + 5(1) = 2 + 5 = 7$

$n = 2 \quad u_2 = 2^2 + 5(2) = 4 + 10 = 14$

$n = 3 \quad u_3 = 2^3 + 5(3) = 8 + 15 = 23$

$n = 4 \quad u_4 = 2^4 + 5(4) = 16 + 20 = 36$

$n = 5 \quad u_5 = 2^5 + 5(5) = 32 + 25 = 57$

مثال: لدينا المتتالية $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2$ إن الحدود الخمسة الأولى حيث $n \geq 1$ هي

A	1,4,15,36,57	B	3,12,24,25,35
C	2,4,21,35,56	D	1,5,14,30,55

لدينا المتتالية بشكل مجموع لإنها بدلالة n إذا" نحسب كل حد بجمع عدد للذي قبله بدءا" من 1 $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2$

$n = 1 \quad u_1 = 1^2 = 1$

$n = 2 \quad u_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$n = 3 \quad u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$n = 4 \quad u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

$n = 5 \quad u_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

مثال: لدينا المتتالية $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ إن الحدود الخمسة الأولى هي

A	1,2,5,14,22	B	−1,1,−5,13,−29
C	1,−1,−5,−13,−29	D	1,1,5,13,29

لدينا المتتالية بالشكل التدريجي إذا" نحسب كل حد بدلالة اللذي قبله بدءا" من 1

$n = 1 \quad u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$

$n = 2 \quad u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$n = 3 \quad u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$n = 4 \quad u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -10 - 3 = -13$

$n = 5 \quad u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -26 - 3 = -29$

مثال: لتكن لدينا المتتالية $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ إن قيمة u_2 هي

A	$u_2 = 2\sin\theta$	B	$u_2 = 2\cos\theta$
C	$u_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}$	D	$u_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2(1 + \cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

تذكرة: $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ ومنه نستنتج $1 + \cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{4}$

اللهُم أجعل لما أسعى إليه يسعى إلي
اللهُم وفقني أينما كنت وييسر لي أمري

ملاحظة: لحساب u_{n+1}
في المتتالية الصريحة نعوض بدل كل n ب $n + 1$
في متتالية المجاميع نضيف الحد اللذي يلي الحد n ويسلك نفس سلوك المتتالية

مثال: لدينا المتتالية $u_n = \frac{3^{2n}}{n^2(n+3)}$ فإن u_{n+1} هي

A	$\frac{3^{2n+2}}{(n+1)^2(n+4)}$	B	$\frac{3^{2n+2}}{(n+1)^2(n+4)}$
C	$\frac{3^{2n+2}}{(n+1)^2(n+4)}$	D	$\frac{3^{2n+2}}{(n+1)^2(n+4)}$

$$u_n = \frac{3^{2n}}{n^2(n+3)}$$

$$u_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{(n+1)^2(n+1+3)} = \frac{3^{2n+2}}{(n+1)^2(n+4)}$$

مثال: لدينا المتتالية $u_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots n^3$ فإن u_{n+1} هي

A	$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3(n+1)^3$	B	$1^3 + 2^3 + \ldots. + n^3$
C	$1^3 + 2^3 + \ldots. + n^3 + (n+1)^3$	D	$2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3$

أن المتتالية هي أضافة حدود اس3 نضيف الحد الذي يلي n^3 و هو $(n+1)^3$

مثال: لدينا المتتالية $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots n^2$ فإن

A	$s_{n+1} = s_n + (n-1)^2$	B	$s_{n+1} = s_n + n^2$
C	$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$	D	$s_{n+1} = s_n + n$

نلاحظ أن المتتالية هي أضافة حدود اس2 نضيف الحد اللذي يلي n^2 واللذي هو $(n+1)^2$ نجد أن $s_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots n^2 + (n+1)^2$
إذا" نجد أن $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$

كيف نكتب متتالية معرفة بالتدريج بدلالة n يمكن ذلك بالتخمين حيث نحسب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية ثم نحسب $u_n - u_{n+1}$ ثم نستنتج شكل المعادلة ثم نعوض u_{n+1} بما يساويها ونعزل u_n

مثال: لدينا المتتالية $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ إن المتتالية تكتب بالشكل الصريح

A	$u_n = 2 - 3^n$	B	$u_n = 5 - 2^n$
C	$u_n = 3 - 2^n$	D	$u_n = 5n + 2$

نحسب الحدود الخمسة الأولى

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_n	2	1	−1	−5	−13	−29

نطرح كل حد من اللذي بعده فنجد

$u_n - u_{n+1}$	1	2	4	8	16	32

نلاحظ أن كل حد ينتج عن اللذي بعده بضربه بالعدد 2 إذا" نخمن شكل

$$u_n - u_{n+1} = 2^n$$

نعوض u_{n+1} بما يساويها نجد

$$u_n - (2u_n - 3) = 2^n$$
$$u_n - 2u_n + 3 = 2^n$$
$$-u_n = 2^n - 3$$
$$u_n = 3 - 2^n$$

مثال: لدينا المتتالية $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$ إن المتتالية تكتب بدلالة n بالشكل

A	$u_n = 3n$	B	$u_n = (-1)^n + 2$
C	$u_n = 3n + 5$	D	$u_n = (-1)^n + 3$

نحسب الحدود الخمسة الأولى

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_n	3	1	3	1	3	1

نطرح كل حد من اللذي بعده فنجد

$u_n - u_{n+1}$	2	−2	2	−2	2	−2

نلاحظ أن كل الحدود هي 2 ولكن أشارتها تتغير إذا" مضروبة بالحد $(-1)^n$

$$u_n - u_{n+1} = 2(-1)^n$$

نعوض u_{n+1} بما يساويها نجد

$$u_n - (-u_n + 4) = 2(-1)^n$$
$$u_n + u_n - 4 = 2(-1)^n$$
$$u_n = (-1)^n + 2$$

$(-1)^n$ هو الحد اللذي يجعل المتتالية تغير إشارتها

0997047862

المدرس : راتب كسيبي

إطراد متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تكون المتتالية متزايدة تماما"إذا كان	تكون المتتالية متناقصة تماما"إذا كان	تكون المتتالية ثابتة إذا كان
$u_{n+1} > u_n$	$u_{n+1} < u_n$	$u_n = u_{n+1}$
كل حد أكبر من قبله	كل حد أصغر من قبله	كل حدوده متساوية

طرق دراسة اطراد متتالية

1-نشكل تابع $f(x)$ 2-ندرس أشارة المشتق 3-نميز ثلاث حالات $\acute{f} > 0$ تكون متزايدة $\acute{f} < 0$ تكون متناقصة $\acute{f} = 0$ تكون ثابتة 4-اطراد u_n مثل اطراد $f(x)$ ملاحظة: نستعمل هذه الطريقة في حال كانت المتتالية صريحة وتشبه تابع	1-نحسب المقدار $u_{n+1} - u_n$ 2-نميز ثلاث حالات $u_{n+1} - u_n > 0$ تكون المتتالية متزايدة $u_{n+1} - u_n < 0$ تكون المتتالية متناقصة $u_{n+1} - u_n = 0$ تكون المتتالية ثابتة ملاحظة: نستعمل هذه الطريقة في حال كانت المتتالية متتالية مجاميع	1- نحسب المقدار $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 2-نميز ثلاث حالات $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ تكون المتتالية متزايدة $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ تكون المتتالية متناقصة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ تكون المتتالية ثابتة ملاحظة: نستعمل هذه الطريقة في حال كانت المتتالية أس n أو فيها عاملة

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	متزايدة	**متناقصة**

هذه المتتالية صريحة وتشبه تابع إذا نشكل التابع $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

نشتقه $\acute{f}(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ نلاحظ أن البسط سالب والمقام موجب إذا" المقدار سالب إذا $\acute{f}$ سالب إذا" u_n متناقصة

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = \frac{n}{10^n}$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	متزايدة	**متناقصة**

هذه المتتالية صريحة ولدينا أس n إذا نحسب u_{n+1} نجد $u_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n} = \frac{(n+1)\cancel{10^n}}{\cancel{10^n} \times 10(n)} = \frac{n+1}{10n}$$

لنقارن هذا المقدار مع 1

لنجرب الحد $n = 1$ نجد $\frac{2}{20} < 1$

إذا" $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ إذا المتتالية متناقصة

في الكسور إذا كان البسط أكبر من المقام إذا" هو أكبر من الواحد إذا كان المقام أكبر من البسط

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = \frac{n^2}{n!}$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	متزايدة	**متناقصة**

هذه المتتالية صريحة ولدينا $n!$ إذا" $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$

$(n+1)! = n(n+1)!$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

لنقارن هذا المقدار مع 1 لنجرب $n = 1$ نجد $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$

لنجرب $n = 2$ نجد $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} < 1$ ونجرب باقي الحدود نجد انها متناقصة

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots\dots + \frac{1}{2^n}$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	**متزايدة**	متناقصة

لدينا هذه المتتالية متتالية مجاميع إذا" لنحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots\dots + \cancel{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

ولدينا

$$u_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \dots\dots + \cancel{\frac{1}{2^n}}$$

ويكون لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ وهو مقدار موجب إذا" هي متزايدة

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	متزايدة	متناقصة

لدينا هذه المتتالية صريحة ولكن لاتشبه تابع وهي أسية ولكن لايمكن الأختصار إذا" لنجرب عدة حدود لنعرف نوعها

$$u_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 = -1$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

نلاحظ أن هذه المتتالية ليست متزايدة وليست متناقصة إذا" هي غير مطردة

مثال: إن المتتالية التالية $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n - 3$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	متزايدة	**متناقصة**

لدينا هذه المتتالية معرفة بالتدريج ونلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$

إذا" مباشرة نجد أنها متناقصة

مثال: إن المتتالية التالية $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2u_n$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	**متزايدة**	متناقصة

لدينا هذه المتتالية معرفة بالتدريج ونلاحظ أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

إذا" مباشرة نجد أنها متزايدة

مثال: إن المتتالية التالية $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	**ثابتة**	متزايدة	متناقصة

لدينا هذه المتتالية معرفة بالتدريج نجرب عدة حدود لنعرف نوعها

$$u_0 = 8$$

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

نلاحظ أنها متتالية ثابتة

مثال: إن المتتالية التالية $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	**متزايدة**	متناقصة

لدينا هذه المتتالية معرفة بالتدريج نجرب عدة حدود لنعرف نوعها

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$$

نلاحظ أنها متتالية متزايدة ونثبت ذلك بالتدريج

مثال: إن المتتالية التالية $u_n = \sqrt{3n+1}$ هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	**متزايدة**	متناقصة

لدينا هذه المتتالية صريحة وتشبه تابع إذا" نشكل التابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$

نشتقه نجد $\acute{f}(x) = \frac{3}{2\sqrt{3n+1}}$ وهذا المقدار موجب إذا" هذه المتتالية متزايدة

مثال: لدينا المتتالية $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}$

ولدينا المتتالية $v_n = u_{2n} - u_n$ إن المتتالية v_n هي متتالية

A	B	C	D
غير مطردة	ثابتة	**متزايدة**	متناقصة

لدينا $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{n+n}$

$\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$

ولدينا $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}$

إذا" $v_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}$

و $v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots\dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

ومنه نجد $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}$

بتوحيد المقامات نجد $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$

المتتالية الحسابية

هي متتالية ينتج كل حد عن اللذي قبله بجمعه بعدد حقيقي r

مثال: $u_n = 2n+1$ لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = 3$ و $u_2 = 5$ و $u_3 = 7$

نجد أن كل حد ينتج عن اللذي قبله بجمعه بالعدد $r = 2$ إذاً

المتتالية حسابية واساسها $r = 2$

لإثبات أن متتالية حسابية أو لحساب اساس المتتالية نستخدم العلاقة

$$u_{n+1} - u_n = r$$

مثال:إن المتتالية التالية $u_n = 3n+1$ هي متتالية

A	متتالية حسابية اساسها $r = 2$	B	متتالية هندسية اساسها $q = 3$
C	**متتالية حسابية اساسها $r = 3$**	D	متتالية هندسية اساسها $q = 3$

نلاحظ أن المتتالية في الغالب هي حسابية لإنها لاتحوي أسس

إذا لنحسب $u_{n+1} - u_n$ لدينا $u_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+4$

$$u_{n+1} - u_n = 3n+4-(3n+1) = 3$$

اذاً هو عدد حقيقي وهي متتالية حسابية اساسها $r = 3$

مثال:إن المتتالية التالية $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ هي متتالية معرفة بالتدريج

إن المتتالية $u_n = \frac{1}{v_n}$ هي متتالية

A	متتالية حسابية اساسها $r = 2$	B	متتالية هندسية اساسها $q = 2$
C	**متتالية حسابية اساسها $r = 1$**	D	متتالية هندسية اساسها $q = 1$

لنحسب $u_{n+1} - u_n$ لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} = \frac{1+v_n}{v_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = \frac{1+v_n-1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

اذاً هو عدد حقيقي وهي متتالية حسابية اساسها $r = 1$

لكتابة u_n بدلالة n أو لحساب اساس متتالية علم حدين منها او لحساب حد من متتالية علم اساسها واحد حدودها أو لحساب حد من متتالية نستعمل العلاقة

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

مثال:لدينا u_n متتالية حسابية اساسها $r = 3$ و $u_0 = -2$ إن u_n بدلالة n هي

A	$u_n = 3n+1$	B	$u_n = 4n-1$
C	**$u_n = 3n-2$**	D	$u_n = 2n+2$

لدينا اساسها واحد حدودها اذاً نستعمل القانون

$$u_n = u_p + (n-p)r$$
$$u_n = u_0 + (n-0)3$$
$$u_n = -2+3n$$

مثال:لدينا u_n متتالية حسابية فيها $u_2 = 7$ و$u_0 = 1$ إن u_n بدلالة n هي

A	**$u_n = 3n+1$**	B	$u_n = 4n-1$
C	$u_n = 3n-1$	D	$u_n = 2n+1$

أن أساسها غير معروف نحسبه من القانون $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_2 = u_0 + (2-0)r$$
$$7 = 1+2r$$
$$r = 3$$

ثم نستعمل هذا القانون لكتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 + (n-0)3$$
$$u_n = 3n+1$$

مثال:لدينا u_n متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و$u_5 = -13$ إن u_n او u_{20}

A	$u_{20} = 125$	B	$u_{20} = -365$
C	$u_{20} = -18$	D	**$u_{20} = -283$**

أن أساسها غير معروف نحسبه من القانون $u_n = u_p + (n-p)r$

$$u_5 = u_2 + (5-2)r$$
$$-13 = 41+3r$$
$$r = -18$$

ثم نستعمل هذا القانون لحساب u_{20}

$$u_{20} = u_2 + (20-2)(-18)$$
$$u_{20} = 41+(18)(-18) = -283$$

"وتُعجزك الأسباب، والله لا يُعجزهُ شيء اللهُم وفقني أينما كنت"

المتتالية الهندسية

هي متتالية ينتج كل حد عن اللذي قبله بضربه بعدد حقيقي q

مثال: $u_n = 3^n$ لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = 3$ و $u_2 = 9$ و $u_3 = 27$

نجد أن كل حد ينتج عن اللذي قبله بضربه بعدد $q = 3$ إذاً

المتتالية هندسية واساسها $q = 3$

لإثبات أن متتالية هندسية أو لحساب اساس المتتالية نستخدم العلاقة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

مثال:إن المتتالية التالية $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ هي متتالية

A	متتالية حسابية اساسها $r = 2$	B	**متتالية هندسية اساسها $q = \frac{2}{3}$**
C	متتالية حسابية اساسها $r = 3$	D	متتالية هندسية اساسها $q = \frac{3}{2}$

نلاحظ أن المتتالية في الغالب هي هندسية لإنها تحوي أسس

$a^n \times a^m = a^{m+n}$

إذا لنحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ لدينا $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2^n \times 2}{3^n \times 3^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^n \times 2}{3^n \times 3^2}}{\frac{2^n}{3^n \times 3}} = \frac{\cancel{2^n} \times 2}{\cancel{3^n} \times 3^2} \times \frac{\cancel{3^n} \times 3}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{3}$$

اذاً هو عدد حقيقي وهي متتالية هندسية اساسها $q = \frac{2}{3}$

مثال:إن المتتالية التالية $v_{n+1} = av_n + b$ هي متتالية معرفة بالتدريج

إن المتتالية $u_n = v_n + \frac{b}{a-1}$ هي متتالية

A	متتالية حسابية اساسها $r = a$	B	**متتالية هندسيةاساسها $q = a$**
C	متتالية حسابية اساسها $r = b$	D	متتالية هندسيةاساسها $q = b$

لنحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ لدينا $u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{b}{a-1} = av_n + b + \frac{b}{a-1}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{av_n + b + \frac{b}{a-1}}{v_n + \frac{b}{a-1}} = \frac{a\left(v_n + \frac{b}{a} + \frac{\frac{b}{a-1}}{a}\right)}{v_n + \frac{b}{a-1}}$$

دائماً أخرج عامل مشترك

$$= \frac{a\left(v_n + \frac{b}{a} + \frac{b}{a(a-1)}\right)}{v_n + \frac{b}{a-1}} = \frac{a\left(v_n + \frac{b(a-1)}{a(a-1)} + \frac{b}{a(a-1)}\right)}{v_n + \frac{b}{a-1}}$$

$$\frac{a\left(v_n + \frac{ab-b+b}{a(a-1)}\right)}{v_n + \frac{b}{a-1}} = \frac{a\left(v_n + \frac{b}{a-1}\right)}{v_n + \frac{b}{a-1}} = a$$

اذاً هو عدد حقيقي وهي متتالية هندسية اساسها $q = a$

لكتابة u_n بدلالة n أو لحساب اساس متتالية علم حدين منها او لحساب حد من متتالية علم اساسها وأحد حدودها أو لحساب حد من متتالية نستعمل العلاقة

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

مثال:لدينا u_n متتالية هندسية اساسها $r = 3$ و $u_0 = -2$ إن u_n بدلالة n هي

A	$u_n = -3(2)^n$	B	**$u_n = -2(3)^n$**
C	$u_n = 3(2)^n$	D	$u_n = -2(3)^{n+1}$

لدينا اساسها واحد حدودها اذاً نستعمل القانون

$$u_n = u_p q^{n-p}$$
$$u_n = u_0 q^{n-0}$$
$$u_n = -2(3)^n$$

مثال:لدينا u_n متتالية حسابية فيها $u_3 = 27$ و$u_0 = 1$ إن u_n بدلالة n هي

A	$u_n = 2$	B	$u_n = 2(3)^n$
C	**$u_n = 3^n$**	D	$u_n = 5+2^n$

أن أساسها غير معروف نحسبه من القانون $u_n = u_p q^{n-p}$

$$u_3 = u_0 q^{3-0}$$
$$27 = q^3$$
$$q = 3$$

ثم نستعمل هذا القانون لكتابة u_n بدلالة n

$$u_n = u_p q^{n-p}$$
$$u_n = u_0 3^{n-0}$$
$$u_n = 3^n$$

المتتالية الحسابية

لحساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية $s = u_i + u_{i+1} + \dots + u_j$
أو لكتابة مجموع s بدلالة n نستخدم القانون

$$s = n\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

حيث n هو عدد الحدود يمكن أن يكون واضح ويمكن حسابه بالشكل $n = j - i + 1$ حيث j هو دليل الحد الأخير و i هو دليل الحد الأول
a هو قيمة الحد الأول أي u_i و b هو قيمة الحد الأخير أي u_j

مثال: u_n متتالية حسابية فيها $r = 3$ و $u_1 = -2$
أن قيمة المجموع $s = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ هي

A: $s = 510$	B: $s = 520$	C: **$s = 530$**	D: $s = 540$

إن قانون حساب مجموع في متتالية حسابية هو $s = n\left(\frac{a+b}{2}\right)$
و n هو عدد الحدود وهو واضح انه 20 يمكن حسابه بالشكل $n = 20 - 1 + 1$
أما a هو الحد الأول وهو $u_1 = -2$
أما b فهو الحد الأخير وهو u_{20} لكنه غير معروف يمكن حسابه بالقانون

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

$$u_{20} = u_1 + (20-1)3 = 55$$

الأن يمكن حساب المجموع

$$s = n\left(\frac{a+b}{2}\right) = 20\left(\frac{-2+55}{2}\right) = 530$$

مثال: ان قيمة المجموع $s = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$ هي

A: $s = 155$	B: **$s = 105$**	C: $s = 210$	D: $s = 240$

في البداية نلاحظ أنه إذا ضربنا المعادلة ب 2 فإنها ستصبح ابسط

$$2s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots + 20$$

الأن لنحدد نوعها نلاحظ أنها متتالية حسابية أساسها $r = 1$
لإن كل حد ينتج عن قبله بجمعه بالعدد 1
إن قانون حساب مجموع في متتالية حسابية هو $s = n\left(\frac{a+b}{2}\right)$
و n هو عدد الحدود وهو واضح انه 20
أما a هو الحد الأول وهو 1
أما b فهو الحد الأخير وهو 20 إذاً يمكننا حساب المجموع

$$2s = n\left(\frac{a+b}{2}\right) = 20\left(\frac{20+1}{2}\right) = 210$$

إذاً $s = \frac{210}{2} = 105$

إذا كانت a و b و c ثلاثة جدود متوالية من متتالية حسابية كان $2b = a + c$
إذا كانت a و b و c ثلاثة جدود متوالية من متتالية هندسية كان $b^2 = a.c$

مثال: إذا كانت a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية وكان $a + b + c = 9$ و $abc = 27$ إن قيمة c هي

A: $c = 1$	B: **$c = 3$**	C: $c = 2$	D: $c = 5$

لدينا العلاقة $b^2 = a.c$ ومنه من العلاقة الثانية $abc = 27$
إذاً نجد $b^3 = 27$ ومنه $b = 3$ نعوض في المعادلتين نجد

نحل معادلتين

$$\begin{cases} a3c = 27 \\ a + 3 + c = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac = 9 \\ a + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac = 9 \\ a = 6 - c \end{cases}$$

نعوض المعادلة الثانية بالأولى نجد $(6 - c)c = 9$
إذاً $6c - c^2 = 9 \leftarrow c^2 - 6c + 9 = 0$
نحل المعادلة $(c - 3)(c - 3) = 0$
إذاً $c = 3$

سأصلي كل ليلة ، وسأدعوا كل يوم
بل كل دقيقة بلا ملل وبلا يأس ، من أجل أن أطمئنَ ويهدأ خوفي ، من أجل أن يجفَ مُحيطُ تعبي .
من أجل هذا اليوم الذي سأردُ فيه
"فرحِينَ بما آتاهم الله من فضلهِ"

المتتالية الهندسية

لحساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية $s = u_i + u_{i+1} + \dots + u_j$
أو لكتابة مجموع s بدلالة n نستخدم القانون

$$s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حيث n هو عدد الحدود يمكن أن يكون واضح ويمكن حسابه بالشكل $n = j - i + 1$ حيث j هو دليل الحد الأخير و i هو دليل الحد الأول
a هو قيمة الحد الأول أي u_i و q هو اساس المتتالية

مثال: u_n متتالية حسابية فيها $q = 2$ و $u_0 = 1$
أن قيمة المجموع $s = u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$ هي

A: **$s = 2040$**	B: $s = 25$	C: $s = 240$	D: $s = -14$

إن قانون حساب مجموع في متتالية هندسية هو $s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$
و n هو عدد الحدود وهو يمكن حسابه بالشكل $n = 10 - 3 + 1 = 8$
أما a هو الحد الأول وهو u_3 ولكنه غير موجود يمكن حسابه من العلاقة

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

$$u_3 = u_0 2^{3-0} = 8$$

الأن يمكن حساب المجموع

$$s = 8\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = (-8)(-255) = 2040$$

مثال: ان قيمة المجموع $s = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ هي

A: $s = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$	B: **$s = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$**
C: $s = 2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$	D: $s = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لنحدد نوعها نلاحظ أنها متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$
لإن كل حد ينتج عن قبله بضربه بالعدد $\frac{1}{3}$
إن قانون حساب مجموع في متتالية هندسية هو $s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$
و n هو عدد الحدود وهو $n = n - 1 + 1 = n$
أما a هو الحد الأول وهو $\frac{1}{3}$

$$s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ملاحظة : لحساب مجموعة حدود غير متعاقبة في المتتالية الهندسية
نغير q لنجعلها q^k حيث k هوعدد الخطوة ونغير n حيث تصبح $n = \frac{j-i}{k} + 1$

مثال: لدينا u_n متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$
احسب قيمة المجموع $s = u_2 + u_4 + u_6 \dots + u_{2n}$ بدلالة n

A: $s = \frac{5}{4}(1 - 3^n)$	B: $s = \frac{3}{4}(1 - 3^n)$
C: **$s = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$**	D: $s = 3(1 - 3^{2n-2})$

إن قانون حساب مجموع في متتالية هندسية هو $s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$
لكن نلاحظ أن حدود هذه المتتالية غير متعاقبة وهي تخطي خطوتين في كل مرة
لنحسب q الجديدة $q = 3^2 = 9$
و n هو عدد الحدود نحسبه بالشكل $n = \frac{2n-2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$
أما a هو الحد الأول وهو u_2 ولكنه غير موجود يمكن حسابه من العلاقة

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

$$u_2 = u_1 3^{2-1} = -6$$

الأن يمكن حساب المجموع

$$s = -6\left(\frac{1-9^n}{1-9}\right) = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$$

تركتُها لكَ يا الله في ثقة
أن الأمورَ على خيرٍ سَتجريها ❤

الإثبات بالتدريج

لنثبت أن قضية $E(n)$ صحيحة نتبع الخطوات :

١- نثبت صحة القضية من أجل حد البدء غالباً" $n=1$ او $n=0$

٢- نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة

٣- نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$

لدينا عدة أشكال للإثبات بالتدريج

الشكل الأول: هو أن يعطينا مساواة ونثبت أنها صحيحة

مثال: لدينا المساواة $1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ إنها

A	غير صحيح من أجل $n\geq 2$	B	لا يمكن إثباتها
C	صحيح من أجل $n\geq 1$	D	غير صحيح

أولاً" لنسمي القضية $E(n): 1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ثانيا" لنثبت صحة القضية من أجل $n=1$

بحساب $E(1)$ نجد $1=\frac{6}{6}=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=1^2=1$ إذاً" صحيحة

ثالثاً" نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة

رابعاً" لنثبت صحتها من أجل $n+1$ لنحسب $E(n+1)$

$$E(n+1): 1^2+2^2+\dots.+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$E(n+1): 1^2+2^2+\dots.+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

الأن سنبداء من الفرض ونحاول أثبات أن $E(n+1)$ صحيحة

$$E(n): 1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نلاحظ من الطرف الأيسر أنهم أضافة الحد $(n+1)^2$

إذاً" لنضيف $(n+1)^2$ للطرفين في $E(n)$

$$1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

لنوحد مقامات في الطرف الأيمن

$$1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$$

نخرج $(n+1)$ عامل مشترك

$$1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots..+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$1^2+2^2+\dots.+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

وقد وصلنا للمطلوب إذاً" القصية صحيحة من أجل $n\geq 1$

ملاحظة: يمكن حل هذا السؤال بتجريب عدة أرقام ومعرفة إذا كانت صحيحة

الشكل الثاني:وهو أن يعطينا متراجحة ونثبت أنها صحيحة

مثال: لدينا المتراجحة $(1+x)^n\geq 1+nx$ و $x>-1$ إن هذه المتراجحة

A	صحيحة ايا" كانت n	B	صحيحة من أجل $n\geq 3$
C	صحيحة من أجل $n\geq 1$	D	غير صحيحة

نسمي القضية $E(n): (1+x)^n\geq 1+nx$

نثبت صحة الخاصة من أجل $n=0$

$$E(0): (1+x)^0\geq 1+(0)x$$

$E(0): 1\geq 1$ نجد أنها صحيحة

نفرض أن القضية $E(n): (1+x)^n\geq 1+nx$ صحيحة

لنثبت صحتها من أجل $n+1$ حيث لدينا

$$E(n+1): (1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$$

لنبدأ من الفرض $E(n): (1+x)^n\geq 1+nx$

نلاحظ من الطرف الأيسر أن المتراجحة مضروبة ب $(1+x)>0$

نضرب طرفي $E(n)$ ب $(1+x)$ نجد

$$(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x+nx^2$$

ولدينا المقدار nx^2 هو مقدار موجب أي يمكن حذفه ونجد أن

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$$

إذاً" القضية صحيحة من أجل $n+1$

وهي صحيحة بدأ من الحد $n=0$ إذاً" هي صحيحة من أجل جميع قيم n

الحالة الثالثة: هو أن يعطينا متتالية ونثبت أنها من قواسم عدد

مثال: لدينا 4^n+2 هو عدد من مضاعفات الـ3 هل هذه القضية

A	صحيحة من أجل $n\geq 1$	B	صحيحة من أجل $n\geq 3$
C	صحيحة من أجل $n\geq 0$	D	غير صحيحة

أولاً" نسمي القضية بشكل رياضي: $E(n): 4^n+2=3k$

نثبت $E(0): 4^0+2=3=3k$ وهي صحيحة

نفرض أن $E(n): 4^n+2=3k$ صحيحة

نثبت أن $E(n+1): 4^{n+1}+2=3\acute{k}$ صحيحة

نبدأ من الفرض $E(n): 4^n+2=3k$ نلاحظ أنه تم ضرب المعادلة ب 4

$$E(n): 4(4^n+2)=4(3k)$$

$$4^{n+1}+8=12k$$

$$4^{n+1}+2=3k-6$$

لديناk من مضاعفات العدد 3 إذاً" $3k-6$ من مضاعفات العدد 3 والقضية صحيحة بدءاً" من الحد $n\geq 0$

مثال:أن أصغر عدد طبيعي n يجعل المتراجحة $3^n\geq 2^n+5n^2$ صحيحة هو

A	$n=1$	B	$n=5$	C	$n=4$	D	$n=2$

$$E(n): 3^n\geq 2^n+5n^2$$

$$E(1): 3^1\geq 2^1+5(1)^2\Rightarrow 3>7$$

$$E(2): 3^2\geq 2^2+5(2)^2\Rightarrow 9>24$$

$$E(3): 3^3\geq 2^3+5(3)^2\Rightarrow 27>53$$

$$E(4): 3^4\geq 2^4+5(4)^2\Rightarrow 81>96$$

$$E(5): 3^5\geq 2^5+5(5)^2\Rightarrow 243>157$$

إذاً" المتراجحة لم تكن صحيحة حتى الحد الخامس

الحالة الرابعة:طريقة الإحاطة أن يعطينا متتالية ونثبت أنها بين عددين

مثال: لدينا المتتالية $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ و $u_0=1$ إن العلاقة الصحيحة هي

A	$-4\leq u_n\leq 1$	B	$2\leq u_n\leq 3$
C	$0\leq u_n\leq 2$	D	$5\leq u_n\leq 6$

نثبت ذلك بالتدريج لدينا $E(0)=u_0=1$ إذاً" الخيار B و D مرفوض

نثبت ذلك من أجل $n+1$ لنفرض أن أحد الحلو صحيحة مثل C

$0\leq u_n\leq 2$ نجمع 2 للطرفين

$2\leq u_n+2\leq 4$ ثم نجذر الطرفين

$\sqrt{2}\leq\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{4}$ نجد أي متراجحة أكبر من $\sqrt{2}$ فهي أكبر من 0

$0\leq\sqrt{u_n+2}\leq 2$ وهي $0\leq u_{n+1}\leq 2$ إذاً" $E(n+1)$ صحيح

الحالة الخامسة: هوي أن نصور بحيث أن $u_{n+1}=f(u_n)$

مثال: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ و $u_0=1$ متتالية لدينا العلاقة الصحيحة لما يلي

A	$\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$	B	$\frac{2}{5}\leq u_n\leq 9$
C	$0\leq u_n\leq 2$	D	$3\leq u_n\leq 6$

هنا طريقة الأحاطة صعبة لإن u_n موجودة بالبسط والمقام

نكتب المتتالية $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ بشكل تابع وهو $f(x)=\frac{3x+2}{2x+6}$

وهو تابع متزايد لإن $\acute{f}(x)=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$

نختر إجابة على أنها صحيحة ونحاول إثباتها مثل A

$\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$ لنصور الطرفين

$u_{n+1}=f(u_n)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\leq f(u_n)\leq f(1)$$

$$\frac{1}{2}\leq f(u_n)\leq\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq\frac{5}{8}\leq 1$$

إذاً" u_{n+1} صحيحة والخيار صحيح

القرار الذي يُرضي الله لا تفكر فيه مرتين.

نهاية المتتالية

ان نهاية المتتالية تكون فقط عند $+\infty$ وهي نفس القواعد المعرفة على التوابع

المتتالية المقاربة: نقول عن متتالية أنها متقاربة من عدد l إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

المتتالية المتباعدة: نقول عن متتالية أنها متباعدة إلى∞ إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$

مثال: إن نهاية المتتالية الأتية $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$ هي

A	B	C	D
$-\infty$	**$\frac{5}{3}$**	$+\infty$	$\frac{3}{5}$

المقصود بالنهاية دائما" عند $+\infty$ وهي متتالية صريحة تشبه تابع إذا"

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{3n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$$

مثال: إن نهاية المتتالية الأتية $u_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$ هي

A	B	C	D
$-\infty$	4	$+\infty$	**2**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n-3}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{4} = 2$$

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

A	B	C	D
متقاربة من 1	متقاربة من 2	متقاربة من 3	متباعدة

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = \frac{n!-2}{n!}$

A	B	C	D
متقاربة من 1	متقاربة من 2	متقاربة من 3	متباعدة

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!-2}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!} = 1$$

مثال: إن نهاية المتتالية الأتية $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ هي

A	B	C	D
لا يمكن معرفة النهاية	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	**$\frac{2}{3}$**

لدينا $-1 \le (-1)^n \le 1$

نجمع $2n$

$$2n-1 \le 2n+(-1)^n \le 1+2n$$

نقسم على $3n$

$$\frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n+(-1)^n}{3n} \le \frac{1+2n}{3n}$$

$\frac{2n-1}{3n} \le u_n \le \frac{1+2n}{3n}$ إن نهاية اليمين $\frac{2}{3}$ ونهاية اليسار $\frac{2}{3}$ إذا" $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{3}$

لحساب نهاية $(-1)^n$ نستخدم الإحاطة حيث $-1 \le (-1)^n \le 1$

نهاية المتتالية الهندسية: ليكن q عدد حقيقي عندئذ:

إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

إذا كان $q < 1$ فإنه ليس للمتتالية نهاية

إذا كان $q = 1$ فإنه المتتالية ثابتة وجميع حدودها 1 و $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$

مثال_: إن المتتالية الأتية $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

A	B	C	D
متقاربة من 0	متقاربة من 4	متقاربة من 5	متباعدة

لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{4}{5} < 1$

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = \frac{3^n}{2^n}$

A	B	C	D
متقاربة من 0	متقاربة من 4	متقاربة من 5	**متباعدة**

$u_n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \Leftarrow$ لأن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ لأن $\frac{3}{2} > 1$

مثال:ليكن لدينا المتتالية $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ والمتتالية $y_n = \frac{x_n}{n}$ إن نهاية y_n هي

A	B	C	D
$-\infty$	$+\infty$	2	**1**

$$y_n = \frac{x_n}{n} = \frac{\frac{n^2+1}{n+1}}{n} = \frac{n^2+1}{n^2+n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n-1}$

A	B	C	D
متقاربة من 0	متقاربة من 3	**متقاربة من 1**	متباعدة

$$u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n-1} = \frac{3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

نهاية متتالية المجاميع:نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى:إذا كانت متتالية حسابية أو هندسية نحسب المجموع ثم ننهي

مثال: ليكن $-1 < q < 1$ و $u_n = 1+q+q^2+......+q^n$ إن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

A	B	C	D
$\frac{1}{1+q}$	q	**$\frac{1}{1-q}$**	$\frac{1}{q}$

لدينا $u_n = q^0+q^1+q^2+........+q^n$ وهي متتالية هندسية

مجموع حدودها $n = n+1$ وحدها الأول هو 1 إذا"

$$u_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$

مثال_: ليكن $-1 < q < 1$ و $u_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}.....-\frac{1}{2^n}$ إن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

A	B	C	D
$-\infty$	4	$+\infty$	**0**

لدينا $u_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}.....-\frac{1}{2^n}$

نكتبها بالشكل $u_n = 1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}......+\frac{1}{2^n}\right]$

نجد أن $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}......+\frac{1}{2^n}\right]$ تكتب بالشكل

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3......+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ وهي متتالية هندسية

مجموع حدودها $n = n$ وحدها الأول هو $\frac{1}{2}$ و أساسها هو $\frac{1}{2}$ إذا"

$$= a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذا" $u_n = 1-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

الحالة الثانية:إذا كانت متتالية غير معروف نوعها

إذا استطعنا حساب مجموعها عن طريق حساب حدودها والأختصار

مثال: $u_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ إن نهاية المجموع $s_n = u_1+u_2+u_3+....+u_n$

A	B	C	D
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$	**$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$**	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$

$$s_n = u_1+u_2+u_3+....+u_n$$

$$s_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+.......+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$

مثال: $u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$ إن نهاية المجموع $s_n = u_1+u_2+....+u_n$

A	B	C	D
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$	**$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{2}$**	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$

$$s_n = u_1+u_2+....+u_n$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-1}-\frac{1}{+1}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right]+.........+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{+1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+.....+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left[-1-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = -\frac{1}{2}$$

الحالة الثالثة:أو أن نحيطها بين حدين وهما $n \times M \ge u_n \ge m \times n$
حيث M أكبر حد و m أصغر حد و n عدد الحدود

مثال:إن نهاية المتتالية $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ هي

A	B	C	D
$-\infty$	$+\infty$	2	1

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

هي متتالية غير معروف نوعها واذا حسبنا مجموعها لاتختصر
إذا نحصرها حيث أكبر حدودها $M = \frac{n}{n^2+1}$
وأصغر حدودها $m = \frac{n}{n^2+n}$ وعدد حدودها n حد إذا" يمكن إحاطتها بالشكل

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1} \times n$$
$$\frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$$

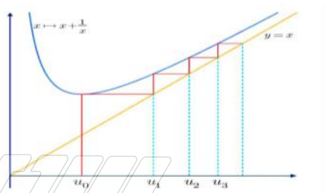
لاحظ أول حد هو أصغر حد لإنه عندما يكبر المقام يصغر الكسر

ولدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$ إذا"
من مبرهنة الأحاطة $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

حساب نهاية متتالية التدريج: أما أن نخمنها ونحسب نهايتها
أو أو نفرض التابع $u_{n+1} = f(u_n)$ ثم نرسمه ونرسم المستقيم $f(x) = x$
وهو منصف الربع الأول ثم نحسب حدودها ثم نحدد نهايتها وأطرادها

مثال: لدينا المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$ إن نهاية هذه المتتالية

A	B	C	D
$-\infty$	$+\infty$	2	1



نرسم التابع $f(x) = \frac{1}{x} + x$
ونرسم المستقيم $y = x$
ونلاحظ من الرسم أن المتتالية
ومتزايدة ونهايتها $+\infty$

ملاحظة:لمعرفة تقارب المتتالية التدريجية يدب تحقق أحد الشرطين
أما u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى
أو u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى

يوجد بعض أنواع المتتاليات التدريجية تحل بحل معادلة $f(x) = x$

تعريف النهايات بشكل دقيق

الحالة الأولى: تعيين عدد n_0 ليكون u_n ينتمي إلى مجال مفتوح $I =]a, b[$
نستعمل $|u_n - l| < \varepsilon$

مثال: $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ إن نهاية u_n عند $+\infty$ هي 3 ماهو العدد n_0 اللذي يحقق
الشرط: إذا كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]2.99, 3.01[$

A	B	C	D
300	350	265	400

$l = \frac{b+a}{2}$ هي مركز المجال و $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ وهي نصف قطر المجال

لإن $|u_n - l| < \varepsilon$ و $\varepsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$ و $l = 3$
نعوض في القانون

$$\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$$

بتوحيد المقامات $\left|\frac{-4}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$ بما أن $x \to +\infty$ إذا $\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100}$ وهذا يكافئ
$400 < n + 1$ ⬅ $n > 399$ ويمكن أن نختار $n_0 = 399$
أو اي عدد أكبر من 399 فالمجال يحوي جميع حدود المتتالية بدءا" من 400

الحالة الثانية: تعيين عدد n_0 ليكون $u_n > l$

مثال:لدينا المتتالية $u_n = n\sqrt{n}$ ماهو العدد الطبيعي n_0 اللذي
يحقق $u_n > 10^6$

A	B	C	D
500	1100	10000	700

$u_n > 10^6 \Leftarrow n\sqrt{n} > 10^6 \Leftarrow$ نربع الطرفين $n^3 > 10^{12}$
نجذر تكعيبيا" الطرفين $n > 10^4$ إذا" نختار $n_0 = 10000$

محدودية متتالية

1-نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة من الأعلى إذا كانت $u_n \le M$
2-نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة من الأدنى إذا كانت $u_n \ge m$
2-نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة إذا كانت $M \ge u_n \ge m$
نسمي M عنصر راجح ونسمي m عنصر قاصر

مثال: إن العنصر القاصر في المتتالية $u_n = n\sqrt{3} - 2$ حيث $n \ge 1$ هو

A	B	C	D
$\sqrt{3} - 2$	1	$\sqrt{3}$	0

نعلم إن $n \ge 1 \Leftarrow n\sqrt{3} \ge \sqrt{3} \Leftarrow n\sqrt{3} - 2 \ge \sqrt{3} - 2$
$\Leftarrow u_n \ge \sqrt{3} - 2$ إذا" u_n محدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{3} - 2$
ولكنا غير محدودة من الأعلى لإن $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = \frac{1}{1+n^2}$ حيث $n \ge 1$ هي متتالية

A	B	C	D
محدودة من الأدنى	محدودة من الأعلى	غير محدودة	محدودة

نعلم إن $n \ge 1 \Leftarrow n^2 \ge 1 \Leftarrow n^2 + 1 \ge 2$
$\Leftarrow 0 \le \frac{1}{1+n^2} \le \frac{1}{2} \Leftarrow 0 \le u_n \le \frac{1}{2}$
إذا" u_n محدودة من الأدنى بالعدد 0 (العنصر القاصر 0)
ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ (العنصر الراجح $\frac{1}{2}$)

مثال: إن المتتالية الأتية $u_n = (-1)^n n^2$ حيث $n \ge 1$ هي متتالية

A	B	C	D
محدودة من الأدنى	محدودة من الأعلى	غير محدودة	محدودة من الأدنى ومن الأعلى

لدينا $-1 \le (-1)^n \le 1 \Leftarrow -n^2 \le (-1)^n n^2 \le n^2 \Leftarrow$
$-n^2 \le u_n \le n^2$ ولكن $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} -n^2 = +\infty$
إذا المتتالية ليست مطردة وهي متناوبة وغير محدودة

المتتاليتان المتجاورتان:

نقول عن المتتاليتان s_n و t_n أنهما متجاورتان إذا كانتا تحققا الشرطين
١- إحداهما متزايدة والثانية متناقصة
٢- نهايتهما متساوية أو بمعنى أخر $\lim_{n\to\infty} s_n - t_n = 0$

مثال: لدينا المتتاليتان s_n و t_n متتاليتان متجاورتان إذا كانت
$s_n = \frac{1}{n+1}$ فإن t_n تساوي

A	B	C	D
$t_n = \frac{2n}{3n+1}$	$t_n = \frac{n}{n+2}$	$t_n = \frac{-1}{2n+4}$	$t_n = \frac{2}{2n+3}$

لدينا $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ لكن نهاية الخيارين A و B لا تساوي الصفر إذا"
بقي الخيارين C و D $s_n = \frac{1}{n+1}$ نشكل تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$
نشتق $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ إذا" s_n متتالية متناقصة
لنجرب الخيار D $t_n = \frac{2}{2n+3}$ نشكل تابع $f(x) = \frac{2}{2x+3}$ نشتق
$f'(x) = \frac{-4}{(2x+3)^2} < 0$ وهي أيضا" متناقصة إذا" ليست متجاورة مع s_n
نجرب الخيار C $t_n = \frac{-1}{2n+4}$ نشكل التابع $f(x) = \frac{-1}{2x+4}$ نشتق
$f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2} > 0$ وهي متزايدة ونهايتها تساوي نهاية s_n إذا" متجاورتان

