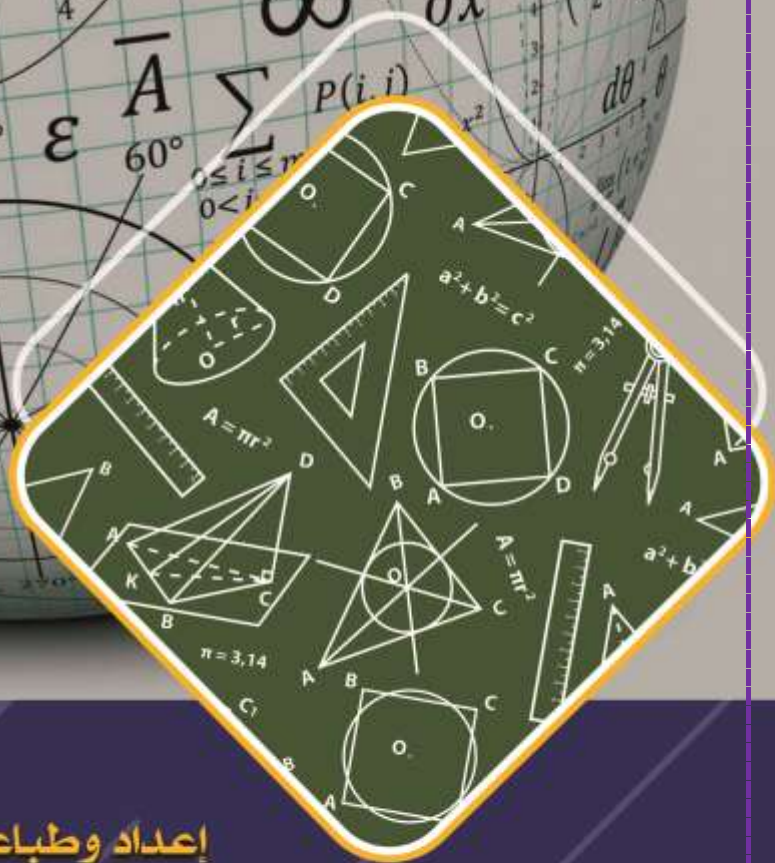
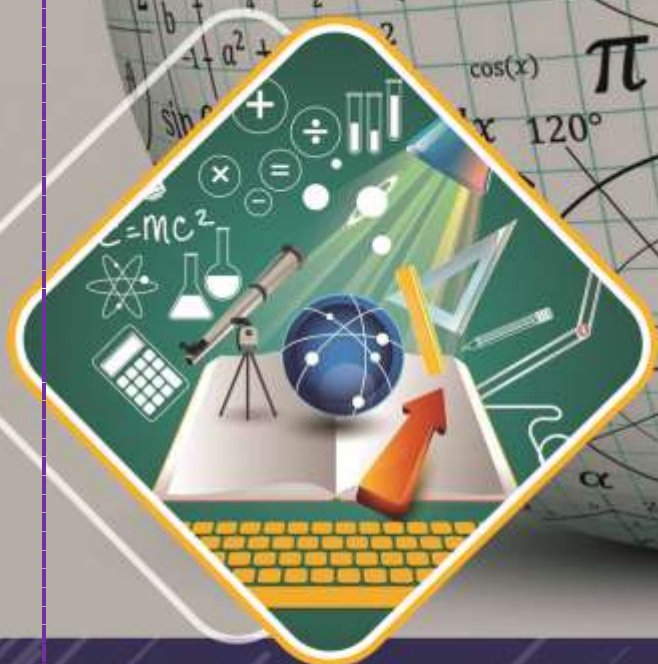


# التبديل

## في الرياضيات

### للسف الأول الثاني



إعداد وطباعة : أ / إبراهيم الحبابي

مدرسة مادة الرياضيات في مدارس التميز الأهلية - قسم الثانوية

# الوحدة الأولى المنطق الرياضي



القضية المنطقية ونفيها

- **القضية المنطقية** : هي جملة خبرية مفيدة يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً .

” ملاحظة “ (١) الجمل الإنشائية ( الأمر ، النهي ، الاستفهام ، التعجب ) لا تسمى قضايا منطقية .  
 (٢) نرسم عادة لقضية ما بحرف من الحروف ( P ، ب ، ج ، د ) فنقول القضية P ، القضية ج ، وهكذا .

مثال ١ : ميز القضايا المنطقية من غيرها :

م	الجملة	نوعها	م	الجملة	نوعها
١	المكلا مدينة يمنية ساحلية	.....	٥	اكتب دروسك كلها	.....
٢	$٧ = ٤ + ٥$	.....	٦	ما أحسن خُلق المسلم	.....
٣	لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد	.....	٧	القدس عاصمة فلسطين	.....
٤	هل العدد ٥ عدد زوجي	.....	٨	أركان الإسلام ستة	.....

- قيمتي صواب القضية المنطقية :

جدول قيمتي الصواب		
القضية P	لفظياً	رمزياً
	صائبة	ص
	خاطئة	خ

أي صواب أو خطأ القضية P وليس كليهما ،  
 لتكن P قضية منطقية ، فإما أن تكون صائبة ونرسم لها (ص) أو تكون خاطئة ونرسم لها (خ) .

مثال ٢ : حدّد قيمة صواب كل قضية من القضايا التالية :

م	القضية المنطقية	قيمة صوابها	م	القضية المنطقية	قيمة صوابها
١	الصلاة الركن الثالث من أركان الإسلام	.....	٥	المربع له ٤ أضلاع وزاويتين	.....
٢	$٢ = ٩ - ٧$	.....	٦	(س <sup>٢</sup> - ٩) فرق بين مربعين	.....
٣	العدد ٢ عدد زوجي	.....	٧	المثلث دائماً حاد الزاوية	.....
٤	العدد ٣٦ من مضاعفات العدد ٤	.....	٨	$١ - ٨ = ٤ + ٣$	.....

- نفي القضية المنطقية :

عند إدخال أدوات النفي ( لا ، ليس ، غير ) أو رموز النفي على القضية المنطقية أو حذفها من القضية المنطقية نحصل على النفي ، مثل : القضية ( الجو ممطر ) نفيها ( الجو غير ممطر ) ، والقضية ( العدد ٥ ليس عدد زوجي ) يكون نفيها ( العدد ٥ عدد زوجي ) ، والقضية (  $٧ \supseteq ٧$  ) نفيها (  $٧ \not\supseteq ٧$  ) وهكذا .

” ملاحظة “ (١) نرسم لنفي القضية P بالرمز (  $\sim P$  ) وتقرأ ( نفي P ) أو ( ليس P ) .  
 (٢) القضية ( P ) والقضية (  $\sim P$  ) لهما نفس الألفاظ ونفس الرموز إلا بزيادة أداة النفي في إحدى القضيتين .  
 (٣) إذا كانت القضية صائبة ( ص ) فإن نفيها يكون خاطئاً ( خ ) والعكس صحيح .  
 (٤) يمكن نفي أي قضية بكتابة القضية بين قوسين بعد جملة ( ليس صحيحاً أن ) .  
 (٥) ( نفي النفي إثبات ) ، تكرر أداة النفي يُثبت القضية .