مثال: لتكن لدينا المتتالية $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n-1}$
والمتتالية $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n}$ إن $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n$ تساوي

A	B	C	D
$-\infty$	$+\infty$	1	0

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n}$$
$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2n-1}$$
$$y_n - x_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n} = 0$$

مراجعة الاشتقاق

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$

$2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$

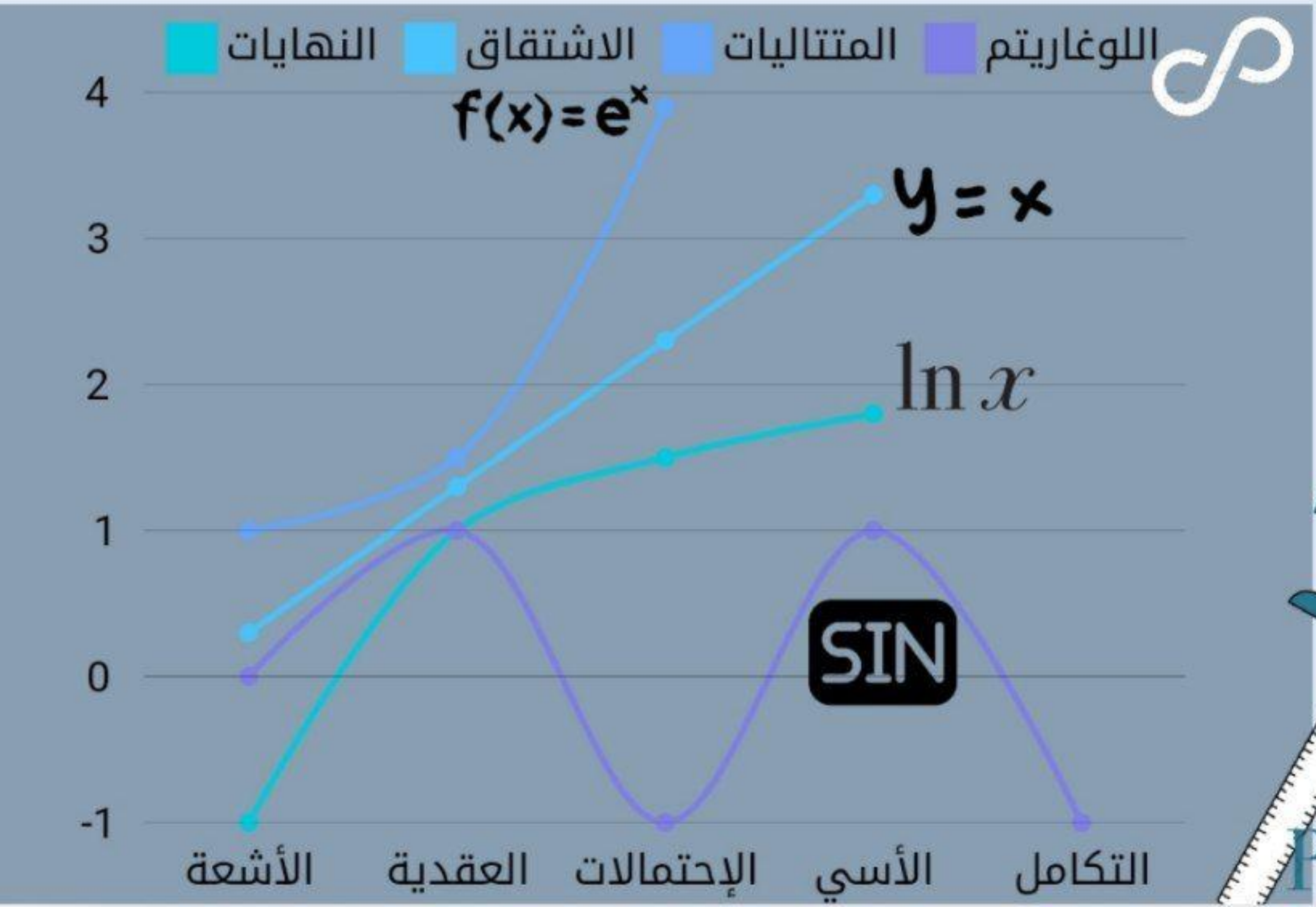
$7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$

$10a + 3b - 2c$

$$\int \overrightarrow{AB}$$

$$i = \sqrt{-1}$$



$^n P_r$

$P(A)$

المشتقات

	$f(x)$	$f'(x)$
التوابع المرجعية	a	0
	ax	a
	x^n	nx^{n-1}
	$\sin(ax)$	$a\cos(ax)$
	$\cos(ax)$	$-a\sin(ax)$
	$\tan(ax)$	$a(1+\tan^2 x)$
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
التوابع المركبة	ag	ag'
	g^n	$ng^{n-1}g'$
	$\frac{1}{g^n}$	$\frac{-ng'}{g^{n+1}}$
	$\sqrt{g}$	$\frac{g'}{2\sqrt{g}}$
	$\sin g$	$g'\cos g$
	$\cos g$	$-g'\sin g$
	$\tan g$	$g'(1+\tan^2 g)$
العمليات على المشتقات	$f+g$	$f'+g'$
	$f-g$	$f'-g'$
	$f\times g$	$f'g+g'f$
	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
التابع اللوغاريتمي والتابع الأسي	e^x	e^x
	e^g	$g'e^g$
	$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
	$ln(g)$	$\frac{g'}{g}$
	a^g	$ga^g\,\acute{l}n(a)$

أمثلة :

مشتق التابع $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$ هو

A	B	C	D
$\frac{x+1}{(x+2)^2}$	$\frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$	$\frac{(x+1)^3}{(x+2)^4}$	$\frac{2(x+1)^2}{(x+2)^4}$

لأن

$$f'(x)=3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3\left(\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}\right)=3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)=\frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$$

مشتق التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$	$1+\tan^2 x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$

هنا لدينا الخيارين صحيحين c صحيح لأن $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ومشتقه هو c

اما الخيار A صحيح لأن $f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2}$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

مشتق التابع $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ هو

A	B	C	D
$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{2x^2+1}{x^2+1}$	$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}.x=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

أمثلة:

$f(x)$	$f'(x)$
5	0
$5x$	5
x^3	$3x^2$
$\sin 4x$	$4\cos 4x$
$\cos\frac{x}{2}$	$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x^4}$	$\frac{-4}{x^5}$
$6x^2$	$12x$
$(2x^3-1)^5$	$5(2x^3-1)^4(6x^2)$
$\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$\frac{-3(2x)}{(x^2+1)^4}$
$\sqrt{\sin x}$	$\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
$\sin(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$
$\cos(x^3+3)$	$(3x^2)(-\sin(x^3+3))$
$\tan 3x$	$3(1+\tan^2 3x)$
$\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$2x^2-x+1$
$-2x\sqrt{x}$	$-2\sqrt{x}+\frac{(-2x)}{2\sqrt{x}}$
$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{(x)\cos x-\sin x}{x^2}$

بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة الإشتقاق مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح "الطباعة ملون حصرا"

مشتق التابع $f(x)=\frac{1}{\cos^3 2x}$ هو

A	B	C	D
$\frac{6\sin 2x}{\cos^4 2x}$	$\frac{3\sin 2x}{\cos^6 2x}$	$\frac{6\sin^2 2x}{\cos^6 2x}$	$\frac{2\sin 2x}{\cos^6 2x}$

$$f'(x)=\frac{-3\cos^2 2x(-2\sin 2x)}{\cos^6 2x}=\frac{6\sin 2x}{\cos^4 2x}$$

مشتق التابع $f(x)=\sin^3 2x$ هو

A	B	C	D
$6\sin 2x\cos 2x$	$6\sin^2 2x\cos 2x$	$6\sin^2 2x\cos^2 2x$	$6\sin^2 x\cos x$

لأن $f'(x)=3\sin^2 2x(2\cos 2x)$

اشتقاق توابع مركبة :

اذا كان $g(x)=f(u(x))$ ← كان $g'(x)=f'(u(x)).u'(x)$

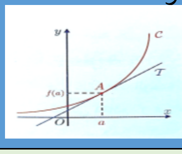
مثال:مشتق التابع f هو $f'(x)=\frac{-2}{3x^2-x+1}$ نعرف $g(x)=f(\sqrt{x})$ كان المشتق $g'(x)$ يساوي

A	B	C	D
$\frac{-1}{3x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}$	$\frac{-2x}{3\sqrt{x}+1}$	$\frac{-2x}{3x^2-x+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{-2}{3x-\sqrt{x}+1}$

$$g'(x)=(f(\sqrt{x}))'=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-2}{3x-\sqrt{x}+1}$$

معادلة المماس : هو مستقيم يمس التابع في نقطة التماس

لكتابة معادلته يلزمنا نقطة التماس $A(a,b)$ و ميله هو m



مهم $m = f'(a)$

له قانونين

القانون الأول : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$

القانون الثاني : $T: y - y_0 = m(x - x_0)$

طلب المماس عند النقطة $x = a$ نستعمل القانون الأول

طلب المماس عند النقطة $y = b$ نحل المعادلة $f(x) = b$ نحصل على قيمة $x = a$ نعود للحالة الأولى

طلب المماس وm معلوم نحل المعادلة $f'(x) = m$ نحصل على $x = a$ نعود للحالة الأولى

المماس يمر بالنقطة $A(a,b)$ نعوض مباشر بالقانون الأول $f(a) = b$

ملاحظات :

المماس أفقي ← $m = 0$	المماس في قيمة محلية ← $m = 0$
المماس T يوازي مستقيم d ← $m_d = m_T$	
المماس T يعامد مستقيم d ← $m_T = \frac{-1}{m_d}$	
في الرسم طلب ميل المماس أو $f'(a)$ نستعمل $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$	(x,y) (x_0,y_0) نقطتين من المستقيم
المستقيم $y = mx + b$ ميله هو m امثال x المشتق هو ميل المماس	

مثال: معادلة المماس للخط البياني $f(x) = x^2$ في النقطة $x = 4$ هي

A	$y = 16x - 16$	B	$y = 8x - 8$
C	$y = 8x - 16$	D	$y = 8x - 2$

اشتقاق f عند $x = 4$ و مشتقه $f'(x) = 2x$

$f(4) = 16$ و لدينا $f'(4) = 8$

نعوض في القانون $y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$y = 8(x-4) + 16$ $\quad$ $y = 8x - 16$

مثال: معادلة المماس للخط البياني $f(x) = x\sqrt{x}$ في النقطة $x = 1$ هي

A	$y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$	B	$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
C	$y = \frac{3}{2}x - 1$	D	$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

اشتقاق عند $x = 1$ و مشتقه $f'(x) = \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(1) = 1$ و لدينا $f'(1) = \frac{3}{2}$

نعوض في القانون $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1$ $\quad$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

مثال: $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$ عدد المماسات للخط c_f التي توازي $y = -4x$ هي

A	2	B	3	C	1	D	0

من الملاحظة $m_T = m_d$ ← $f'(x) = -4$ لإن المشتق هو ميل المماس

نشتق $f(x)$ نجد $f'(x) = \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$ ← $\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = \frac{-4}{1}$

$x^2 + 2x - 4 = -4(x^2 + 2x + 1)$

$x^2 + 2x - 4 + 4x^2 + 8x + 4 = 0$

$5x^2 + 10x = 0$

$5x(x+2) = 0$ ← اما $x = 0$ أو $x = -2$ إذا يقبل مماسين

التقريب التآلفي :

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

مثال: $f(x) = \sqrt{2x+5}$ القيمة التقريبية ل $f(2,1)$ هي

A	3	B	$\frac{91}{30}$	C	$\frac{95}{29}$	D	$\frac{92}{28}$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$a = 2$ و $h = 0.1 = \frac{1}{10}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

$f(2,1) \cong 3 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} \cong 3 + \frac{1}{30} \cong \frac{91}{30}$

تعيين الثوابت:

١) c_f مار من النقطة $A(a,b)$ عندئذ $f(a) = b$

٢) c_f يملك قيمة حدية عند $x = a$ عندئذ $f'(a) = 0$

٣) c_f يملك مماس أفقي عند $x = a$ عندئذ $f'(a) = 0$

٤) c_f يملك مماس مائل عند $x = a$ معادلته $y = mx + b$ عندئذ $f'(a) = m$ و نعوض في المماس $f(a) =$

٥) c_f يملك مقارب شاقولي معادلته $x = a$ عندئذ المقام ينعدم عند $x = a$

٦) c_f يملك مقارب أفقي معادلته $y = b$ عندئذ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

٧) c_f يملك مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ نقسيم أقليدية

مثال : $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

ما قيمة a وb ليقبل c مماس افقي في النقطة $A(1,2)$

A	$a = 2$, $b = 3$	B	$a = -2$, $b = -1$	C	$a = -2$, $b = 3$	D	$a = -2$, $b = 1$

من الفرض لدينا المماس افقي في النقطة $A(1,2)$

$f(1) = 2$

$a(1)^3 + b(1)^2 + 1 = 2$

$a + b = 1$

$f'(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$0 = 3a(1)^2 + 2b(1)$

$3a + 2b = 0$

بحل المعادلتين $\begin{cases} 3a + 2b = 0 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$

مثال: $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ عين a وb لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس للخط البياني c في النقطة اللتي فاصلتها 0

A	$a = 2$, $b = 3$	B	$a = -2$, $b = -1$	C	$a = -2$, $b = 3$	D	$a = -2$, $b = 1$

$x = 0$ نعوض في معادلة المماس $y = 4(0) + 3 = 3$ نقطة التماس (0.3) ولدينا $y = 4x + 3$ ميله $m_\Delta = 4$

Δ مماس للخط c في النقطة $(0,3)$ اي :

$f(0) = 3$

$\frac{3(0)^3 + a(0) + b}{(0)^2 + 1} = 3$

$b = 3$

$f'(0) = m_\Delta = 4$

اشتقاق f على R :

$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$4 = \frac{a(1) - 0}{1} \Longrightarrow a = 4$

اذا" :

$f(x) = \frac{3x^3 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

مثال: $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ قيمة a ليكون تابع قيمة حدية عند $x = 1$

A	$a = -3$	B	$a = 3$	C	$a = -2$	D	$a = 1$

لدينا $f(1)$ قيمة حدية عندئذ $f'(1) = 0$ ومنه :

$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$ ← $0 = 3a(1)^2 + 6(1) + 3$

$-9 = 3a$ $\quad$ $a = -3$

المشتقات من مراتب عليا:

مثال: $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ أن $f'''(x)$ هي

A	$6x + 1$	B	$6x$	C	6	D	1

لإن $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - x + 1$

$f''(x) = 6x - 1$

$f'''(x) = 6$

مثال: $f(x) = \frac{1}{x}$ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة

A	$\frac{n!}{(x)^{n+1}}$	B	$\frac{(-1)^n n!}{(x)^{n+1}}$	C	$\frac{(-1)^n n!}{(x)^{n-1}}$	D	$\frac{n!}{(x)^{n-1}}$

بطريقة الإثبات بالتدريج نثبت الحل

قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

الحالة الأولى : $l=$ عدد عندئذ f قابل للأشتقاق عند $x=a$ و $\acute f(a)=l$
التفسير الهندسي لهذه الحالة: c_f يقبل مماسا "d مائل عند $x=a$ معادلته
$$d: y=\acute f(a)(x-a)+f(a)$$

الحالة الثانية: $l=\pm\infty$ عندئذ f غير قابل للأشتقاق عند $x=a$ و $\acute f(a)$ غير موجود
التفسير الهندسي لهذه الحالة: $x=a$ مماس شاقولي

الحالة الثالثة: $l=0$ عندئذ f قابل للأشتقاق عند $x=0$ و $\acute f(0)=l$
التفسير الهندسي لهذه الحالة: c_f يقبل مماسا "شاقولي معادلته $y=f(a)$

الحالة الرابعة: $l=l_1$ عند a^+ و $l=l_2$ عند a^- عندئذ f غير قابل للأشتقاق
لكنه يقبل الأشتقاق من اليمين ومن اليسار $\acute f(a^+)=l_1$ و $\acute f(a^-)=l_2$
التفسير الهندسي لهذه الحالة: c_f يقبل نصفي مماسين مائلين هما
$$d_1: y=\acute f(a^+)(x-a^+)+f(a^+)\ ;\ x\ge a$$
$$d_2: y=\acute f(a^-)(x-a^-)+f(a^-)\ ;\ x\le a$$

مثال عن الحالة الأولى : $f(x)=x|x|$ هل f عند 0

A	f غير اشتقاقي ومستمر	B	f غير اشتقاقي وغير مستمر
C	f اشتقاقي ومستمر	D	f اشتقاقي و غير مستمر

حتى يكون f اشتقاقي عند 0 يجب ان يكون $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$ عدد
$$\lim_{x\to0}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0}|x|=0$$
اذا f اشتقاقي عند الصفر وحسب مبرهنة فهو مستمر عند الصفر

مثال: $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ هل f عند 0

A	يقبل مماس أفقي	B	يقبل نصفي مماس
C	يقبل مماس شاقولي	D	يقبل مماس ميله $\acute f(a)=m$

نحسب النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$
لإزالة القيمة المطلقة $\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$
ندرس حالتين: الحالة الأولى: $x\ge0$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$
إذا f اشتقاقي عند 0 من اليمين وكان $\acute f(0^+)=1$
الحالة الثانية: $x\le0$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-x}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-1}{x^2+1}=-1$$
إذا f اشتقاقي عند 0 من اليمين وكان $\acute f(0^+)=-1$
اذا $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ اذا f غير اشتقاقي عند 0
اذا يقبل نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار

مثال: g و h وفق $g=x\sqrt{x}$ و $h=x|x|$ وعندئذ

A	h غير اشتقاقي عند 0	B	gوh غير اشتقاقيان عند الصفر
C	g و h اشتقاقيان عند الصفر	D	g غير اشتقاقي عند 0

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0$$
اذا g اشتقاقي عند 0 ومن المثال السابق اثبتنا ان h اشتقاقي عند 0

مثال: f تابع معرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}$

A	f اشتقاقي و معرف عند0	B	f غير اشتقاقي و مستمر عند0
C	f اشتقاقي ومستمر عند0	D	f اشتقاقي و غير مستمر عند0

لإن $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$
اذ هو غير اشتقاقي عند الصفر
لكنه مستمر عند الصفر لإن $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

انت مشغول بالشك في نفسك بينما يخاف الآخرون من إمكانياتك الحقيقية ❤

استخدام قابلية الأشتقاق لحساب النهايات

لدينا القانون $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\acute f(a)$ يفيد في حساب النهايات

مثال: ماهي $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	$-\infty$

لإن شكل النهاية من شكل تعريف العدد المشتق حيث أن $f(x)=\cos x$
وللتأكد انه الشكل المطلوب $f(0)=0$ اذا $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\acute f(0)$
اذا قيمة النهاية هي $\acute f(0)$ ولدينا $\acute f(x)=-\sin x$ ← $\acute f(0)=0$

ملاحظة في حساب النهايات : قاعدة أوبيتال تستعمل لحساب النهايات عند الأعداد وتستعمل غالبا في حساب عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وهي اشتقاق البسط واشتقاق المقام ثم نحسب النهاية

مثال: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ هي

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	1	D	0

تم حل هذا التمرين سابقا في قسم النهايات سنحل عن طريق أوبيتال
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

مثال: $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ هي

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	0	D	$\frac{4}{3}$

تم حل هذا التمرين سابقا في قسم النهايات سنحل عن طريق أوبيتال
$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^3-x^2-1)'}{(x^2+x-2)'}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2-2x}{2x+1}=\frac{4}{3}$$

مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$ هي

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	$-\infty$

تم حل هذا التمرين عن طريق تعريف العدد المشتق سنحل عن طريق أوبيتال
$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{1}=\frac{0}{1}=0$$

دراسة التغيرات :

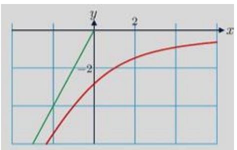
1)نوجد مجموعة تعريف التابع f(x)
2) نحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف المفتوحة
3) نعين معادلة كل مقارب افقي او شاقولي ان وجد وندرس الاوضاع النسبية
4) نشتق التابع f
5) نعدم f́(x) وندرس اشارة على مجموعة تعريفه
6) نصور القيمة التي عدمت المشتق
7) تنظيم جدولا" بتغيرات f
8) الرسم

رسم الخط البياني

١)نرسم المستقيمات المقاربة
٢)نرسم المماسات
٣)نعين القيم الحدية
٤)نعين مركز التناظر
٥)نبدأبالرسم من اليسار الى اليمين بما يوافق الجدول البياني

مثال: $f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$ ادرس تغيرات f
لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ (بعد الضرب بالمرافق)
اذا يوجد مقارب مائل عند $-\infty$ و $y=0$ مقارب افقي عند $+\infty$
و $\acute f(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ لدينا $\sqrt{x^2+8}\ge\sqrt{x^2}=|x|$ اذا $\acute f(x)\ge0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0



تطبيقات الاشتقاق:

$f'(x) \geq 0$ إذا f متزايد تماما	$f'(x) \leq 0$ إذا f متناقص تماما
$f'(a) = 0$ وغير أشارته $f(a)$ اما قيمة حدية كبرى أو قيمة حدية صغرى	

مثال: $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+3}$ التابع f متزايد على المجال

A	$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	B	$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$	C	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$	D	$\left[-\frac{1}{11}, 1\right[$

ندرس اشارة المشتق $f'(x) = \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$ اشارة f' توافق اشارة البسط ومنه

$f'(x) = 0$ عند $x = -\frac{1}{2}$ وجدول التغيرات هو

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1

نلاحظ انه متزايدتماما في المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

ومتناقص تماما في المجال $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

ويملك قيمة صغرى محلية هي $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{11}$

ملاحظة: في الرسم يكون

$f'(x) \geq 0$ او f متزايد تماما على مجال اذا نظرنا إلى التابع من اليسار إلى اليمين وجدناه صاعدا"

$f'(x) \leq 0$ او f متناقص تماما على مجال اذا نظرنا إلى التابع من اليمين إلى اليسار وجدناه هابط

ويكون $f'(x) = 0$ او قيمة حدية كبرى اذا كان غير اشارته من صاعد إلى هابط

ويكون $f'(x) = 0$ او قيمة حدية صغرى اذا كان غير اشارته من هابط إلى صاعد

حل المعادلة : $f(x) = k$ (عن طريق الجدول)

نقول أن للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد على المجال $]a, b[$ إذا تحققت

الشرطين 1 f مطردة تماما 2 $k \in f(]a, b[)$

حالة خاصة $f(x) = 0$

F مستمر ومطرد تماما" على $I = [a, b]$

و $f(a) \times f(b) < 0$ اذا" للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على I

مثال: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

A	4	B	1	C	2	D	لا يوجد حلول

ندرس تغيرات $f(x)$

مجموعة التعريف : معرف على $R =]-\infty, +\infty[$

النهايات: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

المشتق: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

نعدم المشتق: $12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$ نقسم على 12 لتصغير المعادلة

$x^3 + x^2 - 2x = 0$ نخرج x عامل مشترك $x(x^2 + x - 2) = 0$

اما $x = 0$ او $x^2 + x - 2 = 0$ $(x + 2)(x - 1) = 0 \leftarrow$

اما $x = 1$ او $x = -2$

نصور القيم: $f(0) = 4$ $f(1) = -1$ $f(-2) = -28$

الجدول:

x	$-\infty$	x_4		-2	x_3		0	x_2		1	x_1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0		$+$	0		$-$	0		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$\searrow$	-28	0	$\nearrow$	4	0	$\searrow$	-1	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ انه يملك اربع جذور

مثال: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ هو

A	5	B	1	C	2	D	لا يوجد حلول

بعد دراسة التغيرات نجد ان جدول التغيرات هو

x	$-\infty$	x_1		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ ان $0 \in \left]-\infty, \frac{17}{15}\right]$ لكن $0 \notin \left[\frac{17}{15}, \frac{13}{15}\right]$ و $0 \notin \left[\frac{13}{15}, +\infty\right]$

ملاحظة: في كثير الحدود ذات الأسس الفردية دائما" يكون الحل وحيد

دراسة المعادلات المثلثية :

التوابع الدورية:نقول عن F أنه تابع دوري دوره T إذا تحقق: $F(n + T) = F(n)$

كل من $\sin x$ و $\cos x$ توابع دورية ودورها 2π و $\tan x$ تابع دوري ودوره π

التابع زوجي	التابع فردي
$x \in D_f \to -x \in D_f$	$x \in D_f \to -x \in D_f$
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	متناظر بالنسبة للمبدأ
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
$x = -\theta + 2\pi k$ $\cos x = \cos\theta$	$x = \theta + 2\pi k$ $\sin x = \sin\theta$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in z$ $\cos x = 0$	$x = \pi k; k \in z$ $\sin x = 0$

مركز التناظر :نقول عن $A(a, b)$ انها مركز تناظر للخط البياني للتابع f

اذا حقق ١) $2a - x \in D_f$ و ٢) $f(2a - x) + f(x) = 2b$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

مثال: لدينا $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$ ان f يحقق

A	دوري وليس زوجي	B	دوري وزوجي
C	دوري وفردي	D	ليس دوري وفردي

لدينا

$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

اذا التابع زوجي

$f(x + 2\pi) = 3\sin^2(x + 2\pi) + 4\cos^3(x + 2\pi) =$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

اذا التابع دوري ودوره الأصغر 2π

مثال: $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$ لدينا

A	f متناظر بالنسبة للمبدأ	B	f متناظر بالنسبة لمحور الفواصل
C	f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	D	f غير متناظر

$f(-x) = 4\sin^3(-x) + 3\cos(-x) = -4\sin^3 x + 3\cos x$

$f(-x) \neq f(x)$ و $f(-x) \neq -f(x)$ اذا هو غير متناظر

مثال: $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$ مركز التناظر ل f هو

A	$I(-1, -3)$	B	$I(-1, 2)$	C	$I(-1, -5)$	D	$I(-1, 3)$

لدينا a في كل الخيارات هي -1 اذا بقي معرفة b لنستعمل الشرط الثاني

$f(-2 - x) + f(x) = 2b$

$$f(-2 - x) = \frac{2(-2 - x)^2 + (-2 - x) + 7}{(-2 - x) + 1} = \frac{-(2x^2 + 7x + 13)}{x + 1}$$

$$f(-2 - x) + f(x) = \frac{-(2x^2 + 7x + 13)}{x + 1} + \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

$$= \frac{-6x - 6}{x + 1} = \frac{-6(x + 1)}{x + 1} = -6 = 2b \to b = -3$$

مثال: $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$ لدينا $f'(x)$ تساوي

A	$3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$	B	$3\sin x\,(3\sin 2x - 1)$
C	$6\sin x\,(2\sin 2x - 1)$	D	$3\sin x\,(2\sin 2x - 2)$

$f'(x) = 12\sin^2 x\cos x - 3\sin x =$

$= 3\sin x\,(4\sin x\cos x - 1)$

$= 3\sin x\,(2 \times 2\sin x\cos x - 1)$

$= 3\sin x\,(2\sin 2x - 1)$

مثال: $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ لدينا $f'(x)$ تساوي

A	$2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$	B	$2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$
C	$2(2\cos x + 1)(\cos x + 1)$	D	$3(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos 2x - 1 + 1)$

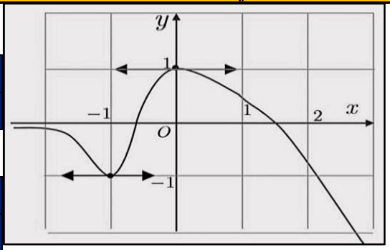
$2(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

مقصور التابع $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ هو

A	$\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$	B	$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$	C	$\sqrt{2}\sin x$	D	$2\sin\frac{x}{2}$

لأن $f(x) = \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

قراءة الخط البياني :



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي

0	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ هي

0	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

معادلة المقارب أفقي ل c_f هي

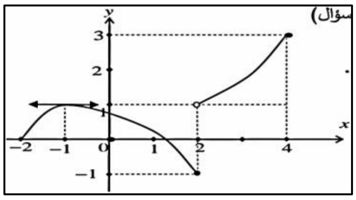
$y=2$	D	$y=0$	C	$y=-1$	B	$y=1$	A

مجموع حلول المترجحة $\acute{f}(x)>0$ هي

$]1,0[$	D	$]-1,1[$	C	$]-1,2[$	B	$]-1,0[$	A

عدد القيم الحدية ل f هي

0	D	2	C	3	B	1	A



$f(2)$ هي

0	B	$+\infty$	A
-1	D	-1	C

$\acute{f}(-1)$ هي

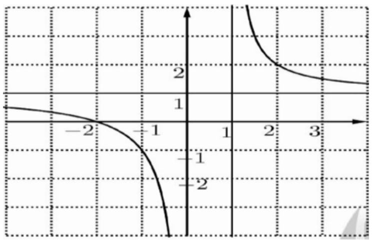
0	B	$+\infty$	A
-1	D	0	C

عدد حلول المتراجحة $f(x)>1$ هي

$]-2,2[$	D	$]2,4]$	C	$[2,4[$	B	$]2,4[$	A

$f([-2,-1])$ هي

$]-2,1[$	D	$[0,2[$	C	$[-2,2]$	B	$[0,1]$	A



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي

0	B	$+\infty$	A
-1	D	1	C

$\lim_{x\to1} f(x)$ هي

0	B	$+\infty$	A
1	D	$-\infty$	C

معادلة المقاربات الشاقولية ل c_f هي

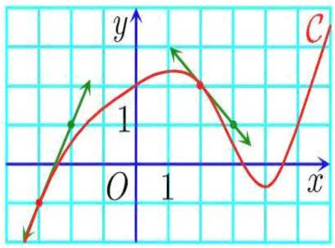
$x=1$ $x=2$	D	$x=1$ $x=-1$	C	$x=1$ $x=0$	B	$x=1$ $x=0$	A

حلول المتراجحة $\acute{f}(x)<0$

$]1,+\infty[$	B	$]-\infty,0[$	A
$]-\infty,0[\cap]1,+\infty[$	D	$]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$	C

حل المعادلة $f(x)=0$

$x=0$	D	$x=-2$	C	$x=2$	B	$x=-1$	A



$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي

0	B	$+\infty$	A
-1	D	1	C

$\acute{f}(0)$ هي

0	B	2	A
−1.5	D	1	C

معادلة المماسين المبينين في الشكل هي :

$y=-x+3$ $y=2x+5$	B	$y=-x+4$ $y=-2x+5$	A
$y=-x+4$ $y=x+5$	D	$y=-x+4$ $y=2x+5$	C

التقريب التالفي محليا" ل $f(-3+h)$ هو :

$f(-3+h)\approx-1+3h$	B	$f(-3+h)\approx-1+2h$	A
$f(-3+h)\approx1+2h$	D	$f(-3+h)\approx-2+2h$	C

قراءة الجدول البياني :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي

2	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ هي

2	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

اكتب معادلة المقارب الأفقي ل c_f

$y=2$	D	$y=0$	C	$y=-1$	B	$y=1$	A

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

اربع حلول	D	حلان	C	ثلاث حلول	B	حل	A

دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(2)=4$	B	$f(2)=+1$	A
$f(-2)=4$	D	$f(2)=-1$	C

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

$f(4)$ هي

2	B	2	A
-1	D	6	C

$f(0)$ هي

2	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

دل على القيمة الحدية للتابع f مبينا" نوعها :

$f(0)=2$ صغرى محليا" $f(0)=6$ كبرى محليا"	B	$f(0)=2$ صغرى محليا" $f(2)=6$ كبرى محليا"	A
$f(0)=4$ صغرى محليا" $f(4)=6$ كبرى محليا"	D	$f(0)=2$ صغرى محليا" $f(4)=6$ كبرى محليا"	C

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

اربع حلول	D	حلان	C	ثلاث حلول	B	حل وحيد	A

جد حلول المترجحة $\acute{f}(x)>0$

$]1,0[$	D	$]-1,1[$	C	$]2,6[$	B	$]0,4[$	A

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	3

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي

2	B	$+\infty$	A
-1	D	3	C

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ هي

2	B	$+\infty$	A
-1	D	$-\infty$	C

اكتب معادلة المقارب الأفقي ل c_f

$y=3$	D	$y=0$	C	$y=-1$	B	$y=1$	A

دل على القيمة الحدية الكبرى للتابع f

$f(-1)=-2$	B	$f(2)=+1$	A
$f(-2)=4$	D	$f(2)=4$	C

احسب $f(]-1,2[)$:

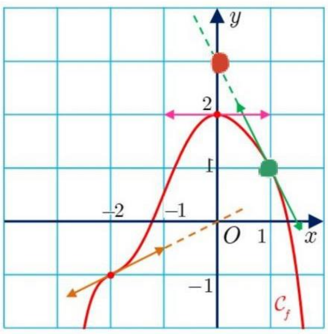
$]-2,4[$	D	$]-2,+\infty[$	C	$]3,4[$	B	$]-\infty,-1[$	A

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ هي

-2	B	-4	A
1	D	4	C

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\acute{f}(a)$$

$$\acute{f}(1)=\frac{3-1}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2$$



خص يعني بدي ضل علمكن 😂😂😂

مراجعة النهايات

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

إعداد المدرس: راتب كسيبي

0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$

$2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$

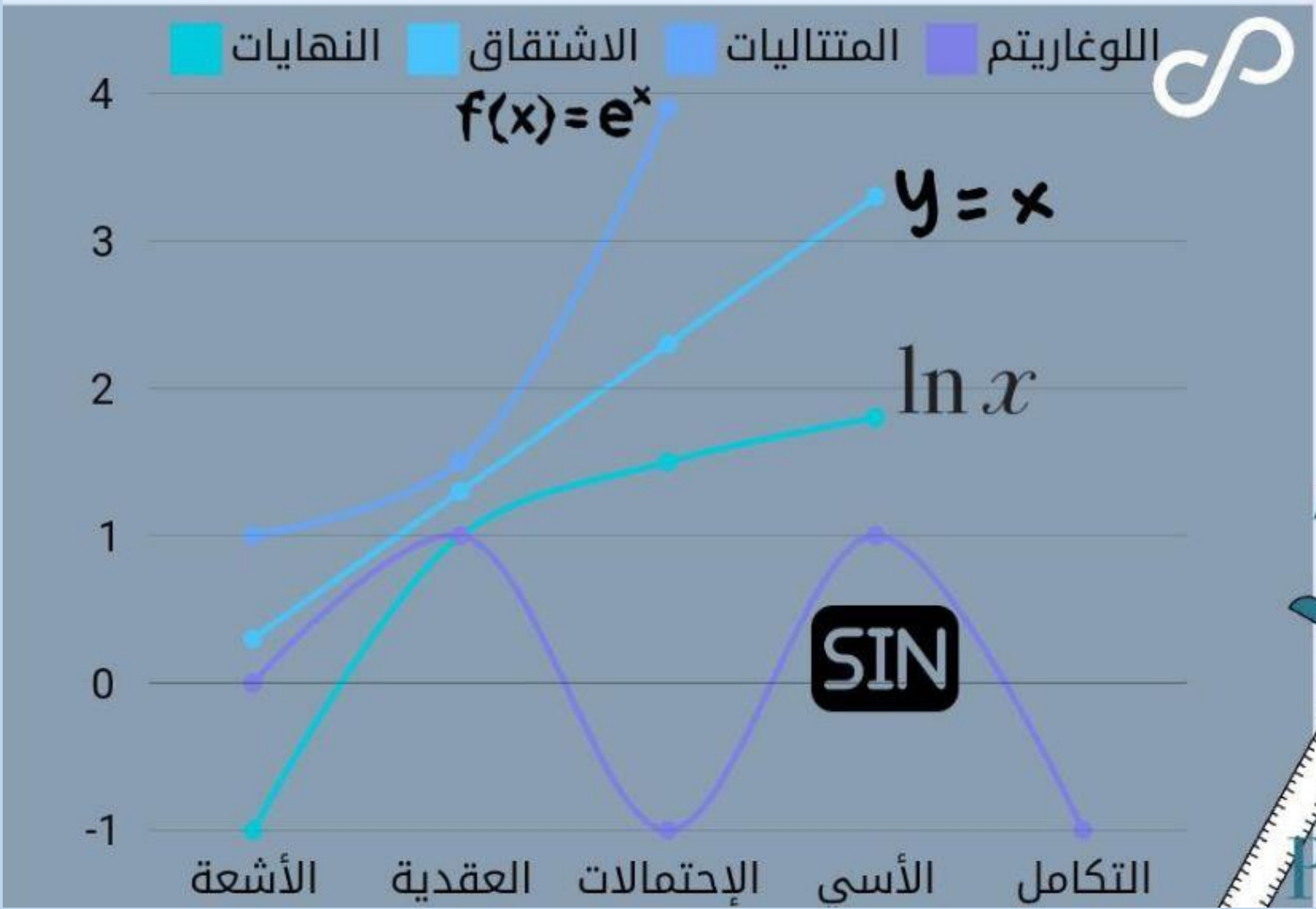
$7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$

$10a + 3b - 2c$

$\overrightarrow{AB}$

$i=\sqrt{-1}$



^nP_r

$P(A)$

ملاحظات عن ∞

$-\infty-\infty=-\infty$	$+\infty+\infty=+\infty$
$(\infty)(\infty)=\pm\infty$ نضرب الأشارات	$+\infty-\infty$ عدم تعيين
$\text{عدد}\times\infty=\pm\infty$ نضرب الأشارات	$0\times\infty$ عدم تعيين
$\frac{\text{عدد}}{\infty}=0$	$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين
$\frac{\infty}{\text{عدد}}=\pm\infty$ نضرب الأشارات	$\frac{0}{0}$ عدم تعيين
$\frac{\text{عدد}}{0}=\pm\infty$ ندرس إشارة المقام ونعوض في البسط وندرس أشارة الصفر	

$(+\infty)^{\text{عدد}}=+\infty$	$(-\infty)^{\text{زوجي}}=+\infty$	$(-\infty)^{\text{فردي}}=-\infty$

نستعمل النهايات لحساب نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف

مجموعة التعريف:

١ مجموعة تعريف كثيرات الحدود والتوابع المثلثية: هي $R=]-\infty,+\infty[$

٢ مجموعة تعريف التابع الكسري: هي R ماعدا القيم اللتي تعدم المقام

٣ مجموعة تعريف التوابع الجذرية: هي ماداخل الجذر اكبر او يساوي الصفر

نهاية تابع كثير حدود عند $\pm\infty$: هي نهاية الحد المسيطر

مثال: $f(x)=3x^3+5x^2-2x-9$ ماهي نهاية $f(x)$ عند $-\infty$

A	B	C	D
$+\infty$	**$-\infty$**	0	غير معروف

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3)=-\infty$

نهاية تابع كسري كل من البسط والمقام كثير حدود عند $\pm\infty$:
هي نهاية الحد المسيطر على الحد المسيطر

مثال: $f(x)=\frac{6x+6}{2-3x}$ نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	0	**-2**

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x}{-3x}\right)=\frac{6}{-3}=-2$

نهاية تابع كسري كل من البسط والمقام كثير حدود عند عدد: لدينا حالتين

الحالة الأولى: $\frac{\text{عدد}}{0}$ ندرس إشارة المقام ونعوض في البسط ثم ندرس إشارة الصفر من اليمين من اليسار

مثال: $f(x)=\frac{-2x^2}{(x-1)(2-x)}$ نهاية $f(x)$ عند 2 هي

A	B	C	D
$+\infty$	**$\pm\infty$**	$-\infty$	غير معروف

لإن $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\frac{-8}{0}$ وهو غير معروف ولحله ندرس أشارة المقام

المقام هو $(x-1)(2-x)=-x^2+3x-2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\frac{-8}{0^+}-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\frac{-8}{0^-}=+\infty$

الحالة الثانية : $\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين نحلل البسط والمقام ثم نختصر

مثال: $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ نهاية $f(x)$ عند 1 هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	0	**$\frac{4}{3}$**

الحل: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين

لدينا $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$ القسمة الأقليدية / التحليل

شرح القسمة الأقليدية: لدينا 1 تحقق المعادلة $2x^3-x^2-1$

إذا $x-1$ تقسم $2x^3-x^2-1$

إذا $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x+2}$

و $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x+1 \\
x-1 & 2x^3-x^2-1 \\
 & \mp2x^3\pm2x^2 \\
 & +x^2 \\
 & \mp x^2\pm x \\
 & +x-1 \\
 & \mp x\pm1 \\
 & 0\ \ 0
\end{array}
$$

التحليل المباشر للمقام:
عددين مجموعهم 1 وضريبهم -2
هم 2 و-1

بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة النهايات مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح "الطباعة ملون حصرا"

ملاحظة: من أهم طرق التحليل

١ أخراج عامل مشترك

٢ التحليل المباشر

٣ القسمة الأقليدية

٤ المميز Δ

٥ المتطابقات الشهيرة

$\Delta=b^2-4ac$

الحالة الأولى: $\Delta>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ او $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

الحالة الثانية: $\Delta<0$ مستحيل الحل في R

الحالة الثالثة: $\Delta=0$ تملك جذر مضاعف هو $x=\frac{-b}{2a}$

أهم المتطابقات:

١ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

٢ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

نهاية التوابع الكسري الجذري:

الحالة الأولى: حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$ نخرج عامل حتى لو لم يكن موجود ثم نختصر

مثال: $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ما هي نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

A	B	C	D
1	$-\infty$	0	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$\sqrt{x}=|x|=\begin{cases}+x: x\to+\infty\\-x: x\to-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{\sqrt{1-0}}=\frac{1}{1}=1$

الحالة الثانية: حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نضرب بالمرافق

مرافق $\sqrt{a}\pm b$ هو $\sqrt{a}\mp b$
مرافق $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ هو $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

مثال: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ مانهاية $f(x)$ عند 0

A	B	C	D
4	$-\infty$	0	$+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نضرب بالمرافق

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=2\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

$$\lim\limits_{x\to0} f(x)=2(1+1)=4$$

الحالة الثالثة: عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty+$ يحل اما بطريقة المرافق أو العامل حسب شكل التمرين

مثال: $f(x)=\frac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ نهاية $f(x)$ عند أطراف المجالات المفتوحة من مجموعة التعريف هي

A	B	C	D
1	$-\infty$	0	$+\infty$

لأن مجموعة تعريف التابع $f(x)$ هي

التابع الكسري معرف على R ماعدا القيم اللتي تعدم المقام $x^2+1\neq0$ لإنه مقدار موجب وأكبر تماما من الصفر اذا المقام لا ينعدم وهو معرف على R

التابع الجذري $\sqrt{x}$ معرف على $x\geq0$
$[0,+\infty[$

تقاطع المجموعتين السابقتين

هو $[0,+\infty[$ المجال مفتوح عند $+\infty$ فقط

$x=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ وهي حالة عدم تعيين

بما أن $x>0$ فأن:

$$f(x)=\frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0-0}{1+0}=1$$

ملاحظة مهمة : يمكن حل حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ عند أعداد بطريقة اوبيتال وسنذكرها لاحقا

0997047862

المدرس : راتب كسيبي

نهاية التوابع المثلثية:

نهاية التابع المثلثي عند 0 :نستعمل القوانين التالية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$
$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$	$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

مثال: نهاية $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ هي

A		B		C		D	
A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	1	D	0

لأن:

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

نهاية التوابع المثلثية عند $\pm\infty$ نستعمل مبرهنات المقارنة

مبرهنة المقارنة الأولى : (مبرهنة الأحاطة)

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ ونهاية g و h عند $+\infty$ هي l عندئذ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة: نبدأ ب أحد القوانين

$-1<\sin x<1$	$-1<\cos x<1$
$0<\sin^2 x<1$	$0<\cos^2 x<1$

مثال: ما نهاية $f(x)=\frac{\cos x}{x+1}$ عند ال$+\infty$ $x>-1$

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	-1	D	0

لأن عند $+\infty$ نستعمل الإحاطة

$-1<\cos x<1$

لدينا $x+1>0$ نقسم الطرفين على $x+1$

$\frac{-1}{x+1}<\frac{\cos x}{x+1}<\frac{1}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$

مبرهنة المقارنة الثانية:

$|f(x)-l|\le g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

مثال: نهاية f اللتي تحقق $|f(x)+4|\le\frac{1}{x+1}$ عند $+\infty$ هي

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	-1	D	-4

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-4$

مبرهنة المقارنة الثالثة :

إذا كان $f(x)\ge g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)\le g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