الرمز	نفيه	الرمز	نفيه
$\supseteq$ أو $\not\supseteq$	$<$	$\not\supseteq$	$\supseteq$
$\leq$ أو $\not\leq$	$>$	$\not\leq$	$\leq$
$\neq$	$=$	$\neq$	$\equiv$

جدول قيم صواب القضية P ونفيها	
$\sim P$	P
خ	ص
ص	خ

مثال ٣ > انف القضايا المنطقية التالية :

رقم	القضية المنطقية	قيمة صوابها	نفي القضية المنطقية	قيمة صوابها
١	بيروت عاصمة لبنان	.....	.....	.....
٢	زوايا المربع ليست قائمة	.....	.....	.....
٣	يقع المسجد النبوي في مكة	.....	.....	.....
٤	مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية	.....	.....	.....
٥	العدد (٧) لا يقبل القسمة على ٢	.....	.....	.....
٦	$6 \neq 3 + 2$	.....	.....	.....
٧	العدد $23 \in \mathcal{P}$	.....	.....	.....
٨	العدد $9 \geq 5$	.....	.....	.....
٩	$3 < 8 + 1$	.....	.....	.....
١٠	مساحة المربع $\equiv$ مساحة المستطيل	.....	.....	.....

القضايا المنطقية المركبة

- **القضية المنطقية البسيطة** : هي قضية منطقية تتكون من جملة خبرية واحدة فقط ،

مثل :  $\mathcal{P}$  / العدد ٣ عدد فردي ،

ب / زوايا المثلث مختلفة القياسات .

- **القضية المنطقية المركبة** : هي قضية منطقية مركبة من قضيتين بسيطتين أو أكثر ،

مثل :  $\mathcal{P}$  / العدد ٣ عدد فردي و هو لا يقبل القسمة على ٢ ،

ب / إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن أضلاعه متساوية .

- **عدد الحالات الممكنة لقيم جدول الصواب** :  $2^n$  ، حيث  $n$  عدد القضايا البسيطة .

مثال : (١) قضية مركبة من ٣ قضايا بسيطة ، فإن جدول صوابها يتكون من  $2^3 = 8$  خانات .

(٢) قضية مركبة من ٢ قضايا بسيطة ، فإن جدول صوابها يتكون من  $2^2 = 4$  خانات .

جدول قيم صواب قضية مركبة من ٣ قضايا			
وصف الحالة	ج	ب	م
كلها صائبة	ص	ص	ص
الثالثة خاطئة فقط	خ	ص	ص
الثانية خاطئة فقط	ص	خ	ص
الأولى صائبة فقط	خ	خ	ص
الأولى خاطئة فقط	ص	ص	خ
الثانية صائبة فقط	خ	ص	خ
الثالثة صائبة فقط	ص	خ	خ
كلها خاطئة	خ	خ	خ

جدول قيم صواب قضية مركبة من قضيتين		
وصف الحالة	ب	م
صائبتين معاً	ص	ص
الأولى صائبة والأخرى خاطئة	خ	ص
الأولى خاطئة والأخرى صائبة	ص	خ
خاطئتين معاً	خ	خ

لا بد أن يكون ترتيب الحالات كما هو موضح في الجداول المرسومة أعلاه ، فالترتيب مهم .

أدوات الربط وأدوات الشرط

أولاً : أدوات الربط : وهي حروف العطف ( و ، أو ) تربط بين قضيتين بسيطتين أو أكثر فتكون قضية مركبة .

أولاً : القضية المركبة بأداة الربط ( و )

الربط بين القضيتين ( P ) ، ( B ) بأداة العطف ( و ) تسمى القضية المركبة ( P و B ) ، وتكتب رمزياً ( P و B ) .  
مثل : المثلث له ٣ أضلاع و زوايا المربع قائمة .

جدول قيم صواب القضية ( P و B ) :

( P و B )	B	P
ص	ص	ص
خ	خ	ص
خ	ص	خ
خ	خ	خ

- قاعدة :

(١) القضية المركبة ( P و B ) تكون صائبة فقط عندما تكون كل من القضيتين P ، B صائبتين معاً .  
(٢) القضية المركبة ( P و B ) تكون خاطئة عندما تكون القضيتين P ، B إحداها خاطئة على الأقل .

مثال ١ < يمكن : P : العدد ٧ من عوامل ٣٥ ، B : المربع له ٤ زوايا قائمة ،

بين قيم صواب القضايا المركبة التالية بعد كتابتها لفظياً :

السبب	قيمة صوابها	القضية بالألفاظ	القضية المركبة
.....	.....	.....	P و B
.....	.....	.....	B و P
.....	.....	.....	P ~ و B
.....	.....	.....	B ~ و P
.....	.....	.....	( P و B ) ~
.....	.....	.....	P ~ و B ~

مثال ٢ < أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

( P و B ) ~	B ~ و P	P ~ و B	B ~ و P ~	P و B	B ~	P ~	B	P
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	خ
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	خ

ثانياً : القضية المركبة بأداة الربط ( أو )

الربط بين القضيتين ( P ) ، ( B ) بأداة العطف ( أو ) تسمى القضية المركبة ( P أو B ) ، وتكتب رمزياً ( P و B ) .  
مثل : المثلث له ٣ أضلاع أو أضلاع المربع متساوية .

- قاعدة :

جدول قيم صواب القضية (  $p \vee q$  ) :

( $p \vee q$ )	ب	پ
ص	ص	ص
ص	خ	ص
ص	ص	خ
خ	خ	خ

(١) القضية المركبة (  $p \wedge q$  ) تكون خاطئة فقط عندما تكون كل من القضيتين  $p$  ،  $q$  خاطئتين معاً .  
 (٢) القضية المركبة (  $p \wedge q$  ) تكون صائبة عندما تكون القضيتين  $p$  ،  $q$  إحداهما صائبة على الأقل .

مثال ١ < لتكن :  $p$  : العدد ٦ من عوامل ٢٤ ،  $q$  : المستطيل له ٤ زوايا قائمة ،  
 بين قيم صواب القضايا المركبة التالية بعد كتابتها لفظياً :

السبب	قيمة صوابها	القضية بالألفاظ	القضية المركبة
.....	.....	.....	$p \vee q$ ب
.....	.....	.....	ب $\vee q$ ب
.....	.....	.....	$p \vee \sim q$ ب
.....	.....	.....	$\sim p \vee q$ ب
.....	.....	.....	$\sim (p \vee q)$ ب
.....	.....	.....	$\sim p \vee \sim q$ ب

مثال ٢ < أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

$p$	ب	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee q)$
ص	ص	.....	.....	.....	.....	.....
ص	خ	.....	.....	.....	.....	.....
خ	ص	.....	.....	.....	.....	.....
خ	خ	.....	.....	.....	.....	.....

ثانياً : أدوات الشرط : وهي حروف الشرط ( إذا كان .. فإن ، .. إذا فقط إذا .. ) تربط بين قضيتين بسيطتين فتكون قضية شرطية مركبة من شرط وجواب الشرط .

أولاً : القضية الشرطية ( إذا كان .. فإن .. )

الربط بين القضيتين (  $p$  ) ، (  $q$  ) بأداة الشرط ( إذا كان .. فإن .. ) تسمى القضية الشرطية ( إذا كان  $p$  فإن  $q$  ) ، حيث القضية  $p$  تسمى الشرط ( المقدمة ) و القضية  $q$  تسمى الجواب ( النتيجة ) ، وتكتب رمزياً : (  $p \rightarrow q$  ) .  
 مثل : إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإنه متساوي الزوايا .