مثال: نهاية f اللتي تحقق $f(x)\ge\frac{1}{4}x^2$ عند$+\infty$ هي

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	-1	D	0

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x^2=0$ حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نهاية التابع المركب:

لنفرض أن $f(x)=goh=g(h(x))$ إذا كان $\lim_{x\to a}h(x)=b$ وكان $\lim_{t\to b} g(t)=c$ عندئذ $\lim_{x\to a} f(x)=c$

مثال: $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ مانهاية $f(x)$ عند $+\infty$

A	1	B	$-\infty$	C	-1	D	0

لأن نجري تحويل للمتغير $X=h(x)=\frac{1}{x}$ عندئذ يكون $f(x)=\frac{\sin X}{X}$

و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ إذا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$

ليكن $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ ما نهاية $f(f(x))$ عند $+\infty$

A	$\frac{-1}{3}$	B	$-\infty$	C	-1	D	0

لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ⇐ $\lim_{x\to1} f(x)=-\frac{2}{6}$ ⇐ $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{-1}{3}$

ليكن $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ ماهو $f(f(x))$ مما يلي

A	$\frac{9x-18}{6x+12}$	B	$\frac{6x+18}{6x+12}$	C	$\frac{-2x-12}{6x+12}$	D	$\frac{-2x-18}{6x+12}$

لأن $f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-\frac{3(x+5)}{x+5}}{\frac{x-3}{x+5}+\frac{5(x+5)}{x+5}}=\frac{\frac{-2x-18}{x+5}}{\frac{6x+12}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x+12}$

لاحظ يمكن استبعاد الخيارين A وB لأنه من المثال السابق $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{-2}{6}$

تعريف النهايات بشكل دقيق

الحالة الأولى: تعيين عدد A ليكون $f(x)$ ينتمي إلى مجال مفتوح $I=]a,b[$

نستعمل $|f(x)-l|<\varepsilon$

مثال: $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ إن نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي -2 ماهو العدد A اللذي يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$

A	37	B	49	C	-1	D	137

لأن $|f(x)-l|<\varepsilon$ $\varepsilon=0.05=\frac{1}{20}$ و $l=-2$

$l=\frac{b+a}{2}$ هي مركز المجال و $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$ وهي نصف قطر المجال

نعوض في القانون

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{1}{20}$$

بتوحيد المقامات $\left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$ بما أن $x\to+\infty$ إذا $\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}$

$140<x+3$ ⬅ $x>137$ نختار A=137

الحالة الثانية: تعيين مجال I ليكون $f(x)$ ينتمي إلى مجال مفتوح $I=]a,b[$

نستعمل $a<f(x)<b$

مثال: $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ إن نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي 5 ماهو المجال I اللذي يحقق الشرط: إذا انتمى x الى المجال I كان $f(x)$ في المجال $]3.95,4.05[$

A	]4,5[	B	]4.98,5.02[	C	]4,7,5.3[	D	]4.97,5.03[

لأن $3.95<f(x)<4.5$

$3.95<\frac{x+3}{x-3}<4.05$ نستخدم القسمة الأقليدية

$3.95<1+\frac{6}{x-3}<4.05$ نطرح1 $2.95<\frac{6}{x-3}<3.05$

نقلب $\frac{1}{2.95}>\frac{x-3}{6}>\frac{1}{3.05}$ نضرب 6 $\frac{6}{2.95}>x-3>\frac{6}{3.05}$

نجمع 3 $\frac{6}{3.05}+3>x>\frac{6}{2.95}+3$ بالأصلاح $4.97>x>5.03$

الحالة الثالثة : تعيين مجال I ليكون $f(x)>A$ احيانا" يوجد معادلة درجة تانية من الشكل : $a(x-1)^2+b(x-1)+c$ نحلها بالΔ

مثال : $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$ ماهو المجال الذي مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$

A	]0.9,1.01[	B	]0.9,0.01[	C	]0.99,1.01[	D	]0.999,1.001[

$f(x)>10^6$ ⬅ $\frac{x}{(x-1)^2}>10^6$ ⬅ $x>10^6(x-1)^2$

$x+1-1>10^6(x-1)^2$ ⬅ $0>10^6(x-1)^2-(x-1)-1$

نحلها بالΔ $a=10^6$ $b=-1$ $c=-1$ $\sqrt{\Delta}=2\times10^3$

$x_1=1+10^{-3}$ $(x-1)=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2\times10^3}{2\times10^6}\approx\frac{2\times10^3}{2\times10^6}=10^{-3}$

$x_2=1-10^{-3}$ $(x-1)=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-2\times10^3}{2\times10^6}\approx\frac{-2\times10^3}{2\times10^6}=-10^{-3}$

$I=]0.999,1.001[$

اللهم ارزقني قوة الحفظ وسرعة الفهم وصفاء الذهن اللهم ألهمني الصواب في الجواب وبلغني أعلى المراتب في الدين والدنيا والآخرة

المقاربات:

-1 المقارب الافقي : نقول $y=b$ عن انه مقارب افقي للخط البياني للتابع f اذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$

-2 المقارب الشاقولي : نقول $x=a$ عن انه مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f اذا كان: $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

-3 المقارب المائل : نقول عن $\Delta: y=ax+b$ أنه مقارب مائل للخط البياني للتابع f اذا كان $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

مثال: $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ عدد المقاربات ل $f(x)$ هو

A	B	C	D
4	2	1	0

لإن $D_f=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ اذا $y=1$ مقارب افقي عند $+\infty$ يوازي $x\acute{x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ اذا $y=1$ مقارب افقي عند $-\infty$ يوازي $x\acute{x}$

$\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$ اذا $x=3$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ يوازي $y\acute{y}$

$\lim_{x\to3} f(x)=-\infty$ اذا $x=3$ مقارب شاقولي عند $-\infty$ يوازي $y\acute{y}$

ملاحظة : لدراسة وضع c بالنسبة للمقارب الافقي او المائل ندرس اشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$

طرق ايجاد معادلة المقارب المائل :

(١ مجموع تابعين احدهم نهايته عند $\pm\infty$ تساوي 0

مثال: $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

A	B	C	D
$1+\frac{x}{2}$	$1+\frac{2}{x}$	$\frac{-2}{x}$	$1-\frac{x}{2}$

لإن $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2}{x}=0$ إذا $f(x)-y_\Delta=\frac{-2}{x}$ و $y_\Delta=1+\frac{x}{2}$

(٢ بتوزيع البسط على المقام

مثال: $f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

A	B	C	D
$2x+5$	$-2x^2$	$\frac{-4}{x}$	$2x$

لإن $f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}=\frac{2x^2}{x}+\frac{5x}{x}-\frac{4}{x}=2x+5-\frac{4}{x}$

لإن $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{x}=0$ إذا $f(x)-y_\Delta=\frac{-4}{x}$ و $y_\Delta=2x+5$

(٣ البسط والمقام كثيري حدود ودرجة البسط اكبر من درجة المقام بمقدار واحد نستخدم القسمة الاقليدية

مثال: $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

A	B	C	D
$2x+1$	$2x-1$	$\frac{1}{x-4}$	$-2x-1$

لإن نقسم $f(x)$ بالقسمة المطولة نحصل على $f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-4}=0$

(٤ اذا كان التابع من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ نكتب المقدار ax^2+bx+c بالصيغة القانونية لتكون بالشكل $ax^2+bx+c=(a`x+b`)^2+c`$ عندها التابع يقبل مقاربين مائلين من الشكل $\Delta_1: y=a`x+b`$ و $\Delta_2: y=-a`x-b`$

مثال: $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $-\infty$ هو

A	B	C	D
$-x-1$	$x-1$	$2x$	$x+1$

نتمم x^2+2x+4 الى مربع كامل بالشكل

$x^2+2x+4=x^2+2x+1-1+4=(x+1)^2+3$

اذا المقارب المائل عند $-\infty$ هو $y_\Delta=-x-1$

طريقة ثانية: $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$
مقاربه عند $+\infty$ هو $y=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$
مقاربه عند $-\infty$ هو $y=-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}$

للإتمام إلى مربع كامل نقسم أمثال الـx على 2 ثم نربعها ثم نضيفها ونطرحها من المعادلة والحدود الثلاثة الأولى تكتب بشكل قوس مربع

(٥ الطريقة العامة : لايجاد معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ (مثلا) نتبع الخطوات التالية :

a) نتأكد أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) نعين العددين الحقيقيين a , b حيث : $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

c) عندئذ تكون معادلة المقارب المائل من الشكل $\Delta: y=ax+b$

مثال: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $-\infty$ هو

A	B	C	D
$y=-x$	$y=x$	$y=2x$	$y=3x+1$

لإن $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ حالة عدم تعيين نزيلها بإخراج عامل

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x}$$

$\sqrt{x^2}=-x \quad x\to-\infty$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}=-1$$

$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$ حالة عدم تعيين نضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}=0$$

والمقارب من الشكل $y=ax+b$ اذا $y=-x$

ملاحظة لدراسة الوضع النسبي: هو دراسة اشارة $f(x)-y_\Delta$

$x^2>0$	$\sqrt{x}>0$	$\lvert x\rvert>0$
$-x^2<0$	$-\sqrt{x}<0$	$-\lvert x\rvert<0$

مثال: $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$ الوضع النسبي بين $f(x)$ ومقاربه المائل عند $+\infty$

A	B	C	D
c_f تحت y_Δ	c_f فوق y_Δ	لايوجد مقارب	فوق وتحت

لإن من الواضح أن $f(x)-y_\Delta=\frac{-1}{x^2}$ و $x^2>0$

$\frac{-1}{x^2}<0$ وهو سالب اذا "$f(x)-y_\Delta<0$ اذا c_f تحت y_Δ"

مثال: $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$ الوضع النسبي بين $f(x)$ ومقاربه المائل عند $]-1,+\infty[$

A	B	C	D
c_f تحت y_Δ	c_f فوق y_Δ	لايوجد مقارب	فوق وتحت

ندراسة اشارة $f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		‖		
الوضع النسبي	c_f تحت y_Δ		c_f فوق y_Δ	

مثال : $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ يقبل $y=3x$ مقاربا "مائلا" عند $+\infty$ ان نقطة تقاطع $f(x)$ مع y_Δ هي

A	B	C	D
$\left(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{3}{2\sqrt2}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt2},\frac{1}{3}\right)$

لان : ندرس الوضع النسبي بين $f(x)$ و y_Δ

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$

$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$ نربع الطرفين بشرط $2x>0$ $x>0$

$|4x^2-1|=4x^2$ اما $4x^2-1=4x^2$ اذا $-1=0$ وهي مستحيلة

او $4x^2-1=-4x^2$ اذا $8x^2=1$ اذا $x^2=\frac{1}{8}$ اذا $x=\pm\frac{1}{2\sqrt2}$

$x=-\frac{1}{2\sqrt2}$ مرفوض من الشرط $x=+\frac{1}{2\sqrt2}$ مقبول

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt2}$	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		0	
الوضع النسبي	c_f فوق y_Δ	$\frac{3}{2\sqrt2}$	c_f تحت y_Δ

تحديد الثوابت:

١ c_f مار من نقطة $A(a,b)$ إذا $f(a)=b$

٢ c_f يملك مقارب شاقولي معادلته $x=a$ إذا المقام ينعدم عند $x=a$

٣ c_f يملك مقارب أفقي معادلته $y=b$ إذا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$

٤ c_f يملك مقارب مائل من الشكل $y=ax+b$

حاول كتابة $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$

مثال: $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ ماهي الأعداد الحقيقية اللتي تحقق

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

A		B		C		D	
A	$a=3$, $b=1$, $c=8$	B	$a=1$, $b=2$, $c=8$	C	$a=1$, $b=2$, $c=3$	D	$a=0$, $b=2$, $c=3$

نقسم البسط على المقامبالقسمة الإقليدية

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة مع الشكل المطلوب نجد إن $a=3$ بقي لدينا

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

بتوحيد المقامات في الطرف الأيمن

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b(x-2)+c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة بالبسط $9x+6=b(x-2)+c(x+1)$

عندما $x=-1$ $b=1$ عندما $x=2$ $c=8$

الاستمرار :

١) نقول عن التابع f انه مستمر عند النقطة a اذا تحققت العلاقة $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

٢) نقول عن f انه مستمر على مجال I اذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط هذا المجال

٣) جميع التوابع المرجعية مستمرة على المجالات التي تشكل مجموعة التعريف

مثال: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$ قيمة m التي تجعل f مستمر عند 0

A	2	B	3	C	0	D	1

ليكون $f(x)$ مستمر عند الصفر يجب ان يكون $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

وهي حالة عدم تعيين نضرب بالمرافق $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}-1\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x}=2$$

$$f(0)=m=\lim_{x\to0}f(x)=2$$

تابع الجزء الصحيح: $E(x)$ هوتابع يعطي قيم صحيحة للأعداد

ويحقق $x-1<E(x)\le x$ او $n\le x<n+1$

نكتب المجال على شكل مجالات جزئية طول كل منها يساوي الواحد

(من الأيمن مفتوح ومن الايسر مغلق)

مثال: $E(x)=0$ ➡ $[0,1[$

$E(x)=1$ ➡ $[1,2[$

$E(x)=2$ ➡ $[2,3[$

استمرار $E(x)$ عند نقطة

$f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$

رسم $E(x)$

نهاية $E(x)$

مثال: $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ إن $f(x)$ على المجال $[1,2[$ هو

A	x^2	B	$1+(x-1)^2$	C	$2+X^2$	D	x

لإن $E(x)=1$ ➡ $[1,2[$ اذا نعوض بدل كل $E(x)$ ب1 في المعدلة

مثال: $f(x)=x-E(x)$ ماهي $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

A	2	B	3	C	0	D	4

لإن $x-1<E(x)\le x$ $\quad -x+1>-E(x)\ge -x$

$+1>x-E(x)\ge 0$ و $\frac{1}{x^2}>\frac{f(x)}{x^2}\ge 0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

وحسب مبرهنة الإحاطة : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

ملاحظة: يمكن دراسة هذا الدرس مع وحدة الأشتقاق

دراسة التغيرات :

1)نوجد مجموعة تعريف التابع $f(x)$

2) نحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف المفتوحة والصور عند الاطراف المغلقة

3) نعين معادلة كل مقارب افقي او شاقولي ان وجد وندرس الاوضاع النسبية

4) نشتق التابع f ونعدمه وندرس اشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريفه

5) نصور القيمة التي عدمت المشتق

6) تنظيم جدولا" بتغيرات f

حل المعادلة : $f(x)=k$ (عن طريق الجدول)

نقول أن للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد على المجال $]a,b[$ إذا تحققت

الشرطين 1 f مطردة تماما 2 $k\in f(]a,b[)$

حالة خاصة $f(x)=0$

F مستمر ومطرد تماما" على $I=[a,b]$

و $f(a)\times f(b)<0$ "اذا للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على I

مثال: $f(x)=x^3-x^2+x-2$ كم عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$

A	1	B	2	C	3	D	0

ندرس تغيرات f : fمستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$f'(x)=3x^2-2x+1$ نعدم $f'(x)$

$3x^2-2x+1=0$ $\Delta=-8<0$ اذا $f'(x)$ لاينعدم اذا لايغير اشارته

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$f(x)$ مستمر ومستمر تماما على R فهو مستمر ومتزايد تماما على $]1,2[$

$f(1)=1-1+1-2=-1$ $\quad f(2)=8-4+2-2=4$

$f(1)\times f(2)=-4<0$ اذا يوجد حل وحيد فقط

صورة مجال	f متزايد تماما"	f متناقص تماما"
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=]a,b]$	$f(I)=]\lim_{x\to a}f(x),f(b)]$	$f(I)=[f(b),\lim_{x\to a}f(x)[$
$I=[a,b[$	$f(I)=[f(a),\lim_{x\to b}f(x)[$	$f(I)=]\lim_{x\to b}f(x),f(a)]$
$I=]a,b[$	$f(I)=]\lim_{x\to a}f(x),\lim_{x\to b}f(x)[$	$f(I)=]\lim_{x\to b}f(x),\lim_{x\to a}f(x)[$

مثال:ماهي صورة المجال $I=]-\infty,-1[$ وفق الجدول التالي

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	-2	0	4	3

A	$]2,+\infty[$	B	$]-1,2[$	C	$]-2,+\infty[$	D	$]-\infty,-1[$

ملاحظة : عدد حلول $f(x)=0$ في الجدول السابق حلين احدهم في المجال $]-\infty,-1[$ والأخر في المجال $]-1,2[$ لإن الصفر تنتمي الى المجالين $]-2,+\infty[$ و $]-2,4[$ وهي صور المجالات السابقة

ملاحظة : الخط البياني للتقابل والتقابل العكسي متناظران بالنسبة الى مستقيم $d: y=x$

مثال : $f(x)=x^2$ $\quad f(x)=\sqrt{x}$ هما :

A	متناظران بالنسبة للمبدأ	B	متناظران بالنسبة لـ $y=0$	C	متناظران بالنسبة الى مستقيم $y=x$	D	غير متناظران

لان F,g تقابل وتقابله عكسي

ملاحظات :

$f'\ge 0$ إذا f متزايد تماما	$f'\le 0$ إذا f متناقص تماما
$f(-x)=f(x)$ التابع زوجي	$f(-x)=-f(x)$ التابع فردي
$\cos(-x)=\cos x$	$\sin(-x)=-\sin x$

اللهم وفق كل من أجتهد طلبا" للعلم

مراجعة اللوغارتم والأسي

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

0997047862

Rateb ksaibe

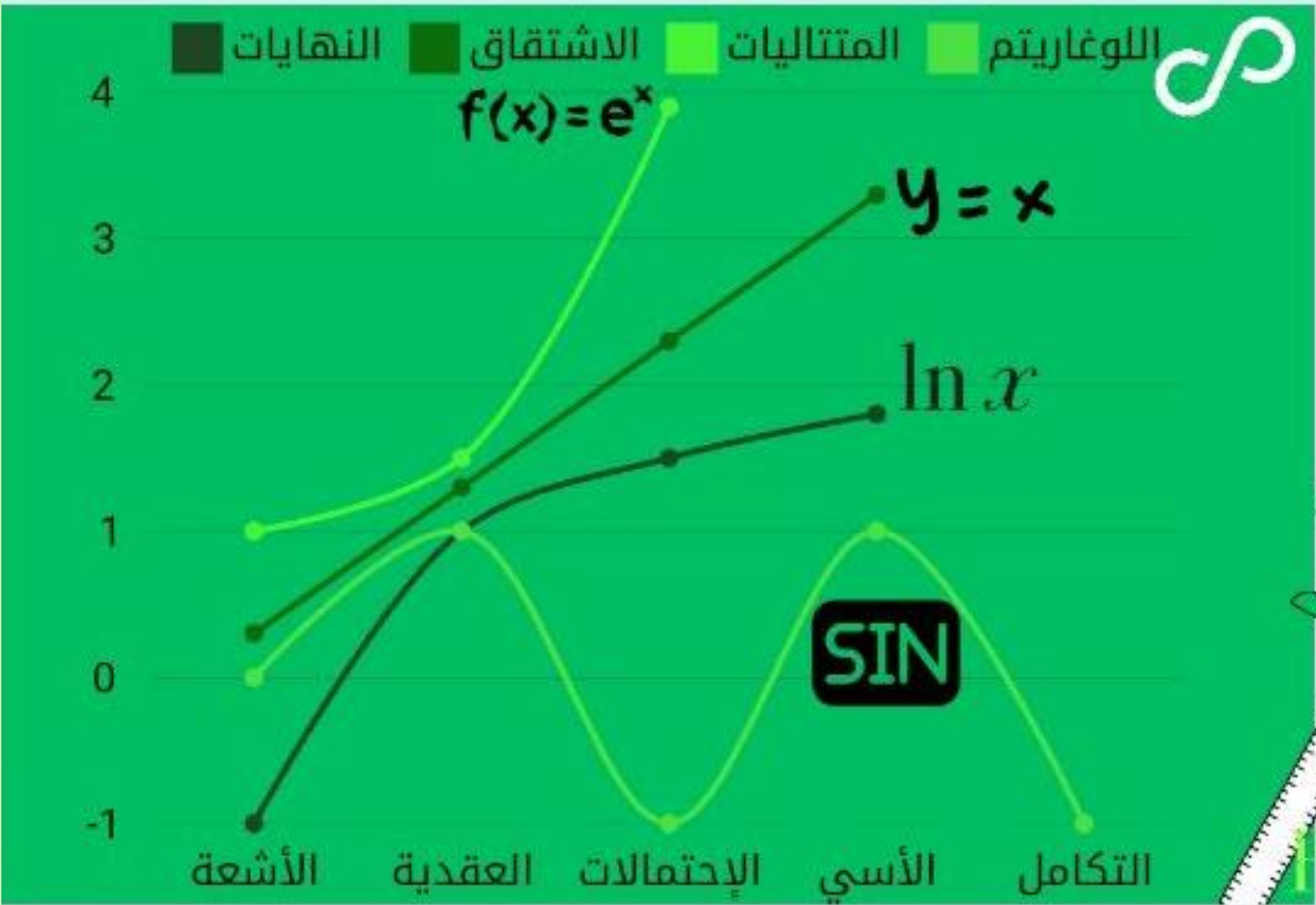
$2x + 3x - 4x$ $\quad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\quad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\quad$ $10a + 3b - 2c$

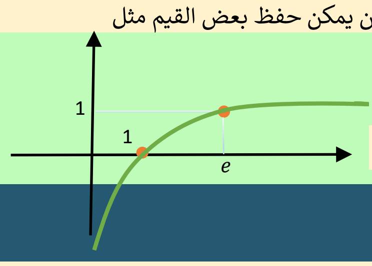
$\int$ $\overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$



بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة اللوغاريتمي والأسي مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح الطباعة ملون حصرا"

التابع اللوغاريتمي: يرمز له ب $ln(x)$ وهو تابع معرف على $]0,+\infty[$
يمكن حساب قيمه بالألة الحاسبة ولكن يمكن حفظ بعض القيم مثل



$ln(1) = 0$
$ln(2) = 0.7$
$ln(e) = 1$
$ln(3) = 1.1$
$ln(5) = 1.6$
$ln(0) = -\infty$
$ln(+\infty) = +\infty$

أو بصيغة أدق $\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$

خواص التابع اللوغاريتمي

$ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$
$ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$
$ln(a^n) = nln(a)$
من الخاصة الثانية يمكن استنتاج $ln(\frac{1}{a}) = ln(1) - ln(a) = -ln(a)$
من الخاصة الثالثة يمكن استنتاج $ln(\sqrt{a}) = ln(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ln(a)$
$ln(a) = ln(b) \Rightarrow a = b$
$ln(a) > ln(b) \Rightarrow a > b$

مثال:إن قيمة العبارة $ln(2+\sqrt{3}) + ln(2-\sqrt{3})$ تساوي

A	0	B	1	C	e	D	2

$ln(2+\sqrt{3}) + ln(2-\sqrt{3}) = ln[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})] = ln1 = 0$

مثال:إن قيمة العبارة $ln(250)$ تساوي تقريبا"

A	4.2	B	2.4	C	5.5	D	6.3

$ln(250) = ln(5^3 \times 2) = 3ln(5) + ln(2) \approx 3(1.6) + 0.7 \approx 5.5$

مجموعة تعريف اللوغاريتم : التابع اللوغاريتمي
معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر

مثال:إن قيم التابع $f(x) = ln(x-3)$ هي

A	$D_f =]3,+\infty[$	B	$D_f =]-\infty,3[$
C	$D_f =]1,3[$	D	$D_f =]0,+\infty[$

إن التابع اللوغاريتمي معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر إذا"
$x - 3 > 0$ و $x > 3$ إذا" $D_f =]3,+\infty[$

مثال:إن قيم التابع $f(x) = ln(1-x)$ هي

A	$D_f =]0,+\infty[$	B	$D_f =]-\infty,1[$
C	$D_f =]-\infty,0[$	D	$D_f =]1,+\infty[$

إن التابع اللوغاريتمي معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر إذا"
$1 - x > 0$ و $1 > x$ إذا" $D_f =]-\infty,1[$

مثال:إن مجموعة تعريف التابع $f(x) = ln(x^2-3x+2)$ هي

A	$D_f =]1,2[$	B	$D_f =]-\infty,1[$
C	$D_f =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$	D	$D_f =]2,+\infty[$

إن التابع اللوغاريتمي معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر إذا"
$x^2 - 3x + 2 > 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-2)(x-1) = 0$
أما $x = 1$ أو $x = 2$

حل متراجحة درجة ثانية
1– نعدم
2–نجدول
2–نختار القيم المقبولة

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	− 0	+
$x^2-3x+2>0$	محققة		غير محققة	محققة

نختار القيم المحققة وهي $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

مثال:إن مجموعة تعريف التابع $f(x) = ln(\frac{x-3}{2-x})$ هي

A	$D_f =]2,3[$	B	$D_f =]-\infty,2[$
C	$D_f =]-\infty,2[\cup]3,+\infty[$	D	$D_f =]3,+\infty[$

إن التابع اللوغاريتمي معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر إذا"
$\frac{x-3}{2-x} > 0$
البسط ينعدم عند $x - 3 = 0$ ، $x = 3$
البسط ينعدم عند$2 - x = 0$ ، $x = 2$

حل متراجحة كسرية
1– نعدم بسط و مقام
2–نجدول
2–نختار القيم المقبولة

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-3$	−		0	+
$2-x$	+	0	−	
$\frac{x-3}{2-x}$	−	ǁ	+ 0	−
$\frac{x-3}{2-x} > 0$	غير محققة	محققة		غير محققة

نختار القيم المحققة وهي $]2,3[$

مثال:إن مجموعة تعريف التابع $f(x) = ln(ln(ln(x)))$ هي

A	$D_f =]e,+\infty[$	B	$D_f =]-\infty,e[$
C	$D_f =]e^e,+\infty[$	D	$D_f =]1,+\infty[$

إن التابع اللوغاريتمي معرف على مادخل اللوغاريتم أكبر تماما" من الصفر إذا"
$ln(ln(x)) > 0 \Leftarrow$ بأخذ e للطرفين $ln(x) > e^0 \Leftarrow ln(x) > 1$
نأخذ e للطرفين مرة ثانية $x > e \Leftarrow$ إذا" معرف على $]e,+\infty[$

ملاحظة : مجموعة تعريف تابع لوغاريتمي داخله قيمة مطلقة أو تربيع
معرف على R ماعدا القيم اللتي تعدم مادخل اللوغاريتم

مثال:إن مجموعة تعريف التابع $f(x) = ln|x+1| - ln|x-1|$ هي

A	$D_f = R \setminus \{1\},\{-1\}$	B	$D_f = R \setminus \{1\}$
C	$D_f = R \setminus \{-1\}$	D	$D_f = R$

إن التابع $ln|x+1|$ معرف على $R \setminus \{-1\}$
و إن التابع $ln|x-1|$ معرف على $R \setminus \{1\}$
إذا" مجموعة تعريف التابع $R \setminus \{1\},\{-1\}$

مثال:إن مجموعة تعريف التابع $f(x) = ln(x-5)^2$ هي

A	$D_f = R \setminus \{5\},\{-5\}$	B	$D_f = R \setminus \{1\}$
C	$D_f = R \setminus \{5\}$	D	$D_f = R$

إن التابع $ln(x-5)^2$ معرف على $R \setminus \{5\}$

حل المعادلة اللوغاريتمية:
١- نوجد مجموعة تعريف التابع
٢- نستخدم خواص اللوغاريتم
٣- نصل إلى أحد الحلين

$e^{ln(x)} = x$
$ln(e^x) = x$

$ln(a) = b$
نأخذ e للطرفين نجد
$a = e^b$

$ln(a) = ln(b)$
نأخذ e للطرفين نجد
$a = b$

٤- ثم نحل المعادلة ونأخذ القيم المقبولة ضمن مجموعة التعريف

مثال:إن حل المعادلة $ln(x-2) = ln(2)$ هو

A	$x = 4$	B	$x = 4$	C	$x = 4$	D	مستحيلة الحل

أولا": إن مجموعة تعريف $ln(x-2)$ معرف على $]2,+\infty[$
ثانيا":لايوجد خواص لاستعمالها
ثالثا":$ln(x-2) = ln(2)$ نأخذ e للطرفين نجد $x - 2 = 2$
رابعا":نحل المعادلة نجد $x = 4$ وهو مقبول

- لا بأس بالتعب إن كان لاجل الحلم
" it s ok ay to get tired if it s for the dreams

مثال:إن حل المعادلة $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$ هو

A	$x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}$	B	$x_1=1+\sqrt{2}$
C	مستحيلة الحل	D	$x_2=1-\sqrt{2}$

أولاً": لنوجد مجموعة التعريف $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$

$x^2-1>0$

نعدم $x^2-1=0$ إما $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
x^2-1	+ 0 − 0 +
$x^2-1>0$	محققة \\\\ محققة

ومجموعة تعريفه $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$2x>0$

$x>0$

$]0,+\infty[$

تقاطع المجالات نجد

$D_f=]1,+\infty[$

ثانياً":لايوجد خواص لاستعمالها

ثالثاً": $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$ نأخذ e للطرفين نجد $2x=x^2-1$

رابعاً":نحل المعادلة $x^2-2x-1=0$ نحل ب Δ نجد

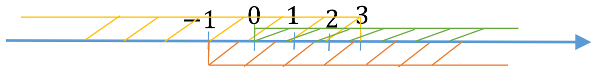
$x_1=1+\sqrt{2}$ وهو حل مقبول و $x_2=1-\sqrt{2}$ وهو حل مرفوض

مثال:إن حل المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$ هو

A	$x=1$	B	$x=-9$
C	مستحيلة الحل	D	$x=1$ و $x=-9$

أولاً": لنوجد مجموعة التعريف $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}>0$	$3-x>0$	$2x>0$
$x>-1$	$3>x$	$x>0$
$]-1,+\infty[$	$]-\infty,3[$	$]0,+\infty[$



تقاطع المجالات نجد

$D_f=]0,3[$

ثانياً":نستعمل الخواص

$$\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$$

$$\ln\left((2x)^{\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\ln(\sqrt{2x})=\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

ثالثا نأخذ e للطرفين نجد $\sqrt{2x}=\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

رابعاً":نحل المعادلة $\sqrt{2x}=\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$ نربع الطرفين

$$2x=\frac{(3-x)^2}{x+1}$$

$$2x(x+1)=(3-x)^2$$

$$2x^2+2x=9-6x+x^2$$

$$x^2+8x-9=0$$

$$(x+9)(x-1)=0$$

أما $x=1$ وهو مقبول أو $x=-9$ وهو مرفوض

ملاحظة
إذا كان السؤال مثل هذا إن حل المعادلة يمكن تعويض الخيارات في المعادلة والجواب هو من يحقق المعادلة

مثال:إن حل المعادلة $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$ هو

A	$x=\frac{e^2-2}{1-e^2}$	B	$x=\frac{e^2+2}{1+e^2}$
C	مستحيلة الحل	D	$x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$

أولاً : لنوجد مجموعة التعريف $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

$x+1>0$	$x-2>0$
$x>-1$	$x>2$
$]-1,+\infty[$	$]2,+\infty[$

نجد مجموعة التعريف هي $D_f=]2,+\infty[$

نستعمل الخواص $\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=2$ ثم نأخذ e للطرفين نجد

$\frac{x-2}{x+1}=e^2$ وبحل هذه المعادلة وعزل x نجد $x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$ وهو عدد سالب ولاينتمي إلى مجموعة التعريف إذاً" المعادلة مستحيلة الحل

مثال:إن عدد حلول المعادلة $\ln|x-2|+\ln|x+2|=0$ هو

A	2	B	4
C	1	D	3

أولاً" : لنوجد مجموعة التعريف $\ln|x-2|+\ln|x+2|=0$

$\ln|x+2|$ معرف على $R\setminus\{-2\}$ و $\ln|x-2|$ معرف على $R\setminus\{2\}$

إذاً" مجموعة التعريف هي $R\setminus\{-2\},\{2\}$

ثانياً":نستعمل خواص $\ln|x-2||x+2|=0$

ثالثاً" نأخذ e للطرفين نجد $|x-2||x+2|=1$

فك القيمة المطلقة
$|x|=a$
إما $x=a$ أو $x=-a$

إما $(x-2)(x+2)=1$

$x^2-4=1$

$x^2=5$

إما $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$

إما $(x-2)(x+2)=-1$

$x^2-4=-1$

$x^2=3$

إما $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

جميع الحلول السابقة مقبولة

حل المتراجحة اللوغاريتمية:

١- نوجد مجموعة تعريف التابع نسميها D_1

٢- نستخدم خواص اللوغاريتم

٣- نصل إلى أحد الحلين

$\ln(a)=\ln(b)$
نأخذ e للطرفين نجد
$a=b$

$\ln(a)=b$
نأخذ e للطرفين نجد
$a=e^b$

$e^{\ln(x)}=x$
$\ln(e^x)=x$

٤- ثم نحل المعادلة ونسمي الحل D_2

٥- ثم نقاطع $D=D_1\cap D_2$

مثال:إن حل المتراجحة $\ln(3)\le\ln(5-x)+\ln(x-1)$ هو

A	$]2,4[$	B	$]1,5[$
C	$]-\infty,5[$	D	$]1,+\infty[$

إن مجموعة تعريف $\ln(x-1)$ معرف على $x>1$ أي $]1,+\infty[$

إن مجموعة تعريف $\ln(5-x)$ معرف على $x<5$ أي $]-\infty,5[$

وإن تقاطع المجالين هو $D_1=]1,5[$

$$\ln(3)\le\ln(5-x)+\ln(x-1)$$

$$\ln(3)\le\ln[(5-x)(x-1)]$$

$$\ln(3)\le\ln[-x^2+6x-5]$$

$$3\le -x^2+6x-5$$

$$x^2-6x+8\le 0$$

$$(x-4)(x-2)=0$$

x	$-\infty$ 2 4 $+\infty$
f	+ 0 − 0 +
$f\le 0$	/// 0 محققة 0 ////

ومجموعة الحلول $D_2=]2,4[$

$D=D_1\cap D_2=]2,4[$

مثال:إن حل المتراجحة $\ln(2-x)\ge 1$ هو

A	$]-\infty,2]$	B	$]-\infty,2-e]$
C	$]-\infty,5[$	D	$]1,+\infty[$

إن مجموعة تعريف $\ln(2-x)$ معرف على $x<2$ أي $D_1=]-\infty,2[$

$\ln(2-x)\ge 1$ نأخذ e للطرفين

$2-x\ge e$ نجد $x\le 2-e$ ومنه حلول المتراجحة $D_2=]-\infty,2-e]$

$D=D_1\cap D_2=]-\infty,2-e]$

ملاحظة: في حل المتراجحة اللوغارتمية يمكن أن نأخذ مجموعة تعريف الطرف الأصغر فقط ولكن هناك حالات يكون اللوغارتم في الطرف الأكبر لذلك من الأفضل أن نأخذ مجموعة تعريف الطرفين

انسَ مخاوفك و اترك الأمر لشغفك و تذكر أنك وُضِعتَ في مكانك الصحيح حتى و إن بدا الأمر مستحيلاً لا تستسلم و ابدأ في خلق معجزة

ملاحظة : في حال كان لدينا $(ln(x))^2$ لا تستعمل خواص عاملها معاملة معادلة درجة ثانية

مثال:إن حل المعادلة $(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0$ هو

A	$x = e^1$ $x = e^3$	B	$x = e^1$ $x = e^6$
C	$x = e^{-1}$ $x = e^3$	D	$x = e^{-1}$ $x = e^5$

إن مجموعة التعريف $]0, +\infty[$

$$(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0$$
$$(lnx - 3)(lnx + 1) = 0$$

$lnx + 1 = 0$
$lnx = -1$
$x = e^{-1}$

$lnx - 3 = 0$
$lnx = 3$
$x = e^3$

حل معادلتين بمجهولين لوغاتميات: إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

مثال: إن حل المعادلتين $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ ln(x) + ln(y) = ln(3) \end{cases}$ هو

A	$(-1,3)$و$(-3,1)$	B	$(1,3)$و$(-3,-1)$
C	$(1,3)$و$(3,1)$	D	$(-3,1)$و$(3,-1)$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ ln(x.y) = ln(3) \end{cases}$ معرف $x > 0$ و $y > 0$

من المعادلة الثانية بأخذ e لدينا $x.y = 3$ "إذا $x = \frac{3}{y}$ نعوض بالمعادلة الأولى

$\left(\frac{3}{y}\right)^2 + y^2 = 10$ نضرب المعادلة ب y^2 نجد

$$y^4 - 10y^2 + 9 = 0$$
$$(y^2 - 9)(y^2 - 1) = 0$$

$y^2 - 1 = 0$
$y^2 = 1$
$y = 1$ مقبول
$y = -1$ مرفوض

$y^2 - 9 = 0$
$y^2 = 9$
$y = 3$ مقبول
$y = -3$ مرفوض

بالتعويض بالمعادلة الأولى $y = 1$ ← $x = 3$
بالتعويض بالمعادلة الأولى $y = 3$ ← $x = 1$

مثال: إن حل المعادلتين $\begin{cases} 2lnx + lny = 7 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$ هو

A	(e^3, e)	B	(e, e^3)
C	(e^3, e^5)	D	(e^5, e^3)

$\begin{cases} 2lnx + lny = 7 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$ معرف $x > 0$ و $y > 0$

هنا نستعمل طريقة الحذف بالجمع نضرب المعادلة الأولى ب 5

نجمع المعادلتين نجد $\begin{cases} 10lnx + 5lny = 35 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$

$13lnx = 39$ "إذا $lnx = 3$ "إذا $x = e^3$ نعوض في المعادلة الأولى

$2lne^3 + lny = 7$ ومنه نجد $lny = 1$ و $y = e$

مثال: إن حل المعادلتين $\begin{cases} (lnx)(lny) = -12 \\ ln(x.y) = 1 \end{cases}$ هو

A	$(e^4, e^3), (e^3, e^4)$	B	$(e^{-4}, e^{-3}), (e^{-3}, e^{-4})$
C	$(e^4, e^{-3}), (e^{-3}, e^4)$	D	$(e^4, e^3), (e^3, e^4)$

$\begin{cases} (lnx)(lny) = -12 \\ lnx + lny = 1 \end{cases}$ معرف $x > 0$ و $y > 0$

هنا نستعمل طريقة الحذف بالتعويض

نعزل $lny = 1 - lnx$ من المعادلة الثانية ونعوضها في الأولى

$$(lnx)^2 - lnx - 12 = 0$$
$$(lnx - 4)(lnx + 3) = 0$$

إما $x = e^{-3}$ نعوض في المعادلة نجد $y = e^4$
أو $x = e^4$ نعوض في المعادلة نجد $y = e^{-3}$

مشتق التابع اللوغارتمي : مشتق اللوغارتم هو مشتق ماداخل اللوغارتم على ماداخل اللوغارتم أي بعارة أخرى ليكل لدينا التابع $f(x) = ln(g(x))$

إن مشتق هذا التابع $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ ومثال على ذلك

مشتق $f(x) = ln(x)$ هو $f'(x) = \frac{1}{x}$

مثال: إن مشتق التابع $f(x) = ln(x^2 + 1)$ هو

A	$f'(x) = x^2 + 1$	B	$f'(x) = 2x$
C	$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$	D	$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$

مثال: إن مشتق التابع $f(x) = ln(\frac{x-1}{x+1})$ هو

A	$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$	B	$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$
C	$f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$	D	$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

يمكن أن نشتق الأن ويمكن إستعمال الخواص ثم الإشتقاق

$$f(x) = ln(\frac{x-1}{x+1}) = ln(x-1) - ln(x+1)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

مثال: إن مشتق التابع $f(x) = \frac{1}{x} - ln(1 + \frac{1}{x})$ هو

A	$f'(x) = x + 1$	B	$f'(x) = x^2(x+1)$
C	$f'(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$	D	$f'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + x} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

مثال:إن مشتق التابع $ln(ln(ln(x)))$ هو

A	$f'(x) = \frac{ln(ln(x))}{xln(x)}$	B	$f'(x) = \frac{1}{xln(x)ln(ln(x))}$
C	$f'(x) = \frac{ln(x)}{ln(ln(x))}$	D	$f'(x) = \frac{1}{xln(ln(x))}$

$$f'(x) = \frac{(ln(ln(x)))'}{ln(ln(x))} = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{ln(x)}}{ln(ln(x))} = \frac{1}{xln(x)ln(ln(x))}$$

نهاية التابع اللوغاتمي: لدينا قوانين نستعملها لإيجار النهاية

$ln(+\infty) = +\infty$		$ln(0) = -\infty$
$\lim_{x \to 0} xlnx = 0^-$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{ln(x)} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{x}{ln(x+1)} = 1$		$\lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

ملاحظة: في حال حصلنا على حالة عدم تعيين نحاول إزالتها بأحد الطرق إما تفريق الكسر أو النشر أو إخراج x عامل مشترك أو نفرض $t = \frac{1}{x}$

مثال: إن نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x}(lnx - 1)$ عند 0 الموجب هي

A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty(-\infty - 1) = -\infty$$

مثال: إن نهاية التابع $f(x) = \frac{x+1}{ln(x)}$ عند $+\infty$ هي

A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

$$f(x) = \frac{x+1}{ln(x)} = \frac{x}{ln(x)} + \frac{1}{ln(x)}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

هنا تفرق الكسر لإنه عند التعويض نحصل على عدم تعيين

✩ الأمل بالتغيير دون القيام بشيء ، أشبه بالوقوف في محطة قطارات وانتظار قدوم سفينة!