- قاعدة :

جدول قيم صواب القضية (  $p \rightarrow q$  ) :

( $p \rightarrow q$ )	ب	پ
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	خ
خ	خ	خ

(١) القضية الشرطية (  $p \rightarrow q$  ) تكون خاطئة فقط عندما تكون  $p$  صائبة و  $q$  خاطئة ، أي الشرط صائب والجواب خاطئ ، ( الترتيب مهم ) .  
 (٢) القضية (  $p \rightarrow q$  ) تكون صائبة في بقية الحالات .

مثال ١ < لتكن :  $P$  : العدد ٨ عدد زوجي ،  $B$  : العدد ٨ يقبل القسمة على ٢ ،

بين قيم صواب القضايا الشرطية التالية بعد كتابتها لفظياً :

السبب	قيمة صوابها	القضية بالألفاظ	القضية المركبة
.....	.....	.....	$P \leftarrow B$
.....	.....	.....	$B \leftarrow P$
.....	.....	.....	$\sim P \leftarrow B$
.....	.....	.....	$P \leftarrow \sim B$
.....	.....	.....	$\sim (P \leftarrow B)$
.....	.....	.....	$\sim P \leftarrow \sim B$

مثال ٢ < أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

$P$	$B$	$\sim P$	$\sim B$	$P \leftarrow B$	$\sim P \leftarrow \sim B$	$\sim P \leftarrow B$	$P \leftarrow \sim B$	$\sim (P \leftarrow B)$
ص	ص	خ	خ	ص	ص	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص	ص	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص	خ

ثانياً : القضية الشرطية ( .. إذا فقط إذا .. )

الربط بين القضيتين (  $P$  ) ، (  $B$  ) بأداة الشرط ( .. إذا فقط إذا .. ) تسمى القضية الشرطية المزدوجة (  $P \leftarrow B$  إذا فقط إذا  $B$  ) لأنها تتكون من القضيتين الشرطيتين (  $P \leftarrow B$  ) ، (  $B \leftarrow P$  ) تربط بينهما أداة الربط (  $\leftrightarrow$  ) ،

وتكتب رمزياً (  $P \leftrightarrow B$  ) . مثل : المثلث متساوي الأضلاع إذا فقط إذا المثلث متساوي الزوايا .

- قاعدة :

(١) القضية الشرطية المزدوجة (  $P \leftrightarrow B$  ) تكون صائبة عندما تكون القضيتان  $P$  ،  $B$  صائبتين معاً

أو خاطئتين معاً ، أي عند تشابههما في قيم الصواب .

(٢) القضية الشرطية المزدوجة (  $P \leftrightarrow B$  ) تكون خاطئة عندما تكون القضيتان  $P$  ،  $B$  إحداهما صائبة

والأخرى خاطئة ، أي عند اختلافهما في قيم الصواب ، ( الترتيب غير مهم ) .

- جدول قيم صواب القضية (  $P \leftrightarrow B$  ) :

$P$	$B$	( $P \leftarrow B$ )	( $B \leftarrow P$ )	( $P \leftrightarrow B$ )
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	خ	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

مثال ١ < لتكن :  $P$  : العدد ٣٢ من مضاعفات ٤ ،  $Q$  : العدد ٤ من قواسم العدد ٣٢ .

بين قيم صواب القضايا الشرطية التالية بعد كتابتها لفظياً :

السبب	قيمة صوابها	القضية بالألفاظ	القضية المركبة
.....	.....	.....	$P \leftrightarrow Q$
.....	.....	.....	$Q \leftrightarrow P$
.....	.....	.....	$\sim P \leftrightarrow Q$
.....	.....	.....	$P \leftrightarrow \sim Q$
.....	.....	.....	$\sim (P \leftrightarrow Q)$
.....	.....	.....	$\sim P \leftrightarrow \sim Q$

مثال ٢ < أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

$\sim (P \leftrightarrow Q)$	$P \leftrightarrow \sim Q$	$P \leftrightarrow \sim P$	$\sim P \leftrightarrow \sim P$	$P \leftrightarrow P$	$\sim P$	$P$	ب	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	خ
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	خ

تمرين ٢ < أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

$\sim (P \leftrightarrow Q)$	$P \leftrightarrow \sim Q$	$P \leftrightarrow \sim P$	$\sim P \leftrightarrow \sim P$	$P \leftrightarrow P$	$\sim P$	$P$	ب	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	ص
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	ص	خ
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	خ	خ

تمارين ومسائل

تمرين ١ < أنشئ جداول القضايا التالية :

(٢)  $\sim P \vee \sim Q$

(٤)  $P \leftrightarrow \sim P$

(١)  $P \wedge \sim Q$

(٣)  $\sim P \leftarrow Q$

(٥)  $P \leftrightarrow \sim P$

الحل :


❖ تمرين ٢ ❖ أكمل القضايا التالية ما يجعلها صائبة :

- (١) العدد ٨ جذر تربيعي للعدد ..... و هو مكعب للعدد .....
- (٢)  $١٠ < ٥ + ٢$  أو  $٥ \times ٢ \neq$  .....
- (٣) العدد ٢٥ من مضاعفات العدد ..... ← العدد ٢٥ يقبل القسمة على .....
- أو .....
- (٤)  $١٢ \div ٣ >$  ..... ↔  $٤ \times ٧ <$  .....
- .....
- (٥) إذا كانت زوايا المستطيل ..... فإن زوايا المربع .....
- أو .....
- أو .....

\*\*\*\*\*

**نفي القضايا المركبة**

- **الطريقة العامة :** إدخال جملة ( ليس صحيحاً أن ) على القضية المركبة مع وضع القضية المركبة بين قوسين ، أما بالرموز فيكون بإدخال رمز النفي ( ~ ) على القضية المركبة مع وضع القضية بين قوسين ( ) ،

$$\sim (P \wedge Q) ، \sim (P \vee Q) ، \sim (P \rightarrow Q) ، \sim (P \leftrightarrow Q)$$

- **الطريقة الخاصة :** لكل قضية مركبة طريقة خاصة في النفي تبعاً لأداة الربط أو أداة الشرط كما في الجدول التالي :

أدوات الشرط		أدوات الربط		القضايا المركبة
$(P \leftrightarrow Q)$	$(P \leftarrow Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	
$\sim (P \leftrightarrow Q)$	$P \sim \wedge Q$	$\sim P \sim \vee Q$	$\sim P \sim \wedge Q$	النفي بالطريقة الخاصة
ليس صحيحاً أن : ( القضية )	كتابة الشرط مع أداة الربط $\wedge$ ونفي الجواب	نفي القضية الأولى ونفي أداة الربط ونفي القضية الثانية		الشرح

➤ مثال ١ < : انف القضايا المركبة التالية :

القضية المركبة	نفيها رمزياً	القضية المركبة	نفيها لفظياً
$P \sim \wedge Q$	.....	فصل الصيف حار و فصل الشتاء بارد	.....
$P \leftarrow Q$	.....	إذا كان $\sqrt{36} = 6$ فإن $6 = \sqrt{6}$	.....
$\sim P \sim \vee Q$	.....	$٨ = ٥ + ٣$ إذا وفقط إذا $٨ = ٥ - ٣$	.....
$\sim P \leftarrow Q$	.....	$٥ < ٧$ أو $٧ < ٥$	.....
$\sim P \sim \vee Q$	.....	إذا كان $\sqrt{36} \neq 6$ فإن $6 \neq \sqrt{6}$	.....
$P \leftrightarrow Q$	.....	إذا كان $٩ \leq ٤$ فإن $٤ = ٣ \times ٤$	.....
$\sim P \leftrightarrow Q$	.....	المثلث قائم ↔ إحدى زواياه قائمة	.....
$\sim P \sim \wedge Q$	.....	ضعف $٥ = ٥$ و جذر $٥ = ٥$	.....
$\sim (P \leftarrow Q)$	.....	$٥ \ni P$ أو $\sim P \ni ٥$	.....