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=x(1-lnx)$ عند 0 هي

A		B		C		D	
A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

$f(x)=x(1-lnx)=x-xlnx$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0-0=0$

هنا ننشر لأنه عند التعويض نحصل على عدم تعيين

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=x-lnx$ عند $+\infty$ هي

A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

$f(x)=x-lnx\ =x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$

هنا نخرج x عامل مشترك لإنه عند التعويض نحصل على عدم

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=x+xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ هي

A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

$f(x)=x+xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}ln(1+t)$

$f(t)=\frac{1}{t}+\frac{ln(1+t)}{t}$

$\lim_{t\to 0} f(t)=+\infty+1=+\infty$

هنا نفرض متحول $t=\frac{1}{x}$
إذا" $x=\frac{1}{t}$ وهو المتحول
يحول النهاية من $x\to+\infty$
إلى $t\to 0$ بقيم موجبة

تطبيقات على التابع اللوغارتمي :

مثال: لدينا التابع $f(x)=\begin{cases}x^2(1-lnx), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ إن f

A	f غير اشتقاقي و معرف عند0	B	f غير اشتقاقي و مستمر عند0
C	f اشتقاقي ومستمر عند0	D	f اشتقاقي و غير مستمر عند0

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2(1-lnx)}{x}=x(1-lnx)=0(1-\infty)$

وهي عدم تعيين لذلك ننشر x نجد $x(1-lnx)=x-xlnx$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0-0=0$

إذا" f اشتقاقي عند 0 وكل تابع اشتقاقي يكون مستمر عند 0 حسب مبرهنة

مثال:إن قيمة m ليكون للمعادلة $x^2-2x+ln(m+1)$ جذران مختلفان

A	$m\in\,]-\infty,e-1[$	B	$m\in\,]-1,e-1[$
C	$m\in\,]-1,+\infty[$	D	$m\in\,]-1,e^2-1[$

إن مجموعة تعريف التابع هي $m+1>0$ أي $m\in\,]-1,+\infty[$
يكون للمعادلة جذران مختلفان إذا كانت $\Delta>0$ إذا" لنحسب Δ
$\Delta=4-4ln(m+1)>0$
$4>4ln(m+1)\ \leftarrow\ 1>ln(m+1)$ نأخذ e للطرفين
$e>m+1\ \leftarrow\ e-1>m$ إذا" قيم $m\in\,]-\infty,e-1[$
نقاطع المجموعتين نجد قيم m هي $m\in\,]-1,e-1[$

مثال: إن المقارب المائل للتابع $f(x)=x-ln(2+\frac{1}{x})$ عند $+\infty$ هو

A	$y=x-ln2$	B	$y=x-ln3$
C	$y=x$	D	$y=x-1$

لنجرب الخيار A لدينا
$f(x)-y=-ln(2+\frac{1}{x})+ln2$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=-ln2+ln2=0$
إذا" هو الخيار الصحيح

لإثبات أن المقارب y
مائل عند $+\infty$
يجب أن يكون
$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

مثال: لتكن لدينا المتتالية $u_n=ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ وليكن لدينا المجموع
$s_n=u_1+u_2+........+u_n$ إن نهاية المجموع هي

A	$-\infty$	B	$+\infty$	C	0	D	1

لنحسب هذا المجموع
$s_n=ln\left(\frac{2}{1}\right)+ln\left(\frac{3}{2}\right)+........+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ من خواص اللوغارتم
$s_n=ln\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)........\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$ بتشطيب الحدود نجد
$s_n=ln(n+1)$ إذا" $\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty$

دراسة التغيرات :لدراسة التغيرات نطبق الخطوات
1 نوجد مجموعة تعريف 2 ندرس النهايات ونوجد المقاربات 3 نشتق التابع
4 نعدم المشتق 5 نصور القيم اللتي عدمت المشتق 6 نجدول 7 نرسم
ملاحظة : دراسة الإطراد (التزايد والتناقص) ندرس نفس الخطوات بدون نهايات
ملاحظة : لمعرفة عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ندرس نفس الخطوات
ملاحظة : لمعرفة القيم الحدية ندرس نفس الخطوات

مثال:لدينا التابع $f(x)=x+ln(x^2-1)$ إن التابع f على المجال $]1,+\infty[$

A	متزايد	B	متناقص	C	ثابت	D	غير مطرد

نشتق التابع $f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ ثم لنعدم $f'(x)$ نجد
فقط البسط ينعدم $x^2+2x-1=0$ نحلها ب Δ نجد حلولها
$x=1-\sqrt{2}$ أو $x=1+\sqrt{2}$ إذا" لنجدول

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0		
$f(x)$		$f(-\sqrt{2}-1)$	$f(\sqrt{2}-1)$		

نجد أن التابع في المجال $]1,+\infty[$ "متزايد تماما"

مثال:لدينا التابع $f(x)=x-ln(2+\frac{1}{x})$ إن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$
في المجال $I=\,]0,+\infty[$ هي

A	1	B	2	C	3	D	لا تملك حلول

ندرس تغيرات التابع $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
ومشتق التابع $f'(x)=\frac{2x^2+x+1}{2x^2+x}>0$ إذا" جدول تغيرات التابع

x	0	x	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

إذا" تملك حل وحيد

مثال: لدينا التابع $f(x)=5-2x+3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ المعرف على $]4,+\infty[$
المستقيم $y=5-2x$ مقارب مائل عند $+\infty$ إن الوضع النسبي بين $f(x)$ و y

A	c_f تحت المقارب	B	c_f يقطع المقارب
C	c_f فوق المقارب	D	y ليس مقارب f

ندرس اشارة $f(x)-y_\Delta=3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$
ضمن المجال $]4,+\infty[$ لدينا
$x-4>0$ و $x+1>0$
ولكن البسط أكبر من المقام إذا"
$3ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0$ و $f(x)-y_\Delta>0$
إذا" c_f فوق المقارب دوما"

لدراسة إشارة تابع لوغاتمي
نقارن بين البسط والمقام
في حال كان البسط أكبر من
المقام يكون موجب
في حال كان المقام أكبر من
البسط يكون سالب

مثال: لدينا التابع $f(x)=ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ إن التابع f

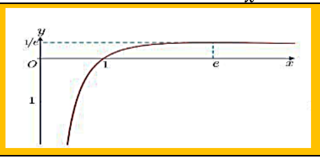
A	f متناظر بالنسبة للمبدأ	B	f متناظر بالنسبة لمحور الفواصل
C	f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	D	f غير متناظر

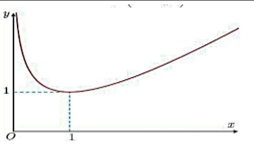
لمعرفة التناظر ندرس الزوجية والفردية لنحسب $f(-x)$

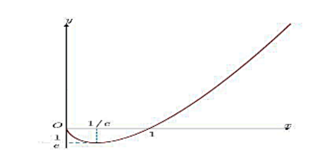
$$f(-x)=ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1}=-ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$$

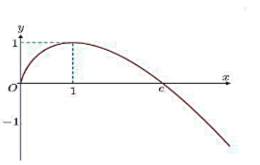
إذا" التابع f هو تابع فردي والتابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

لدينا التابع $f(x)=\frac{ln(x)}{x}$ إن الخط البياني للتابع هو ((ندرس تغيرات))

A


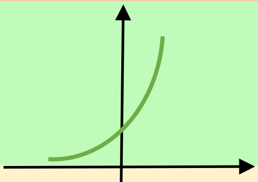
B


C


D


التابع الأسي :نرمز له ب e^x وهو تابع منطلقه R ومستقره $]0,+\infty[$

$e = 2.7$
$e^2 = 7.2$
$e^0 = 1$
$e^{-\infty} = 0$
$e^{+\infty} = +\infty$



أو بصيغة أدق $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

خواص التابع الأسي

$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
$e^{an} = (e^a)^n$
$ln(e^x) = x$
$e^{ln(x)} = x$

مثال: إن قيمة العبارة $ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-lnx}$ هي

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{x}$	B	$\frac{2}{x}$	C	$2x$	D	x

$$ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-lnx} = \frac{1}{x} + e^{ln(x)^{-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

مثال: إن قيمة العبارة $ln(e^x+1) - ln(e^{-x}+1)$ هي

A	e^x	B	x	C	$2x$	D	e^{-x}

$$ln(e^x+1) - ln(e^{-x}+1) = ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right) = ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right)$$

$$ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\right) = ln(e^x) = x$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{e^{2+ln8}}{e^{3+ln4}}$ هي

A	$\frac{1}{e^2}$	B	$\frac{1}{e}$	C	$\frac{2}{e^2}$	D	$\frac{2}{e}$

$$\frac{e^{2+ln8}}{e^{3+ln4}} = \frac{e^2 \times e^{ln8}}{e^3 \times e^{ln4}} = \frac{2}{e}$$

حل المعادلات الأسية:
ملاحظة: لحل معادلة أسية درجة أولى e^x نأخذ ln للطرفين ونعزل x
لحل معادلة أسية درجة ثانية e^{2x} نحلها أما ب Δ أو التحليل المباشر
لحل معادلة فيها e^{-x} نضرب المعادلة ب e^x ثم نحلها

مثال: إن حل المعادلة $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$ هو

A	$ln\left(\frac{11}{2}\right)$	B	$ln\left(\frac{1}{5}\right)$	C	$ln\left(\frac{5}{11}\right)$	D	$ln\left(\frac{9}{5}\right)$

$\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$ نضرب الطرفين بالوسطين

$e^x = 5 - 10e^x \Rightarrow 11e^x = 5 \Rightarrow e^x = \frac{5}{11}$

نأخذ ln للطرفين $x = ln\left(\frac{5}{11}\right)$

مثال: إن حل المعادلة $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ هو

A	-2	B	0	C	$ln(3)$	D	$ln(2)$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0$$
$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$$

$(e^x + 2)$ $e^x = -2$ مستحيلة	$e^x - 3 = 0$ $e^x = 3$ $x = ln(3)$

"تتوسد الكتب وكأنها شاهدة على جهادك، تسهر الليالي وكأنك تعاهد نفسك ألّا تترك حلمك يتلاشى، كل ورقة خططها قلمك، وكل سطر قرأته عينك، هو خطوة نحو مستقبلك الذي تستحقِه،تذكّر أن التّعب الذي تره الآن سيصبح غدًا راحة، والسهر الذي يثقلك سيضيء طريقك، لا شيء يضيع، فالله يرى

مثال: إن حل المعادلة $\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$ هو

A	2	B	0	C	$-ln2$	D	$ln(2)$

$\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$ نضرب الطرفين بالوسطين

$-2(e^x - 1) = e^{-x} - 1$
$-2e^x + 2 = e^{-x} - 1$
$-2e^{2x} + 2e^x = 1 - e^x$
$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

نضرب الطرفين ب e^x مع ملاحظة

$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$

$e^x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ $x = ln(\frac{1}{2}) = -ln2$	$e^x = \frac{3+1}{4} = 1$ $x = ln(1) = 0$ وهو مرفوض لانه يعدم المقام

مثال:إن حلول المعادلة $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

A	$x = 1, x = \ln(2e)$	B	$x = 1, x = \ln(2)$
C	$x = 0, x = \ln(2)$	D	$x = 1, x = \ln(4e)$

$$e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$$
$$e^{2x} - 3e.e^x + 2e^2 = 0$$
$$(e^x - 2e)(e^x - e) = 0$$

$e^x = e$ $x = 1$	$e^x = 2e$ $x = \ln(2e)$

حل متراجحة اسية :مثل حل معادلة ولكن في الدرجة الثانية نحتاج جدول

مثال:إن حل المتراجحة $e^{x^2-2} \le e^{4-x}$ هو

A	$]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$	B	$]-\infty,-3]\cup[2,+\infty[$
C	$[-3,2]$	D	$]-3,2[$

$e^{x^2-2} \le e^{4-x}$ نأخذ لوغارتم للطرفين $x^2 - 2 \le 4 - x$

هي متراجحة درجة ثانية نعدمها ونجدولها $x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$ أما $x = 2$ أو $x = -3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f		+	0	−	0	+	
$f \le 0$		مرفوض	0	مقبول	0	مرفوض	

إذاً مجموعة الحلول $[-3,2]$

مثال:إن حل المتراجحة $\frac{e^x-2}{e^x+2} < \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ هو

A	$]ln3,+\infty[$	B	$]-\infty,-3]$
C	$]-\infty,ln3[$	D	$]3,+\infty[$

$\frac{e^x-2}{e^x+2} < \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ نضرب الطرفين بالوسطين

$e^{2x} - e^x + 2e^x - 2 < e^{3x} - 2e^{2x} + e^x - 2$ لنعدمها

$e^{3x} - 2e^{2x} = e^{2x}(e^x - 3) = 0$

أما $e^{2x} = 0$ مستحيل أو $e^x = 3$ إذاً $x = ln(3)$ إذاً المتراجحة $x > ln(3)$ وحلولها $]ln3,+\infty[$

حل متراجحة مع n عدد طبيعي في الأس هنا نأخذ لوغارتم الطرفين

مثال: إن قيم n عدد طبيعي اللذي يحقق المتراجحة $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ هي

A	$n = \{1\}$	B	$n = \{2,3,4,....\}$
C	$n = \{1,2,3,....\}$	D	$n = \{1,2\}$

$0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ نأخذ لوغارتم للطرفين

ملاحظة: $ln(a) > 0$ في حال $a > 1$ $ln(a) < 0$ في حال	$ln(\frac{2}{10}) \ge ln\left(\frac{2}{5}\right)^n$ $ln(\frac{2}{10}) \ge nln\frac{2}{5}$ $n \ge \frac{ln\left(\frac{1}{5}\right)}{ln\left(\frac{2}{5}\right)}$	هنا لدينا $ln\frac{2}{5}$ هو مقدار سالب لذلك نغير إشارة المتراجحة

$$n \ge \frac{ln1 - ln5}{ln2 - ln5} = \frac{-ln5}{ln2 - ln5} = \frac{-1.6}{0.7 - 1.6} = \frac{1.6}{0.9} = 1.77$$

إذاً قيم n هي $n = \{2,3,4,....\}$

حل معادلتين بمجهولين أسية : أماطريقة الحذف بالتعويض أو حذف بالجمع

مثال:إن حل المعادلتين $\begin{cases} e^{4x}e^{y} = \frac{1}{e^{2}} \\ xy = -2 \end{cases}$ هو

A	$\left(\frac{1}{2},-4\right)$ و $(-1,2)$	B	$\left(\frac{1}{3},-4\right)$ و $(-1,2)$
A	$\left(\frac{1}{3},-4\right)$ و $(-1,1)$	B	$\left(\frac{1}{2},4\right)$ و $(1,2)$

$\begin{cases} e^{4x}e^{y} = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 \\ xy = -2 \end{cases}$

هنا أحداهما إشارة ضرب والثانية جمع نستعمل طريقة الحذف بالتعويض

من المعادلة الأولى $y = -2 - 4x$ نعوض في الثانية نجد

$x(-2-4x) = -2$

$4x^{2} + 2x - 2 = 0$

نحلها بال Δ نجد أما $x = -1$ نعوض نجد $y = 2$

أو $x = \frac{1}{2}$ نعوض نجد $y = -4$

مثال:إن حل المعادلتين $\begin{cases} e^{x} - \frac{1}{e}e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$ هو

A	$(ln2,1)$	B	$(1,2)$
A	$(1,ln2)$	B	$(ln3,ln2)$

هنا المعادلتين إشارة جمع نستعمل طريقة الحذف بالجمع

نضرب المعادلة الأولى ب -2 ونجمع المعادلة الثانية نجد

نوحد مقامات ونضرب الطفين بالوسطين نجد $\left(\frac{2}{e}+1\right)e^{y} = 2 + e$

$e^{y} = e \Rightarrow y = 1$

نعوض في أحد المعادلات نجد $e^{x} = 2 \Rightarrow x = ln2$

مشتق التابع الأسي : ليكن لدينا التابع

$f(x) = e^{g}$ إن مشتق التابع $f'(x) = g'e^{g}$ (مشتق الأس بالتابع نفسه)

مثال:مشتق $f(x) = e^{x}$ هو $f'(x) = e^{x}$

ومشتق $f(x) = e^{-x}$ هو $f'(x) = -e^{-x}$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x) = (x^{2}-2x)e^{x}$ إن مشتق f هو

A	$f'(x) = e^{x}x^{2} - e^{x}$	B	$f'(x) = e^{x}(x^{2}-2)$
C	$f'(x) = e^{x}x - 2$	D	$f'(x) = e^{x}x^{2} - e^{x}x$

$f'(x) = (2x-2)e^{x} + e^{x}(x^{2}-2x)$

$f'(x) = 2xe^{x} - 2e^{x} + e^{x}x^{2} - 2xe^{x}$

$f'(x) = x^{2}e^{x} - 2e^{x} = e^{x}(x^{2}-2)$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{e^{x}-1}{1+e^{-x}}$ إن مشتق f هو

A	$f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{(1-e^{-x})^{2}}$	B	$f'(x) = \frac{e^{x}+2}{(1-e^{-x})^{2}}$
C	$f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^{2}}$	D	$f'(x) = \frac{-e^{-x}+2}{(1-e^{-x})^{2}}$

$$f'(x) = \frac{e^{x}(1+e^{-x}) - (-e^{-x})(e^{x}-1)}{(1+e^{-x})^{2}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}+1+1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^{2}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^{2}}$$

مثال: ليكن لدينا التابع $f(x) = e^{xlnx}$ إن مشتق f هو

A	$f'(x) = (lnx+1)e^{xlnx}$	B	$f'(x) = lnx.e^{xlnx}$
C	$f'(x) = (lnx-1)e^{xlnx}$	D	$f'(x) = lnx + 1$

$$f'(x) = \left(1 \times ln(x) + \frac{1}{x} \times x\right)e^{xlnx}$$

$$f'(x) = (lnx+1)e^{xlnx}$$

كُل الذين صبروا جُبروا بأشد ما ترجوه قلوبهم

المعادلات التفاضلية : لها شكلين

$y' = ay$ يكون حلها من الشكل $y = ke^{ax}$	$y' = ay + b$ يكون حلها من الشكل $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

ملاحظة: في حال لم يعطي شرط الحل فإن k تبقى مجهولة

مثال:إن حل المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$ هو

A	$y = ke^{2x} - 2$	B	$y = ke^{3x} - 3$
C	$y = ke^{\frac{-3}{2}x}$	D	$y = ke^{\frac{3}{2}x}$

لدينا $y' = \frac{-3}{2}y$ وهي معادلة من الشكل الأول إذا" حلها $y = ke^{\frac{-3}{2}x}$

مثال:إن حل المعادلة التفاضلية $y + 3y' = 2$ هو

A	$y = ke^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}$	B	$y = ke^{\frac{-1}{3}x} + 2$
C	$y = ke^{\frac{-1}{3}x}$	D	$y = ke^{\frac{-1}{2}x} + 3$

لدينا $y' = \frac{-1}{3}y + \frac{2}{3}$ وهي معادلة من الشكل الأول إذا" حلها

$$y = ke^{\frac{-1}{2}x} + 2 \Leftarrow y = ke^{\frac{-1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}}$$

مثال:إن حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ والحل يحقق الشرط $f(0) = 1$ هو

A	$y = e^{2x}$	B	$y = 3e^{2x}$
A	$y = 2e^{2x}$	B	$y = 5e^{3x}$

إن حل المعادلة هو $y = ke^{2x}$ ولدينا الشرط $f(0) = 1$

إذا" $y = 1$ و $x = 0$ نعوض في المعادلة $1 = ke^{0}$ إذا" $k = 1$ ونعوض في المعادلة نجد أن الحل $y = e^{2x}$

نهاية التابع الأسي: لدينا قوانين نستعملها لإيجاد النهاية

$e^{+\infty} = +\infty$		$e^{-\infty} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^{x}-1} = 1$		$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

ملاحظة: في حال حصلنا على حالة عدم تعيين نحاول إزالتها بأحد الطرق إما إخراج e^{x} أو x أو استخدام خواص أو نشر أو تفريق كسر

مثال:إن نهاية التابع $f(x) = e^{x} - 4x + 1$ عند $+\infty$ هو

A	1	B	0	C	$+\infty$	D	$-\infty$

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = e^{x}\left(1 - \frac{4x}{e^{x}} + \frac{1}{e^{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

مثال:إن نهاية التابع $f(x) = \frac{e^{x}-1}{x-1}$ عند $+\infty$ هو

A	1	B	0	C	$+\infty$	D	$-\infty$

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$f(x) = \frac{e^{x}}{x}.\frac{\left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.\frac{(1-0)}{(1-0)} = +\infty$$

مثال:إن نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x}(e^{x}-1)$ عند 0 هو

A	1	B	0	C	$+\infty$	D	$-\infty$

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $0(+\infty)$

$$f(x) = \frac{e^{x}-1}{x}$$

مبرهنة

$$\lim_{x\to0} f(x) = 1$$

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=2xe^{-x}$ عند $+\infty$ هو

A	1	B	0	C	$+\infty$	D	$-\infty$

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $0(+\infty)$

$f(x)=2\frac{x}{e^x}$ خاصة

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

النهاية المميزة: في حال حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل 1^∞ نستعمل المبرهنة $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ أو $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

خطوات الحل: نفرض العدد اللذي بجانب الواحد يساوي t ثم نحسب المسعى الجديد ثم نحسب قيمة x بدلالة t ونعوض نكتبها بشكل المبرهنة ثم ننهي

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ عند 1 تساوي

A	1	B	e	C	$+\infty$	D	e^{-3}

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل 1^∞

نكتب التابع بالشكل $f(x)=(1+1-x)^{\frac{3}{x-1}}$

نفرض $t=1-x$
عندما $x\to1$ نجد
$t\to0$
ونجد $x=1-t$

$f(t)=(1+t)^{\frac{3}{1-t-1}}$

$f(t)=(1+t)^{\frac{3}{-t}}=\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-3}$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{t\to0}f(t)=(e)^{-3}$

مثال: إن نهاية التابع $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$ تساوي

A	e^2	B	e	C	$+\infty$	D	e^3

لوعوضنا نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل 1^∞

نكتب التابع بالشكل $f(x)=\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ بقسمة البسط على

نفرض $t=\frac{4}{x-1}$
عندما $x\to+\infty$ نجد
$t\to0$
ونجد $x=\frac{4}{t}+1$

$f(t)=(1+t)^{\frac{\frac{4}{t}+1}{2}}$

$f(t)=(1+t)^{\frac{2}{t}+\frac{1}{2}}$

$f(t)=(1+t)^{\frac{2}{t}}.(1+t)^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{t\to0}f(t)=(e)^2.1$

تطبيقات على التابع الأسي:

مثال: إن الوضع النسبي بين المقارب المائل للتابع $f(x)=x-1+e^{-2x}$ عند $+\infty$ هو

A	y_Δ تحت c_f	B	تحت وفوق في مجالات
C	y_Δ فوق c_f	D	لا يوجد مقارب مائل

واضح أن المقارب هو $y=x-1$ لإن

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$

و إشارة e^{-2x} هو موجب دوما" إذا" y_Δ فوق c_f

مثال: إن المقارب المائل للتابع $f(x)=ln(3+e^x)$ عند $+\infty$ هو

A	$y=e^x$	B	$y=x$
C	$y=e^{-x}$	D	$y=-x$

$f(x)=ln(e^x(3e^{-x}+1))$

$f(x)=ln(e^x)+ln(3e^{-x}+1)$

$f(x)=x+ln(3e^{-x}+1)$

نلاحظ أن $y=x$ هو المقارب

لإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty} ln(3e^{-x}+1)=0$

ملاحظة: لمعرفة المقارب المائل في التوابع من الشكل $ln(e^{ax}+b)$ نخرج e^{ax} بأكبر أس عامل مشترك

مثال: معادلة المماس للتابع $f(x)=(3-x)e^x$ في النقطة اللتي تعدم $\acute{f}$ هي

A	$y=x+1$	B	$y=ex+e$
C	$y=e^2(x+1)$	D	$y=ex-e$

إن $\acute{f}(x)=(1-x)e^x$ بعد الأشتقاق مرتين وهو ينعدم عند $x=1$

ولدينا $f(1)=2e$ و $\acute{f}(1)=e$ إذا" معادلة اللماس بعد التعويض في القانون $y=\acute{f}(1)(x-1)+f(1)$ هي $y=e(x+1)$

التابع الأسي بلأساس a :

ملاحظة يمكن تغير شكله عن طريق العلاقة $a^x=e^{xln(a)}$

مثال: إن قيمة العبارة $3^{-\frac{1}{ln3}}$ هي

A	$\frac{1}{e^2}$	B	$\frac{1}{e}$	C	e^2	D	e

$3^{-\frac{1}{ln3}}=e^{-\frac{1}{ln3}(ln3)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

مثال: إن حل المعادلة $3^x=4^{2x+1}$ يساوي

A	$\frac{ln(4)}{ln(3)}$	B	$\frac{-ln(4)}{ln\left(\frac{16}{3}\right)}$	C	$\frac{ln(3)}{ln(4)}$	D	$\frac{ln(4)}{ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

نأخذ لوغارتم للطرفين نجد $ln3^x=ln4^{2x+1}$

$xln(3)=(2x+1)ln(4)$

$xln(3)=2xln(4)+ln(4)$

$x(2ln(4)-ln(3))=-ln(4)$

$x=\frac{-ln(4)}{2ln(4)-ln(3)}$

مثال: إن حل المعادلة $4^x+2^{x+1}-3=0$ هو

A	$x=2$	B	$x=3$	C	$x=1$	D	$x=0$

$4^x+2^{x+1}-3=0$

$2^{2x}+2.2^x-3=0$

$(2^x+3)(2^x-1)=0$

إما $2^x-1=0 \Leftarrow 2^x=1 \Leftarrow xln2=ln1$ إذا" $x=0$

أو $2^x+3=0 \Leftarrow 2^x=-3$ مستحيلة

مثال: إن حل المتراجحة $2^{x+1}-10.2^x+12\geq0$ هو

A	$\left]-\infty,\frac{ln\frac{3}{2}}{ln2}\right]$	B	$\left[\frac{ln\frac{3}{2}}{ln2},+\infty\right[$
C	$\left]-\infty,\frac{ln3}{ln2}\right]$	D	$\left[\frac{ln3}{ln2},+\infty\right[$

$2.2^x-10.2^x+12\geq0$

$-8.2^x+12\geq0$

$x\leq\frac{ln\frac{3}{2}}{ln2} \Leftarrow xln2\leq ln\frac{3}{2} \Leftarrow 2^x\leq\frac{3}{2}$

مثال: إن مشتق التابع x^x هو

A	$\acute{f}(x)=(lnx+1)x^x$	B	$\acute{f}(x)=lnx.x^x$
C	$\acute{f}(x)=(lnx-1)x^x$	D	$\acute{f}(x)=lnx+1$

$x^x=e^{xlnx}$ ونشتقة مثل السابق تم حله مسبقا"

ملاحظة: لإستنتاج رسمة خط بياني لتابع بدلالة تابع أخر لدينا

١- $g(x)=f(-x)$ يكون g نظير f بالنسبة لمحور التراتب

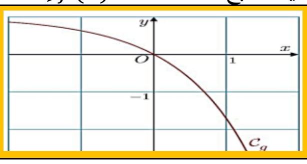
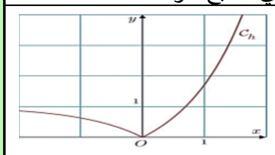
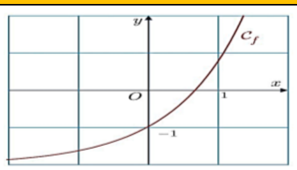
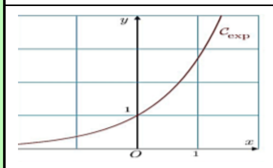
٢- $g(x)=-f(x)$ يكون g نظير f بالنسبة لمحور الفواصل

٣- $g(x)=-f(-x)$ يكون g نظير f بالنسبة للمبدأ

٤- $g(x)=f(x)+b$ يكون g نظير f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(0,b)$

٥- $g(x)=|f(x)|$ نجعل الصور موجبة

مثال: لدينا التابع $f(x)=1-e^x$ إن الخط البياني للتابع هو

A		B	
C		D	

نحن نعرف رسمة الخط البياني للتابع e^x نأخذ نظيرتها بالنسبة لمحور التراتيب ثم نسحبها مقدار 1 إلى الأسفل

مراجعة التكامل

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x^2 - x^2$ $\quad$ $2x + 3x - 4x$

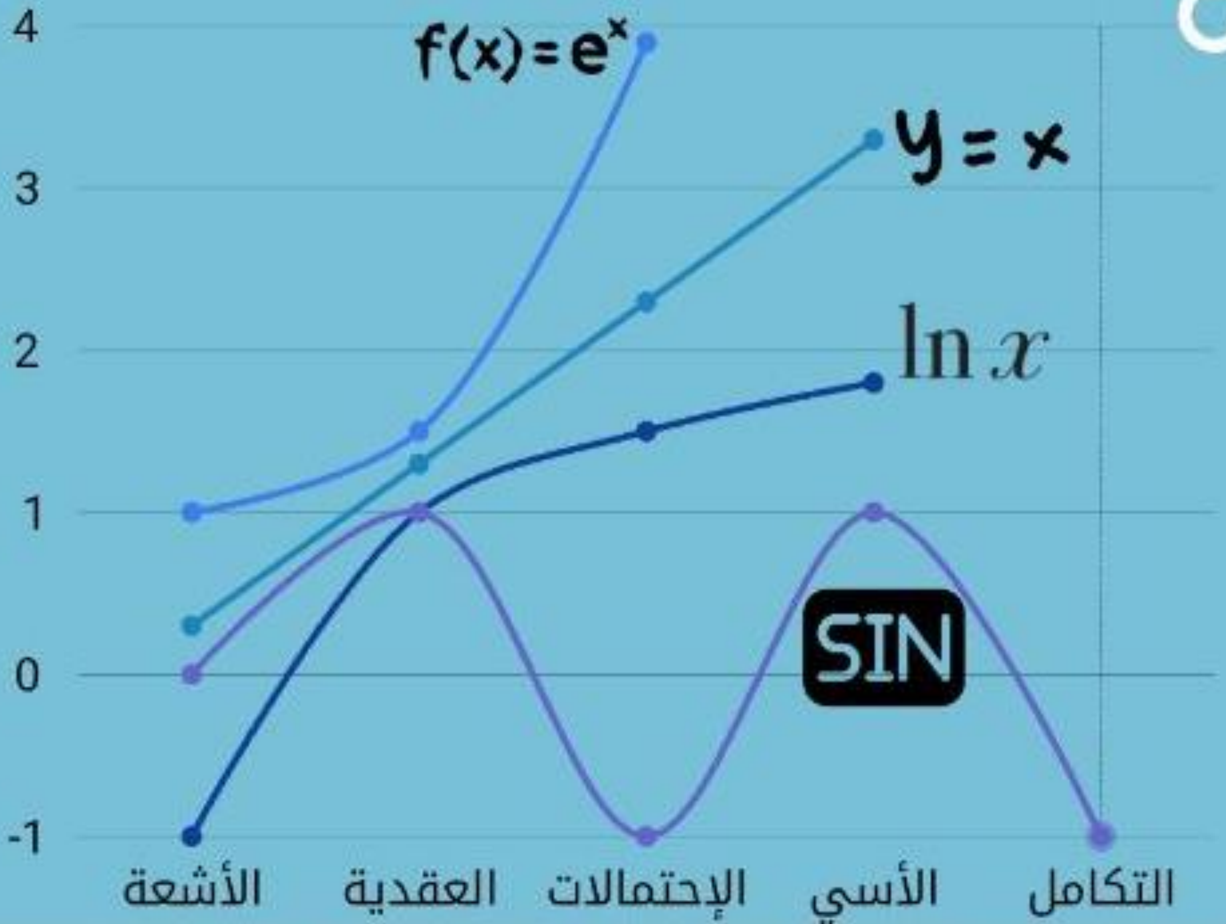
$7ab + 4ab^2 - 3a$ $\quad$ $3a^2 + 2a^2 - a^2$

$10a + 3b - 2c$ $\quad$ $6ab - ab + 4ab$

$\int \overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$

- المتتاليات
- الاشتقاق
- النهايات
- اللوغاريتم



بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة التكامل مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح الطباعة ملون حصرا"

التابع الأصلي هو التابع المعاكس للتابع المشتق

إذا كان التابع $f(x)$ فإن التابع الاصلي يرمز له ب $F(x)$

قوانين التكامل

$f(x)=a$	$F(x)=ax$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=25$ هو

A	0	B	$25x$	C	$25x^2$	D	25

قوانين التكامل

$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^n}{n}$

هذه العلاقة تستعمل في 4 حالات وهي

x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt[a]{x^b}$	$\frac{1}{\sqrt[a]{x^b}}$

ملاحظة: $\frac{1}{x^n}$ يكتب بالشكل x^{-n} ولدينا $\sqrt[a]{x^b}$ يكتب بالشكل $x^{\frac{b}{a}}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=x$ هو

A	$\frac{x^2}{2}$	B	1	C	0	D	$2x^2$

نستعمل القاعدة : ((نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد))

$$F(x)=\frac{x^2}{2}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=5x^5$ هو

A	$\frac{5}{6}x^6$	B	x^6	C	$5x^6$	D	$\frac{5}{6}x^5$

نستعمل القاعدة : ((نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد))

$$F(x)=5\frac{x^6}{6}=\frac{5}{6}x^6$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{x^4}$ هو

A	$\frac{-1}{3}x^3$	B	$\frac{-1}{5x^5}$	C	$\frac{1}{3x^3}$	D	$\frac{-1}{3x^3}$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4}$

نستعمل القاعدة : ((نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد))

$$F(x)=\frac{x^{-3}}{-3}=\frac{-1}{3x^3}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ هو

A	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$	B	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^7}$	C	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	D	$\sqrt[3]{x^5}$

يمكن أن نكتب $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

نستعمل القاعدة : ((نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد))

$$F(x)=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ هو

A	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}$	B	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^5}$	C	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$	D	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{-1}{3}}$

نستعمل القاعدة : ((نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد))

$$F(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

قوانين التكامل

$f(x)=\grave{g}.g^n$	$F(x)=\frac{g^{n+1}}{n+1}$

هذه العلاقة تستعمل في 4 حالات وهي

$\grave{g}.g^n$	$\frac{\grave{g}}{g^n}$	$\grave{g}.\sqrt[a]{g^b}$	$\frac{\grave{g}}{\sqrt[a]{g^b}}$

ملاحظة: في حال كان يمكن إيجاد المشتق نقسم ونضرب بعدد

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=(x-2)(x^2-4x+3)$ هو

A	$\frac{1}{2}(x^2-4x+3)$	B	$\frac{1}{4}(x^2-4x+3)$
C	$\frac{1}{2}(x^2-4x+3)^2$	D	$\frac{1}{4}(x^2-4x+3)^2$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{1}{2}2(x-2)(x^2-4x+3)$

نستعمل القاعدة:(نحذف المشتق و نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد)

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+3)^2}{2}=\frac{1}{4}(x^2-4x+3)^2$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ هو

A	$\frac{1}{2(x^2-2x-3)}$	B	$\frac{1}{2}(x^2-2x-3)$
C	$\frac{-1}{2(x^2-2x-3)}$	D	$\frac{1}{2}(x^2-2x-3)^2$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{1}{2}2(x-1)(x^2-2x-3)^{-2}$

نستعمل القاعدة:(نحذف المشتق و نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد)

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{2(x^2-2x-3)}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ هو

A	$\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$	B	$\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$
C	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$	D	$\frac{3}{10}\sqrt[5]{(x^2+1)^3}$

يمكن أن نكتب $f(x)=x.\sqrt[3]{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}2x.(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

نستعمل القاعدة:(نحذف المشتق و نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد)

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$ هو

A	$-\sqrt{3-x^2}$	B	$2\sqrt{3-x^2}$
C	$\frac{1}{-2}\sqrt{3-x^2}$	D	$\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}=\left(\frac{1}{-2}\right)(-2)x.(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

نستعمل القاعدة:(نحذف المشتق و نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد)

$$F(x)=\frac{1}{-2}\frac{(3-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3-x^2}$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$ هو

A	$\frac{1}{x-1}$	B	$\frac{1}{x+1}$
C	$\frac{-1}{x+1}$	D	$\frac{-1}{x-1}$

يمكن أن نكتب $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(x-1)^2}=(x-1)^{-2}$

نستعمل القاعدة:(نحذف المشتق و نضيف واحد للأس ونقسم على الأس الجديد)

$$F(x)=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x-1}$$

قوانين التكامل

$f(x)=\frac{\acute{g}}{g}$	$F(x)=ln\lvert g\rvert$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{x-4}$ على المجال $]4,+\infty[$ هو

A	B	C	D
$ln\lvert x-4\rvert$	$ln(4-x)$	**$ln(x-4)$**	$2ln(x-4)$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=ln|x-4|$ ولدينا على المجال $]4,+\infty[$ $x-4$ موجب إذاً نفك القيمة المطلقة $ln(x-4)$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{2}{x+3}$ على المجال $]-\infty,-3[$ هو

A	B	C	D
$2ln(x-3)$	$ln(2x+6)$	**$ln(x+3)^2$**	$ln(x-3)^2$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=2ln|x+3|$ ولدينا على المجال $]-\infty,-3[$ $x+3$ موجب إذاً نفك القيمة المطلقة $2ln(-x-3)$

$$2ln(-x-3)=ln(x+3)^2$$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{5}{4x-3}$ هو

A	B	C	D
$\frac{5}{4}ln\lvert 4x+3\rvert$	**$\frac{5}{4}ln\lvert 4x-3\rvert$**	$5ln(4x-3)$	$4ln\lvert 4x-3\rvert$

$$f(x)=\frac{5}{4x-3}=\frac{4}{4}.\frac{5}{4x-3}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=\frac{5}{4}ln|4x-3|$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{xlnx}$ هو

A	B	C	D
lnx	$xlnx$	**$ln\lvert lnx\rvert$**	$ln(lnx)$

$$f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=ln|lnx|$

قوانين التكامل

$f(x)=\frac{\acute{g}}{\sqrt{g}}$	$F(x)=2\sqrt{g}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ هو

A	B	C	D
$\sqrt{3-2x}$	$-\sqrt{2x-3}$	**$-\sqrt{3-2x}$**	$2\sqrt{3-2x}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-2x}}=\frac{-2}{-2}.\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=\frac{1}{-2}.2\sqrt{3-2x}=-\sqrt{3-2x}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$ هو

A	B	C	D
$-4\sqrt{x^2-x}$	$2\sqrt{x^2-x}$	$-2\sqrt{x^2-x}$	**$4\sqrt{x^2-x}$**

$$f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{2(2x-1)}{\sqrt{x^2-x}}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=2.2\sqrt{x^2-x}=4\sqrt{x^2-x}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$ هو

A	B	C	D
$\sqrt{x^2-2x-2}$	$-2\sqrt{x^2-2x-2}$	**$-\sqrt{x^2-2x-2}$**	$2\sqrt{x^2-2x-2}$

$$f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}=\frac{-2}{-2}.\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x-2}}$$

نستعمل القاعدة $F(x)=\frac{1}{-2}.2\sqrt{x^2-2x-2}=-\sqrt{x^2-2x-2}$

قوانين التكامل

$f(x)=\acute{g}e^g$	$F(x)=e^g$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=xe^{x^2}$ هو

A	B	C	D
$\frac{x}{2}e^{x^2}$	$\frac{x^2}{2}e^{x^2}$	**$\frac{1}{2}e^{x^2}$**	e^{x^2}

$$f(x)=xe^{x^2}=\frac{2}{2}xe^{x^2}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=2e^{3x-1}$ هو

A	B	C	D
$\frac{2}{3}xe^{3x-1}$	**$\frac{2}{3}e^{3x-1}$**	$6e^{3x-1}$	$\frac{3}{2}e^{3x-1}$

$$f(x)=2e^{3x-1}=\frac{3}{3}2e^{3x-1}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x-1}$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{2}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}}$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{2}.e^{-\frac{1}{x}}$	$e^{-\frac{1}{x}}$	**$2e^{-\frac{1}{x}}$**	$\frac{1}{2x}.e^{-\frac{1}{x}}$

$$f(x)=\frac{2}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}}$$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=2.e^{-\frac{1}{x}}$

مكاملة كثير حدود على كثير حدود

إذا كان درجة البسط أكبر من درجة المقام أو تساويها نستخدم القسمة الأقليدية	إذا كان درجة المقام أكبر من درجة البسط نستخدم تفريق الكسر إلى كسرين

لتفريق الكسر إلى كسرين $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$

١- نحلل المقام إلى قوسين (تحليل مباشر أو Δ أو مطابقة)

٢- نكتب f بالشكل $f(x)=\frac{a}{(x-r_1)}+\frac{b}{(x-r_2)}$

٣- بعد توحيد المقامات نجد $A(x)=a(x-r_2)+b(x-r_1)$

٤- نعوض $x=r_1$ نجد a ثم نعوض $x=r_2$ نجد b

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ على المجال $]-\infty,2[$ هو

A	B	C	D
$x+3ln(-x+2)$	$x+ln(x-2)$	**$x+3ln(x-2)$**	$ln(x-2)+ln(-x+2)$

باستعمال القسمة الأقليدية نجد $f(x)=1+\frac{3}{x-2}$

نستعمل القاعدة السابقة نجد $F(x)=x+3ln|x-2|$

وعلى المجال $]-\infty,2[$ نجد $F(x)=x+3ln(-x+2)$

مثال:إن التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{4}ln\lvert x+2\rvert+\frac{3}{4}ln\lvert x-2\rvert$	$\frac{1}{4}ln\lvert x+2\rvert+ln\lvert x-2\rvert$	$ln\lvert x+2\rvert+ln\lvert x-2\rvert$	$ln\lvert x+2\rvert+\frac{3}{4}ln\lvert x-2\rvert$

$$f(x)=\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{a}{(x+2)}+\frac{b}{(x-2)}$$

بعد توحيد المقامات نجد $x+1=a(x-2)+b(x+2)$

نعوض $x=-2$ نجد $a=\frac{1}{4}$ ثم نعوض $x=2$ نجد $b=\frac{3}{4}$

$$f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{(x+2)}+\frac{3}{4}\frac{1}{(x-2)}$$

بالمكاملة نجد $F(x)=\frac{1}{4}ln|x+2|+\frac{3}{4}ln|x-2|$

سهرك ، تعبك ، عزلتك ، إرهاق جسدك ، وكثرة تفكيرك ، جدّك و اجتهادك ، كل هذا لن يذهب سُدًى ، سترى ثمرة أفعالك أمامك قريباً

تكامل التوابع المثلثية $\sin x$ و $\cos x$

قوانين

$\sin x \to -\cos x$

$\cos x \to \sin x$

$\sin(ax+b) \to -\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$

$\cos(ax+b) \to \dfrac{\sin(ax+b)}{a}$

تكامل ضرب $\sin x$ ب $\cos x$
نستخدم القاعدة

$\dot{g}.g^n \to \dfrac{g^{n+1}}{n+1}$

ملاحظة:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

تكامل $\sin^4 x$ أو $\sin^2 x$ أو $\cos^4 x$ أو $\cos^2 x$ نستخدم القواعد

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}$

تكامل $\sin^3 x$ أو $\cos^3 x$
نستخدم القاعدة

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

في حال كان جداء والزاويتان مختلفتان نستخدم القوانين

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ هو

A	$\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	B	$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
C	$\frac{-1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	D	$-2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

حسب القاعدة السابقة $F(x) = -\frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cos(3x)$ هو

A	$\frac{1}{3}\sin(3x)$	B	$\frac{-1}{3}\sin(3x)$
C	$3\sin(3x)$	D	$-3\sin(3x)$

حسب القاعدة السابقة $F(x) = \frac{\sin(3x)}{3}$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \sin x \cos^2 x$ هو

A	$-\frac{\cos^3 x}{3}$	B	$-\frac{\cos^2 x}{3}$
C	$\frac{\cos^3 x}{3}$	D	$\frac{\cos^2 x}{2}$

لدينا $f(x) = -(-\sin x)\cos^2 x$ حسب القاعدة $\dot{g}.g^n$
نجد $F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$

الترتيب مهم بين
$\cos x \sin x$
$\sin x \cos x$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = -3\cos x \sin x$ هو

A	$-\frac{\cos^3 x}{3}$	B	$-\frac{\cos^2 x}{3}$
C	$-3\frac{\sin^3 x}{2}$	D	$-3\frac{\sin^2 x}{2}$

حسب القاعدة $\dot{g}.g^n$ نجد $F(x) = -3\frac{\sin^2 x}{2}$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cos^2 x$ هو

A	$\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$	B	$\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}$
C	$\frac{1}{2}x + \frac{\cos 2x}{4}$	D	$\frac{1}{2}x + \frac{\cos 2x}{2}$

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \sin^2 x$ هو

A	$\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}$	B	$\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$
C	$\frac{1}{2}x + \frac{\cos 2x}{4}$	D	$\frac{1}{2}x + \frac{\cos 2x}{2}$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cos^3 x$ هو

A	$\sin x - \frac{\sin^2 x}{2}$	B	$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$
C	$\sin x + \frac{\sin^2 x}{2}$	D	$\sin x + \frac{\sin^3 x}{3}$

$$f(x) = \cos x \cos^2 x = \cos x\,(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \sin^3 x$ هو

A	$\cos x + \frac{\cos^2 x}{2}$	B	$\cos x - \frac{\cos^2 x}{2}$
C	$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$	D	$\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$

$$f(x) = \sin x \sin^2 x = \sin x\,(1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \qquad \boxed{\dot{g}.g^n}$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cos^4 x$ هو

A	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x$	B	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$
C	$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$	D	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \sin^4 x$ هو

A	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x$	B	$\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$
C	$\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$	D	$\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

بنفس الأسلوب السابق نجد أنه نفس الجواب السابق ولكن فرق أشارة واحدة

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cos 5x \,.\, \sin x$ هو

A	$-\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 4x$	B	$\frac{1}{12}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 4x$
C	$-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x$	D	$\frac{1}{12}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

نستعمل قوانين تحويل الضرب إلى مجموع نجد

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(5x+x) - \sin(5x-x)) = \frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x$$

نجد $F(x) = -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 4x$

"عليك أن تؤمن أن نورًا سيخرج في نهاية الطريق المُعتم، و أنك ستتخطى كل العثرات دون أن يرهقك الإلتفات نحو الأيام السابقة

تكامل التوابع المثلثية $\tan x$ و $\cot x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
$1+\tan^2 x \to \tan x$ $\dfrac{1}{\cos^2 x} \to \tan x$	$1+\cot^2 x \to -\cot x$ $\dfrac{1}{\sin^2 x} \to -\cot x$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \tan x$ هو

A	**$-ln\lvert\cos x\rvert$**	B	$-ln\lvert\sin x\rvert$
C	$ln\lvert\cos x\rvert$	D	$ln\lvert\sin x\rvert$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$$
$$F(x) = -ln|\cos x|$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cot x$ هو

A	$-ln\lvert\cos x\rvert$	B	$-ln\lvert\sin x\rvert$
C	$ln\lvert\cos x\rvert$	D	**$ln\lvert\sin x\rvert$**

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$F(x) = ln|\sin x|$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \tan^2 x$ هو

A	$\tan x + 1$	B	**$\tan x - x$**
C	$\tan^2 x + 1$	D	$\tan^2 x - x$

$$f(x) = \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$$
$$F(x) = \tan x - x$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \cot^2 x$ هو

A	**$-\cot x - x$**	B	$\cot x + x$
C	$\cot x - x$	D	$-\cot x + x$

$$f(x) = \cot^2 x = \cot^2 x + 1 - 1$$
$$F(x) = -\cot x - x$$

ملاحظة: دائما" في حساب التكامل يجب أن نضيف ثابت التكامل c إلى التكامل ولكن نحن نحذفه تجاوزا" لكن إذا اعطانا شرط يجب كتابته وحسابه

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$ ويحقق الشرط $F(1) = 0$ هو

A	$\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$	B	$\frac{2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
C	**$\frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$**	D	$\frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + x = 2x^{-2} + x$$
$$F(x) = \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c$$
$$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$c = \frac{3}{2} \leftarrow -2 + \frac{1}{2} + c = 0 \leftarrow F(1) = 0$$
$$F(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \frac{-1}{3-x}$ ويحقق الشرط $F(1) = 1$ هو

A	$ln\lvert 3-x\rvert + 1 + ln2$	B	$ln\lvert 3-x\rvert - 1 - ln2$
C	**$ln\lvert 3-x\rvert + 1 - ln2$**	D	$ln\lvert 3-x\rvert - 1 - ln2$

$$F(x) = ln|3-x| + c$$
$$c = 1 - ln2 \leftarrow ln2 + c = 1 \leftarrow F(1) = 1$$
$$F(x) = ln|3-x| + 1 - ln2$$

تفسيرُك الإيجابي لما يحدثُ لك في حياتك يمنحك القوة والمُضي قدمًا ، ويزرع في نفسك الأمل والتفاؤل كُن إيجابياً فِي كُل شِيء

التكامل المحدد: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

خواصه:

١- $\int_a^b f + g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

٢- $\int_a^b \lambda f\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx$

٣- $\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$

٤- $\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx$

مثال:إن قيمة $\int_{-1}^{2} (2x-1)\,dx$ هي

A	**0**	B	3	C	-5	D	2

$$\int_{-1}^{2} (2x-1)dx = [x^2 - x]_{-1}^{2} = (4-2) - (1+1) = 0$$

مثال:إن قيمة $\int_0^2 \frac{2}{x-3}\,dx$ هي

A	$2ln3$	B	-2	C	**$-2ln3$**	D	$2ln2$

$$\int_0^2 \frac{2}{x-3}dx = [2ln|x-3|]_0^2 = (0 - 2ln3) = -2ln3$$

مثال:إن قيمة $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$ هي

A	**$e-1$**	B	$2e-1$	C	$e-2$	D	$e+1$

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

مثال:إن قيمة $\int_0^2 |x^2 - 1|\,dx$ هي

A	-1	B	3	C	-2	D	**2**

$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = 2$$

هنا نفك القيمة المطلقة $|x^2 - 1|$ نعدم ونجدول ونرى أن
$x^2 - 1 \leq 0$ على المجال $[0,1]$
$x^2 - 1 \geq 0$ على المجال $[1,2]$

مثال: استنتج قيمة التكامل $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

بعد حساب قيمة التكامل $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ وحساب قيمة $I + J$

A	**$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$**	B	$\frac{1}{2}ln2$	C	$\frac{1}{2} - ln2$	D	$-\frac{1}{2}ln2$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = J = \int_0^1 \frac{2}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[ln|1+x^2|]_0^1 = \frac{1}{2}ln2$$
$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}dx$$
$$I + J = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

نحسب J ثم نحسب $I + J$
ثم يكون $I = I + J - J$

مثال: $f(x) = min(x^2, 2-x)$ إن قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ هي

A	$\frac{1}{6}$	B	$\frac{5}{2}$	C	$\frac{7}{3}$	D	**$\frac{5}{6}$**

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,; x \in [0,1] \\ 2 - x; x \in [1,2] \end{cases}$$

تابع min وهو التابع الأصغر بعد دراسة أشارة الفرق بين التابعين

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}\right) - 0 + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

لم يَكن الطريق يوماً لمن سَبق ، الطريق لمن وصلَ وعانى وفاز بلذّة الوصول

0997047862

المدرس : راتب كسيبي

التكامل بالتجزئة: ستعمل لحساب تكامل ضرب تابعين من طبيعتين مختلفتين

$$\int_a^b f.g\,dx = [F.g]_a^b - \int_a^b F.\acute{g}\,dx$$

نشتق أحد التوابع ونكامل الثاني اللذي أشتقيناه نضعه خارج تكامل ونضع مشتقه داخل تكامل واللذي كاملناه نضع تكامله خارج وداخل التكامل وإشارة – بين التكامل واللذي بالخارج

ملاحظة : في حال وجود lnx أشتقه هو الأقوى بعده كثيرات الحدود وبعده التوابع المثلثة ثم e^x

مثال: إن قيمة التكامل $\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ هي

A		B		C		D	
A	$2e+3$	B	$2e+1$	C	$e-1$	D	$2e-1$

هذا تكامل تجزئة نشتق $g(x) = x+2$ يكون $\acute{g}(x) = 1$
ونكامل $f(x) = e^x$ ويكون $F(x) = e^x$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$\int_0^1 (x+2)e^x\,dx = [e^x.(x+2)]_0^1 - \int_0^1 e^x.1\,dx$$

$$\int_0^1 (x+2)e^x\,dx = [e^x.(x+2)]_0^1 - [e^x]_0^1 = 2e-1$$

مثال: إن قيمة التكامل $\int_1^e x lnx\,dx$ هي

A	$\frac{e^2-1}{2}$	B	$\frac{e^2+1}{2}$	C	$\frac{e^2-1}{4}$	D	$\frac{e^2+1}{4}$

هذا تكامل تجزئة نشتق $g(x) = lnx$ يكون $\acute{g}(x) = \frac{1}{x}$
ونكامل $f(x) = x$ ويكون $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$\int_1^e x lnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}.lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^e x lnx\,dx = \left[\frac{x^2}{2}.lnx\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

مثال: إن قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2-1)e^x\,dx$ هي

A	-3	B	2	C	$e+3$	D	e^2+1

هذا تكامل تجزئة نشتق $g(x) = x^2-1$ يكون $\acute{g}(x) = 2x$
ونكامل $f(x) = e^x$ ويكون $F(x) = e^x$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$\int_0^1 (x^2-1)e^x\,dx = [e^x.(x^2-1)]_0^1 - \int_0^1 e^x 2x\,dx$$

تجزئة مرة ثانية

نشتق $g(x) = 2x$
يكون $\acute{g}(x) = 2$
ونكامل $f(x) = e^x$
ويكون $F(x) = e^x$

$$= [e^x.(x^2-1)]_0^1 - \left([e^x.2x]_0^1 - \int_0^1 e^x 2\,dx\right)$$

$$= [e^x.(x^2-1)]_0^1 - [e^x.2x]_0^1 + [2e^x]_0^1$$

$$= 0 - 1 - (2e) + 2e - 2 = -3$$

مثال: إن قيمة التكامل $N = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$ هي

A	$\frac{-e^\pi-1}{2}$	B	$\frac{e^\pi+1}{2}$	C	$\frac{e^\pi-1}{2}$	D	$\frac{-e^\pi+1}{2}$

هذا تكامل تجزئة نشتق $g(x) = \sin x$ يكون $\acute{g}(x) = \cos x$
ونكامل $f(x) = e^x$ ويكون $F(x) = e^x$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = [e^x.\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x.\cos x\,dx$$

تجزئة مرة ثانية

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \underbrace{[e^x.\sin x]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi e^x.\cos x\,dx$$

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = -\int_0^\pi e^x.\cos x\,dx$$

نشتق $g(x) = \cos x$
يكون $\acute{g}(x) = -\sin x$
ونكامل $f(x) = e^x$
ويكون $F(x) = e^x$

$$= -\left([e^x.\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x.(-\sin x)\,dx\right)$$

$$N = -[e^x.\cos x]_0^\pi + N$$

$$N = e^\pi + 1 + N$$

$$2N = e^\pi + 1$$

$$N = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

بما أنك وصلت إلى هنا إذاً" هي النهاية لاتستسلم فقد وصلت بقي

ملاحظة: في حال طلب تابع أصلي ضرب تابعين من طبيعتين مختلفين ولا يوجد حدود تكامل نحن نضع حدود تكامل $\int_a^x f(x)\,dx$ حيث a اختيارية

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = x\cos x$ هو

A	$x\sin x + \cos x$	B	$x\sin x - \cos x$
C	$x^2\sin x + \cos x$	D	$\sin x + \cos x$

هذا تكامل تجزئة ولكن لايوجد حدود تكامل نضع $\int_0^x x\cos x\,dx$
نشتق $g(x) = x$ يكون $\acute{g}(x) = 1$
ونكامل $f(x) = \cos x$ ويكون $F(x) = \sin x$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$\int_0^x x\cos x\,dx = [\sin x.x]_0^x - \int_0^x \sin x.1\,dx$$

غير مهم

$$\int_0^x x\cos x\,dx = [\sin x.x]_0^x - [-\cos x]_0^x = x\sin x + \cos x - 1$$

مثال: إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = lnx$ هو

A	$x.lnx + x$	B	$lnx + x$
C	$lnx - x$	D	$x.lnx - x$

هذا تكامل تجزئة ولكن لايوجد حدود تكامل نضع $\int_1^x lnx\,dx$
هذا تكامل تجزئة نشتق $g(x) = lnx$ يكون $\acute{g}(x) = \frac{1}{x}$
ونكامل $f(x) = 1$ ويكون $F(x) = x$ ثم نطبق القاعدة نجد

$$\int_1^x lnx\,dx = [x.lnx]_1^x - \int_1^x x.\frac{1}{x}dx$$

غير

$$\int_1^x lnx\,dx = [x.lnx]_1^x - [x]_1^x = x.lnx - x + 1$$

حساب المساحات:

1-لحساب قيمة مساحة بين محور الفواصل و المستقيمين $x = a$ و $x = b$
والتابع يقع فوق محور الفواصل إن قيمة المساحة هي $\int_a^b f(x)\,dx$

2-لحساب قيمة مساحة بين محور الفواصل و المستقيمين $x = a$ و $x = b$
والتابع يقع تحت محور الفواصل إن قيمة المساحة هي $\int_a^b -f(x)\,dx$

3-لحساب قيمة مساحة بين مستقيم y_Δو المستقيمين $x = a$ و $x = b$
والتابع يقع فوق المستقيم y_Δ إن قيمة المساحة هي $\int_a^b f(x) - y_\Delta\,dx$

4-لحساب قيمة مساحة بين مستقيم y_Δو المستقيمين $x = a$ و $x = b$
والتابع يقع تحت المستقيم y_Δ إن قيمة المساحة هي $\int_a^b y_\Delta - f(x)\,dx$

5-لحساب قيمة مساحة بين تابعين $f(x)$و$g(x)$ المستقيمين $x = a$ و $x = b$
والتابع f يقع فوق التابع g إن قيمة المساحة هي $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

ملاحظة في حال كان التابع فوق وتحت محور الفواصل ندرس الحالتين باقاعدة

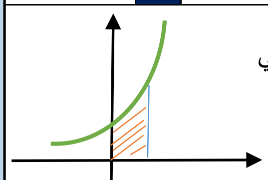
$$\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx$$

مثال: إن مساحة الجزء المحصور بين التابع $f(x) = e^x$ ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 0$ و $x = 1$ هي

A	$e-1$	B	$e+1$	C	$e+3$	D	e^2+1

إن هذا التابع مرجعي e^x وخطه البياني مشهور
وهو فوق محور الفواصل إذاً" المساحة المطلوبة هي

$$\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$



أحفظ بعض رسمات التوابع المرجعية مثل
$x, x^2, \sqrt{x}, lnx, e^x$

أما في حال لم يكن تابع مشهور أما أن يكون مرسوم أو أن نرسمه بدراسة تغيراته

حساب الحجوم: حسب القانون $v = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

مثال: إن حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران التابع $f(x) = \sqrt{x}$ في المجال$[0,1]$هي

A	$\pi/2$	B	$\pi/3$	C	$\pi/4$	D	$\pi/6$

$$v = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^1 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

مراجعة العقدية وتطبيقاتها

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

0997047862

Rateb ksaibe

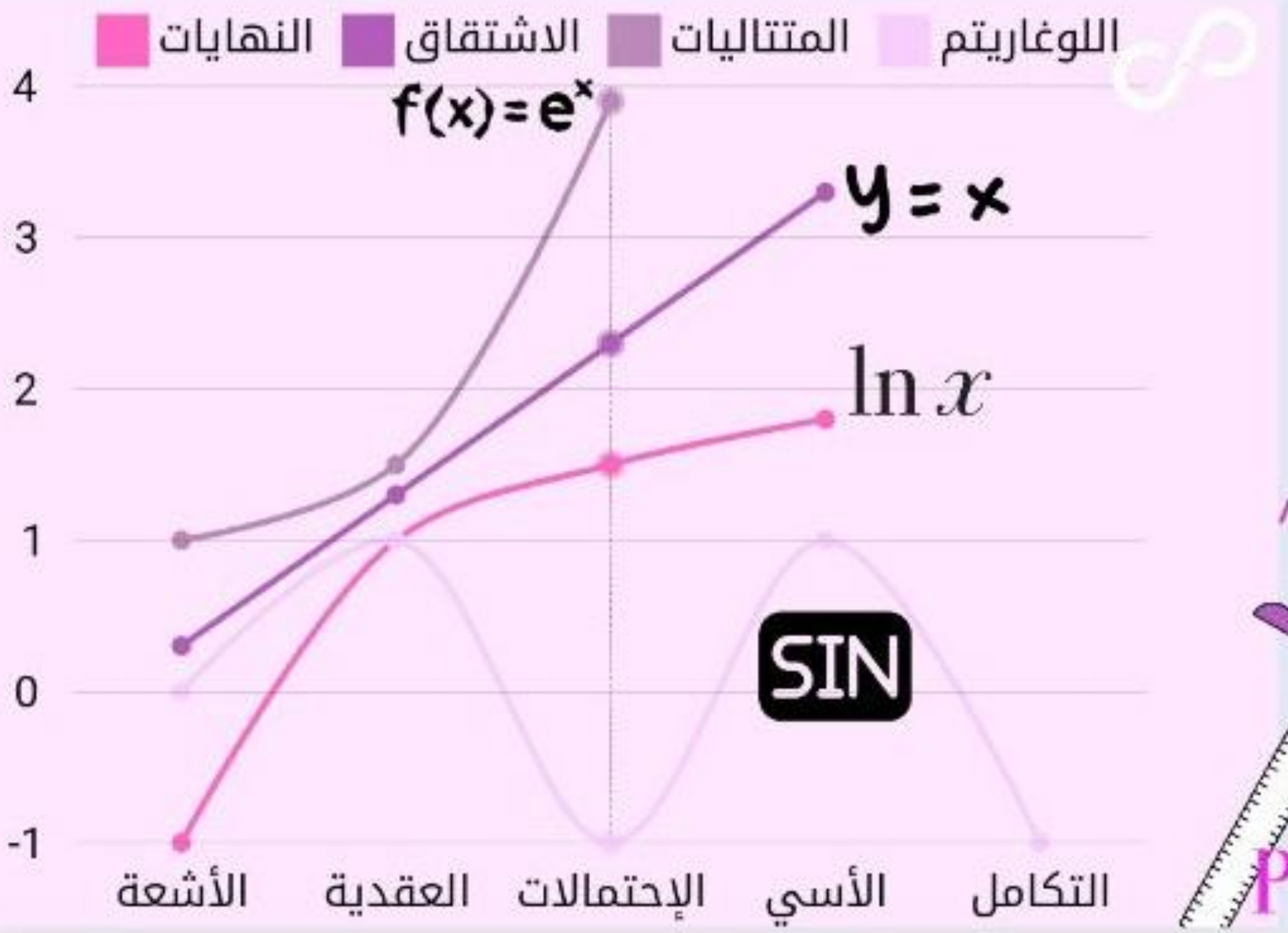
$2x + 3x - 4x$ $\qquad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\qquad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\qquad$ $10a + 3b - 2c$

$\int \overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$



^nP_r

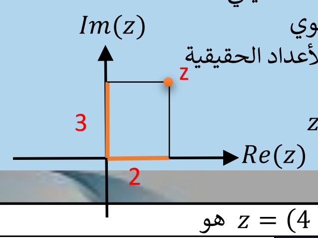
$P(A)$

بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة العقدية وتطبيقاتها مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح "الطباعة ملون حصرا"

مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$: هي مجموعة تضم المجموعة $\mathbb{R}$
وتضم العدد التخيلي i حيث إن $i=\sqrt{-1}$ أو $i^2=-1$ ولديه عدة قوى مثل

$i^0=1$	$i^1=i$	$i^2=-1$
$i^3=i^2\times i=-i$	$i^4=i^2\times i^2=1$	$i^5=i^4\times i=i$
$i^{50}=(i^2)^{25}=(-1)^{25}=-1$	$i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=1$	

الشكل الجبري للعدد العقدي: $z=a+ib$ حيث إن
a هو القسم الحقيقي ويرمز له ب $Re(z)=a$
b هو القسم التخيلي ويرمز له ب $Im(z)=b$
حالات خاصة:
في حال كان $Re(z)=0$ يكون عندها z عدد تخيلي بحت
في حال كان $Im(z)=0$ يكون عندها z عدد حقيقي
ملاحظة: العدد العقدي يمثل نقطة في المستوي
حيث إننا نعبر عن محور الفواصل بالمحور الأعداد الحقيقية
ومحور التراتب بالمحور الأعداد التخيلية
مثال: يمكن رسم العدد العقدي $z=2+i3$



مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z=(4-3i)^2$ هو

A	$z=25-24i$	B	$z=16-15i$
C	$z=7-24i$	D	$z=16+7i$

$z=(4-3i)^2=16-24i+(3i)^2=16-24i-9$

مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z=(1-i)^2$ هو

A	$z=-2i$	B	$z=-3i$
C	$z=2-2i$	D	$z=2-3i$

$z=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z=(1+i)^8$ هو

A	$z=16i$	B	$z=16+16i$
C	$z=16-16i$	D	$z=16$

$z=(1+i)^8=((1+i)^2)^4=(2i)^4=2^4\times i^4=16$

مثال: لدينا $p(z)=z^3-(1-i)z^2-(4-5i)z+(4+6i)$
إن قيمة $p(i)$ هي

A	$p(i)=0$	B	$p(i)=1+i$
C	$p(i)=6$	D	$p(i)=2i$

$p(i)=(i)^3-(1-i)(i)^2-(4-5i)(i)+(4+6i)$
$p(i)=-i+1-i-4i-5+4+6i=0$

مرافق العدد العقدي: ليكن العدد العقدي $z=a+ib$
إن مرافقه هو العدد العقدي $\bar{z}=a-ib$
خواص المرافق:

$\overline{(z+w)}=\bar{z}+\bar{w}$	$\overline{(z.w)}=\bar{z}.\bar{w}$
$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$	$\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$

ملاحظة: لازلة العدد العقدي من المقام نضرب بالمرافق
مع ملاحظة أن $z.\bar{z}=a^2+b^2$ قانون

مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z=\frac{1}{2-i}$ هو

A	$z=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$	B	$z=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}i$
C	$z=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i$	D	$z=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

$$z=\frac{1(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i}{4+1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

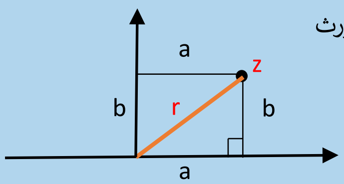
مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}+\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ هو

A	$z=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$	B	$z=\frac{2}{4}$
C	$z=\frac{2}{3}$	D	$z=\frac{2}{3}i$

$$z=\frac{\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+i)}{\sqrt{2}-i(\sqrt{2}+i)}+\frac{\sqrt{2}-i(\sqrt{2}-i)}{\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-i)}=$$
$$z=\frac{2+\sqrt{2}i-1+\sqrt{2}i}{2+1}+\frac{2-\sqrt{2}i-1-\sqrt{2}i}{2+1}=\frac{2}{3}$$

ملاحظة: إذا كان $z=\bar{z}$ يكون عندها العدد حقيقي
إذا كان $z=-\bar{z}$ يكون عندها العدد تخيلي بحت

طويلة العدد العقدي: هوالبعد بين مركز الأحداثيات O والعدد العقدي z
نحسب طويلة z عن طريق فيثاغورث
$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$



ملاحظة مهمة: ليكن لدينا العدد $z=a+ib$ فإن مرافقه $\bar{z}=a-ib$ لنحسب
$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-abi+abi+b^2=a^2+b^2=|z|^2$
إذا نجد القانون التالي: $z.\bar{z}=|z|^2$
ونلاحظ من القانون السابق أن إذا كان $|z|=1$ فإن $z.\bar{z}=1$ وهذا يؤدي أن $\bar{z}=\frac{1}{z}$ "وأيضا $z=\frac{1}{\bar{z}}$"

مثال: لدينا المقدار $|z+\dot{z}|^2+|z-\dot{z}|^2$ يساوي

A	$2\lvert z\rvert+2\lvert\dot{z}\rvert$	B	$2\lvert z\rvert-2\lvert\dot{z}\rvert$
C	$2\lvert z\rvert^2-2\lvert\dot{z}\rvert^2$	D	$2\lvert z\rvert^2+2\lvert\dot{z}\rvert^2$

لدينا حسب القانون $|z|^2=z.\bar{z}$ نجد أن
$$|z+\dot{z}|^2+|z-\dot{z}|^2=(z+\dot{z})\overline{(z+\dot{z})}+(z-\dot{z})\overline{(z-\dot{z})}$$
$$=(z+\dot{z})(\bar{z}+\bar{\dot{z}})+(z-\dot{z})(\bar{z}-\bar{\dot{z}})$$
$$=z\bar{z}+z\bar{\dot{z}}+\dot{z}\bar{z}+\dot{z}\bar{\dot{z}}+z\bar{z}-z\bar{\dot{z}}-\dot{z}\bar{z}+\dot{z}\bar{\dot{z}}$$
$$=2z\bar{z}+2\dot{z}\bar{\dot{z}}=2|z|^2+2|\dot{z}|^2$$

مثال: لنفرض أن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي ولدينا $u\neq1$ فإن

A	إما أن يكون z تخيلي أو أن يكون $\lvert u\rvert=1$	B	إما أن يكون z تخيلي أو أن يكون $\lvert u\rvert\neq1$
C	إما أن يكون z حقيقي أو أن يكون $\lvert u\rvert\neq1$	D	إما أن يكون z حقيقي أو أن يكون $\lvert u\rvert=1$

لدينا العدد المقدار $w=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ هو عدد حقيقي أي $w=\bar{w}$ أي
$$\frac{z-u\bar{z}}{1-u}=\overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}$$
نضرب الطرفين بالوسطين
$$(z-u\bar{z})(1-\bar{u})=(\bar{z}-\bar{u}z)(1-u)$$
$$z-z\bar{u}-u\bar{z}+\bar{u}u\bar{z}=\bar{z}-\bar{z}u-\bar{u}z+u\bar{u}z$$
$$z-\cancel{z\bar{u}}-\cancel{u\bar{z}}+\bar{u}u\bar{z}-\bar{z}+\cancel{\bar{z}u}+\cancel{\bar{u}z}-u\bar{u}z=0$$
$$z+\bar{u}u\bar{z}-\bar{z}-u\bar{u}z=0$$
$a-b=-(b-a)$
$$z-\bar{z}-u\bar{u}(z-\bar{z})=0$$
$$(z-\bar{z})(1-u\bar{u})=0$$
نجد إنه
إما $z-\bar{z}=0\to z=\bar{z}\to$ z حقيقي
أو $1-u\bar{u}=0\to u\bar{u}=1\to|u|=1$

ملاحظة :
لإثبات أن العدد حقيقي نثبت أحد الثلاثة

$z=\bar{z}$	$Im(z)=0$	$arg(z)=0,\pi$

لإثبات أن العدد تخيلي بحت نثبت أحد الثلاثة

$z=-\bar{z}$	$Re(z)=0$	$arg(z)=\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}$

وما الدنيا إلا مزرعة الآخرة ، فازرعها جيدًا لتحصد خيرًا..

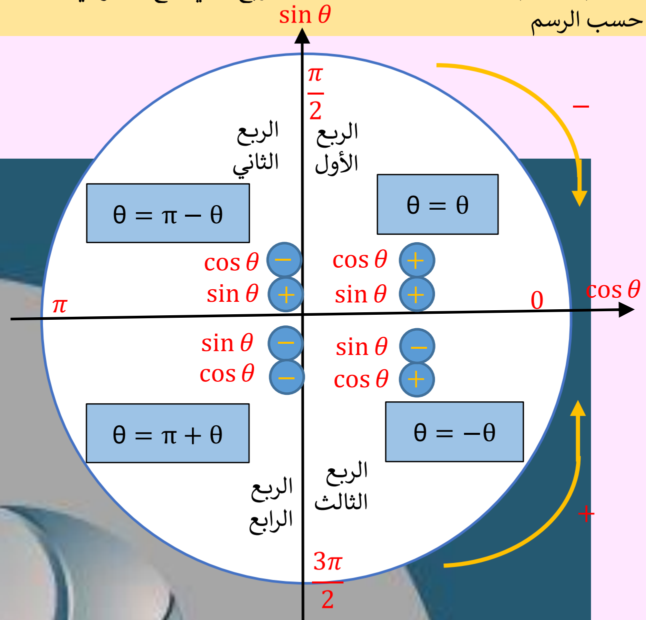
الشكل المثلثي للعدد العقدي

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

التحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي: لتحويل العدد $z = a + ib$ إلى الشكل المثلثي نستعمل القوانين

$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

حيث إنه بعد إيجاد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ نحدد الربع الذي تقع به الزاوية ونستعمل حسب الرسم



مثال: الشكل المثلثي للعدد $z = 4 - 4i$ هو

A	$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	B	$z = 4\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$
C	$z = \sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$	D	$z = 4\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$

لدينا $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

لدينا الزاوية هي $\frac{\pi}{4}$ ولكن $\cos\theta$ موجب و $\sin\theta$ سالب إذاً" هي في الربع الرابع

وفي الربع الرابع ناخذ ناقص الزاوية $\theta = -\frac{\pi}{4}$

ويكون الشكل المثلثي $z = 4\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$

مثال: الشكل المثلثي للعدد $z = -1 - i$ هو

A	$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$	B	$z = \sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
C	$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	D	$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

لدينا $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

لدينا الزاوية هي $\frac{\pi}{4}$ ولكن $\cos\theta$ سالب و $\sin\theta$ سالب إذاً" هي في الربع الثالث

وفي الربع الثالث ناخذ $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

ويكون الشكل المثلثي $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

تحويلات شهيرة:

نوعه	الشكل الجبري	طويلة	الزاوية	الشكل المثلثي
حقيقي موجب	$z = a$	$r = a$	$\theta = 0$	$z = a(\cos 0 + i\sin 0)$
حقيقي سالب	$z = -a$	$r = a$	$\theta = \pi$	$z = -a(\cos\pi + i\sin\pi)$
تخيلي موجب	$z = ai$	$r = a$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$z = a\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
تخيلي سالب	$z = -ai$	$r = a$	$\theta = \frac{-\pi}{2}$	$z = -a\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$
	$z = 1 + i$	$r = \sqrt{2}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
	$z = \sqrt{3} + i$	$r = 2$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
	$z = 1 + i\sqrt{3}$	$r = 2$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

خواص الشكل المثلثي : ليكن لدينا العددين العقديين

$Z_1 = r_1.[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$

$Z_2 = r_2.[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

$Z_1.Z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$Z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$

مثال: الشكل المثلثي للعدد $z = \frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}-i)^5}$ هو

A	$z = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$	B	$z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)$
C	$z = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$	D	$z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

لدينا بالحساب نجد $w = 1 + i$ يكتب بالشكل $w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ونجد أن $u = \sqrt{3} - i$ يكتب بالشكل المثلثي $u = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

$$z = \frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}-i)^5} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}{\left(2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)^5}$$

نستعمل الخاصية الثالثة

$$z = \frac{\sqrt{2}^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2^5\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)}$$

نستعمل الخاصية الثانية

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{2^5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{-5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{-5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$$

مثال: الشكل المثلثي للعدد $z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$ هو

A	$z = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}$	B	$z = \cos\frac{-6\pi}{5} + i\sin\frac{-6\pi}{5}$
C	$z = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$	D	$z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

نلاحظ أن العدد $w = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$ ليس بالشكل المثلثي نحوله للشكل المثلث

$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10}$ و $\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10}$

$w = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$

$$z = \left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^6 = \cos\frac{18\pi}{10} + i\sin\frac{18\pi}{10}$$

الزاوية $\frac{18\pi}{10}$ ليست بالقياس الأساسي نحولها إلى القياس الأساسي بطرح 2π

$$\frac{18\pi}{10} - 2\pi = \frac{18\pi}{10} - \frac{20\pi}{10} = \frac{-2\pi}{10} = \frac{-\pi}{5}$$

$$z = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}$$

ملاحظة في حال كانت الزاوية ليست بالقياس الأساسي
نطرح 2π في حال كان العدد موجب ونجمع 2π في حال كان العدد سالب

التحويل من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري: نبدل $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بما يساويها
مع ملاحظة أن الربع اللتي تقع به الزاوية هو من يحدد إشارة $\cos\theta$ و $\sin\theta$

مثال: الشكل الجبري للعدد العقدي $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ هو

A	$z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	B	$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
C	$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$	D	$z = -\sqrt{2} + -\sqrt{2}i$

نلاحظ أن الزاوية $\frac{5\pi}{4}$ هي من أمثال الزاوية $\frac{\pi}{4}$ وهي بالربع الثالث إذاً" الكل سالب

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ نجد لدينا

$z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \leftarrow z = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

0997047862
المدرس : راتب كسيبي

الشكل الأسي لعدد عقدي

$$Z = r.e^{i\theta}$$

حيث إن θ هي زاوية العدد العقدي و r هي طويلة العدد العقدي
ويتم حسابهم كما في الشكل المثلثي

$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$

حيث إنه بعد إيجاد $\cos\theta$ و $\sin\theta$ نحدد الربع الذي تقع به الزاوية كمافي السابق

مثال: الشكل الأسي للعدد $z = 2\sqrt{3} + 6i$ هو

A	**$z = 4\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$**	B	$z = 4\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}i}$
C	$z = 4\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}$	D	$z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$

لدينا $r = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

لدينا الزاوية هي $\frac{\pi}{3}$ ولكن $\cos\theta$ و $\sin\theta$ موجب إذا" هي في الربع الأول
وفي الربع الأول الزاوية نفسها $\theta = \frac{\pi}{3}$ ويكون الشكل الأسي $z = 4\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$

خواص الشكل الأسي : ليكن لدينا العددين العقديين

$Z_1 = r_1.e^{i\theta_1}$

$Z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$

$Z_1.Z_2 = r_1.r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$Z^n = r^ne^{in\theta}$

هذه الخاصية مفيدة في حساب

مثال: الشكل الأسي للعدد $z = (1+i\sqrt{3})^4e^{i\frac{4\pi}{3}}$ هو

A	$z = 32e^{i(\frac{2\pi}{3})}$	B	**$z = 16e^{i(\frac{2\pi}{3})}$**
C	$z = 16e^{i(\frac{\pi}{3})}$	D	$z = 16e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

بداية نحسب الشكل الأسي للعدد $1+i\sqrt{3}$ نجد أنه $2e^{i\frac{\pi}{3}}$
نحسب $(1+i\sqrt{3})^4$ باستعمال الخاصة الثالثة $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^4$ نجد أنه $2^4e^{i\frac{4\pi}{3}}$
نجد أن $z = 2^4e^{i\frac{4\pi}{3}}.e^{i\frac{4\pi}{3}}$ نستعمل الخاصة الثانية $z = 2^4e^{i(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})}$

$z = 2^4e^{i(\frac{8\pi}{3})} = 16e^{i(\frac{8\pi}{3})}$

ولكن الزاوية $\frac{8\pi}{3}$ ليست قياس أساسي نطرح 2π نجد $\frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

$z = 16e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

تحويلات شهيرة:

نوعه	الشكل الجبري	طويلة	الزاوية	الشكل المثلثي
حقيقي موجب	$z = a$	$r = a$	$\theta = 0$	$z = ae^{i0}$
حقيقي سالب	$z = -a$	$r = a$	$\theta = \pi$	$z = ae^{i\pi}$
تخيلي موجب	$z = ai$	$r = a$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$z = ae^{i\frac{\pi}{2}}$
تخيلي سالب	$z = -ai$	$r = a$	$\theta = \frac{-\pi}{2}$	$z = ae^{i-\frac{\pi}{2}}$
	$z = 1+i$	$r = \sqrt{2}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$z = ae^{i\frac{\pi}{4}}$
	$z = \sqrt{3}+i$	$r = 2$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$z = ae^{i\frac{\pi}{6}}$
	$z = 1+i\sqrt{3}$	$r = 2$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$z = ae^{i\frac{\pi}{3}}$

مثال: الشكل الأسي للعدد $z = 3ie^{\frac{\pi}{3}i}$ هو

A	**$z = 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$**	B	$z = e^{\frac{\pi}{3}i}$
C	$z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$	D	$z = -3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

لدينا $z = 3ie^{\frac{\pi}{3}i}$ ليس بالشكل الأسي لإن $3i$ هو عدد عقدي نحوله إلى الشكل الأسي بالتحويلات الشهيرة نجده $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ نجد أن z يكتب بالشكل

$z = 3e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{3}i} = 3e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})i} = 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

مثال: الشكل الأسي للعدد $z = -12e^{\frac{\pi}{4}i}$ هو

A	**$z = 12e^{\frac{5\pi}{4}i}$**	B	$z = -12e^{\frac{-\pi}{4}i}$
C	$z = 12e^{\frac{\pi}{4}i}$	D	$z = 12e^{\frac{3\pi}{4}i}$

لدينا $z = -12e^{\frac{\pi}{4}i}$ ليس بالشكل الأسي لإن -12 هو عدد سالب نحوله إلى الشكل الأسي بالتحويلات الشهيرة نجده $-12 = 12e^{i\pi}$ نجد أن z يكتب

$z = 12e^{i\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} = 12e^{(\pi+\frac{\pi}{4})i} = 12e^{\frac{5\pi}{4}i}$

مثال: الشكل الأسي للعدد $z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$ هو

A	$z = e^{-ix}$	B	$z = e^{i0}$
C	**$z = e^{i2x}$**	D	$z = e^{ix}$

لدينا البسط $\cos x + i\sin x$ يمكن كتابته بالشكل الأسي بالشكل e^{ix}
أما المقام $\cos x - i\sin x$ فهو ليس بالشكل المثلثي
نحوله للشكل المثلثي $\cos(-x) + i\sin(-x)$
ويمكن كتابته بالشكل الأسي $e^{i(-x)}$
إذا" أصبح لدينا $z = \frac{e^{ix}}{e^{i(-x)}} = e^{i2x}$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

علاقة أويلر : $e^{i\theta} = [\cos\theta + i\sin\theta]$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

أختصارات مهمة

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
$e^{i2\pi} = 1$	$e^{i\pi} = -1$

حل معادلات الدرجة الأولى: في حال كانت المعادلة تحوي العدد z ومرافقه $\bar{z}$
نفرض $z = a+ib$ ويكون $\bar{z} = a-ib$ نعوض في العادلة نجد a و b

مثال:إن حل المعادلة الأتية $2iz + \bar{z} = 3+3i$ يعطى بالشكل

A	**$z = 1-i$**	B	$z = 1+i$
C	$z = -1-i$	D	$z = -1-i$

نفرض $z = a+ib$ ويكون $\bar{z} = a-ib$ نعوض في المعادلة

$2i(a+ib) + (a-ib) = 3+3i$

$2ia - 2b + a - ib = 3+3i$

$(-2b+a) + (2a-b)i = 3+3i$

بالمقارنة بين الطرفين نجد $\begin{cases} -2b+a = 3 \\ 2a-b = 3 \end{cases}$

نضرب المعادلة الأولى ب -2 نحصل على $\begin{cases} 4b-2a = -6 \\ 2a-b = 3 \end{cases}$

بجمع العادلتين $3b = -3$ إذا $b = -1$ نعوض نجد $a = 1$ إذا $z = 1-i$

حل معادلتين بمجهولين: إما طريقة الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

مثال: إن حل جملة المعادلتين $\begin{cases} 3z + \acute{z} = 5+2i \\ -z + \acute{z} = 1-2i \end{cases}$ في $\mathbb{C}$ هو

A	**$\acute{z} = 2-i$ $z = 1+i$**	B	$\acute{z} = 2-i$ $z = 1-i$
C	$\acute{z} = 2+i$ $z = 1+i$	D	$\acute{z} = -2-i$ $z = 1+i$

$\begin{cases} 3z + \acute{z} = 5+2i \\ -z + \acute{z} = 1-2i \end{cases}$ نضرب المعادلة الثانية ب (-1) $\begin{cases} 3z + \acute{z} = 5+2i \\ z - \acute{z} = -1+2i \end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد $4z = 4+4i$ ومنه نجد $z = 1+i$ نعوض في المعادلة الثانية نجد $-(1+i) + \acute{z} = 1-2i$ نجد بعد العزل $\acute{z} = 2-i$

مجموعة النقاط: نحاول رسم مجموعة النقاط ومعرفة طبيعتها

مثال:ماذا تعيين مجموعة النقاط M اللتي تحقق $arg(z) = \frac{\pi}{3}$

A	دائرة مركزها المبدأ	B	مستقيم يوازي محور الفواصل
C	مستقيم يوازي محور التراتيب	D	**مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل**

مثال:ماذا تعيين مجموعة النقاط M اللتي تحقق $|z| = 3$

A	**دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 3**	B	مستقيم يوازي محور الفواصل
C	مستقيم يوازي محور التراتيب	D	مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل

مثال:ماذا تعيين مجموعة النقاط M اللتي تحقق $Im(z) = 1$

A	دائرة مركزها المبدأ	B	**مستقيم يوازي محور الفواصل**
C	مستقيم يوازي محور التراتيب	D	مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل

الجذر التربيعي للعدد العقدي : $z^2 = a + bi$

نفرض $z = x + iy$ ثم نحل المعادلات الثلاث

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

نجمع المعادلتين 1 و 2 نوجد x
ثم نعوض في 3 نجد y

مثال:إن حل المعادلة $z^2 = w$ في $\mathbb{C}$ حيث إن $w = -3 + 4i$

A	$z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = -1 - 2i$	B	$z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = -1 + 2i$
C	$z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = 1 - 2i$	D	$z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = -1 - 2i$

لحل مثل هذه المعادلة والمقصود بها حساب $\sqrt{-3 + 4i}$ نشكل المعادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \qquad r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية نجد $2x^2 = 2$ إذاً $x^2 = 1$ إما $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ أو

نعوض $x_1 = 1$ في المعادلة الثالثة نجد $2y = 4$ إذاً "$y_1 = 2$

نعوض $x_2 = -1$ في المعادلة الثالثة نجد $-2y = 4$ إذاً "$y_2 = -2$

إذاً" حلول المعادلة هي $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = -1 - 2i$

حل معادلات الدرجة الثانية

$a, b, c \in \mathcal{R}$

$az^2 + bz + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: لها جذر مضاعف $z = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ، $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

العددين مترافقين

مثال: إن حل المعادلة $2z^2 - 6z + 5 = 0$ في $\mathbb{C}$

A	$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$	B	$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
C	$z_1 = \frac{3}{2} + i$ $z_2 = \frac{3}{2} - i$	D	$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

$2z^2 - 6z + 5 = 0 \Longrightarrow \Delta = 36 - 4(2)(5) = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$

$z_1 = \frac{6+2i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \qquad z_2 = \frac{6-2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

مثال: إن حل المعادلة $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$ في $\mathbb{C}$

A	$z_1 = e^{i\theta}$ $z_2 = e^{i\theta}$	B	$z_1 = e^{i\theta}$ $z_2 = e^{i(-\theta)}$
C	$z_1 = e^{i\theta}$ $z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$	D	$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ $z_2 = -\cos\theta + i\sin\theta$

$z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4\cos\theta^2 - 4(1)(1)$

$\Delta = 4\cos\theta^2 - 4 = 4(\cos\theta^2 - 1) = -4\sin^2\theta$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4\sin^2\theta} = 2i\sin\theta \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$z_1 = \frac{2(\cos\theta) + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z_1 = \frac{2(\cos\theta) - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{i(-\theta)}$$

حل معادلات الدرجة الثانية

$a, b, c \in \mathbb{C}$ $\qquad az^2 + bz + c = 0$

غالبا" تكون $\Delta = a + ib$

في حال حساب $\sqrt{\Delta}$ وجدنا أن $\sqrt{\Delta} = \sqrt{a + ib}$

نستعمل المعادلات الثلاثة نحسب $\sqrt{\Delta}$

نحصل على جذرين لـ Δ ويكون

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \qquad z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} \text{ و } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة الاتية في $\mathbb{C}$ $z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$ هو

A	$z_1 = 1 - i$ $z_2 = -2 - 3i$	B	$z_1 = 1 - i$ $z_2 = -2 - 3i$
C	$z_1 = 1 - i$ $z_2 = -2 - 3i$	D	$z_1 = 1 - i$ $z_2 = -2 - 3i$

نحسب $\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(1)(-5 - i) = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i$

$\Delta = 5 + 12i$ ولحساب $\sqrt{\Delta}$ نستعمل المعادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \qquad r = \sqrt{25 + 144} = 13$$

بجمع الأولى مع الثانية نجد $2x^2 = 18$ $\begin{cases} x = +3 \\ x = -3 \end{cases}$ نعوض في الثالثة $\begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

إذاً" لدينا $\sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$ و $\sqrt{\Delta_2} = -3 - 2i$ ومنه

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2} = \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i$$

مثال:ماهي قيمة p و q كي تقبل المعادلة $z^2 + pz + q$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها

A	$p = -2 + 6i$ $q = 13 + i$	B	$p = -4 + 3i$ $q = 13 + i$
C	$p = 4 - 3i$ $q = 13 + i$	D	$p = 13 + i$ $q = -4 + 3i$

نجد أن $-p = (1 + 2i) + (3 - 5i)$

و $q = (1 + 2i)(3 - 5i)$

$p = -4 + 3i \quad q = 13 + i$

$$z_1 + z_2 = \frac{-p}{a} \qquad z_1 . z_2 = \frac{q}{a}$$

حل معادلة درجة ثالثة: $p(x) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0$

نحاول إيجاد أحد الحلول (عن طريق التخمين أو ربما يكون معطى)

وليكن أحد الحلول m فإن $z - m$ يقسم $p(x)$ (نقسم قسمة أقليدية)

نجد أن $p(x)$ يمكن كتابته بالشكل $p(x) = Q(x).(z - m)$

أصبح بالمكان حلها لإنها جداء معادلة درجة أولى ومعادلة درجة ثانية أما أو

مثال:ماهو حل المعادلة $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ في حال علمت أن -1 حل

A	$z_1 = -1$ $z_2 = -2 - \sqrt{3}i$ $z_3 = 2 - \sqrt{3}i$	B	$z_1 = -1$ $z_2 = -4 - 3i$ $z_3 = 4 - \sqrt{3}i$
C	$z_1 = -1$ $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$ $z_3 = 2 - \sqrt{3}i$	D	$z_1 = -1$ $z_2 = 4 + \sqrt{3}i$ $z_3 = 4 - \sqrt{3}i$

بما أنها تقبل -1 حل فإنها تقبل القسمة على $z + 1$ نقسم بالكرسي نجد

$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$

نجد أنه أما $z + 1 = 0$ إذاً" $z = -1$

او $z^2 - 4z + 7 = 0$ إذاً" أما $z = 2 + \sqrt{3}i$ أو $z = 2 - \sqrt{3}i$

حل معادلة درجة رابعة: غالبا" تحلل لقوسين $(\quad)(\quad) = 0$ أما أو

مثال: $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

ماهي قيمة b, a اللتي تحقق $p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