❖ تمرينه ١ ❖ لتكن :  $P$  : العدد ٢٧ من مضاعفات ٣ ،  $Q$  : العدد ٣ جذر تكعيبي لـ ٢٧ .

انف القضايا التالية رمزيا ولفظياً ، بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	نفيها رمزياً	نفيها لفظياً
$P \leftarrow Q$	.....	.....	.....
$P \sim \vee Q \sim$	.....	.....	.....
$P \leftarrow Q \sim$	.....	.....	.....
$P \sim \vee Q$	.....	.....	.....
$P \wedge Q \sim$	.....	.....	.....
$P \leftrightarrow Q \sim$	.....	.....	.....

### التكافؤ المنطقي للقضايا

- **التعريف :** يقال عن القضيتين  $P$  ،  $Q$  ،  $P \equiv Q$  أنهما متكافئتان منطقياً إذا كان لهما قيم الصواب نفسها ، ونرمز للتكافؤ بالرمز  $\equiv$  ، وتقرأ "  $P$  تكافئ  $Q$  " .

- **بعض القضايا المتكافئة منطقياً :**

(1) **نفي النفي للقضية :** أي أن النفي للقضية المنفية يلغي النفي السابق ويرجع القضية إلى أصلها .

مثل :  $P \equiv (P \sim) \sim$  ،  $(P \sim) \sim \equiv P$  ، وهكذا .

(2) **خاصية الإبدال :** في القضايا المركبة بأداتي الربط  $\{ \vee , \wedge \}$  ، وكذلك القضية الشرطية  $\{ \rightarrow \}$  .

مثل :  $(P \leftrightarrow Q) \equiv (Q \leftrightarrow P)$  ،  $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$  ،  $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$

ملاحظة :  $(P \leftarrow Q) \not\equiv (Q \leftarrow P)$

(3) **خاصية التجميع :** في القضايا المركبة بأداتي الربط  $\{ \vee , \wedge \}$  فقط .

مثل :  $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$  ،  $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

(4) **خاصية التوزيع :** في القضايا المركبة بأداتي الربط  $\{ \vee , \wedge \}$  فقط ، حيث توزع كلٌّ منها على الأخرى .

مثل :  $(P \rightarrow Q) \vee (R \wedge S) \equiv (P \rightarrow Q) \vee R \wedge S$

$(P \rightarrow Q) \wedge (R \vee S) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge R \vee S$

(5) **القضية المنطقية المزدوجة :** حيث :  $(P \leftarrow Q) \wedge (Q \leftarrow P) \equiv (P \leftrightarrow Q)$

(6) **قواعد نفي القضايا المنطقية :** الطريقة العامة تكافئ الطريقة الخاصة ، كما هو موضح في الشكل التالي :

$P \sim \wedge Q \sim \equiv (P \vee Q) \sim$  ،  $P \sim \vee Q \sim \equiv (P \wedge Q) \sim$   
 $(P \leftrightarrow Q) \sim \equiv (P \leftrightarrow Q) \sim$  ،  $P \sim \wedge Q \equiv (P \leftarrow Q) \sim$

**7) حالة خاصة :** لأي قضيتين  $P, Q$  ، فإن :  $(P \leftarrow Q) \equiv (P \vee \sim Q) \equiv \sim Q \vee P$

**مثال ١ <** أثبت تكافؤ القضايا التالية :

[٣]  $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$

[٢]  $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$

[١]  $P \equiv (\sim \sim P)$

.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

**تابع المثال :** [٤]  $(P \leftarrow Q) \equiv (P \vee \sim Q) \equiv \sim Q \vee P$

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	ص	ص
.....	.....	.....	.....	.....	خ	ص
.....	.....	.....	.....	.....	ص	خ
.....	.....	.....	.....	.....	خ	خ

[٥]  $\sim(P \vee \sim Q) \equiv (\sim P \wedge Q) \equiv \sim(P \leftarrow Q)$

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

**مثال ٢ <** اكتب قضية مكافئة لكل قضية من القضايا المركبة التالية :

القضية المركبة	القضية المكافئة لها
إذا كان $7 + 8 = 15$ فإن $10 - 7 = 8$	.....
العدد ٩ مربع ٣ و العدد ٣ جذر تربيعي لـ ٩	.....
إذا كان المثلث متساوي الساقين فإن زاويتا القاعدة متطابقتان	.....
قياس الزاوية القائمة = ٩٠ أو قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠	.....
المثلث حاد الزاوية ↔ كل زواياه حادة	.....
ليس صحيحاً أن : ( ٢ عدد موجب و -٢ عدد سالب )	.....

**- القضية الصائبة منطقياً :**

وهي القضية الصائبة دائماً مهما اختلفت قيم صواب مركباتها ، وتسمى (تحصيل حاصل) .

$$\begin{aligned}
 & \text{مثل :} \\
 & P \sim \vee P \\
 & \sim (P \wedge B) \vee (P \wedge \sim B) \\
 & (P \leftarrow B) \vee (B \sim \wedge P)
 \end{aligned}$$

ملاحظة : كل قضية مركبة من قضية ونفيها بأداة الربط {  $\vee$  } تكون صائبة منطقياً .

**- القضية الخاطئة منطقياً :**

وهي القضية الخاطئة دائماً مهما اختلفت قيم صواب مركباتها ، وتسمى (تناقض) .

$$\begin{aligned}
 & \text{مثل :} \\
 & P \sim \leftrightarrow P \quad , \quad P \sim \wedge P \\
 & (P \wedge B) \leftrightarrow (P \wedge \sim B) \quad , \quad (P \vee B) \wedge (P \vee \sim B) \\
 & (P \leftarrow B) \leftrightarrow (B \leftarrow P) \quad , \quad (P \sim \wedge B) \wedge (B \sim \wedge P)
 \end{aligned}$$

ملاحظة : كل قضية مركبة من قضية ونفيها بأداة الربط {  $\wedge$  } أو أداة الشرط {  $\leftrightarrow$  } تكون خاطئة منطقياً .

**مثال ١ < > : باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن القضايا التالية صائبة منطقياً ؟**

[٢]  $(P \leftarrow B) \vee (B \sim \wedge P)$

[١]  $\sim (P \wedge B) \vee (P \wedge \sim B)$

.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

[٤]  $P \leftarrow (P \wedge B)$

[٣]  $(P \vee B) \leftarrow (P \sim \leftarrow B)$

.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

سؤال ٢ : باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن القضايا التالية خاطئة منطقياً ؟

٢  $(P \leftarrow B) \leftrightarrow (P \wedge \sim B)$

١  $P \wedge \sim P$

.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	.....	.....

تمريره ❖ باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن :  $(P \wedge B) \vee (P \wedge \sim B) \equiv (P \wedge (B \vee \sim B))$


\*\*\*\*\*

الاقضاء المنطقي

- التعريف : لأي قضيتين P ، B نقول أن : P تقتضي B إذا كانت القضية الشرطية  $(P \leftarrow B)$  صائبة منطقياً ، ونسمي القضية الشرطية  $(P \leftarrow B)$  اقتضاء منطقياً ، ونعبر عنها رمزياً  $(P \Leftarrow B)$  .