A	b=2 و a=-4	B	b=5 و a=-3	C	b=1و a=-4	D	b=5 و a=-4

ننشر ثم نقارن مع الأمثال في المعادلة المعلومة تترك للقارئ

تطبيقات الأعداد العقدية

ليكن لدينا الأعداد العقدية

$z_A = x_A + y_A$ و $z_B = x_B + y_B$ و $z_C = x_C + y_C$

مركبات الشعاع $Z_{\overrightarrow{AB}}$: تعطى بالعلاقة $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

مركبات Z_I منتصف القطعة $[AB]$: تعطى بالعلاقة $Z_I = \frac{Z_A+Z_B}{2}$

مركبات Z_G مركز ثقل المثلث $[ABC]$: تعطى بالعلاقة $Z_G = \frac{Z_A+Z_B+Z_C}{2}$

طويلة الشعاع: $|Z_{\overrightarrow{AB}}| = |Z_B - Z_A|$

مركبة Z_H حيث H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

$$Z_H = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: لتكن لدينا النقاط A و B التي تمثلها الأعداد العقدية $z_A = -1 + i$
$z_B = 2 + i$ ما هو العدد العقدي المعبر عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$

A	$z_{\overrightarrow{AB}} = 3$	B	$z_{\overrightarrow{AB}} = 1 + 2i$
C	$z_{\overrightarrow{AB}} = 3 + 2i$	D	$z_{\overrightarrow{AB}} = 1 - 2i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = 2 + i - (-1 + i) = 3$

مثال:لتكن لدينا النقاط A وB و C التي تمثلها الأعداد العقدية $z_A = 2 + 2\sqrt{3}i$
$z_B = 2 - 2\sqrt{3}i$ و $z_C = -4$ ماطبيعة المثلث ABC

A	قائم	B	مثلث متساوي الساقين
C	قائم ومتساوي الساقين	D	مثلث متساوي الأضلاع

لمعرفة طبيعته نحسب أطوال أضلاعه

$$|\overrightarrow{AB}| = |Z_B - Z_A| = |-4\sqrt{3}i| = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{48}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |Z_C - Z_A| = |-6 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-6)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{48}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |Z_C - Z_B| = |-6 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-6)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{48}$$

نجد أن المثلث متساوي الأضلاع

مثال: لتكن لدينا النقاط A و Bاللتي تمثلها الأعداد العقدية $z_A = 2 + 2\sqrt{3}i$
$z_B = 2 - 2\sqrt{3}i$ ماهو العدد العقدي C
اللذي يجعل O مركز ثقل المثلث ABC

A	$z_C = \frac{1}{2}i$	B	$z_C = -\frac{4}{3}$
C	$z_C = 3 + 5i$	D	$z_C = -4$

لدينا $Z_o = 0$ وهو مركز ثقل المثلث ABC إذاً

$$Z_o = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$z_C = -4 \Leftarrow 0 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i + z_C}{3}$$

ملاحظة: خاصية في متوازي الأضلاع لدينا القطران متناصفان

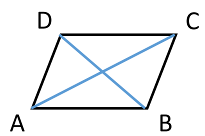
مثال:تمثل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط
A و B و C و D عندئذ يكون الرباعي $ABCD$متوازي أضلاع إذا حقق

A	$a - c = b - d$	B	$a = b$
C	$a + b = c + d$	D	$a + c = b + d$

لدينا في متوازي الأضلاع القطران متناصفان
إذاً منتصف $[AC]$ يساوي منتصف $[BD]$

$$\frac{a+c}{\cancel{2}} = \frac{b+d}{\cancel{2}}$$

$$a + c = b + d$$



مثال: لتكن النقاط Aو B و C التي تمثلها الأعداد العقدية
$a = 2 - 2i$ و $b = -1 + 7i$ و $c = 4 + 2i$ لدينا النقاط تقع على دائرة
مركزها $w = -1 + 2i$ ونصف قطرها

A	5	B	4	C	6	D	3

إذا كانت النقاط تقع على دائرة واحدة مركزها w إذاً $aw = bw = cw$

$$aw = |w - a| = |-1 + 2i - (2 - 2i)| = |-3 + 4i| = 5$$

$$bw = |w - b| = |-1 + 2i - (-1 + 7i)| = |-5i| = 5$$

$$cw = |w - c| = |-1 + 2i - (4 + 2i)| = |-5| = 5$$

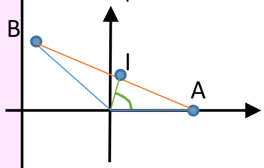
مثال: لدينا العددان $a = 2$ و $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ اللذان يمثلان النقطتان A و B
وليكن I منتصف $[AB]$ إن Z_I يكتب بلشكل الأسي بالشكل

A	$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{8}i}}$	B	$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{8}i}}$
C	$Z_I = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$	D	$Z_I = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{6}i}$

لدينا $Z_I = \frac{a+b}{2}$ و $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

إذاً $Z_I = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ وهذا الشل الجبري

للتحويل إلى الشكل المثلي $r = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}}$



$r = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ اما زاويته نستنتجها من الشكل
حيث لدين OI هو متوسط ومنصف
من كون المثلث OAB متساوي الأضلاع
إذاً زاوية OI هي نصف الزاوية $\frac{3\pi}{4}$ وهي $\frac{3\pi}{8}$
ومنه الشكل الأسي هو $Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{8}i}$

ملاحظة: الزاوية بين شعاعين تعطى بالعلاقة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$

النسبة الشهيرة:

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$$

تفيد هذه النسبة في

- في حساب نسبة الطولين $\left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \frac{CD}{AB}$
- في حساب الزاوية بين الشعاعين $arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

إذا كانت الزاوية هي 0 أو π استنتجنا الأرتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$
إذا كانت الزاوية هي $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{-\pi}{2}$ استنتجنا تعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

مثال: لدينا الأعداد العقدية $a = 1 + \frac{3}{4}i$ و $b = 2 - \frac{5}{4}i$ و $c = 3 + \frac{7}{4}i$
إن المثلث ABC

A	قائم في A ومتساوي الساقين	B	متساوي الساقين
C	قائم في A	D	متساوي الأضلاع

لدينا النسبة $\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}$ تعطينا حل لهذه المسألة وهي تساوي $\frac{c-a}{b-a}$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3 + \frac{7}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right)}{2 - \frac{5}{4}i - \left(1 + \frac{3}{4}i\right)} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = i$$

$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = |i|$
$\frac{AC}{AB} = 1$
$AC = AB$
المثلث متساوي الساقين برأسه A

$arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg(i)$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$
المثلث قائم في A

مثال: لدينا الأعداد العقدية $a = -2$ و $b = 1 - 3i$ و $c = -1 + i$
ونكون لدينا المقدار $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ يساوي

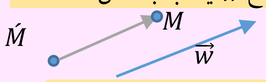
A	$\frac{-\pi}{2}$	B	$\frac{\pi}{2}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1 - 3i - (-2)}{-1 + i - (-2)} = \frac{(3-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -3i$$

$$arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = arg(-3i) = \frac{-\pi}{2}$$

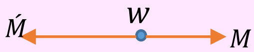
التحويلات الهندسية:

الأنسحاب $\mathcal{T}$: $\acute{M}$ صورة M وفق انسحاب يمثله الشعاع $\vec{w}$ يكتب بالشكل



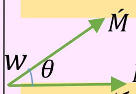
$$\acute{z} = z + w$$

التحاكي $\mathcal{H}$: $\acute{M}$ صورة M وفق تحاكي نسبته العدد الحقيقي k ومركزه w يكتب بالشكل



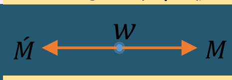
$$\acute{z} - w = k(z - w)$$

الدوران $\mathcal{R}$: $\acute{M}$ صورة M وفق دوران مركزه w وزاويته θ يكتب بالشكل



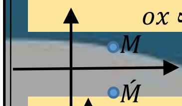
$$\acute{z} - w = e^{i\theta}(z - w)$$

التناظر المركزي $\mathcal{S}$: $\acute{M}$ صورة M وفق تناظر مركزي مركزه w يكتب بالشكل



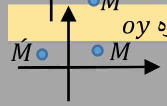
$$\acute{z} = -z + 2w$$

التناظر المحوري $\mathcal{S}$: $\acute{M}$ صورة M وفق تناظر محوري اللذي محوره ox



$$\acute{z} = \bar{z}$$

التناظر المحوري $\mathcal{S}$: $\acute{M}$ صورة M وفق تناظر محوري اللذي محوره oy



$$\acute{z} = -\bar{z}$$

مثال: ليكن العدد العقدي $z = 1 + i$ ماهو العدد العقدي $\acute{z}$ الممثل للنقطة $\acute{M}$ صورة M وفق الإنسحاب اللذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

A	$\acute{z} = 1 - 4i$	B	$\acute{z} = -1 - 4i$
C	$\acute{z} = 1 + 4i$	D	$\acute{z} = -1 + 4i$

لدينا قانون الإنسحاب $\acute{z} = z + w$ ولدينا $\vec{w}$ يكتب بالشكل

$\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v} = -2 + 3i$

إذاً $\acute{z} = z + w = 1 + i - 2 + 3i = -1 + 4i$

مثال: ليكن العدد العقدي $z = 1 + i$ ماهو العدد العقدي $\acute{z}$ الممثل للنقطة $\acute{M}$ صورة M وفق التحاكي اللذي مركزه O ونسبته 3

A	$\acute{z} = 3 + 3i$	B	$\acute{z} = 3 + 2i$
C	$\acute{z} = 2 + 3i$	D	$\acute{z} = 2 + 2i$

لدينا قانون التحاكي $\acute{z} - w = k(z - w)$

إذاً $\acute{z} - 0 = 3(1 + i - 0) \leftarrow \acute{z} = 3 + 3i$

مثال: ليكن العدد العقدي $z = 1 + i$ ماهو العدد العقدي $\acute{z}$ الممثل للنقطة $\acute{M}$ صورة M وفق الدوران اللذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

A	$\acute{z} = \sqrt{2}i$	B	$\acute{z} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
C	$\acute{z} = 1 - \sqrt{2}i$	D	$\acute{z} = 1 + \sqrt{2}i$

لدينا قانون الدوران $\acute{z} - w = e^{i\theta}(z - w)$

إذاً $\acute{z} - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(1 + i - 0)$

$$\acute{z} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1 + i)$$

$$\acute{z} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + i)$$

$$\acute{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = i\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}i$$

مثال: ليكن العدد العقدي $z = 1 + i$ ماهو العدد العقدي $\acute{z}$ الممثل للنقطة $\acute{M}$ صورة M وفق التناظر اللذي مركزه $A(1 - 3i)$

A	$\acute{z} = 1 - 7i$	B	$\acute{z} = 3 - 7i$
C	$\acute{z} = 1 - 5i$	D	$\acute{z} = 2 - 7i$

لدينا قانون التناظر المركزي $\acute{z} = -z + 2w$

إذاً $\acute{z} = -(1 + i) + 2(1 - 3i) \leftarrow \acute{z} = -1 - i + 2 - 6i$

$\acute{z} = 1 - 7i$

مثال: ليكن العدد العقدي $z = 1 + i$ ماهو العدد العقدي $\acute{z}$ الممثل للنقطة $\acute{M}$ صورة M وفق المحوري اللذي مركزه (ox)

A	$\acute{z} = -1 - i$	B	$\acute{z} = 1 + i$
C	$\acute{z} = 1 - i$	D	$\acute{z} = -1 + i$

لدينا قانون التناظر المركي $\acute{z} = \bar{z}$

إذاً $\acute{z} = 1 - i$

مثال: ماهي طبيعة التحويل الأتي $b = a - 1 + 3i$

A	دوران	B	تحاكي
C	تناظر	D	انسحاب

من الواضح لإن الانسحاب من الشكل $\acute{z} = z + w$

إذاً هو انسحاب ينقل a إلى b و شعاعة $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

مثال: ماهي طبيعة التحويل الأتي $b - 1 = -(a - 1)$

A	دوران	B	تحاكي
C	تناظر	D	انسحاب

من الواضح لإن التحاكي من الشكل $\acute{z} - w = k(z - w)$

إذاً هو تحاكي ينقل a إلى b مركزه $w = 1$ ونسبته $k = -1$

مثال: ماهي طبيعة التحويل الأتي $b - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - i)$

A	دوران	B	تحاكي
C	تناظر	D	انسحاب

من الواضح لإن الدوران من الشكل $\acute{z} - w = e^{i\theta}(z - w)$

إذاً هو دوران ينقل a إلى b مركزه $w = i$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

مثال: ماهي طبيعة التحويل الأتي $b = -ia$

A	دوران	B	تحاكي
C	تناظر	D	انسحاب

من الواضح لإن الدوران من الشكل $\acute{z} - w = e^{i\theta}(z - w)$

يمكن كتابته بالشكل $b = e^{i-\frac{\pi}{2}}a$

إذاً هو دوران ينقل a إلى b مركزه o وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$e^{i-\frac{\pi}{2}} = -i$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

مثال: ماهي طبيعة التحويل الأتي $b = 2a$

A	دوران	B	تحاكي
C	تناظر	D	انسحاب

من الواضح لإن التحاكي من الشكل $\acute{z} - w = k(z - w)$

إذاً هو تحاكي ينقل a إلى b مركزه o ونسبته $k = 2$

مثال: لتكن النقطتين $A(3 - i\sqrt{3})$ و $B(3 + i\sqrt{3})$ وليكن لدينا الدوران R اللذي مركزه O ويحقق $R(A) = B$ عندئذ قياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ هي

A	$\frac{\pi}{2}$	B	$\frac{\pi}{4}$
C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{6}$

لدينا قانون الدوران $\acute{z} - w = e^{i\theta}(z - w)$

لدينا B صورة A وفق دوران

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{b - o}{a - o}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}\right)$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

الأشكال المفتاحية

يكون المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن $c - a = i(b - a)$ أو $c - a = -i(b - a)$	يكون المثلث ABC مثلث متساوي الأضلاع إذا كانت B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أن $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ أو $c - a = e^{i-\frac{\pi}{3}}(b - a)$

للسّاعين في دربّ الكِفاح أنبت الله في قلوبكُم رضا

الجذر التكعيبي للعدد العقدي:

نفرض أن العدد z هو $z = re^{i\theta}$ ثم نكعب ونقارن الطرفين
مع ملاحظة أن في حال زاويتان متساويتان نضيف العدد $2\pi k$
ونجد الجذور الثلاثة بتعويض $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2$

مثال: إن الجذور التكعيبية للعدد $z^3 = 1$ هي

A	$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	B	$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}}$
C	$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$	D	$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}}$

نفرض أن العدد z هو $z = re^{i\theta}$

$\left(re^{i\theta}\right)^3 = 1$ $\boxed{1 = e^{i0}}$

$r^3 e^{i3\theta} = 1$

$r^3 e^{i3\theta} = 1e^{i0}$

بالمقارنة نجد أن $r = 1$ و $3\theta = 0 + 2\pi k \leftarrow \theta = \frac{2\pi k}{3}$

بتعويض $k = 0$ نجد $\theta = 0$ إذا" $z_1 = 1e^{i0} = 1$

بتعويض $k = 1$ نجد $\theta = \frac{2\pi}{3}$ إذا" $z_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

بتعويض $k = 2$ نجد $\theta = \frac{4\pi}{3}$ إذا" $z_3 = 1e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

مثال: إن الجذور التكعيبية للعدد $z^3 = 8i$ هي

A	$z_1 = 1, z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	B	$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
C	$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$	D	$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

نفرض أن العدد z هو $z = re^{i\theta}$

$\boxed{1 = e^{i0}}$ $\left(re^{i\theta}\right)^3 = 8i$ $\boxed{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$r^3 e^{i3\theta} = 8i$

$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

بالمقارنة نجد أن $r = 2$ و $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leftarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

بتعويض $k = 0$ نجد $\theta = \frac{\pi}{6}$ إذا" $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

بتعويض $k = 1$ نجد $\theta = \frac{5\pi}{6}$ إذا" $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

بتعويض $k = 2$ نجد $\theta = \frac{9\pi}{6}$ إذا" $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

مجموعة النقاط:

١- $|z - z_A| = r$ إذا" هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r

٢- $|z - z_A| = |z - z_B|$ إذا" هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

مثال: ماذا تمثل مجموعة التي تحقق $|z - 3 - 2i| = 1$

A	مستوي محوي	B	كرة نصف قطرها 1
C	دائرة نصف قطرها 1	D	مستقيم

$|z - (3 + 2i)| = 1$

وهي كرة مركزها $3 + 2i$ ونصف قطرها 1

مثال: ماذا تمثل مجموعة التي تحقق $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$

A	محور قطعة مستقيمة	B	كرة نصف قطرها 1
C	دائرة نصف قطرها 1	D	مستقيم

$|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$

وهي تمثل محور القطعة المستقيمة

مثال: ماذا تمثل مجموعة التي تحقق $|z - B| = |z - A|$

A	محور قطعة مستقيمة $[AB]$	B	كرة نصف قطرها 1
C	دائرة نصف قطرها 1	D	مستقيم

خواص ال $arg(z)$ أو زاوية العدد العقدي z

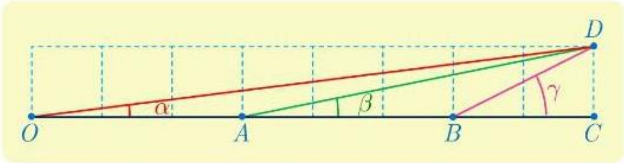
١- $arg(z_1 . z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

٢- $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2)$

٣- $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)$

٤- $arg(z^n) = n\, arg(z)$

مثال: أن قيمة $\alpha + \beta + \gamma$ الموجودة في الشكل هي



A	$\frac{\pi}{2}$	B	$\frac{\pi}{4}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{6}$

النقطة $A(3,0)$ يمثلها العدد العقدي $Z_A = 3$

النقطة $B(6,0)$ يمثلها العدد العقدي $Z_B = 6$

النقطة $C(8,0)$ يمثلها العدد العقدي $Z_C = 8$

النقطة $D(8,1)$ يمثلها العدد العقدي $Z_D = 8 + i$

لدينا $\alpha = arg(z_{\overrightarrow{OD}})$ $\quad z_{\overrightarrow{OD}} = 8 + i$

لدينا $\beta = arg(z_{\overrightarrow{AD}})$ $\quad z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 5 + i$

لدينا $\gamma = arg(z_{\overrightarrow{BD}})$ $\quad z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 2 + i$

إذا" نجد أن $\alpha + \beta + \gamma = arg(z_{\overrightarrow{OD}}) + arg(z_{\overrightarrow{AD}}) + arg(z_{\overrightarrow{BD}})$

$\alpha + \beta + \gamma = arg[(z_{\overrightarrow{OD}})(z_{\overrightarrow{AD}})(z_{\overrightarrow{BD}})]$

$\alpha + \beta + \gamma = arg[(8 + i)(5 + i)(2 + i)]$

$\alpha + \beta + \gamma = arg[65 + 65i] = arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

مثال: ليكن لدينا العدد العقدي $Z_A = 1 + i$ و $Z_B = 6i$
فإن قيمة $arg(\frac{Z_A}{Z_B})$ تساوي

A	$\frac{\pi}{2}$	B	$-\frac{\pi}{4}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$-\frac{\pi}{6}$

$arg(\frac{Z_A}{Z_B}) = arg(z_A) - arg(z_B)$

$arg(\frac{Z_A}{Z_B}) = arg(1 + i) - arg(6i)$

$arg(\frac{Z_A}{Z_B}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

قصة قصيرة

نحن نعلم أن $e^{i\pi} = -1$

ومنه نجد أن $e^{i\pi} + 1 = 0$

وهي معادلة أولر

وهي تسمى بأجمل معادلة في الرياضيات

لإنها تجمع أشهر الأعداد في الرياضيات

حيث إن

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$i = \sqrt{-1}$

$\pi = 3.14..$

وهو حيادي الجمع

$e = 2.7..$

وهو حيادي الضرب

مراجعة التحليل التوافقي والاحتمالات

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\int$ $\overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

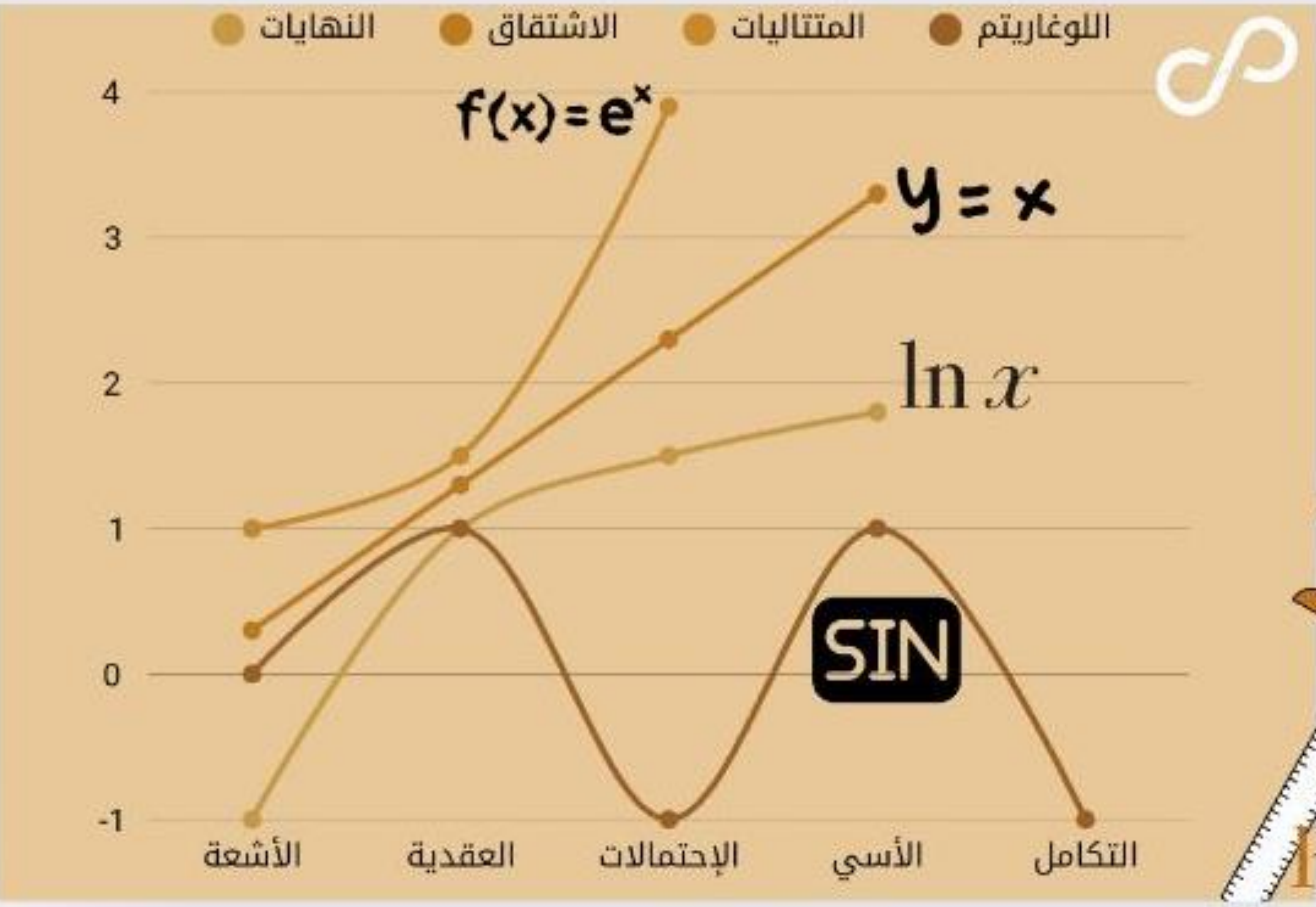
0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$ $\quad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\quad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\quad$ $10a + 3b - 2c$



${}^{n}P_{r}$

$P(A)$

بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة التحليل التوافقي و الإحتمالات مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح الطباعة ملون

التحليل التوافقي

العاملي : $n! = n(n-1)(n-2)........3\times2\times1$

مثال: $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$3! = 3\times2\times1 = 6$

$2! = 2\times1 = 2$ $\quad 1! = 1$ $\quad 0! = 1$

ملاحظة: يمكن النزول في العاملي

مثال: $(n+1)! = (n+1)n(n-1)!$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{21!}{20!}$ هي

A	B	C	D
21	32	18	20

$$\frac{21!}{20!} = \frac{21\times20!}{20!} = 21$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{1}{5!} - \frac{42}{7!}$ هي

A	B	C	D
12	**0**	1	20

$$\frac{1}{5!} - \frac{42}{7!} = \frac{1}{5!} - \frac{42}{7\times6\times5!} = \frac{1}{5!} - \frac{1}{5!} = 0$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{6!-5!}{5!}$ هي

A	B	C	D
12	0	1	**5**

$$\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{5!} = \frac{6\times5!}{5!} - 1 = 6 - 1 = 5$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{6!}{(3!)^2}$ هي

A	B	C	D
21	32	18	**20**

$$\frac{6!}{(3!)^2} = \frac{6!}{3!\times3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ هي

A	B	C	D
n^2+2n	**$4n^2+2n$**	$4n^2+n$	$4n^2-2n$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!} = (2n+1)(2n) = 4n^2+2n$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$ هي

A	B	C	D
$\frac{1}{n^2-n}$	$\frac{n-1}{n^2+n}$	$\frac{n-1}{n+1}$	**$\frac{1}{n^2+n}$**

$$\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)n!} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$$

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{(2n)!}{1\times3\times5\times.....\times(2n-1)}$ هي

A	B	C	D
$2^{n+1}.n!$	**$2^n.n!$**	$3^n.n!$	$n!$

$$\frac{(2n)!}{1\times3\times5\times...\times(2n-1)} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)...3\times2\times1}{1\times3\times5\times.....\times(2n-1)}$$

$$= (2n)(2n-2)(2n-4).........6\times4\times2 =$$

$$= 2(n)2(n-1)2(n-2)..........2(3)2(2)2(1)$$

$$= 2^n.n!$$

وَأنَّ سَعْيهُ سَوفَ يُرَى

وَتظل تسعَى جاهَدًا في همةٍ

والله يُعطي من يشاء

التراتيب: له احد العلاقتين $P_n^r = n(n-1)(n-2).......(n-r+1)$

أو العلاقة $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ مع الشرط $n \ge r \ge 0$

يستخدم لترتيب r عنصر من مجموعة تحوي n عنصر

مثال: إن قيمة العبارة P_7^4 هي

A	B	C	D
840	220	45	12

$P_7^4 = 7\times6\times5\times4 = 840$ — ارجع بال 7 مقدار 4 مرات

مثال: إن قيمة n في $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ هي

A	B	C	D
$n=10$	$n=2$	$n=4$	$n=8$

$P_n^4 = 10P_{n-1}^3$ شرط لحل $n \ge 4$ و $n-1 \ge 3$ أي $n \ge 4$

$$P_n^4 = 10P_{n-1}^3$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$$

بعد الاختصار نجد $n = 10$ وهو حل مقبول

مثال: إن قيمة n في $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$ هي

A	B	C	D
$n=-1$	$n=3$	**$n=4$**	$n=12$

شرط لحل $n+2 \ge 2$ أي $n \ge 0$ و $n+1 \ge 3$ أي $n \ge 2$ إذا" $n \ge 2$

$$P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 2(n+2)(n+1)$$

بعد الاختصار نجد $n(n-1) = 2(n+2)$ بعد النشر

$$(n-4)(n+1) = 0 \leftarrow\leftarrow n^2-3n-4 = 0$$

إما $n = 4$ مقبول أو $n = -1$ وهو مرفوض

التوافيق: له احد العلاقتين $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{n!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

يستخدم لإختيار مجموعة جزئية عدد عناصرها r عنصر من مجموعة عدد عناصرها n عنصر

خواص التوافيق:

$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{0} = 1$
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ يساوي توافيق المتمم	$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ إما $p = q$ أو $p+q = n$	$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

مثال: إن قيمة العبارة $\binom{6}{2}$ هي

A	B	C	D
15	32	18	20

$$\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

مثال: إن قيمة العبارة $\binom{12}{8}$ هي

A	B	C	D
15	320	**495**	20

$$\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$$

مثال: إن قيمة n التي تحقق العبارة $\binom{n}{2} = 36$ هي

A	B	C	D
$n=2$	**$n=9$**	$n=4$	$n=3$

$\binom{n}{2} = 36$ شرط الحل $n \ge 2$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow \frac{n^2-n}{2} = 36 \Rightarrow n^2-n-72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0 \Rightarrow n = 9$$

لإن -8 مرفوض

مثال: إن قيمة n التي تحقق العبارة $\binom{10}{n+2} = \binom{10}{3n}$ هي

A	B	C	D
$n=2$	$n=1$	**$n = 1$و2**	$n=3$

$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$ شرط الحل $3 \ge n \ge 0$

تساوى توافيقن نستعمل خاصة	إما $3n = n+2$ $n = 1$	أو $3n+n+2 = 10$ $n = 2$

مثال: إن قيمة n التي تحقق العبارة $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$ هي

A	$n=2$	B	$n=5$	C	$n=10$	D	$n=3$

$3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$ شرط الحل $n\geq 4$

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=14\frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{4}=14$$

$$n^2-5n-50=0\to(n-10)(n+5)=0\to n=10$$

يوجد أمثال لا نستعمل خاصة

مثال: إن قيمة العبارة $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}$ هي

A	$\frac{n+1}{n+r}$	B	$\frac{n-1}{r+1}$	C	$\frac{n+1}{n+r+1}$	D	$\frac{n+1}{r+1}$

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-r-1)!(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}}=\frac{\frac{(n+1)n!}{(n-r)!(r+1)r!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}}=\frac{n+1}{r+1}$$

منشور ذي الحدين :

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n.b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}.b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2+\dots\dots+\binom{n}{n}a^0.b^n$$

$\binom{n}{0}=1$

$\binom{n}{1}=n$

$\binom{n}{n}=1$

مثال: إن قيمة المنشور $(2x+1)^4$ هو

A	$6x^4+3x^3+8x^2+5x+1$
B	$16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$
C	$16x^4+18x^3-5x^2+8x+1$
D	$32x^4+16x^3+6x^2+8x+1$

$$(2x+1)^4=\binom{4}{0}(2x)^4.1^0+=1.16x^4.1$$
$$\binom{4}{1}(2x)^3.1^1+=4.8x^3.1$$
$$\binom{4}{2}(2x)^2.1^2+=6.4x^2.1$$
$$\binom{4}{3}(2x)^1.1^3+=4.2x.1$$
$$\binom{4}{4}(2x)^0.1^4+=1.1.1$$
$$(2x+1)^4=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$$

مثال: إن قيمة المنشور $(1-x)^5$ هو

A	$1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$
B	$1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
C	$1-5x+16x^2-10x^3+4x^4-x^5$
D	$1+5x+10x^2-6x^3+5x^4-x^5$

$$(1-x)^5=\binom{5}{0}(1)^5.(-x)^0+=1.1.1$$
$$\binom{5}{1}(1)^4.(-x)^1+=5.1.(-x)$$
$$\binom{5}{2}(1)^3.(-x)^2+=10.1.x^2$$
$$\binom{5}{3}(1)^2.(-x)^3+=10.1.(-x^3)$$
$$\binom{5}{4}(1)^1.(-x)^4+=5.1.x^4$$
$$\binom{5}{5}(1)^1.(-x)^5+=1.1.(-x^5)$$
$$(2x+1)^4=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$$

ماذا لَوْ سَقطتُ؟!
انْهَضْ وَلَو سَقطتَ مَرّةً أخرى انْهَض مجدداً،
العيبُ ليسَ في السُّقوط إنّما بعدمِ النُّهوض بعدَ السُّقوط....
☆ انْهَض في كُل مَرة حَتى تَصل إلى أهْدافك فنحنُ موجُ بحرٍ هائج ، سَفَنٌ لاتعرف طريقاً لليأس،

مثال: إن قيمة المنشور $(2-i)^3$ هو

A	$2-11i$	B	$10-12i$
C	$4+3i$	D	$8-5i$

$$(2-i)^3=\binom{3}{0}(2)^3.(-i)^0+=1.8.1$$
$$\binom{3}{1}(2)^2.(-i)^1+=3.4.-i$$
$$\binom{3}{2}(2)^1.(-i)^2+=3.2.-1$$
$$\binom{3}{3}(2)^0.(-i)^3+=1.1.i$$
$$(2x+1)^4=8-12i-6+i=2-11i$$

ملاحظة : لحساب الحد ذي الدليل n نستخدم القانون $T_n=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

مثال: إن الحد اللذي يحوي x^2 في المنشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ هو

A	$105x^2$	B	$210x^2$	C	$21x^2$	D	$10x^2$

$$T_n=\binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{10}{r}x^{10-r}.x^{-r}=\binom{10}{r}x^{10-2r}$$

الدليل اللذي يحوي x^2 يجب أن يكون $x^2=x^{10-2r}$

$2=10-2r \Leftarrow 2r=8 \Leftarrow r=4$ إذا" هو الحد الرابع

$$T_4=\binom{10}{4}x^{10-2(4)}=210x^2$$

مثال: إن الحد اللذي يحوي الحد الثابت في المنشور $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$ هو

A	320	B	120	C	220	D	210

$$T_n=\binom{12}{r}x^{12-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r=\binom{12}{r}x^{12-r}.x^{-3r}=\binom{12}{r}x^{12-4r}$$

الدليل اللذي يحوي الحد الثابت يجب أن يكون

$0=12-4r \Leftarrow 4r=12 \Leftarrow r=3$ إذا" هو الحد الرابع

$$T_3=\binom{12}{3}x^{12-4(3)}=220$$

طرق العد لدينا طريقتان

المبدأ الأساسي بالعد n^r نستعمله في حال كان الترتيب مهم	التوافيق: $\binom{n}{r}$ نستعمله في حال كان الترتيب غير مهم أي اختيار مجوعة جزئية من مجموعة كلية

مسائل المجموعات:غالبا" هذه المسائل تعتمد على خانات عدد لذلك الترتيب مهم ونستعمل المبدأ الأساسي بالعد

مثال: لدينا المجموعة $S:\{1,2,5,8,9\}$ كم عدد مؤلف من منزلتين من عناصر S يمكن تشكيلها

A	16	B	24	C	25	D	20

$5 \times 5 = 25$

العشرات يوجد 5 طرق

الأحاد يوجد 5 طرق

مثال: لدينا المجموعة $S:\{1,2,5,8,9\}$ كم عدد مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين من عناصر S يمكن تشكيلها

A	16	B	24	C	25	D	20

$5 \times 4 = 20$

العشرات يوجد 5 طرق

الأحاد يوجد 4 طرق

تلك المعركة التي تخوضها بداخلك، آطاحت بك آرضًا، لكنك ستقف بعدها لتكون أقوىَ و أعظم في عين نفسك اياك أن تستسلم

مثال: لدينا المجموعة $S:\{1,2,5,8,9\}$ كم عدد زوجي ومؤلف من منزلتين من عناصر S يمكن تشكيلها

10	B	24	C	25	D	20

$5 \times 2 = 10$

العشرات يوجد 5 طرق

الأحاد يوجد 2 طرق

الأحاد زوجية أي العددان 2 و 8 فقط

مثال: لدينا المجموعة $S:\{1,2,5,8,9\}$ كم عدد زوجي ومؤلف من منزلتين مختلفتين من عناصر S يمكن تشكيلها

10	B	12	C	8	D	15

عندما تكون مختلفة ويوجد شرط هنا نحسب أكثر من حالة

اما أن يكون احاده 2

او أن يكون احاده 8

$4 \times 1 + 4 \times 1 = 8$

مثال: لدينا المجموعة $S:\{1,2,3,4,5\}$ كم عدد مؤلف من 5 منازل مختلفة ومأخوذة من S ولا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5 وكل عدد منها أكبر من 20000 يمكن تشكيلها

60	B	78	C	58	D	12

يوجد عدد 5 في عشرات الألوف: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$ = 24

4 خيارات للأحاد

+

يوجد عدد 4 في عشرات الألوف: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3$ = 18

3 خيارات للأحاد

+

يوجد عدد 3 في عشرات الألوف: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3$ = 18

3 خيارات للأحاد

+

يوجد عدد 2 في عشرات الألوف: $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3$ = 18

3 خيارات للأحاد

= 78

تبادل المجموعات : في أي مجموعة مختلفة العناصر يوجد تبديل لعناصرها مثل المجموعة (A,B,C) يمكن تبديل عناصرها بالشكل

(A,B,C) و(A,C,B) و(B,A,C) و(B,C,A) و(C,B,A) و(C,A,B)

وعدد تباديلها 6 تباديل وقانون حساب هو $\frac{(\text{العدد الكلي})!}{(\text{العدد المكرر})!}$

أمثلة: تبادل (A,B,C) هو $\frac{3!}{1!} = 6$ تبادل (H,T) هو $\frac{2!}{1!} = 2$

تبادل (W,R,R) هو $\frac{3!}{2!} = 3$ تبادل (R,R,B,B) هو $\frac{4!}{2!2!} = 6$

مسائل الكرات: يوجد ثلاث أنواع

سحب على التتالي مع إعادة نستخدم المبدأ الأساسي بالعد ولا يوجد تناقص ونضرب بالتباديل للمجموعات المختلفة	سحب على التتالي دون إعادة نستخدم المبدأ الأساسي بالعد و يوجد تناقص ونضرب بالتباديل للمجموعات المختلفة	سحب معا" نستخدم التوافيق ولا نضرب بالتباديل للمجموعات المختلفة الترتيب غير مهم

بالتأكيد كانت أفضل الأوقات عندما كنت وحيدًا مع الرياضيات ، متحررا من الطموح والتظاهر ، ولامبالاة بالعالم.
(روبرت لانجلاندز)

السحب على التتالي مع إعادة

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب

850	B	1200	C	1000	D	720

$n(\Omega) = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

الكرة الأولى يوجد 10 خيارات والكرة الثانية يوجد 10 خيارات والكرة الثالثة يوجد 10 خيارات

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة كم عدد النتائج المختلفة اللتي تحوي كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه

342	B	348	C	642	D	648

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما $3 \times (R,R,\grave{R})$ أو $3 \times (W,W,\grave{W})$ أو $3 \times (B,B,\grave{B})$

$(3 \times 6 \times 6 \times 4) + (3 \times 3 \times 3 \times 7) + (3 \times 1 \times 1 \times 9) = 648$

$3 \times$ للتبادليل

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة كم عدد النتائج المختلفة اللتي تحوي ثلاث كرات مخلفة الألوان

108	B	120	C	112	D	124

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة هي $6 \times (R,W,B)$

$(6 \times 6 \times 3 \times 1) = 108$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة كم عدد النتائج المختلفة اللتي تحوي كرة حمراء واحدة عل الأقل

636	B	736	C	936	D	836

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما $1 \times (R,R,R)$ أو $3 \times (R,\grave{R},\grave{R})$ أو $3 \times (R,R,\grave{R})$

$(3 \times 6 \times 6 \times 4) + (3 \times 6 \times 4 \times 4) + (1 \times 6 \times 6 \times 6) = 936$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة كم عدد النتائج المختلفة اللتي ليست جميعها من لون واحد

636	B	756	C	946	D	836

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

من الأسهل حساب المتمم لهذا الحدث وهو جميع الكرات من لون واحد

إن نتائج التجربة إما $1 \times (R,R,R)$ أو $1 \times (W,W,W)$ أو $1 \times (B,B,B)$

$(1 \times 1 \times 1 \times 1) + (1 \times 3 \times 3 \times 3) + (1 \times 6 \times 6 \times 6) = 244$

$n(A) = 1000 - 244 = 756$

$n(A) = n(\Omega) - n(\grave{A})$

1000 هو نتائج الكلية لسحب ثلاث كرات

على التتالي دون إعادة

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب

850	B	1200	C	1000	D	720

$n(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 = 720$

الكرة الأولى يوجد 10 خيارات والكرة الثانية يوجد 9 خيارات والكرة الثالثة يوجد 8 خيارات

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة اللتي تحوي كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه

486	B	348	C	642	D	648

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما $3 \times (R,R,\grave{R})$ أو $3 \times (W,W,\grave{W})$

$+(3 \times 3 \times 2 \times 7) + (3 \times 6 \times 5 \times 4) = 486$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي ثلاث كرات مخلفة الألوان

124	D	112	C	120	B	108

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة هي $6\times(R,W,B)$

$$(6\times6\times3\times1)=108$$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي كرة حمراء واحدة عل الأقل

836	D	936	C	736	B	696

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما $1\times(R,R,R)$ أو $3\times(R,\acute{R},\acute{R})$ أو $3\times(R,R,\acute{R})$

$$(3\times6\times5\times4)+(3\times6\times4\times3)+(1\times6\times5\times4)=696$$

مثال:_صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة التي ليست جميعها من لون واحد

836	D	594	C	756	B	636

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

من الأسهل حساب المتمم لهذا الحدث وهو جميع الكرات من لون واحد

إن نتائج التجربة إما $1\times(R,R,R)$ أو $1\times(W,W,W)$

$$(1\times3\times2\times1)+(1\times6\times5\times4)=126$$

$$n(A)=720-126=594$$

$$n(A)=n(\Omega)-n(\acute{A})$$

720 هو نتائج الكلية لسحب ثلاث كرات

السحب معا"

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات معا" كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب

120	D	1000	C	720	B	850

$$n(\Omega)=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات معا" كم عدد النتائج المختلفة اللتي تحوي كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه

68	D	64	C	34	B	81

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما $(R,R,\acute{R})$ أو $(W,W,\acute{W})$

$$\binom{3}{2}\binom{7}{1}+\binom{6}{2}\binom{4}{1}=3\times7+15\times4=81$$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي ثلاث كرات مخلفة الألوان

18	D	12	C	25	B	15

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة هي (R,W,B)

$$\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}=6\times3\times1=18$$

مثال:صندوق يحوي 10 كرات 6 كرات حمراء و3 كرات بيض و كرة سوداء نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي كرة حمراء واحدة عل الأقل

836	D	93	C	26	B	116

نرمز للكرات الحمراء ب R والكرة البيضاء ب W والكرة السوداء ب B

إن نتائج التجربة إما (R,R,R) أو $(R,\acute{R},\acute{R})$ أو $(R,R,\acute{R})$

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{3}=15\times4+6\times6+20=116$$

حل المسائل إختيار الأشخاص أو اللجان

في حال كان مهتم بالترتيب نستعمل المبدأ الأساسي بالعد	في حال لم يكن مهتم بترتيبهم نستعمل التوافيق

مثال:يتألف مجلس إدارة نادي من 7 أشخاص إن عدد طريق إختيار (رئيس،نائب رئيس،امين سر) هو

210	D	120	C	86	B	25

من الواضح من (رئيس،نائب رئيس،امين سر) أنه مهتم بالترتيب لذلك

$$7\times6\times5=210$$

مثال: أشترك 10متسابقين في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية،فضية،برونزية) إن عدد النتائج الممكنة لهذا السباق

210	D	120	C	86	B	720

من الواضح من (رئيس،نائب رئيس،امين سر) أنه مهتم بالترتيب لذلك

$$10\times9\times8=720$$

مثال: نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي 15 رجلا" و14 إمرأة كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها

237	D	23751	C	231	B	2751

نريد إختيار 4 أشخاص من 29 شخص $\binom{29}{4}=23751$

مثال: نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي 15 رجلا" و14 إمرأة كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين وامرأتين يمكن تشكيلها

237	D	23751	C	231	B	9555

نريد إختيار 2 إمرأة من 14 و 2 رجل من 15

$$\binom{14}{2}\binom{15}{2}=9555$$

و تتحول لضرب
أو تتحول لجمع

يلتقي 10 أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الأخرين مرة واحدة إن عدد المصافحات في الحفل

100	D	10	C	52	B	45

إن المصافحة تتم بين شخصين

$$\binom{10}{2}=45$$

يمكن دائما" حساب عددالمصافحات $\binom{n}{2}$

إن عدد أقطار مضلع محدب له 6رؤوس هو

12	D	10	C	5	B	9

$$\frac{6(6-3)}{2}=9$$

إن عدد اقطار مضلع محدب $\frac{n(n-3)}{2}$

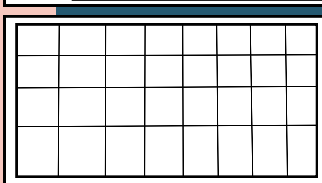
إذا أردنا توزيع 4 جوائز عل 3 أشخاص يتم ذلك بعدد طرق هو

12	D	10	C	36	B	3

$$\binom{4}{2}\times3!=36$$

توزيع $n+1$ على n شخص $\binom{n+1}{2}\times n!$

مثال:إن عدد المستطيلات في الشكل

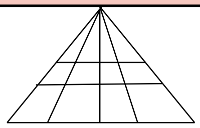


260	C	360	A
200	D	120	B

يمكن تشكيل مستطيل من خطين طوليين وخطين عرضيين

$$\binom{9}{2}\binom{5}{2}=\frac{9\times8}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=360$$

مثال:إن عدد المثلثات في الشكل



30	C	36	A
20	D	32	B

يمكن تشكيل مثلث من خطين طوليين وخط عرضي $\binom{5}{2}\binom{3}{1}=30$

0997047862
المدرس : راتب كسيبي

قوانين الإحتمالات

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$P(A\,/\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال A علما" أن B وقع

$$P(\grave{A})=1-P(A)$$
$$P(\grave{A}\cup\grave{B})=P(A\cap B)\acute{}=1-P(A\cap B)$$
$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=P(A\cup B)\acute{}=1-P(A\cup B)$$
$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\grave{A})$$

نقول عن الحدثان A و B أنهما مستقلان إحتماليا" إذا كان

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

مثال:إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فإن $P(A\,/\,B)$ يساوي

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{2}{5}$

$$P(A\,/\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

مثال:إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فإن $P(B\,/\,A)$ يساوي

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{6}$	D	$\frac{2}{5}$

$$P(B\,/\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{6}$$

مثال:إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فإن $P(\grave{A}\cap\grave{B})$ يساوي

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{3}{10}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{3}{20}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{17}{20}$$
$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=P(A\cup B)\acute{}=1-P(A\cup B)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$$

مثال:إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فإن $P(\grave{B}\,/\,\grave{A})$ يساوي

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{3}{5}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{3}{20}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{17}{20}$$
$$P(\grave{A}\cap\grave{B})=P(A\cup B)\acute{}=1-P(A\cup B)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$$
$$P(\grave{B}\,/\,\grave{A})=\frac{P(\grave{A}\cap\grave{B})}{P(\grave{B})}=\frac{\frac{3}{20}}{1-P(B)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{12}{20}$$

مثال: إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ وكان A و B مستقلان إحتماليا" فإن $P(B)$ هو

A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$\frac{2}{3}$

ليكونا مستقلان إحتماليا" يجب أن يكون $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ وذلك يتحقق عندما $P(B)=\frac{1}{2}$

ملاحظة: التقاطع والإجتماع عملية تبديلية حيث

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)$$
$$P(A\cup B)=P(B\cup A)$$

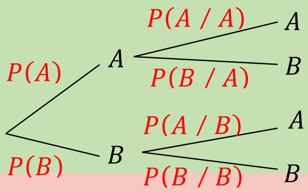
أما $P(A\,/\,B)$ ليس بالضرورة تساوي $P(B\,/\,A)$

الشجرة الإحتمالية مفيدة جدا" في حل المسائل

غالبا" أنواع مسائل اللتي يكون فيها إحتمالين متعاكسين مثل:

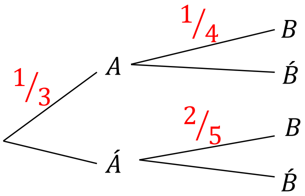
(معطوب،غير معطوب)و(يلعب، لايلعب)و..........

ومسائل الكرات اللتي لاتحوي نوع سحب أو لاتحوي صندوق معين أو........



عند الإنتقال من فرع إلى فرع نضرب عندما نأخذ أكثر من مسار نجمع $P(A\cap B)$ هو المسار كامل مجموع إحتمالات الأغصان دائما" 1

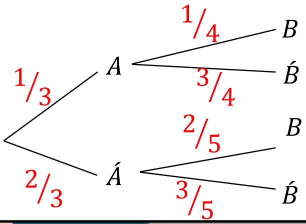
مثال:لدينا التمثيل الشجري



إن قيمة $P(\acute{A}\cap\acute{B})$

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{1}{5}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{2}{5}$

لنكمل الشجرة بالإحتمالات

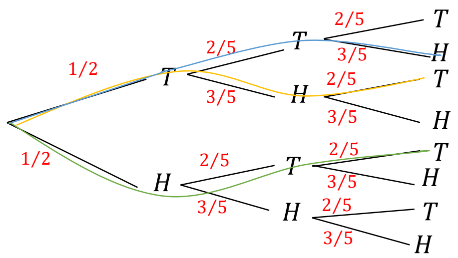


$$P(\acute{A}\cap\acute{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

مثال: نلقي ثلاث قطع نقود الأولى متوازنة أما القطعتان الثانية والثالثة غير متوازيتان بحيث يكون $P(H)=\frac{3}{5}$ و $P(T)=\frac{2}{5}$ نلقي النقود معا" إن إحتمال الحدث A: الحصول على H مرة واحدة

A	$\frac{8}{20}$	B	$\frac{3}{25}$	C	$\frac{8}{25}$	D	$\frac{3}{8}$

هنا نستعمل الشجرة لدينا ثلاث طرق



(T,T,H)
(T,H,T)
(H,T,T)

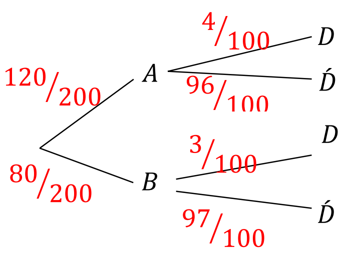
إذا" يكون لدينا

$$P(A)=P(T,T,H)+P(T,H,T)+P(H,T,T)$$
$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$$

مثال:يضم مصنع لتصنيع المصابيح ورشتين A و B ورد طلب قدره 200 مصباح صنعت الورشة A منها 120 وصنعت الورشة B الباقي هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة ونسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة نسحب عشوائيا" مصباح إن إحتمال أن يكون المصباح معطوب هو

A	$\frac{18}{500}$	B	$\frac{15}{500}$	C	$\frac{12}{500}$	D	$\frac{9}{500}$

نرمز ب D تعني معطوب

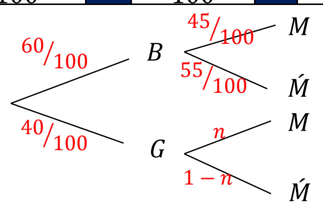


$$P(D)=\frac{120}{200}\times\frac{4}{100}+\frac{80}{200}\times\frac{3}{100}$$
$$P(D)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}$$
$$P(D)=\frac{18}{500}$$

مثال:في مدرستنا 30% من الطلاب يمارسون لعبة كرة المضرب ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائيا" من بين الطالبات في المدرسة اللاتي لايمارسن لعب كرة المضرب

A	B	C	D
$\frac{37}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{37}{100}$

نرمز ب B للذكور و G للإناث
نرمز ب M يمارس
و $\acute{M}$ لا يمارس
ونرسم شجرة الإحتمالات
لحساب الإحتمال يجب حساب n
نستفيد من أن $P(M)=\frac{30}{100}$



لدينا من شجرة الإحتمالات

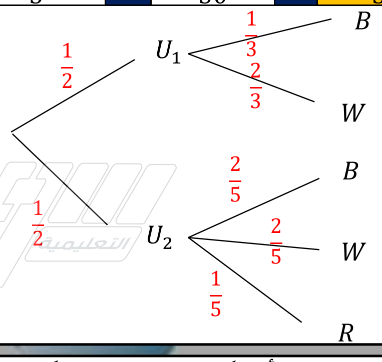
$$P(M)=\frac{30}{100}=\frac{60}{100}\times\frac{45}{100}+\frac{40}{100}\times n$$

$$30=\frac{6\times 45}{10}+40n \to 40n=30-27 \Rightarrow n=\frac{3}{40}$$

الإحتمال المطلوب $P(\acute{M}\,/\,G)=\frac{P(\acute{M}\cap G)}{P(G)}=\frac{\frac{40}{100}\times(1-n)}{\frac{40}{100}}=1-n=\frac{37}{40}$

مثال:صندوق U_1 يحوي كرة سوداء وكرتين بيضاء
و صندوق U_2 يحوي كرتين سوداء وكرتين بيضاء وكرة حمراء
نسحب عشوائيا" من أحد الصندوقين كرة
B: حدث سحب كرة سوداء إن $P(B)$ هو

A	B	C	D
$\frac{5}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{1}{3}$



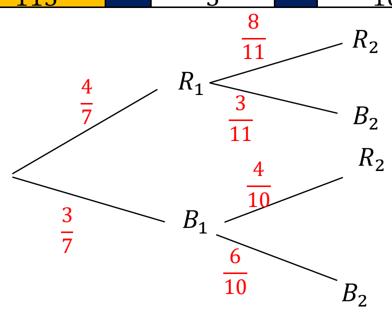
$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$$

$$P(B)=\frac{11}{30}$$

مثال:لدينا صندوق يحوي ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء نسحب كرة ونسجل لونها ثم نعيدها فنضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة مجددا" من الصندوق إذا علمت أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء فإن إحتمال أن تكون الأولى سوداء هو

A	B	C	D
$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{33}{113}$

نرسم شجرة الإحتمالات



$$P(B_1\,/\,R_2)=\frac{P(B_1\cap R_2)}{P(R_2)}$$

$$\frac{\frac{3}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{4}{7}\times\frac{8}{11}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{10}}=\frac{33}{113}$$

مثال:لدينا صندوق يحوي ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء نسحب كرة ونسجل لونها ثم نعيدها فنضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة مجددا" من الصندوق إن إحتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية هو

A	B	C	D
$\frac{17}{70}$	$\frac{34}{70}$	$\frac{452}{770}$	$\frac{33}{113}$

نفس شجرة السؤال السابق والمطلوب هو

$$P(R_2)=\frac{4}{7}\times\frac{8}{11}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{10}=\frac{452}{770}$$

ملاحظة:لحساب إحتمالات مسائل الكرات والسحب معا" لاتستعمل الشجرة

مثال:ـيحوي صندوق 5 كرات 3 كرات سوداء وكرتين حمراء نسحب معا" كرتين
A : الكرتين المسحوبتين من اللون نفسه إن احتمال الحدث A

A	B	C	D
$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{8}$

الحدث هو إما (B,B) أو (R,R) إذا $P(A)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1+3}{10}=\frac{4}{10}$

مثال:ـيحوي صندوق 5 كرات كرتين تحملان الرقم 1 وكرتين تحملان الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 3 نسحب معا" كرتين
A : مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3 إن احتمال الحدث A

A	B	C	D
$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{8}$

الحدث هو $(1,2)$ إذا $P(A)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{2\times 2}{10}=\frac{4}{10}$

مثال:يحوي صندوق 7 كرات ثلاث كرات منها حمراء وأربع كرات سوداء نسحب ثلاث كرات معا"
A: الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل إن احتمال الحدث A

A	B	C	D
$\frac{3}{20}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{8}$

الحدث هو إما (R,B,B) أو (R,R,B) أو (R,R,R)
إذا $P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{31}{35}$

مثال:يحوي صندوق 7 كرات ثلاث كرات منها حمراء وأربع كرات سوداء نسحب ثلاث كرات معا"
A: الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل
B: الحصول على كرتين سوداء على الأقل إن $P(A\,/\,B)$ هو

A	B	C	D
$\frac{3}{20}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{18}{22}$

$$P(A\,/\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

أولا" نحسب $P(B)$ وهو إما (R,B,B) أو (B,B,B) ويكون

$$P(B)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{22}{35}$$

ثانيا" لنحسب $P(A\cap B)$ وهو (R,B,B) فقط ويكون

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}$$

ثم نحسب الإحتمال المطلوب

$$P(A\,/\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}$$

تتألف عائلة من 4 أطفال وليكن لدينا الحدث
C : الطفل الثالث أنثى إن احتمال C هو

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$

الحدث هو $\left(\frac{G}{B},\frac{G}{B},G,\frac{G}{B}\right)$ هنا نقصد أن الولد اما ذكر أو أنثى وإحتماله هو

$$P(C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

تتألف عائلة من 4 أطفال وليكن لدينا الحدث
B : يوجد طفلان ذكران وطفلتان إن احتمال C هو

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$

الحدث هو (B,B,G,G) وتباديل هذه المجموعة هي $6=\frac{4!}{2!\times 2!}$ ويكون إحتماله

$$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 6=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

المتحول العشوائي X :
في البداية نوجد قيمه ثم نضع القيم في الجدول الإحتمالي
التوقع الرياضي : $E(X)=\sum x_i p(x_i)$
التباين: $V(X)=\sum (x_i)^2 p(x_i)-\left(E(X)\right)^2$
الإنحراف المعياري : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

مثال:نلقي ثلاث قطع نقود متوازنة ونسجل الوجه الظاهر
X: متحول عشوائي يدل على ربح ليرة كلما ظهر الوجه H
وخسارة ليرتين كلما ظهر الوجه T إن الإنحراف المعياري هو

A	B	C	D
$\frac{2}{4}$	$\frac{12}{8}$	**$\frac{3\sqrt{3}}{2}$**	$\frac{3}{8}$

(H,H,H) نربح ثلاث ليرات $P(3)=\frac{1}{8}$
$(T,H,H)\times 3$ لا نربح $P(0)=\frac{3}{8}$
$(T,T,H)\times 3$ نخسر ثلاث ليرات $P(-3)=\frac{3}{8}$
(T,T,T) نخسر ست ليرات $P(-6)=\frac{1}{8}$

X	-6	-3	0	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X)=\frac{-6}{8}-\frac{9}{8}+0+\frac{3}{8}=\frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$$
$$V(X)=\frac{36}{8}+\frac{27}{8}+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

مثال:نرمي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات حيث $P(H)=\frac{1}{4}$
X:متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور H إن $P(X=1)$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{32}$	**$\frac{27}{64}$**	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{8}$

$P(H)=\frac{1}{4}$
$P(T)=\frac{3}{4}$

(H,H,H) يظهر ثلاث مرات $P(3)=\frac{1}{8}$
$(T,H,H)\times 3$ يظهر مرتين $P(2)=\frac{3}{8}$
$(T,T,H)\times 3$ يظهر مرة واحدة $P(1)=\frac{3}{8}$
(T,T,T) لايظهر $P(0)=\frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

مثال:نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة
X:متحول عشوائي يدل على ربح درجة واحدة إذا ظهر الرقم 1
وربح 6 درجات إذا ظهر الرقم 6 وخسارة درجتين في بقية الحالات
إن التوقع الرياضي لهذه لتجربة هو

A	B	C	D
$-\frac{1}{6}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{8}$

1 نربح درجة واحدة
2 نخسر درجتين
3 نخسر درجتين
4 نخسر درجتين
5 نخسر درجتين
6 نربح ست درجات

X	-2	1	6
$P(X)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\frac{-8}{6}+\frac{1}{6}+\frac{6}{6}=-\frac{1}{6}$$

مثال:ليكن لدينا القانون الإحتمالي لمتحول عشوائي
إن قيمة التباين هي

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

A	B	C	D
$\frac{124}{458}$	$\frac{124}{548}$	$\frac{139}{348}$	**$\frac{129}{448}$**

نجد $E(X)=\frac{17}{8}$ و $V(X)=\frac{129}{448}$

مثال: نلقي حجر نرد متوازن مرتين X:متحول عشوائي يدل على مجموع الرقمين الظاهرين إن $P(X=7)$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)2	(1,2)3	(1,3)4	(1,4)5	(1,5)6	(1,6)7
2	(2,1)3	(2,2)4	(2,3)5	(2,4)6	(2,5)7	(2,6)8
3	(3,1)4	(3,2)5	(3,3)6	(3,4)7	(3,5)8	(3,6)9
4	(4,1)5	(4,2)6	(4,3)7	(4,4)8	(4,5)9	(4,6)10
5	(5,1)6	(5,2)7	(5,3)8	(5,4)9	(5,5)10	(5,6)11
6	(6,1)7	(6,2)8	(6,3)9	(6,4)10	(6,5)11	(6,6)12

نلاحظ من الجدول أن $P(X=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

مثال: صندوق يحوي 6 بطاقات مرقمة 1,2,3,4,5,6 نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة X: متحول عشوائي يدل على أصغر رقمي البطاقتين $P(X=4)$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{6}$	**$\frac{2}{15}$**	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

	1	2	3	4	5	6
1		(1,2)1	(1,3)1	(1,4)1	(1,5)1	(1,6)1
2	(2,1)1		(2,3)2	(2,4)2	(2,5)2	(2,6)2
3	(3,1)1	(3,2)2		(3,4)3	(3,5)3	(3,6)3
4	(4,1)1	(4,2)2	(4,3)3		(4,5)4	(4,6)4
5	(5,1)1	(5,2)2	(5,3)3	(5,4)4		(5,6)5
6	(6,1)1	(6,2)2	(6,3)3	(6,4)4	(6,5)5	

نلاحظ أن $P(X=4)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

مثال: يحوي صندوق خمس كرات حمراء وخمس كرات بيضاء نسحب معا" ثلاث كرات من الصندوق X: متحول عشوائي يأخذ القيمة 6 إذا كانت نتيجة السحب 3 بيضاء ويأخذ النتيجة 2 إذا كانت نتيجة السحب 2 بيضاء وواحدة حمراء ويأخذ 0 في بقية الحالات إن التوقع الرياضي لهذه التجربة هو

A	B	C	D
$\frac{5}{3}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{3}{12}$	**$\frac{4}{3}$**

(R,R,R) يأخذ القيمة 0
(W,R,R) يأخذ القيمة 0
(W,W,R) يأخذ القيمة 2
(W,W,W) يأخذ القيمة 6

X	0	2	6
$P(X)$	$\frac{\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}$	$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$

بعد الحساب

X	0	2	6
$P(X)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

ويكون $E(X)=0+\frac{10}{12}+\frac{6}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

مثال: يحوي صندوق ست كرات 4 حمراء و2 بيضاء نسحب ثلاث كرات على التالي دون إعادة من الصندوق X: متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة إن $P(X=2)$ هو

A	B	C	D
$\frac{1}{32}$	**$\frac{72}{120}$**	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{8}$

(R,R,R) ثلاث مرات
$(W,R,R)\times 3$ مرتين
$(W,W,R)\times 3$ مرة واحدة

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{2\times4\times3\times3}{6\times5\times4}$	$\frac{2\times4\times3\times3}{6\times5\times4}$	$\frac{4\times3\times2\times3}{6\times5\times4}$

$$P(X=2)=\frac{72}{120}$$

مثال: يحوي صندوق خمس كرات كرتان تحمل الرقم 1 كرتان تحملان الرقم 2 كرة تحمل الرقم 3 نسحب كرتين من الصندوق على التالي مع إعادة من الصندوق Xمتحول عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين إن $P(X=4)$

$\frac{3}{10}$	D	$\frac{1}{25}$	C	$\frac{8}{25}$	B	$\frac{8}{20}$	A

$(1,1)$ مجموعهم 2

$(2,2)$ مجموعهم 4

$(1,2)\times 2$ مجموعهم 3

$(1,3)\times 2$ مجموعهم 4

$(2,3)\times 2$ مجموعهم 5

$(3,3)$ مجموعهم 6

X	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{2\times 2}{5\times 5}$	$\frac{2\times 2\times 2}{5\times 5}$	$\frac{2\times 2+2\times 1\times 2}{5\times 5}$	$\frac{2\times 1\times 2}{5\times 5}$	$\frac{1\times 1}{5\times 5}$

بعد الحساب

X	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

نلاحظ أن $P(X=4)=\frac{8}{25}$

مثال: يحوي صندوق 8 كرات 4 زرقاء و 3 خضراء و1 صفراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معا" X: متحول عشوائي يدل على عدد الألوان بين الكرات المسحوبة إن $P(X=2)$ هو

$\frac{39}{56}$	D	$\frac{5}{56}$	C	$\frac{3}{16}$	B	$\frac{5}{8}$	A

(B,B,B) لون واحد (G,G,G) لون واحد

(G,B,B) لونين (W,G,G) لونين

(W,B,B) لونين (B,W,G) ثلاث الوان

(G,G,B) لونين

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}$

بعد الحساب

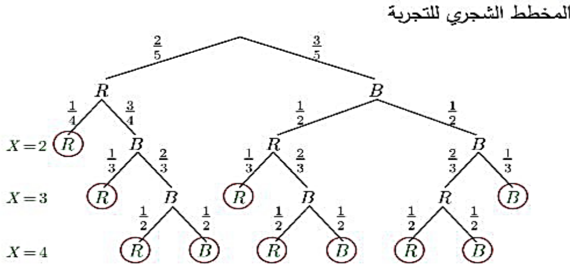
X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

نجد أن $P(X=2)=\frac{39}{56}$

مثال: صندوق يحوي 5 كرات 3 زرقاء و 2 حمراء نكرر عملية سحب من الصندوق دون إعادة كرة واحدة حتى لايتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون نفسه X: متحول عشوائي يدل على عدد مرات اللسحب اللازمة إن $P(X=4)$ هو

$\frac{5}{12}$	D	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{2}{5}$	B	$\frac{3}{5}$	A

لننشئ المخطط الشجري للتجربة



نرى أنّ $X(\Omega)=\{2,3,4\}$. وكذلك فإنّ

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=1-\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=3)=\frac{3}{5}$$

إذن قانون X .

x	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

المتحولين العشوائيين:ندرس كل متحول لوحده ثم نضعهم بنفس الجدول

مثال:إذا علمت أن X و Y مستقلان إحتماليا" فإن قيمة الفراغ

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				$\frac{4}{10}$
1			$\frac{4}{100}$	
2				$\frac{4}{10}$
قانون Y	$\frac{3}{10}$		....	

$\frac{3}{10}$	D	$\frac{1}{25}$	C	$\frac{2}{10}$	B	$\frac{8}{20}$	A

برنولي :يستعمل عند إلقاء عدد كبير من المرات $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

n:هو عدد تكرارات المسألة يكون بالفرض k:عدد التكرارات في الطلب

p:هو الإحتمال المطلوب لمرة واحدة q: هو $q=1-p$

ويكون التوقع هو $E(x)=n.p$ والتباين هو $V(x)=n.p.q$

مثال:نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن معا" إن احتمال الحصول على H ثلاث مرات فقط هو

$\frac{3}{10}$	D	$\frac{1}{25}$	C	$\frac{5}{16}$	B	$\frac{8}{20}$	A

هذه تجربة برنولي حيث $n=5$ و $k=3$ و $p=\frac{1}{2}$ و $q=\frac{1}{2}$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

مثال:_يتواجه لاعبان A و B في مباراة الملاكمة مؤلفة من ثلاث جولات يكسب A الجولة الواحدة باحتمال يساوي $\frac{6}{10}$ إن احتمال أن يربح B المبارة هو

$\frac{5}{12}$	D	$\frac{35}{125}$	C	$\frac{4}{125}$	B	$\frac{44}{125}$	A

$n=3$ و $k=2$ أو $k=3$ لانه يربح عندما يفوز جولتين أو ثلاثة $p=\frac{4}{10}$ ، $q=\frac{6}{10}$

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$

$$P(X\geq 2)=\binom{3}{2}\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{10}\right)^0=\frac{44}{125}$$

مثال:نكرر 10 مرات إلقاء قطعتي نقود متوازنتين إن احتمال الحصول على وجهين H مرة واحدة على الأقل هو

$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	D	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	C	$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	B	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	A

$n=10$ و $p=\frac{1}{4}$ و $q=\frac{3}{4}$ لان نلقي القطعتين مرة واحدة (H,H) هو ربع

$k=1,2,3,\ldots$ لنحسب الحدث المعاكس وهو $k=0$

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

مثال:X:متحول عشوائي يدل على عدد نجاحات تجربة برنولي إن قيمة الفراغ

k	0	1	2	3	4
$P(x=k)$			....		$\frac{16}{81}$

$\frac{5}{12}$	D	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{2}{5}$	B	$\frac{24}{81}$	A

لدينا $n=4$ و $P(X=4)=\binom{4}{4}p^4q^0=p^4=\frac{16}{81}$

بعد أن نجذر مرتين نجد $p=\frac{2}{3}$ و $q=\frac{1}{3}$ والفراغ في $k=2$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

هنا يكون أنتهى هذا العمل نتمنى التوفيق للجميع وادعو لنا بالخير

مراجعة الأشعة

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\int \overrightarrow{AB}$

$i = \sqrt{-1}$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

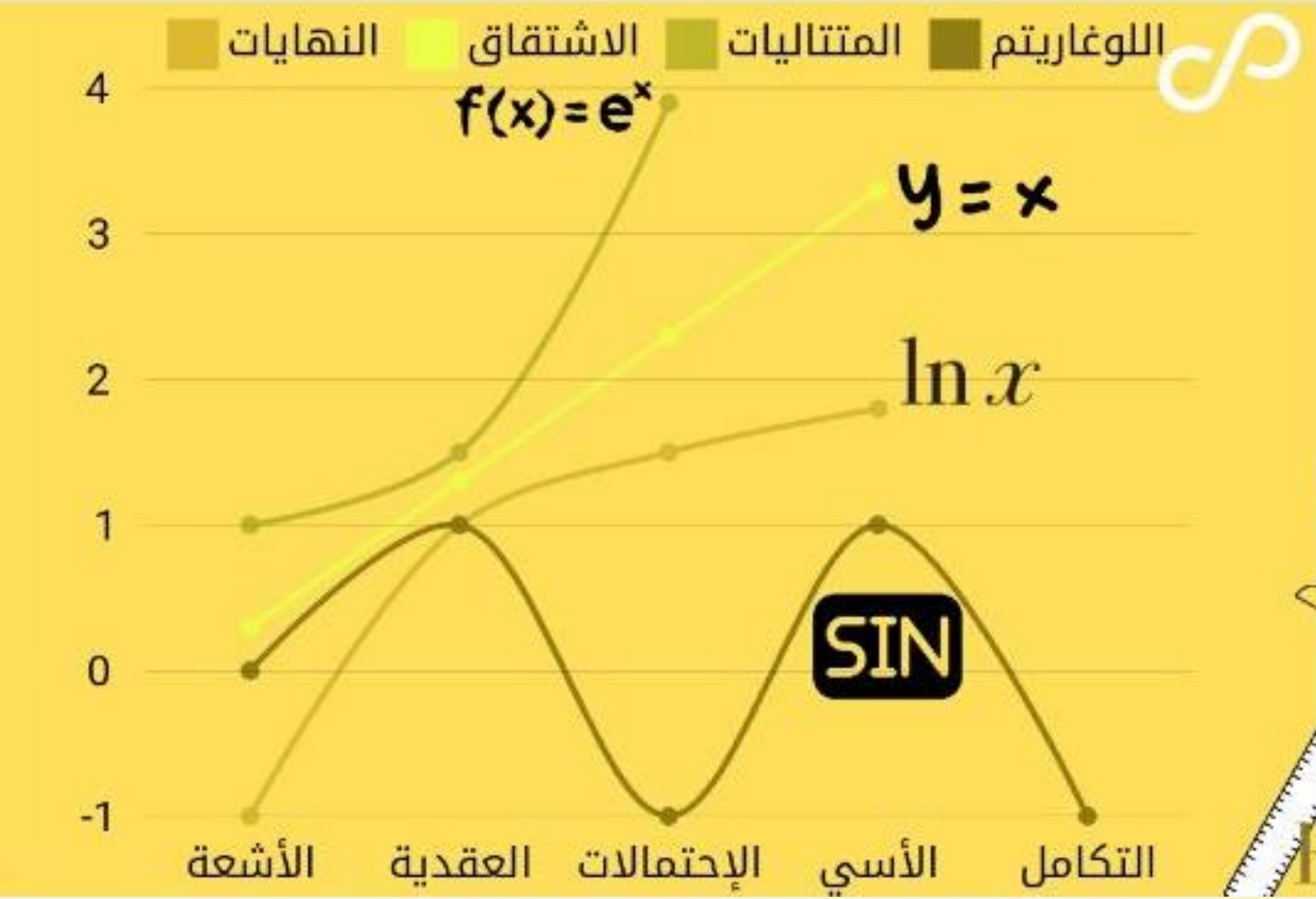
0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$ $\qquad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\qquad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\qquad$ $10a + 3b - 2c$



${}^nP_r$

$P(A)$

بسم الله الرحمن الرحيم موافقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة الأشعة مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قراءتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح "الطباعة ملون حصرا"

معلم المتجانس في الفراغ: هو معلم يتألف من ثلاث محاور متعامدة ومتساوية ومتلاقية في النقطة o وهي مبدا الأحداثيات

نرمز للمعلم في الفراغ بالرمز $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ واياكانت النقطة $M(x,y,z)$

فإن العبارة التحليلة للشعاع $\overrightarrow{OM}$: تكتب بالشكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

مركبات الشعاع $\vec{u}$: بحيث ان $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ هي

$$\vec{u}=(a,b,c)$$

مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$: بحيث أن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ هي

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$

أو يمكن أن يكتب بالشكل $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}$

مثال: لدينا $A(3,5,-2)$ و $B(2,-1,3)$ مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي

A	$\overrightarrow{AB}=(1,-6,1)$	B	$\overrightarrow{AB}=(-1,4,1)$
C	**$\overrightarrow{AB}=(-1,-6,5)$**	D	$\overrightarrow{AB}=(-1,4,5)$

لأن $\overrightarrow{AB}=(2-3,-1-5,3-(-2))$

إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة: إذا كانت I منتصف القطعة $[AB]$ فإن مركبات I هي $I=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_B+y_A}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

مثال: لدينا $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ احداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ هي

A	**$I=\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$**	B	$I=\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$
C	$I=\left(\frac{1}{2},3,\frac{1}{2}\right)$	D	$I=\left(\frac{5}{2},2,\frac{3}{2}\right)$

لأن $I=\left(\frac{2+3}{2},\frac{5-1}{2},\frac{3+2}{2}\right)$

إحداثيات مركز ثقل المثلث : إذا كان لدينا G مركز ثقل المثلث ABC فإن مركبات G هي $G=\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

مثال: لدينا $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC هي

A	$G=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	B	$G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$
C	$G=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$	D	**$G=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$**

لأن $G=\left(\frac{3+2+0}{3},\frac{5-1-2}{3},\frac{2+3+2}{3}\right)$

إجاد احداثيات نقطة M نفرض إن النقطة هي $M(x,y,z)$ وبحث عنها

مثال: لدينا $A(2,3,-2)$ و $B(5,-1,0)$ هل يمكن إيجاد M اللتي تحقق $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$

A	$M=(-2,12,-6)$	B	$M=(-2,11,-5)$
C	**$M=(-4,11,-6)$**	D	لا يمكن تعيين M

نفرض $M(x,y,z)$إذا $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix}x_A-x\\y_A-y\\z_A-z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}5-2\\-1-3\\0-(-2)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\4\end{bmatrix}$$

$x=-4 \leftarrow 2-x=6$ ، $y=11 \leftarrow 3-y=-8$

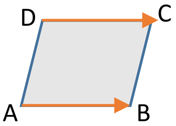
$z=-6 \leftarrow -2-z=4$

خاصية متوازي الأضلاع : ليكن لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع عندئذ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

مثال: لدينا $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ احداثيات D ليكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي

A	$D=(3,4,1)$	B	$D=(2,4,1)$
C	$D=(1,4,0)$	D	**$D=(1,4,1)$**

لنفرض ان $D=(x,y,z)$ ليكون $ABCD$ متوازي أضلاع إذا

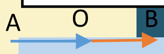


$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_C-x\\y_C-y\\z_C-z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-3\\-1-5\\3-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-x\\-2-y\\2-z\end{bmatrix}$$

يكون $x=1$ و $y=4$ و $z=1$



ملاحظة: إذا كانت A نظيرة B بالنسبة ل O فإن $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$

ملاحظة:لتكن $A(x,y,z)$احداثيات $\acute{A}$ نظيرة Aبالنسبة للمبدأ $A(-x,-y,-z)$

مثال: لدينا $C(1,2,-2)$ و$I(2,3,-2)$ احداثيات D نظيرة I بالنسبة لC هي

A	$D=(2,1,-2)$	B	**$D=(0,1,-2)$**
C	$D=(0,1,2)$	D	$D=(0,-1,-2)$

لنفرض ان $D=(x,y,z)$ لتكون D نظيرة I بالنسبة لC يجب أن يكون

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CI}$$

$$\begin{bmatrix}x_C-x\\y_C-y\\z_C-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_I-x_C\\y_I-y_C\\z_I-z_C\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-x\\2-y\\-2-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1\\3-2\\-2-(-2)\end{bmatrix}$$

يكون $x=0$ و $y=1$ و $z=-2$

طويلة الشعاع $\vec{u}$: بحيث ان $\vec{u}=(a,b,c)$ هي

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: بحيث أن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ هي

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مثال: لدينا $\vec{u}(2,-2,3)$ ان نظيم الشعاع $\vec{u}$ هو

A	$\|\vec{u}\|=4$	B	**$\|\vec{u}\|=\sqrt{17}$**
C	$\|\vec{u}\|=3$	D	$\|\vec{u}\|=1$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$$

مثال: لدينا $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ان نظيم الشعاع $\vec{u}$ هو

A	$\|\vec{u}\|=4$	B	$\|\vec{u}\|=5$
C	**$\|\vec{u}\|=\sqrt{13}$**	D	$\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{4+9+0}=\sqrt{13}$$

مثال: لدينا $A(2,3,2)$ و $B(-2,-1,2)$ و طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي

A	$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{12}$	B	$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{15}$
C	$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{33}$	D	**$\|\overrightarrow{AB}\|=4\sqrt{2}$**

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{16+16}$$

مثال: لدينا $A(1,3,-2)$ و $B(2,-1,0)$ و $C(6,-3,-1)$ المثلث ABC إن

A	**متساوي الساقين**	B	قائم
C	متساوي الأضلاع	D	قائم ومتساوي الساقين

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-3)^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{21}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(6-1)^2+(-3-3)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{62}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(6-2)^2+(-3-(-1))^2+(-1-0)^2}=\sqrt{21}$$

نلاحظ $AB=BC$ اذا متساوي الساقين ولكنه غير قائم حسب عكس فيثاغورث

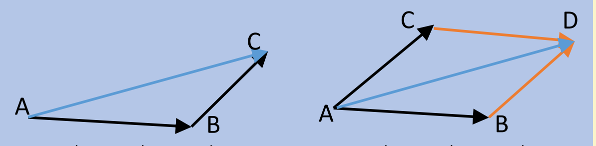
للسّاعين في دربِ الكِفاح أنبت الله في قلوبكّم رضا

العمليات على الأشعة

جمع شعاعين

الحالة الأولى: إذا كان للشعاعين نفس المبدأ نكمل إلى متوازي أضلاع

الحالة الثانية: إذا كان الشعاعين متعاقبين حسب مبرهنة شال

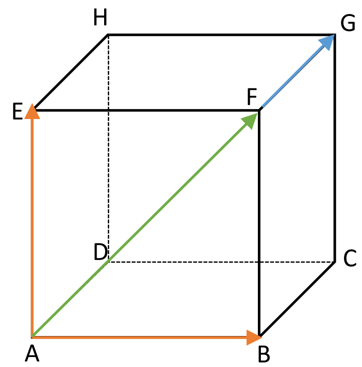


$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

مثال: لدينا $ABCDEFGH$ مكعب ماهو موقع N اللتي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}$$

A	B	C	D
$N=A$	$N=B$	$N=G$	$N=F$



لدينا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$

لأنهم شعاعين لهم نفس الرأس

اصبح لدينا

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}$

وهو الشعاع $\overrightarrow{AG}$

حسب قاعدة شال

إذا $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AG}$ ومنه نجد ان

$N=G$

ملاحظة: الطرح هو معكوس الجمع مثال $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

الارتباط الخطي لشعاعين :

القانون الأول : يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطا" إذا وجد عدد مثل k ويحقق

$\vec{u}=k\vec{v}$

القانون الثاني: يكون الشعاعين $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(\acute{x},\acute{y},\acute{z})$مرتبطان خطيا" إذا كانت المركبات متناسة أي $\frac{x}{\acute{x}}=\frac{y}{\acute{y}}=\frac{z}{\acute{z}}$

ملاحظة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين إذا كانا مرتبطين خطيا"

ملاحظة: يكون النقاط A وB وC على استقامة واحدة إذا كان

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا"

مثال: عين a ليكون $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ متوازيين

A	B	C	D
$a=1$	$a=\frac{5}{2}$	$a=-4$	لا يمكن تعيين a

ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين أو مرتبطان خطيا" يجب أن تكون المركبات متناسبة

$$\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}=\frac{a}{5}$$

بحساب النسبتين $\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}$ نجد أن $a=-4$

وبحساب النسبتين $\frac{1}{2}=\frac{a}{5}$ نجد أن $a=\frac{5}{2}$ إذا يوجد ل a أكثر من قيمة

مثال: $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $C(a,b,2)$ ما قيمة a و b ليكون النقاط الثلاثة A و B و C على أستقامة واحدة

A	B	C	D
$a=4$ $b=1$	$a=-4$ $b=2$	$a=4$ $b=-2$	$a=-4$ $b=-2$

لدينا $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ و $\overrightarrow{BC}(a-3,b-2,1)$ يجب أن تكون المركبات متناسبة

$$\frac{a-3}{1}=\frac{b-2}{-1}=\frac{1}{1}$$

بحساب النسبتين $\frac{a-3}{1}=\frac{1}{1}$ نجد أن $a-3=1$ ومنه $a=4$

وبحساب النسبتين $\frac{b-2}{-1}=\frac{1}{1}$ نجد أن $b-2=-1$ ومنه $b=1$

ضرب الأشعة :(الجداء الداخلي)

القانون الأول: $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

القانون الثاني: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

القانون الثالث: $\vec{u}.\vec{v}=x.\acute{x}+y.\acute{y}+z.\acute{z}$

ملاحظة مهمة : يكون الشعاعين متعامدين إذا كان جداهما يساوي الصفر

ملاحظة: يمكن استعمال مسقط الشعاع بدل الشعاع في الضرب

مثال: أطوال الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ على الترتيب هي 6 و8 و 10

إذا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

A	B	C	D
متعامدين	متوازيين	متقاطعان	متنافيين

لدينا $\|\vec{u}\|=6$ و $\|\vec{v}\|=8$ و $\|\vec{u}+\vec{v}\|=10$ يدلنا لاستعمال العلاقة

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(10^2-8^2-6^2)=\frac{1}{2}(100-64-36)=0$$

مثال: لدينا $S-ABCD$ هرم قاعدته مربع ورأسه S وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته a إن $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ تساوي

A	B	C	D
$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a^2}{3}$	a^2

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SB}\|.\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB})$$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

مثال: لدينا $\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{-2}{5},3,\alpha\right)$

قيمة α ليكون ال الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين هي

A	B	C	D
$\frac{-23}{50}$	$\frac{-20}{50}$	$\frac{-22}{50}$	$\frac{23}{50}$

لدينا الشعاعين متعامدين إذا $\vec{u}.\vec{v}=0$

$$\vec{u}.\vec{v}=2.\frac{-2}{5}+-\frac{1}{2}.3+5.\alpha=0$$

$$5\alpha=\frac{8}{10}+\frac{15}{10}\leftarrow 5\alpha=\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\leftarrow \frac{-4}{5}-\frac{3}{2}+5\alpha=0$$

$$\alpha=\frac{23}{50}\leftarrow 5\alpha=\frac{23}{10}$$

ملاحظة: في حال طلب $\cos\theta$ زواية بين شعاعين إن $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

مثال:إذا كان لدينا ABC ولدينا $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $C(2,5,2)$

فإن $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$هي

A	B	C	D
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

نحسب $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,2,2)$ولدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0-2+2=0$

$AB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}$ فان

$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC.AB}=\frac{0}{\sqrt{3}.\sqrt{8}}=0$ ملاحظة: نجد انه مثلث قائم في A

ملاحظة:بعد النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $ax+by+cz+d=0$

يحسب بالقانون : $dist(A,p)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال:ماهو بعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $p: 2x-y+3z-5=0$

A	B	C	D
$\frac{14}{\sqrt{14}}$	$\frac{15}{\sqrt{14}}$	$\frac{20}{\sqrt{12}}$	$\frac{20}{\sqrt{14}}$

$$dist(A,p)=\frac{|2\times5-1\times-3+3\times4-5|}{\sqrt{2^2+(-1^2)+3^2}}=\frac{|20|}{\sqrt{14}}=\frac{20}{\sqrt{14}}$$

ندعوك ياربِ أن نمضي في حياتنا مُطمئنين
في دروبٍ نرضاها إلى أهدافٍ نريدها برفقة قلوبٍ نحبها
♥ياربّ اجعلنا من الذين نالوا ما تمنوا
وقدّر لنا الرزق والتوفيق والخير من كل شيء
وقرّ أعيننا واجبر قلوبنا بما تحبه وترضاه لنا..♥

معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

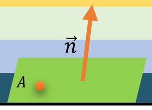
بعد النشر تكون : $ax+by+cz+d=0$

لتعيين معادلة المستوي نحتاج

نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

حالات معادلة المستوي:

١) معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة وناظمه معلوم



مثال: معادلة المستوي المار بالنقطة $A(\sqrt{3},2,0)$ و يقبل $\vec{n}(2,-3,-1)$ ناظمة له هو

A	$2x-3y-z=0$	B	$2x-3y-z+5-2\sqrt{3}=0$
C	$2x-3y-z+6-2\sqrt{3}=0$	D	$2x-3y-z+6+3\sqrt{3}=0$

معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

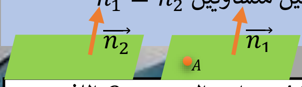
$2(x-\sqrt{3})-3(y-2)-1(z-0)=0$

ننشر $2x-2\sqrt{3}-3y+6-z=0$

$2x-3y-z+6-2\sqrt{3}=0$

٢) معادلة مستوي يمر بنقطة ويوازي مستوي معلوم

بما أن المستويين متوازيين إذا الناظمين متساويين $\vec{n_1}=\vec{n_2}$



مثال: معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(1,0,1)$ ويوازي المستوي Q اللذي معادلته $2x-y+3z=4$

A	$2x-y+3z-7=0$	B	$2x-y+3z-5=0$
C	$4x-y+3z-5=0$	D	$2x+y+3z-5=0$

بما أن المستوي Q يوازي المستوي P إذاً $\vec{n_1}=\vec{n_2}$

إذاً $\vec{n}(2,-1+3)$ والنقطة هي $A(1,0,1)$ فمعادلة المستوي هي

معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)-1(y-0)+3(z-1)=0$

$2x-y+3z-5=0$

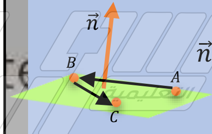
٣) معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط A و B و C

نشكل الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ونفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$

ثم نقول إن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{BC}.\vec{n}=0$

نفرض إن $c=1$ يمكن تغيير هذا الفرض

نحصل على معادلة الناظم والنقطة نختارها من احد النقاط الثلاثة



مثال: معادلة المستوي المار من النقاط $A(0,1,0)$ و $B(-1,1,0)$ و $C(-1,-2,-3)$ هي

A	$p:-2y+z+1=0$	B	$p:-y+z+1=0$
C	$p:-y+3z+1=0$	D	$p:-y+z+5=0$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,0,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,-3,-3)$ ونفرض ان $\vec{n}(a,b,c)$

إن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-a=0$ ← $a=0$

و $\overrightarrow{BC}.\vec{n}=-a-3b-3c=0$ ← $-3b-3c=0$

نفرض أن $c=1$ ← $-3b-3=0$ ← $b=-1$

إذاً $\vec{n}(0,-1,1)$ نختار النقطة $A(0,1,0)$ للسهولة

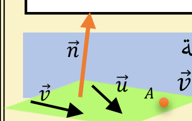
معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-(y-1)+(z)=0$

$p:-y+z+1=0$

٤) معادلة مستوي علم شعاعا توجيه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ويمر بنقطة

ونفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ إن $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{v}.\vec{n}=0$



مثال: معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ ويمر بالنقطة $A(2,5,3)$ هي

A	$3x+5y+4z-17=0$	B	$x+5y+4z-19=0$
C	$3x+y+4z-19=0$	D	$3x+5y+4z-19=0$

$\vec{u}.\vec{n}=a+b-2c=0$ $\quad$ $\vec{v}.\vec{n}=3a-b-c=0=0$

نفرض إن $c=1$ ويكون لدينا $3a-b-c=0$

$$\begin{array}{l} 3a-b-1=0 \\ a+b-2=0 \quad + \\ \hline 4a-3=0 \end{array}$$

إذاً $a=\frac{3}{4}$ بالتعويض في إحد المعادلات نجد $b=\frac{5}{4}$

إذاً $\vec{n}(\frac{3}{4},\frac{5}{4},1)$ والنقطة $A(2,5,3)$ نعوض في معادلة المستوي نجد $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y+z-\frac{19}{4}=0$ نضرب المعادلة ب 4

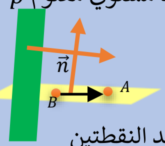
٥) معادلة مستوي Q يمر من النقطتين A و B ويعامد مستوي معلوم p

نشكل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$

ثم نقول إن $\overrightarrow{AB}.\vec{n_Q}=0$ و $\vec{n_p}.\vec{n_Q}=0$

نفرض إن $c=1$ يمكن تغيير هذا الفرض

نحصل على معادلة الناظم والنقطة نختارها من احد النقطتين



مثال: لدينا النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي p اللذي معادلته $x-y+3z-4=0$ فإن معادلة المستوي Q اللذي يمر من النقطتين A و B ويعامد المستوي p هي

A	$-5x+2y+2z+2=0$	B	$-5x+y+2z+2=0$
C	$-5x+y+z+2=0$	D	$-5x+y+2z+1=0$

لدينا $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ و $\vec{n_p}(1,-1,3)$

ونفرض ان $\vec{n_Q}(a,b,c)$

إن $\overrightarrow{AB}.\vec{n_Q}=a+b+2c=0$

و $\vec{n_p}.\vec{n_Q}=a-b+3c=0$

بعد حل المعادلتين وجدنا أن $\vec{n_Q}(\frac{-5}{2},\frac{1}{2},1)$ ونأخذ أحد النقطتين

أخذ النقطة $B(2,0,4)$

نفرض أن $c=1$

$$\begin{array}{l} a+b+2=0 \\ a-b+3=0 \quad + \\ \hline 2a+5=0 \end{array}$$

$a=\frac{-5}{2}$ ← نعوض بأحد المعادلتين

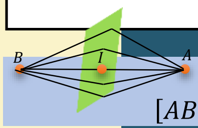
$\frac{-5}{2}+b+2=0$ ← $b=\frac{1}{2}$

معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$\frac{-5}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(y-0)+1(z-4)=0$$

$\frac{-5}{2}x+\frac{1}{2}y+z+1=0$ نضرب هذه المعادلة ب2 نجد

$-5x+y+2z+2=0$



٦) معادلة المستوي المحوري لنقطتين A و B

الناظم هو $\overrightarrow{AB}$ والنقطة هي I منتصف القطعة $[AB]$

مثال: $A(2,2,2)$ و $B(3,-3,-1)$ معادلة المستوي المحوري لنقطتين A و B

A	$2x-10y-6z-13=0$	B	$x-10y-6z-13=0$
C	$2x-7y-6z-13=0$	D	$2x-10y-z-13=0$

لدينا $\overrightarrow{AB}(1,-5,-3)$ و $I(\frac{5}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$

معادلة المستوي: $1(x-\frac{5}{2})-5(y+\frac{1}{2})-3(z-\frac{1}{2})=0$

$$x-5y-3z-\frac{13}{2}=0$$

بضرب المعادلة ب2 نجد $2x-10y-6z-13=0$

يمكن الحل بطريقة ثانية حيث يكون $M(x,y,z)$ ونحل $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$

٧) معادلة مستوي يمر بنقطة ويعامد مستويين

نفرض أن $\vec{n}(a,b,c)$ ثم نقول إن $\vec{n}.\vec{n_Q}=0$ و $\vec{n}.\vec{n_p}=0$

مثال: ماهي معادلة المستوي R المار بالنقطة $A(2,5,-2)$ ويعامد كل من المستويين $P:x-2y+3z-5=0$ و $Q:x+y+z+1=0$

A	$2x+2y+3z+6=0$	B	$-5x+2y+3z+6=0$
C	$-5x-3y+3z+6=0$	D	$-5x+2y+3z+7=0$

نفرض إن $\vec{n}(a,b,c)$ لدينا $\vec{n_p}(1,-2,3)$ و لدينا $\vec{n_Q}(1,1,1)$

$\vec{n}.\vec{n_p}=a-2b+3c=0$

$\vec{n}.\vec{n_Q}=a+b+c=0$

نفرض $c=1$ بطرح المعادلتين نجد ← $-3b-2=0$

نعوض في الثانية $b=\frac{2}{3}$

ويكون $a+\frac{2}{3}+1=0$ نجد إن $a=-\frac{5}{3}$ النقطة $\vec{n}(\frac{-5}{3},\frac{2}{3},1)$ $A(2,5,-2)$

إذاً معادلة المستوي هي

$$\frac{-5}{3}(x-2)+\frac{2}{3}(y-5)+1(z+2)=0$$

$\frac{-5}{3}x+\frac{2}{3}y+z+2=0$ نضرب المعادلة ب3 للسهولة

$-5x+2y+3z+6=0$

هذه الحياة لن تقف لتراعي حزنك إما أن تقف أنت وتكملها رغم انكسارك أو أنك ستبقى طريحاً للأبد.