” ملاحظة “

النتيجة رمزياً	النتيجة لفظياً	الشرط المتحقق
$P \Leftarrow B$	P تقتضي B	القضية $(P \leftarrow B)$ صائبة منطقياً
$P \not\Leftarrow B$	P لا تقتضي B	القضية $(P \leftarrow B)$ ليست صائبة منطقياً
$P \Leftrightarrow B$	P تكافئ B	$P \Leftarrow B$ ، $B \Leftarrow P$
$P \not\Leftarrow B$	P لا تكافئ B	$P \Leftarrow B$ ، $B \not\Leftarrow P$

➤ سؤال ١ : باستخدام جدول القيم أثبت أن :

$$[1] \quad (P \wedge Q) \Rightarrow P \quad , \quad [2] \quad (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

➤ سؤال ٢ : أكمل الجدول بوضع أحد الرموز التالية {  $\Leftrightarrow$  ,  $\neq$  ,  $\Leftarrow$  } :

القضية م	الرمز	القضية ب
$42 = 7 \times 6$	.....	$6 = 7 \div 42$
مربع العدد $3 = 9$	.....	الجزر التربيعي للعدد $3 = 9$
المثلث م ب ج متساوي الساقين	.....	زاويتا قاعدة المثلث متطابقة
قياس الزاوية المحيطية $90 =$	.....	الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة
شكل رباعي زواياه قائمة	.....	الشكل الرباعي عبارة عن مربع
س عدد $\Rightarrow$ ص	.....	س عدد سالب
س عدد سالب	.....	س عدد $\Rightarrow$ ص
س عدد زوجي	.....	س عدد يقبل القسمة على ٢

➤ سؤال ٣ : ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة أو علامة (x) أمام العبارة الخاطئة :

١	س $= 2 -$ $\Leftarrow$ س $= 3 - 8$ .	( )
٢	س $\leq$ صفر $\Leftarrow$ س $\Rightarrow$ ط .	( )
٣	المثلث م ب ج متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow$ المثلث م ب ج حاد الزوايا .	( )
٤	س $\Rightarrow$ ط $\Leftarrow$ س $\Rightarrow$ ص .	( )
٥	م ب ج مستطيل $\Leftarrow$ م ب ج مربع .	( )

- طرق البرهان الرياضي : فيما يلي نتناول أسلوبين للبرهان الرياضي :

أولاً : طريقة البرهان المباشر

فكرتها الأساسية تعتمد على أن الاقتضاء (  $\Leftarrow$  ) علاقة متعدية ، حيث :

$$(P \Leftarrow Q) \Leftarrow [(P \Leftarrow B) \wedge (B \Leftarrow Q)]$$

مثال ١ < باستخدام طريقة البرهان المباشر أثبت أن :

<p>(٢) <math>س = ٥ \iff س = ١٢٥</math> الحل : ..... ..... ..... .....</p>	<p>(١) <math>س = ٣ \iff س = ٩</math> الحل : ..... ..... ..... .....</p>
---	---

ثانياً : طريقة نقض الفرض

فكرتها الأساسية تعتمد على أن الاقتضاء ( $\implies$ ) يتحقق عندما تكون القضية الشرطية ( $پ \leftarrow ب$ ) صائبة منطقياً

وكذلك القضية ( $ب \sim \leftarrow پ \sim$ ) صائبة منطقياً ، حيث :  $پ \sim \leftarrow ب \sim \equiv (ب \leftarrow پ)$

مثال ١ < باستخدام طريقة نقض الفرض أثبت أن :

<p>(٢) <math>س = ٤ \iff س = ٦٤</math> الحل : ..... ..... ..... .....</p>	<p>(١) <math>س^٢</math> عدد زوجي <math>\iff س</math> عدد زوجي الحل : ..... ..... ..... .....</p>
--	--

\*\*\*\*\*

المسوّرات

- **الجملة المفتوحة :** هي جملة خبرية تتضمن متغيراً أو أكثر ، وتتحول إلى قضية عند التعويض عن كل متغير بعنصر من مجموعة التعويض ، ونرمز لها بالرمز : هـ (س) ، م (س) ، ق (س) .

- **مجموعة حل الجملة المفتوحة :** العناصر من مجموعة التعويض التي يُعوض بها عن المتغير وتجعل الجملة المفتوحة قضية صائبة .

مثل : س عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( جملة مفتوحة مجموعة تعويضها الأعداد الطبيعية )

عندما : س = صفر  $\iff$  صفر عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية صائبة )

- س = ١  $\iff$  ١ عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية صائبة )
- س = ٢  $\iff$  ٢ عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية صائبة )
- س = ٣  $\iff$  ٣ عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية صائبة )
- س = ٤  $\iff$  ٤ عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية صائبة )
- س = ٥  $\iff$  ٥ عدد طبيعي أصغر من ٥ . ( قضية خاطئة )
- س = ٦  $\iff$  ١ عدد طبيعي أصغر من ٦ . ( قضية خاطئة )

وهكذا بقية الأعداد الطبيعية تعطي قضايا خاطئة ، ∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ } .

- أنواع القضايا المسورة : لها نوعان وهما :

أولاً : القضايا المسورة كلياً

- التعريف : هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ العموم { كل ، جميع ، كافة } أو الرمز (  $\forall$  ) ،

وتكتب رمزياً :  $\forall s \in S : P(s)$

حيث /  $S$  : مجموعة التعويض ،  $P(s)$  : الجملة المفتوحة .

مثل : كل الأعداد الطبيعية  $\leq$  صفر ،  $\forall s \in S : s - 5 \in S$

- قاعدة : (١) القضية المسورة كلياً (  $\forall$  ) تكون صائبة إذا كانت كل قيم  $s$  تعطي قضايا صائبة بعد التعويض .

(٢) القضية المسورة كلياً (  $\forall$  ) تكون خاطئة فقط إذا كانت إحدى قيم  $s$  على الأقل تعطي قضية خاطئة بعد التعويض .

ثانياً : القضايا المسورة جزئياً

- التعريف : هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ الخصوص { بعض ، جزء من } أو الرمز (  $\exists$  ) ،

وتكتب رمزياً :  $\exists s \in S : P(s)$

حيث /  $S$  : مجموعة التعويض ،  $P(s)$  : الجملة المفتوحة .

مثل : بعض الأعداد الطبيعية  $\leq 100$  ،  $\exists s \in S : s - 5 \in S$  .

- قاعدة : (١) القضية المسورة جزئياً (  $\exists$  ) تكون خاطئة إذا كانت كل قيم  $s$  تعطي قضايا خاطئة بعد التعويض .

(٢) القضية المسورة كلياً (  $\exists$  ) تكون صائبة فقط إذا كانت إحدى قيم  $s$  على الأقل تعطي قضية صائبة بعد التعويض .