لمستقيم :المعادلات الوسيطية لمستقيم

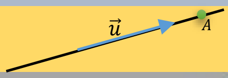
$d\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \; ; t\in R \\ z = ct + z_0 \end{cases}$

ملاحظة:قطعة مستقيمة $t\in[0,1]$
نصف مستقيم $t\in[0,+\infty[$

لتعيين معادلة المستقيم نحتاج
نقطة: $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع التوجيه: $\vec{u}(a,b,c)$

حالات كتابة معادلة المستقيم

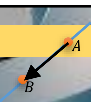
١) كتابة معادلة علم شعاع توجيهه ونقطة منه : نعوض في المعادلات الوسيطية



مثال: معادلة المستقيم المار من النقطة $A(-1,2,0)$ ويقبل $\vec{u}(0,1,-1)$ موجه

A	$d\begin{cases} x=-1 \\ y=t+2 \; ; t\in R \\ z=-t-1 \end{cases}$	B	$d\begin{cases} x=-1t \\ y=t+2 \; ; t\in R \\ z=-t \end{cases}$
C	$d\begin{cases} x=-t \\ y=t+2 \; ; t\in R \\ z=-t+1 \end{cases}$	D	$d\begin{cases} x=-1 \\ y=t+2 \; ; t\in R \\ z=-t \end{cases}$

٢) كتابة معادلة مستقيم يمر بالنقطتين A و B



شعاع التوجيه هو الشعاع $\overrightarrow{AB}$ والنقطة هي أحد النقطتين

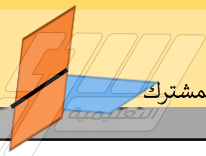
مثال: معادلة المستقيم المار من النقطتين $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$

A	$(AB)\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2 \; ; t\in R \\ z=-4t+3 \end{cases}$	B	$(AB)\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t \; ; t\in R \\ z=-4t+3 \end{cases}$
C	$(AB)\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2 \; ; t\in R \\ z=-4t+3 \end{cases}$	D	$(AB)\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2 \; ; t\in R \\ z=-4t-3 \end{cases}$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-4)$ هو الشعاع الموجه ل المستقيم (AB) ونختار النقطة A

٣) كتابة معادلة مستقيم الفصل المشترك لمستويين

١- نفرض $z=t$ يمكن فرض $y=t$ او $x=t$
٢- نحل المعادلتين بحيث نعزل x و y بدلالة t
٣- نحصل على التمثيل الوسيطي لمستقيم الفصل المشترك

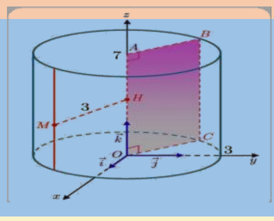


مثال: معادلة مستقيم الفصل المشترك للمستويين
$Q: 2x-y+2z=1$ و $p: -x+y+z=3$

A	$(AB)\begin{cases} x=-3t+4 \\ y=4t+7 \; ; t\in R \\ z=t \end{cases}$	B	$(AB)\begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4t+1 ; t\in R \\ z=t \end{cases}$
C	$(AB)\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1 ; t\in R \\ z=3t \end{cases}$	D	$(AB)\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \; ; t\in R \\ z=-4t-3 \end{cases}$

نفرض $z=t$ ← $\begin{cases} -x+y+t=3 \\ 2x-y+2t=1 \end{cases}$ نجمع المعادلتين نحصل على
$x+3t=4$ إذاً $x=-3t+4$ نعوض في المعادلة الأولى
$-(-3t+4)+y+t=3$ ويكون $y=-4t+1$

معادلة الاسطوانة:



الحالة الأولى: الأسطوانة تقع على محور $\overrightarrow{ok}$
$x^2+y^2=r^2 \; ; \; 0\le z\le h$
الحالة الثانية: الأسطوانة تقع على محور $\overrightarrow{oj}$
$x^2+z^2=r^2 \; ; \; 0\le y\le h$
الحالة الثالثة: الأسطوانة تقع على محور $\overrightarrow{oi}$
$y^2+z^2=r^2 \; ; \; 0\le x\le h$

مثال: معادلة الأسطوانة التي تقط على محور $\overrightarrow{oi}$ وقاعدتها الدائرة اللتي مركزها o والقاعدة الثانية مركزها $T(3,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$ هي

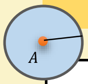
A	$y^2+z^2=6$ $0\le x\le 3$	B	$y^2+z^2=6$ $0\le x\le 2$
C	$x^2+y^2=6$ $0\le z\le 2$	D	$x^2+y^2=6$ $0\le z\le 2$

إذا لم تجعل لك هدفاً ستكون مجبراً على العمل طوال حياتك من أجل تحقيق أهداف الآخرين !!

معادلة الكرة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
لتعيين معادلة الكرة نحتاج
مركز الكرة: $A(x_0,y_0,z_0)$ نصف قطر الكرة: R

حالات معادلة الكرة:

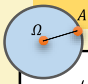
١) معادلة كرة علم مركزها ونصف قطرها: نعوض مباشرة في المعادلة



مثال: معادلة الكرة اللتي مركزها : $A(0,5,-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

A	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$	B	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$
C	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$	D	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

٢) معادلة كرة علم مركزها وتمر بنقطة: نصف قطرها هو البعد بين النقطة والمركز $r=\|AB\|$

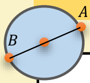


مثال: معادلة الكرة اللتي مركزها : $A(0,0,1)$ وتمر بالنقطة $B(1,1,1)$ هي

A	$x^2+y^2+(z-1)^2=2$	B	$x^2+y^2+(z-1)^2=4$
C	$(x-1)^2+y^2+z^2=2$	D	$x^2+y^2+(z-1)^2=3$

نصف قطرها $r=\|AB\|=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2}$
نعوض في المعادلة $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\sqrt{2}^2$

٣) معادلة كرة علم طرفا قطرها: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ ونصف القطر هو البعد بين المركز و أحد النقطتين

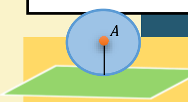


مثال:معادلة الكرة التي تمر من النقطتين $A(5,3,1)$ و$B(1,2,1)$

A	$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{17}{4}$	B	$x^2+y^2+(z-1)^2=4$
C	$(x+3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z+1)^2=\frac{17}{4}$	D	$x^2+y^2+(z-1)^2=3$

مركز هذه الكرة منتصف القطعة $[AB]$ أي $I(\frac{1+5}{2},\frac{2+3}{2},\frac{1+1}{2})$ أي $I(3,\frac{5}{2},1)$
نصف قطرها هذه الكرة هو $\sqrt{\frac{17}{4}} = \|AI\| = \sqrt{(-2)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2+(0)^2}$
وتكون معادلة الكرة $(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{17}{4}$

٤) معادلة كرة علم مركزها وتمس مستوي في نقطة نصف القطر هو $dist(A,P)=R$

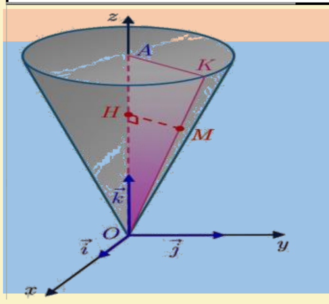


مثال: معادلة الكرة التي مركزها $A(2,-2,2)$ و تمس المستوي P الذي معادلته هي $P: x+2y+3z=5$

A	$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$	B	$(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$
C	$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{9}$	D	$x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

لدينا $R=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}=dist(A,P)$ والمركز معلوم $A(2,-2,2)$
وتكون معادلة الكرة $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

معادلة المخروط:



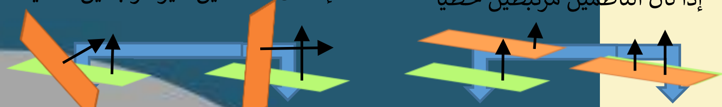
الحالة الأولى: المخروط يقع على محور $\overrightarrow{ok}$
$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0 \; ; \; 0\le z\le h$
الحالة الثانية: المخروط يقع على محور $\overrightarrow{oj}$
$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0 \; ; \; 0\le y\le h$
الحالة الثالثة: المخروط يقع على محور $\overrightarrow{oi}$
$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0 \; ; \; 0\le x\le h$

مثال: معادلة المخروط الذي يقع على محور $\overrightarrow{ok}$ ورأسه o وقاعدته دائرة مركزها $b(0,0,5)$ ونصف قطرها 2 هو

A	$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ $0\le z\le 5$	B	$x^2+y^2-\frac{4}{5}z^2=0$ $0\le x\le 5$
C	$x^2+z^2-\frac{4}{5}y^2=0$ $0\le z\le 5$	D	$x^2+y^2-\frac{4}{5}z^2=0$ $0\le z\le 25$

الوضع النسبي لمستويين

$$p: ax+by+cz+d=0$$
$$Q: \acute{a}x+\acute{b}y+\acute{c}z+\acute{d}=0$$



$\frac{a}{\acute{a}}=\frac{b}{\acute{b}}=\frac{c}{\acute{c}}=\frac{d}{\acute{d}}$ طبوقان	$\frac{a}{\acute{a}}=\frac{b}{\acute{b}}=\frac{c}{\acute{c}}\neq\frac{d}{\acute{d}}$ متوازيان	$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=0$ متعامدان	$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}\neq 0$ متقاطعان بفصل مشترك

طريقة إيجاد الفصل المشترك في قسم معادلة

مثال: لدينا المستويين p و Q معادلتهما
لدينا المستويين $Q: x+2y-z+1=0$ و $p: x-4y+7=0$

A	B	C	D
متوازين	**متقاطعان**	متعامدين	منطبقين

إن $\overrightarrow{n_p}(1,-4,0)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$ و لدينا
$\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيا" لإن المركبات غير متناسبة $\frac{1}{1}\neq\frac{-4}{2}\neq\frac{0}{-1}$
$\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير متعامدان لإن $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=1-8-0=-7\neq 0$
إذا هما متقاطعان

مثال: لدينا المستويين p و Q معادلتهما
المستويين $Q: 2x-4y+6z=0$ و $p: x-2y+3z-1=0$

A	B	C	D
متوازين	متقاطعان	متعامدين	منطبقين

إن $\overrightarrow{n_p}(1,-2,3)$ و $\overrightarrow{n_Q}(2,-4,6)$ و لدينا
$\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطيا" لإن المركبات متناسبة $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}$
لكنهم غير منطبقان لإن $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}$

مثال: لدينا المستويين p و Q معادلتهما
المستويين $Q: 2x+y-z+1=0$ و $p: x+2y+4z-5=0$

A	B	C	D
متوازين	متقاطعان	**متعامدين**	منطبقين

إن $\overrightarrow{n_p}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-1)$ و لدينا
$\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ متعامدان لإن $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=2+2-4=0$

مثال: لدينا المستويين p و Q معادلتهما
المستويين $Q: 2x+4y-6z+14=0$ و $p: x+2y-3z+7=0$

A	B	C	D
متوازين	متقاطعان	متعامدين	**منطبقين**

إن $\overrightarrow{n_p}(1,2,-3)$ و $\overrightarrow{n_Q}(2,4,-6)$ و لدينا
$\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطيا" لإن المركبات متناسبة $\frac{-6}{-3}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$
وهم منطبقان لإن $\frac{14}{7}=\frac{-6}{-3}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$

الوضع النسبي لمستوي وكرة

$$p: ax+by+cz+d=0$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

نوجد البعد بين مركز الكرة والمستوي

$dist > R$ المستوي خارج الكرة	$dist = R$ المستوي مماس للكرة	$dist < R$ المستوي قاطع الكرة

مثال: لدينا المستوي $p: 2x+y+3z=0$ والكرة
$(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=25$ الوضع النسبي بين المستوي والكرة

A	B	C	D
المستوي خارج الكرة	المستوي مماس للكرة	**المستوي قاطع الكرة**	لايمكن دراستهم

لدينا مركز الكرة $A(2,-5,0)$ ونصف قطرها $r=5$

$$dist(A,p)=\frac{|4-5|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}<5=r$$

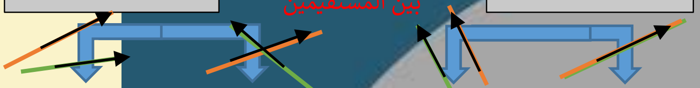
الوضع النسبي لمستقيمين

$$d\begin{cases} x=as+x_0 \\ y=bs+y_0 \;; s\in R \\ z=cs+z_0 \end{cases} \qquad \acute{d}\begin{cases} x=\acute{a}t+\acute{x}_0 \\ y=\acute{b}t+\acute{y}_0 \;; t\in R \\ z=\acute{c}t+\acute{z}_0 \end{cases}$$

إذا كان $\overrightarrow{u_{\acute{d}}}$ و $\overrightarrow{u_d}$ مرتبطان خطيا"

إذا كان $\overrightarrow{u_{\acute{d}}}$ و $\overrightarrow{u_d}$ غير مرتبطان خطيا"

نحل حل مشترك بين المستقيمين



للجملة عدد لانهائي من الحلول مثال: $0=0$ طبوقان	الجملة مستحيلة الحل مثال: $1=0$ متوازيان	وجدت قيم ل t = عدد و s = عدد متقاطعان	لايوجد قيمة للوسيطين t و s متخالفان

ملاحظات: ١)التعامد حالة خاصة من التقاطع يكون عندها $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{\acute{d}}}=0$
٢)لإيجاد نقطة التقاطع نعوض عدد $t=$ في المستقيم $\acute{d}$ او عدد $s=$ في d

مثال:ما الوضع النسبي بين المستقيمين

$$d\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \;; t\in R \\ z=-3t+3 \end{cases} \text{ و } \acute{d}\begin{cases} x=t \\ y=-3t-3 \;; t\in R \\ z=-t+1 \end{cases}$$

A	B	C	D
متوازين	متقاطعان	**متخالفين**	منطبقين

لدينا $\overrightarrow{u_d}(1,-3,-3)$ و $\overrightarrow{u_{\acute{d}}}(1,-3,-1)$ الشعاعين غير مرتبطان خطيا"
الحل المشترك: نبدل كل t ب s في d ونضع $d=\acute{d}$

$s=t+1$ (1)
$-3s-3=-3t+2$ (2)
$-s+1=-3t+3$ (3)

نحل المعادلتين 1 و 2 ثم نتحقق من المعادلة الثالثة
$-3(t+1)-3=-3t+2 \leftarrow -3t-3-3=-3t+2$
$-6=2$ وهي مستحيلة الحل إذا المستقيمين متخالفين

مثال: ما الوضع النسبي بين المستقيمين

$$\grave{s}\begin{cases} x=-9t+4 \\ y=-12t+4 \;; t\in R \\ z=3t \end{cases} \qquad s\begin{cases} x=3t+1 \\ y=4t \;; t\in R \\ z=-t+1 \end{cases}$$

A	B	C	D
متوازين	متقاطعان	متعامدين	**منطبقين**

لدينا $\overrightarrow{u_s}(3,4,-1)$ و $\overrightarrow{u_{\grave{s}}}(-9,-12,3)$ الشعاعين مرتبطان خطيا"
الحل المشترك: نبدل كل t ب s في $\grave{s}$ ونضع $s=\acute{s}$

$3t+1=-9s+4$ (1)
$4t=-12s+4$ (2)
$-t+1=3s$ (3)

نحل المعادلتين 1 و 3 ثم نتحقق من المعادلة الثانية
نعزل t من المعادلة الثالثة $t=-3s+1$ نعوض في المعادلة الاولى
$3(-3s+1)+1=-9s+4$ نحصل على $4=4$ إذاالمستقيمان منطبقان

مثال: لدينا $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعين $\vec{u}(1,0,-2)$ و
$\vec{v}(2,1,-3)$ d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$
$\acute{d}$ هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$ إن I نقطة تقاطع المستقيمين

A	B	C	D
$M(7,-1,-7)$	$M(-7,1,7)$	$M(7,-1,7)$	$M(7,1,7)$

لدينا التمثيل الوسيطي لكل من المستقيمين

$$d\begin{cases} x=t+3 \\ y=-1 \;; t\in R \\ z=-2t+1 \end{cases} \text{ و } \acute{d}\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-3 \;; t\in R \\ z=-3t-1 \end{cases}$$

لدينا $\overrightarrow{u_d}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{u_{\acute{d}}}(2,1,-3)$ الشعاعين غير مرتبطان خطيا"
الحل المشترك: نبدل كل t ب s في d ونضع $d=\acute{d}$

$2t+3=s+3$ (1)
$t-3=-1$ (2)
$-3t-1=-2s+1$ (3)

نحل المعادلتين 1 و 2 ثم نتحقق من المعادلة الثالثة
من المعادلة الثالثة نجد $t=2$ نعوض في المعادلة الأولى $4+3=s+3$
إذا" $s=4$ نتحقق من المعادلة الثالثة $-6-1=-8+1$ إذا" $-7=-7$
إذا المستقيمان يتقاطعان في نقطة لإيجاد النقطة نعوض $t=2$ في $\acute{d}$
نجد $x=7$ و $y=-1$ و $z=-7$

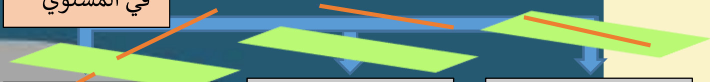
الوضع النسبي لمستقيم ومستوى

$$p: ax+by+cz+d=0$$

$$d\begin{cases} x=at+x_0\\ y=bt+y_0 \; ;t\in R\\ z=ct+z_0\end{cases}$$

نعوض معادلة المستقيم في في المستوى

نحل حل مشترك بين المستقيم والمستوى



للجملة عدد لانهائي من الحلول مثال: $0=0$ المستقيم محتوى في المستوي	الجملة مستحيلة الحل مثال: $1=0$ المستقيم يوازي المستوى	وجدت قيمة $t=$ عدد المستقيم يقطع المستوي في نقطة

مثال: ما الوضع النسبي بين المستوي $p: 2x+3y-z=0$

والمستقيم $d\begin{cases} x=s+1\\ y=2s+1 \; ;t\in R\\ z=8s-3\end{cases}$

A		B		C		D	
A	متوازين	B	متقاطعين	C	متعامدين	D	منطبقين

نعوض المستقيم في المستوي

$$2(s+1)+3(2s+1)-(8s-3)=0$$

$$2s+2+6s+3-8s+3=0$$

نحصل على $8=0$ إذا لايوجد نقاط مشتركة والمستقيم يوازي المستوي

مثال: نتأمل النقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ والمستوي

$P: 2x-3y+z-5=0$ احداثيات نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي

A	$C(\frac{-6}{13},\frac{-2}{13},\frac{10}{13})$	B	$C(\frac{3}{13},\frac{-5}{13},\frac{4}{13})$
C	$C(\frac{2}{13},\frac{-5}{13},\frac{1}{13})$	D	$C(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13})$

معادلة المستقيم (AB) لدينا الشعاع الموجه هو $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ والنقطة A

$(AB)\begin{cases} x=-3t+2\\ y=4t-1 \; ;t\in R\\ z=5t\end{cases}$ نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$$2(-3t+2)-3(4t-1)+(5t)-5=0$$

$$-6t+4-12t+3+5t-5=0$$

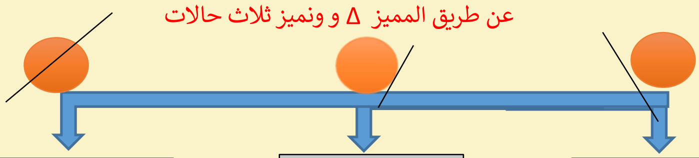
نجد إن $-13t-2=0$ إذا $t=\frac{2}{13}$ "المستقيم يقطع المستوي ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=\frac{2}{13}$ في المستقيم (AB) نجد $C(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13})$

الوضع النسبي بين مستقيم وكرة

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$d\begin{cases} x=at+x_0\\ y=bt+y_0 \; ;t\in R\\ z=ct+z_0\end{cases}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للستقيم في معادلة الكرة ثم نحل المعادلة الناتجة عن طريق المميز Δ و ونميز ثلاث حالات



$\Delta<0$ المستقيم لايقطع الكرة	$\Delta=0$ المستقيم يقطع الكرة في نقطة	$\Delta>0$ فالمستقيم يقطع الكرة في نقطتين

الوضع النسبي لثلاث مستويات

طريقة غاوس

l_1 $P_1: ax+by+cz+d=0$

l_2 $P_2: a_1x+b_1y+c_1z+d=0$

l_3 $P_3: a_2x+b_2y+c_2z+d=0$

نصفر a_1 و a_2 من l_1 ونصفر b_2 من السطر الثاني l_2

سنستعمل طريقة ثانية

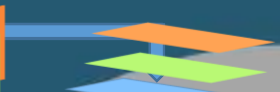
الوضع النسبي لثلاثة مستويات

$$P_1: ax+by+cz+d=0$$

$$P_2: a_1x+b_1y+c_1z+d=0$$

$$P_3: a_2x+b_2y+c_2z+d=0$$

نحل حل مشترك بين مستويين إذا حصلنا على معادلات وسيطية لمستقيم نعوض معادلة المستقيم في المستوي الثالث نحصل على أحد الحالات



الجملة مستحيلة الحل مثال: $0=1$ المستويات الثلاث لا تتقاطع	للجملة عدد لانهائي من الحلول مثال: $0=0$ المستويات الثلاث تتقاطع بمستقيم	وجدت قيمة $t=$ عدد المستويات الثلاث تتقاطع بنقطة
حالة خاصة : $\overrightarrow{n_{P_1}}$و$\overrightarrow{n_{P_2}}$و$\overrightarrow{n_{P_3}}$ مرتبطة خطيا" المستويات متوازية	المستقيم هو نفسه مستقيم الفصل المشترك للمستويين	لإيجاد إحداثيات النقطة نعوض t في معادلة الفصل المشترك لمستويين

مثال: ما الوضع النسبي بين المستويات الثلاثة

$$P_1: 2x-y+3z=2$$

$$P_2: x+2y+z=1$$

$$P_3: 3x-4y+5z=3$$

A	تتقاطع بمستقيم	B	لاتتقاطع	C	تتقاطع بنقطة	D	المستويات متوازية

نحل حل مشترك بين المستويين P_1 و P_2 $z=t$ نضرب المعادلة الأولى ب2

1 $4x-2y+6t=4$

2 $x+2y+t=1$

نجمع المعادلتين نحصل على $5x+7t=5$

إذا $x=\frac{-7t+5}{5}$ نعوض في المعادلة الثانية $\frac{-7t+5}{5}+2y+t=1$

$2y=1-t+\frac{7t-5}{5}$ نوحد المقامات $2y=\frac{2t}{5}$ إذا $y=\frac{t}{5}$

إذا وجدنا معادلة الفصل المشترك للمستويين P_1 و P_2 وهو

$$d\begin{cases} x=\dfrac{-7t+5}{5}\\ y=\dfrac{t}{5}\\ z=t\end{cases}$$

نعوض معادلة المستقيم في المستوي الثالث P_3

$$3\left(\frac{-7t+5}{5}\right)-4\left(\frac{t}{5}\right)+5t=3$$

ننشر و نوحد المقامات

$$\frac{-21\cancel{t}+15-4\cancel{t}+25\cancel{t}}{5}=3$$

نجد $3=3$ فللمعادلة عدد لانهائي من الحلول والمستويات تتقاطع بالمستقيم d

مثال:ما الوضع النسبي بين المستويات الثلاثة

$$P_1: x-2y-3z=3$$

$$P_2: 2x-y-4z=7$$

$$P_3: 3x-3y-5z=8$$

A	تتقاطع بمستقيم	B	لاتتقاطع	C	تتقاطع بنقطة	D	المستويات متوازية

نحل حل مشترك بين المستويين P_1 و P_2 $z=t$ نضرب المعادلة الأولى ب

1 -

$\begin{cases}-2x+4y+6t=-6\\ 2x-y-4t=7\end{cases}$ 2 نجمع المعادلتين نحصل على $3y+2t=1$

إذا $y=\frac{-2t+1}{3}$ نعوض في المعادلة الثانية $2x-\left(\frac{-2t+1}{3}\right)-4t=7$

$2x=7+4t+\frac{-2t+1}{3}$ نوحد المقامات $x=\frac{10t+22}{6}$

إذا وجدنا معادلة الفصل المشترك للمستويين P_1 و P_2 وهو

$$d\begin{cases} x=\dfrac{10t+22}{6}\\ y=\dfrac{-2t+1}{3}\\ z=t\end{cases}$$

نعوض معادلة المستقيم في المستوي الثالث P_3

$$\cancel{3}\left(\frac{10t+22}{\cancel{6}}\right)-\cancel{3}\left(\frac{-2t+1}{\cancel{3}}\right)-5t=8$$

ننشر و نوحد المقامات

$$\frac{10t+22+4t-2-10t-16}{2}=0$$

$t=-1$ إذا $t=-1$ "المستويات تتقاطع بنقطة واحدة لمعرفة النقطة نعوض $t=-1$ في d نجد النقطة $C(2,1,-1)$

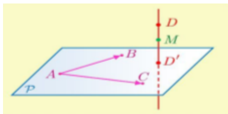
المساقط القائمة :

١ _ المسقط القائم لنقطة A على المستوي p نحل كالتالي:
نكتب معادلة المستوي p
نكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطة A ويعامد المستوي p
نحل حل مشترك بين المستقيم d والمستوي p نحصل على النقطة $A^{`}$ وهي مسقط النقطة A عل المستوي p

مثال:نتأمل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$ أحداثيات النقطة $\acute{D}$ مسقط النقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) هي

A	$\acute{D}(2,4,1)$	B	$\acute{D}(2,-4,-1)$
C	$\acute{D}(-2,4,-1)$	D	$\acute{D}(2,4,-1)$

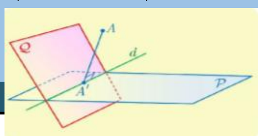
نوجد معادلة المستوي (ABC) نفرض أن الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,3,5)$
إن $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-a-2b+c=0$
و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=3b+5c=0$
نفرض أن $c=3 \leftarrow b=-5 \leftarrow a=13$
إذا" $\vec{n}(13,-5,3)$ نختار النقطة $B(0,0,1)$ للسهولة
معادلة المستوي: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$13(x-0)-5(y-0)+3(z-1)=0$
$p: 13x-5y+3z-3=0$
لنكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطة D و يعامد المستوي p
الشعاع الموجه هو نفسه الناظم للمستوي p والنقطة هي النقطة D
أي $\vec{u}(13,-5,3)$ و $D(-11,9,-4)$



$$(d)\begin{cases} x=13t-11 \\ y=-5t+9 \quad ;t\in R \\ z=3t-4 \end{cases}$$

نحل حل مشترك بين المستقيم d والمستوي p (نعوض المستقيم في المستوي)
$13(13t-11)-5(-5t+9)+3(3t-4)-3=0$
$t=\frac{203}{203}=1$ نعوض في معادلة المستقيم d $x=2$ و $y=4$ و $z=-1$
ومنه $\acute{D}(2,4,-1)$ وهي مسقطالقائم للنقطة D على المستوي (ABC)

٢_المسقط القائم لنقطة Aعلى المستقيم d نوجده حسب الخوارزمية
نوجد معادلة المستقيم d
نوجد معادلة المستوي p العمودي على المستقيم d ويمر بالنقطة A
نحل حل مشترك بين المستقيم d والمستوي p نحصل على $\acute{A}$ وهي المسقط
ملاحظة : لإيجاد بعد نقطة عن مستقيم نوجد المسقط القائم على المستقيم
ويكون بعد النقطة A عن المستقيم d
هو $dist\ (A\_d)=\left\|\overrightarrow{A\acute{A}}\right\|$



مثال: لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويين
$p: 2x-y+z-4=0$ و $Q: x+y+2z-5=0$
ان بعد النقطة A عن مستقيم الفصل المشترك هو

A	$\frac{\sqrt{35}}{3}$	B	$\frac{\sqrt{13}}{3}$	C	$\frac{\sqrt{42}}{3}$	D	$\frac{\sqrt{7}}{3}$

لنوجد معادلة المستقيم d اللذي يمثل الفصل المشترك بين المستويين
$2x-y+t-4=0$ نفرض $z=t$
$x+y+2t-5=0$
بالجمع $3x=-3t+9$ إذا" $x=-t+3$ نعوض في المعادلة الثانية
$-t+3+y+2t-5=0$ إذا" $y=-t+2$ إذا معادلة المستقيم هي

$$d\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,;t\in R \\ z=t \end{cases}$$

لنوجد معادلة المستوي المار من النقطة A ويعامد المستقيم d
الناظم هو نفسه الموجه للمستقيم $\overrightarrow{n_p}(-1,-1,1)$ ويمر بالنقطة $A(3,-1,2)$
معادلة المستوي: $-1(x-3)-1(y+1)+1(z-2)=0$
$p: -x-y+z=0$
نحل حل مشترك بين المستقيم d والمستوي p (نعوض المستقيم في المستوي)
$-(-t+3)-(-t+2)+t=0$ إذا" $t=\frac{5}{3}$
نعوض في معادلة المستقيم نجد $x=\frac{4}{3}$ و $y=\frac{1}{3}$ و $z=\frac{5}{3}$ إذا" $\acute{A}\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$
ولإيجاد بعد النقطة A عن المستوي نحسب

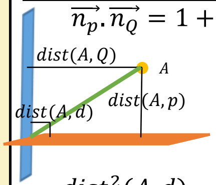
$$\left\|\overrightarrow{A\acute{A}}\right\|=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

حالة خاصة : في حال طلب البعد بين نقطة ومستقيم الفصل المشترك وكان المستويين متعامدين نستعمل مبرهنة فيثاغورث
حيث إن $dist^2(A,d)=dist^2(A,p)+dist^2(A,Q)$

مثال: لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويين
$p: x+y-2z-1=0$ و $Q: x+y+z=0$
ان بعد النقطة A عن مستقيم الفصل المشترك للمستويين هو

A	3	B	4	C	7	D	5

نلاحظ إن $\overrightarrow{n_p}(1,1,-2)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$ إذا" $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=1+1-2=0$
إذا" المستويين متعامدين



لدينا $dist(A,p)=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$
$dist(A,Q)=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$
و $dist^2(A,d)=dist^2(A,p)+dist^2(A,Q)=\frac{4}{6}+\frac{25}{3}=\frac{54}{6}=9$
إذا" $dist(A,d)=3$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ انها مرتبطة خطيا"
اذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$
يفيد الارتباط الخطي لثلاث أشعة في إثبات أن الأشعة في مستوي واحد
أو لإثبات أن أربع نقاط في مستوي واحد
إذا كان شعاعين مرتبطين خطيا" فيوجد شعاع ثالث مرتبط خطيا" معهم

مثال: لدينا $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$ و $C(-1,1,2)$ و $D(0,0,1)$ لدينا
إن قيمة α و β في العلاقة
$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ لتكون $\overrightarrow{AB}$و$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطيا" هي

A	$\alpha=-3$ و $\beta=3$	B	$\alpha=-9$ و $\beta=3$
C	$\alpha=\frac{-1}{9}$ و $\beta=\frac{-1}{3}$	D	$\alpha=\frac{-1}{9}$ و $\beta=\frac{1}{3}$

نكتب العلاقة $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$3\alpha-2\beta=-1$ (1)
$3\alpha+\beta=0$ (2)
$-3\alpha+2\beta=1$ (3)

بطرح 1 من 2 نجد $-3\beta=-1$ ومنه $\beta=\frac{1}{3}$
نعوض في 2 نجد $3\alpha+\frac{1}{3}=0$ ومنه $\alpha=\frac{-1}{9}$
نتحقق من حلنا في المعادلة 3 $-3\left(\frac{-1}{9}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)=1$ ومنه $1=1$
فالشعة مرتبطة خطيا"

مركز الأبعاد المتناسبة

1) يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) (B,β) إذا تحقق:
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=0$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$ أو $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
2) يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و (C,γ) إذا تحقق:
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=0$ حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
3) يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و (C,γ) و (D,δ)
إذا تحقق: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\beta\overrightarrow{GD}=0$ حيث $\alpha+\beta+\gamma+\beta\neq 0$

الخاصة التجميعية:
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و (C,γ) و (D,δ)
و I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β)
و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (C,γ) و (D,δ)
عند إذا" G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\delta)$
ويمكن إستعمال الخاصة التجميعية لثلاث نقاط ويمكن لنقطتين

ملاحظات:
إذا كانت G منتصف AB فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k) و(B,k)
إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k) و(B,k) و (C,k)
إذا كانت G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,k) و(B,k) و (C,k) و(D,k)

مثال:إن قيمة α و β لتكون M مركز الأبعاد المناسبة للنقطتين (A,α)و(B,β) بحيث إن $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

A	B	C	D
$\alpha=4$ $\beta=-3$	$\alpha=3$ $\beta=-4$	$\alpha=2$ $\beta=-5$	$\alpha=4$ $\beta=1$

لدينا $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ نزرع M في العلاقة الثانية

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \leftarrow \overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ نجد M مركز الأبعاد المتاسبةللنقطتين $(A,4)$و$(B,-3)$

مثال:إن قيمة α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتاسبةللنقاط (A,α)و(B,β)و(C,γ) بحيث إن $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

A	B	C	D
$\alpha=-3$ $\beta=-2$ $\gamma=4$	$\alpha=3$ $\beta=-4$ $\gamma=2$	$\alpha=2$ $\beta=-5$ $\gamma=3$	$\alpha=4$ $\beta=1$ $\gamma=1$

لدينا $\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0} \leftarrow \overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{CM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

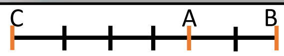
$-\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

M مركز الأبعاد المتاسبةللنقاط$(A,-3)$و$(B,-2)$و $(C,4)$

خاصية الإنشاء: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β)وهي مهمة للرسمات

مثال:



إن A مركز الأبعاد المتناسبة ل

A	B	C	D
$(B,2)$ $(C,1)$	$(B,3)$ $(C,1)$	$(B,3)$ $(C,2)$	$(B,4)$ $(C,1)$

لدينا من الشكل نجد إن $\overrightarrow{CA}=\frac{4}{6}\overrightarrow{CB}$ "إذا $\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ ومنه نجد إن

A مركز الأبعاد المتناسبة ل$(B,2)$و$(C,1)$

نلاحظ إنه من الممكن أن تكون A مركز الأبعاد المتناسبة ل$(B,4)$و$(C,2)$ لأنه يمكن ضرب التثقيلات بعدد مغاير للصفر

مثال: ماهي قيمة t اللتي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث إنM مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,-2)$ و $(B,1)$

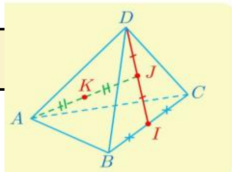
A	B	C	D
$t=-1$	$t=-2$	$t=2$	$t=1$

حسب خاصية الإنشاء $\overrightarrow{AM}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ إذا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1-2}\overrightarrow{AB}$

مثال: إن قيمة α و β لتكون E مركز الأبعاد المناسبة للنقطتين (A,α)و(B,β) بحيث إن $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}$ هي

A	B	C	D
$\alpha=1-x$ $\beta=x$	$\alpha=x$ $\beta=1-x$	$\alpha=x$ $\beta=x$	$\alpha=1-x$ $\beta=1-x$

هذا واضح القانون



مثال:إن قيمة α و β و γ و δ لتكون K مركز ابعاد متناسبة للنقاط (A,α)و (B,β)و (C,γ) و (D,δ) هي

A	B	C	D
$\alpha=4$ $\beta=1$ $\gamma=1$ $\delta=2$	$\alpha=3$ $\beta=1$ $\gamma=1$ $\delta=2$	$\alpha=1$ $\beta=4$ $\gamma=3$ $\delta=2$	$\alpha=4$ $\beta=1$ $\gamma=1$ $\delta=2$

لدينا I تقع في منتصف $[BC]$ إذا $(I,2)$ م.أ.م $(B,1)$و $(C,1)$

ولدينا J تقع في منتصف $[ID]$ إذا $(J,4)$ م.أ.م $(D,2)$و $(I,2)$

و ولدينا Kتقع في منتصف $[AJ]$ اذا $(K,8)$ م.أ.م $(J,4)$و $(A,4)$

لدينا $(K,8)$ م.أ.م

$(J,4)$ ← → $(A,4)$

$(I,2)$ ↙ ↘ $(D,2)$

$(B,1)$ ↙ ↘ $(C,1)$

حسب الخاصة التجميعية

نجد إن K هي م.أ.م $(A,4)$و $(B,1)$و $(C,1)$ و $(D,2)$

مجموعة النقاط

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R>0$ هي معادلة كرة

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0$ هي معادلة نقطة

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R<0$ هي مجموعة خالية

$\|\overrightarrow{MG}\|=R$ تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها R

$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{AG}\|$ تمثل معادلةكرة مركزها G ونصف قطرها AG

$\|\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تمثل كرة مركزها منتصف $[AB]$ وقطرها $[AB]$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ تمثل معادلة المستوي مار من النقطة A وناظمه $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MA}.\vec{n}=0$ تمثل معادلة المستوي مار من النقطة A وناظمه $\vec{n}$

$\overrightarrow{MA}=t\vec{u}$ تمثل معادلة المستقيم المار بالنقطة A وشعاعه الموجه $\vec{u}$

مبرهنة الإختزال: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

عند إذا" G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و (C,γ)

(تستعمل لإيجاد مجموعة نقط)

مثال: ان مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل في الحالات الاتية:

١) $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

A	B	C	D
كرة	مستوي	نقطة	مستقيم

$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$ نتمم إلى مربع كامل

$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z)^2=12$

فمجموعة النقاط$M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\Omega(1,-3,0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{3}$

٢) $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

A	B	C	D
كرة	نقطة	مستوي محوري	مستقيم

$x^2-10x+y^2+z^2+2z+26=0$ نتمم إلى مربع كامل

$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$

$(x-5)^2+(y)^2+(z+1)^2=0$

فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققها هي النقطة $\Omega(5,0,-1)$

٣) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6$

A	B	C	D
كرة	نقطة	مستوي محوري	مستقيم

G مركز ثقل المثلث ABC ومنه فان $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$نعوض فنجد

$\|3\overrightarrow{MG}\|=6$ إذا $\|\overrightarrow{MG}\|=2$ وهي تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها 2

٤) $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

A	B	C	D
كرة	نقطة	مستوي محوري	مستقيم

حسب خاصية الإختزال

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$و $(B,1)$ و $(C,1)$

و$\acute{G}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$و $(B,-1)$ و $(C,1)$

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{M\acute{G}}\| \leftarrow \|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{M\acute{G}}\|$

وهي تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G\acute{G}]$

٥) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

A	B	C	D
كرة	نقطة	مستوي محوري	مستقيم

حسب خاصية الإختزال

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$و $(B,1)$ و $(C,1)$

و$\acute{G}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$و $(B,-1)$ و $(C,1)$

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{M\acute{G}}=0 \leftarrow 3\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{M\acute{G}}=0$

وهي تمثل كرة مركزها منتصف $[G\acute{G}]$ وقطرها $[G\acute{G}]$

- نصائح للمذاكرة ✨: ●ضع خططك مقدمًا ●كن منظمًا
● هيئ بيئة الدراسة والمذاكرة ● جهز جدولك للدراسة
● أسأل إذا كان لديك شكوك ● تدرب على الاختبارات السابقة
● تعلم إدارة الأزمة وتحييد القلق ● إعمل ملخصات لتسهيل الحفظ