مثال ١ < بين قيم صواب القضايا المسورة التالية ، بعد تحديد نوعها :

قيمة صوابها	نوعها	القضية المسورة
.....	.....	كل الأعداد الطبيعية < صفر
.....	.....	$\exists s \in S : s$ عدد سالب
.....	.....	$\forall s \in S : s + 5 = 5 + s$
.....	.....	$\exists s \in S : s - 1 \geq 0$ .
.....	.....	$\forall s \in S : s^2 = 3$
.....	.....	بعض الأعداد الطبيعية تقبل القسمة على ٢١

مثال ٢ < اكتب المسورات التالية لفظياً أو رمزياً حسب المطلوب : ( الحل باللون الأحمر )

القضية المسورة رمزياً	القضية المسورة لفظياً
.....	كل الأعداد الصحيحة أصغر من الصفر
$\exists s \in \mathbb{N} : s > \text{صفر}$	.....
.....	جزء من الأعداد النسبية تنتمي للأعداد الطبيعية
$\exists s \in \mathbb{P} : s + \text{صفر} = \text{صفر} + s$	.....
.....	بعض الأعداد الصحيحة إبدالية في الضرب
$\forall s \in \mathbb{N} : s + (-s) = \text{صفر}$	.....
.....	الواحد هو العنصر المحايد الضربي في الأعداد الحقيقية
$\forall s \in \mathbb{R} : \sqrt{s} \in \mathbb{R}$	.....

- نفي القضايا المسورة : نقوم بالخطوتين التاليتين :

(١) نغيّر أفاظ العموم إلى أفاظ الخصوص أو رمز (  $\forall$  ) إلى (  $\exists$  ) والعكس صحيح .

(٢) نفي الجملة المفتوحة لفظياً أو رمزياً حسب نوعها بالطرق الخاصة بنفي القضايا البسيطة .

أي أن :

$$\sim [ \forall s \in \mathbb{N} : s \sim \text{هـ} (s) ] \equiv [ \exists s \in \mathbb{N} : s \sim \text{هـ} (s) ]$$

$$\sim [ \exists s \in \mathbb{N} : s \sim \text{هـ} (s) ] \equiv [ \forall s \in \mathbb{N} : s \sim \text{هـ} (s) ]$$

مثال ١ < انفي المسورات التالية حسب نوعها :

القضية المسورة	نفيها
كل الأعداد الصحيحة أصغر من الصفر	.....
$\exists s \in \mathbb{P} : s + \text{صفر} = \text{صفر} + s$	.....
جزء من الأعداد النسبية تنتمي للأعداد الطبيعية	.....
$\forall s \in \mathbb{N} : s + (-s) = \text{صفر}$	.....
بعض الأعداد الصحيحة لها خاصية الإبدال في الضرب	.....
$\exists s \in \mathbb{N} : s \leq \text{صفر}$	.....
الواحد هو العنصر المحايد الضربي في الأعداد الحقيقية	.....
$\forall s \in \mathbb{R} : \sqrt{s} \in \mathbb{R}$	.....
كل عدد أولي هو عدد فردي	.....
$\exists s \in \mathbb{N} : s + s = 2s$	.....

- مقارنة بين المسورات :

وجه المقارنة	المسورة كلياً	المسورة جزئياً
التعريف	هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ أو رمز العموم .	هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ أو رمز الخصوص .
ألفاظها	كل ، جميع ، كافة	بعض ، جزء من ، قليل من
رموزها	$\forall$	$\exists$
صورتها العامة	$\forall s \exists s \sim : هـ (س)$	$\exists s \exists s \sim : هـ (س)$
نفيها	$\exists s \exists s \sim : هـ (س)$	$\forall s \exists s \sim : هـ (س)$
تكون صائبة	كل قيم س تعطي قضايا صائبة	إحدى قيم س على الأقل تعطي قضية صائبة
تكون خاطئة	إحدى قيم س على الأقل تعطي قضية خاطئة	كل قيم س تعطي قضايا خاطئة
أمثلة	كل الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على ٢ $\forall s \exists s \sim : س = ١ \times س$	بعض الأعداد الفردية هي أعداد أولية $\exists s \exists s \sim : س + صفر = س$

\*\*\*\*\*

تمارين الوحدة الأولى

<p>[ ٤ ] حدد قيم صواب القضايا الموجودة في التمرين ٣ :</p>	<p>[ ١ ] حدد قيمة صواب كل قضية من القضايا التالية :</p> <p>(١) الرياض عاصمة الكويت .                  (٢) عدد سكان اليمن أقل من عشرين مليون .                  (٣) أضلاع المعين متساوية في الطول .                  (٤) العدد ٧ لا يقبل القسمة على ٢ .                  (٥) قطرا متوازي الأضلاع متناصفان .                  (٦) <math>٢ - ٢ \neq ط</math> .                  (٧) العدد ٣ &lt; العدد ٧ .                  (٨) <math>٢٥ = ٢٥</math> .                  (٩) المثلث المتساوي الأضلاع قائم الزاوية .                  (١٠) الزاويتان المتتامتان قياسهما يساوي ١٨٠ .                  (١١) مجموع زوايا المثلث ٣٦٠ .</p>
<p>[ ٥ ] أكمل القضايا ما يجعلها صائبة مرة وخاطئة مرة :</p> <p>(١) ٥٤ عدد صحيح و يقبل القسمة على العدد .....                  (٢) <math>٤ = ٧ + ٢</math> أو <math>٤ = ٧ \times ٢ = \dots</math>                  (٣) <math>١٠ &gt; ٨ \leftarrow ٩ &gt; \dots</math>                  (٤) <math>٣ + ٢ \neq ٥ \leftrightarrow ٢ + ٢ \neq \dots</math></p>	<p>[ ٢ ] اقف القضايا الموجودة في التمرين ١ :</p>
<p>[ ٦ ] أنشئ جدول صواب القضايا التالية :</p> <p>(١) <math>٨ \sim \sim ب</math>                  (٢) <math>(ب \sim \sim ٧) \leftarrow \sim ب</math>                  (٣) <math>(ب \sim \leftarrow ٧) \vee (\sim ب \leftrightarrow \sim ٧)</math>                  (٤) <math>\sim ب \leftrightarrow (\sim ٨ \sim ٧)</math></p>	<p>[ ٣ ] اكتب قضايا وصفية للقضايا التالية ، حيث :</p> <p><math>٧</math> ( المثلث قائم ) ، <math>ب</math> ( الزاوية منفرجة ) :</p> <p>(١) <math>٨ \sim \sim ب</math>                  (٢) <math>ب \vee ٧ \sim</math>                  (٣) <math>\sim ٨ \sim \sim ب</math>                  (٤) <math>٧ \sim \sim ب</math>                  (٥) <math>٧ \leftarrow \sim ب</math>                  (٦) <math>\sim ب \leftrightarrow \sim ٧</math>                  (٧) <math>(ب \sim \leftrightarrow ٧) \sim</math></p>
<p>[ ٧ ] لأي قضيتيه <math>٧</math> ، <math>ب</math> أثبت أه :</p> <p>(١) <math>(ب \vee ٧) \equiv (ب \leftarrow ٧)</math>                  (٢) <math>(ب \sim \sim ٨ \sim ٧) \sim \equiv ب \vee ٧</math>                  (٣) <math>(ب \vee ٧) \wedge (ب \vee ٧) \equiv (ب \wedge ٧) \vee ٧</math>                  (٤) <math>٧ \sim \sim ب</math> صائبة منطقياً                  (٥) <math>(ب \wedge ٧) \leftarrow (ب \vee ٧)</math> صائبة منطقياً                  (٦) <math>(ب \leftrightarrow ٧) \iff (ب \leftarrow ٧)</math></p>	

# الوحدة الثانية

## التطبيقات

مراجعة التطبيق

- **تعريف التطبيق :** هو علاقة تربط كل عنصر من المجال ( س ) بعنصر وحيد من المجال المقابل ( ص ) ، ويكتب رمزياً / ت : س ← ص .

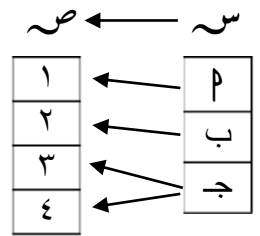
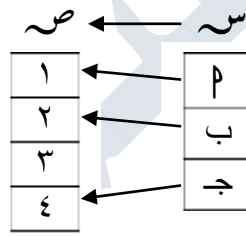
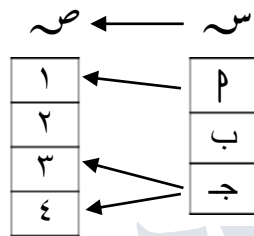
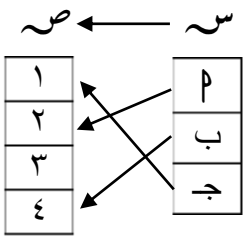
- **مكونات التطبيق :** ( ١ ) المجال ( المنطلق ) ، ( ٢ ) المجال المقابل ( المستقر ) ، ( ٣ ) قاعدة التطبيق

- **قاعدة التطبيق :** هي العلاقة التي تربط كل عنصر من المجال بصورته من المجال المقابل ، وتكتب رمزياً / ت(س) = ص .

- **مدى التطبيق :** هو مجموعة صور عناصر المجال من المجال المقابل . وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل . المدى  $\subseteq$  المجال المقابل .

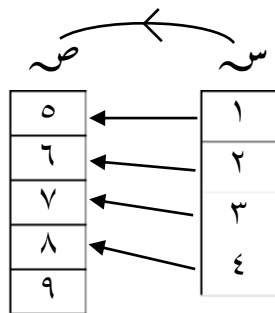
” ملاحظة “ يمكن التمييز بين العلاقة والتطبيق من خلال عناصر المجال ، حيث كل عنصر منه له صورة وحيدة .

◀ مثال ١ ▶ : لتكن :  $S = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$  ،  $V = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$  ، فبيّن : أي العلاقات التالية تمثل تطبيقاً ؟ مع ذكر السبب .



◀ مثال ٢ ▶ : ليكن / ت : س ← ص موضحاً بالشكل المرسوم جانباً ،

حدّد : المجال و المجال المقابل والمدى وقاعدة التطبيق .



الحل :

- أساليب التعبير عن التطبيق : يمكن التعبير عن التطبيق بأحد الأساليب الآتية :

- ( ١ ) القاعدة ( معادلة رياضية ) .
- ( ٢ ) الأزواج المرتبة .
- ( ٣ ) المخططات السهمية .
- ( ٤ ) الجدول البياني .
- ( ٥ ) الرسم البياني .

◀ مثال ٣ ▶ : ليكن / ت : س ← ص والمعرف بالقاعدة ت(س) = ١ - س ، حيث :

$S = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ \}$  ،  $V = \{ ١ - ٢ ، ٢ - ٣ ، ٣ - ٤ ، ٤ - ٥ ، ٥ - ٦ ، ٦ - ٧ ، ٧ - ٨ \}$  ، كمخطط سهمي .

الحل :

مثال ٤ < : ليكن / ت :  $E \leftarrow E$  والمعزّف بالقاعدة ت (س) = س - ٥ ،  
مثّل التطبيق بالجدول والرسم البياني .

الحل :

مثال ٥ < : ليكن / ت :  $S \leftarrow S$  والمعزّف بالقاعدة ت (س) = س - ٢ ، حيث :  
 $S = \{ ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ \}$  ،  $S = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ \}$  ، أوجد المدى ومثّل التطبيق  
كأزواج مرتبة وبالمخطط السهمي .

الحل :

\*\*\*\*\*

### الصورة العكسية للتطبيق ( معكوس التطبيق )

\* لنكن : ت (١) = ١ ، ت (ب) = ٢ ، ت (ج) = ٣ ، ت (د) = ٣ ، فإننا نقول أن صورة العنصر ١ هي ١ ،  
وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ١ هي ١ ، و صورة العنصر ب هي ٢ ، وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ٢  
هي ب ، وصورتي العنصرين { ج ، د } هي ٣ ، وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ٣ هي المجموعة { ج ، د } ،  
فإذا كانت : صورة العنصر ت (س) = ص ، فإن الصورة العكسية للعنصر ص يرمز لها بالرمز ت<sup>-١</sup> (ص) = س ،  
فإذا كان التطبيق يرمز له بالرمز ت :  $S \leftarrow S$  فإن معكوسه يرمز له بالرمز ت<sup>-١</sup> :  $S \leftarrow S$  .

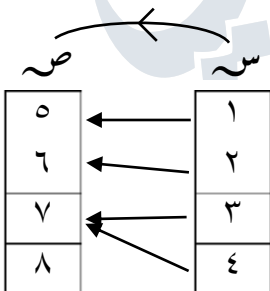
” ملاحظة “

- ١) الصورة العكسية لأي عنصر من المجال المقابل إما أن تكون عنصراً من المجال أو أكثر من عنصر أو لا توجد صورة عكسية .
- ٢) الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من المجال المقابل هي مجموعة جزئية من المجال .
- ٣) معكوس أي تطبيق هو علاقة قد تكون تطبيقاً إذا توفرت فيها الشرط ( كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط ) .
- ٤) أي عنصر من المجال المقابل ليس له صورة عكسية فإنه لا ينتمي لعناصر مدى التطبيق .

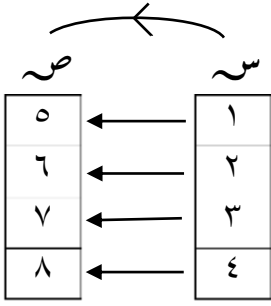
مثال ١ < : ليكن / ت :  $S \leftarrow S$  موضحاً بالمخطط السهمي ،

هل معكوس التطبيق ت<sup>-١</sup> :  $S \leftarrow S$  يسمى تطبيقاً ، ولماذا ؟

الحل :



مثال ٢ : ليكن / ت : س ← ص موضحاً بالمخطط السهمي ، هل معكوس التطبيق ت<sup>-١</sup> : ص ← س يسمى تطبيقاً ، ولماذا ؟



الحل :

مثال ٣ : ليكن / ت : س ← ص ، حيث ت = { (٧, ٥) ، (١, ٢) ، (٥, ٣) } أوجد ما يلي :

(١) المجال = ..... ، المدى = (٢ ، ..... )  
 (٣) معكوس التطبيق كأزواج مرتبة ت<sup>-١</sup> = .....  
 (٤) ت(٥) = ..... ، ت<sup>-١</sup>(٥) = .....  
 (٥) هل ت(٥) = ت<sup>-١</sup>(٥) ، ولماذا ؟

مثال ٤ : ليكن / ت : ع ← ح ، معرفةً بالقاعدة ت(س) = س + ٣ . أوجد ما يلي : ت<sup>-١</sup>(٣) ، ت<sup>-١</sup>(٤) ، ت<sup>-١</sup>(٢) ، ت<sup>-١</sup>{ ٤ ≥ ٥ ≥ ٧ } .

الحل :

مثال ٥ : ليكن التطبيق / ت : ع ← ح ، معرفةً بالقاعدة ت(س) = س<sup>٢</sup> + ٢ . أوجد : ت<sup>-١</sup>(٤) ، ثم بيّن أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً .

الحل :

### أنواع التطبيقات

#### أولاً : التطبيق الثابت

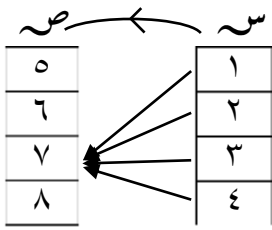
- التعريف : يسمى التطبيق ت : س ← ص تطبيقاً ثابتاً إذا ارتبطت جميع عناصر المجال بعنصر واحد فقط من المجال المقابل .

أي أن :  $\forall s \in S \Rightarrow s = p$  ، حيث :  $p \in V$  ( المجال المقابل ) .

- شرط التطبيق الثابت :

توجد صورة موحدة لجميع عناصر المجال .

أي مهما اختلفت عناصر المجال فإن صورتها هي عنصر ثابت من المجال المقابل .



مثال ١ : ليكن / ت : س ← ص معرفةً بالقاعدة ت(س) = ٧

حدد : المدى ، ونوع التطبيق ؟

الحل :

” ملاحظة “

(١) مدى التطبيق الثابت دائماً عبارة عن عنصر واحد فقط .  
 (٢) الصورة العكسية في التطبيق الثابت تساوي المجال ، أي أن : ت<sup>-١</sup>(ص) = س .  
 (٣) معكوس التطبيق الثابت لا يسمى تطبيقاً ، إلا إذا كان التطبيق بين عنصرين فقط .

مثال ٢ : ليكن / ت : س ← ص ، قاعدته «س يقبل القسمة على ص» ، حيث :

س = {٦، ٩، ١٢، ١٥} ، ص = {٣، ٧، ١١} ، أثبت أن التطبيق ثابت ؟

الحل :

\*\*\*\*\*

**ثانياً : التطبيق المحايد (المطابق)**

- التعريف : يسمى التطبيق / ت : س ← ص محايداً (مطابقاً) إذا ارتبط كل عنصر في المجال بنفسه في المجال المقابل . أي أن :  $\forall s \in S : ت(s) = s$  .

- شرط التطبيق المحايد :

الصورة العكسية لكل عنصر تساوي صورة العنصر وتساوي العنصر نفسه .

مثال ١ : ليكن / ت : س ← ص تطبيقاً محايداً ، حيث : س = {٢، ٣، ٥}

أوجد مدى التطبيق ، ومثله بالمخطط السهمي .

الحل :

” ملاحظة “

(١) مدى التطبيق المحايد دائماً يساوي المجال ، أي أن : المدى = المجال المقابل .  
 (٢) الصورة العكسية في التطبيق المحايد تساوي الصورة ، أي أن : ت<sup>-١</sup>(ص) = ت(س) = س .  
 (٣) معكوس التطبيق المحايد يسمى تطبيقاً إذا كان التطبيق من مجموعة إلى نفسها .

مثال ٢ : ليكن / ت : ط ← ص معرفةً بالقاعدة ت(س) = س

أوجد مدى التطبيق ، ما نوع التطبيق ؟ وهل معكوس التطبيق يسمى تطبيق ؟

الحل :

**ثالثاً : التطبيق الغامر ( الشامل )**

- **التعريف :** يسمى التطبيق ت : س ← ص غامراً ( شاملاً ) إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة على الأقل لعنصر من عناصر المجال .

أي أن :  $\forall s \in S \exists v \in V$  فإنه  $s \in S \Rightarrow s$  بحيث ت(س) = ص .

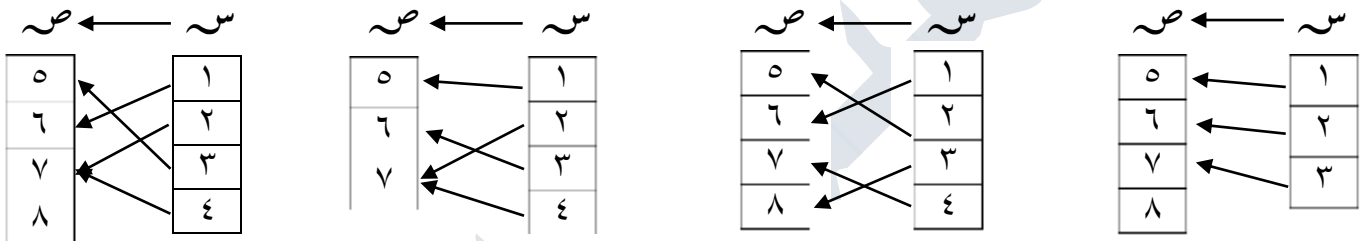
- **شرط التطبيق الغامر :**

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة على الأقل ، ت<sup>-1</sup>(ص) ≠ ∅ .

**” ملاحظة “**

( ١ ) في التطبيق الغامر المدى دائماً يساوي المجال المقابل ، أي : المدى = المجال المقابل .  
 ( ٢ ) يكون التطبيق ليس غامراً إذا وجد عنصر من المجال المقابل ليس له صورة عكسية ، أي أن : ت<sup>-1</sup>(ص) = ∅ .  
 ( ٣ ) معكوس التطبيق الغامر يكون تطبيقاً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط .

**مثال ١ < > :** أي التطبيقات التالية تمثل تطبيقاً غامراً ؟ مع ذكر السبب .



**” ملاحظة “ :** في المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق ( غامر أو ليس غامراً ) من خلال المجال المقابل .

**مثال ٢ < > :** أي القواعد التالية تمثل تطبيقاً غامراً ؟ مع ذكر السبب .

<p>( ٢ ) ت(س) = ٢س - ١ ، حيث ت : ص ← ص</p> <p>الحل : .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>( ١ ) ت(س) = ٣ + س ، حيث ت : ص ← ص</p> <p>الحل : .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>( ٤ ) ت(س) = <math>\frac{٢-٣س}{٤}</math> ، حيث ت : ع ← ع</p> <p>الحل : .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>( ٣ ) ت(س) = <math>\frac{٢}{١+س}</math> ، حيث ت : ع ← ع</p> <p>الحل : .....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

**” ملاحظة “ :** نحدد نوع التطبيق ( غامر أو ليس غامراً ) من خلال الصورة العكسية لقاعدة التطبيق .

\*\*\*\*\*

رابعاً : التطبيق المتباين ( الأحادي )

- **التعريف :** يسمى التطبيق  $t : S \leftarrow V$  متبايناً ( أحادياً ) إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة على الأكثر لعنصر من عناصر المجال .  
أي أن :  $\forall v \in S \Rightarrow t^{-1}(v) \neq \{ \dots , s_1 \}$  .

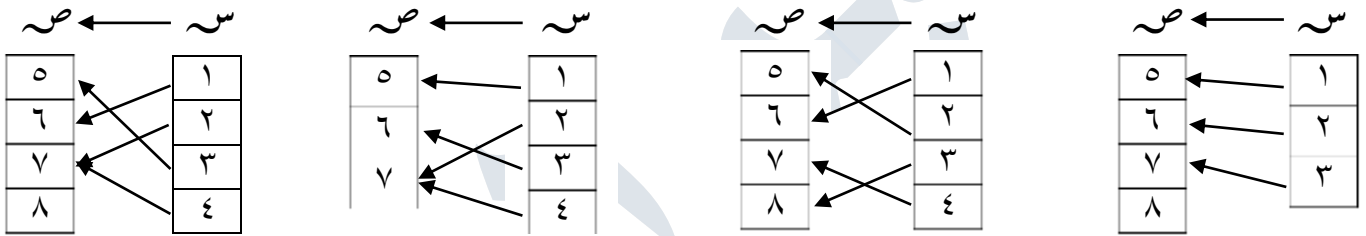
- شرط التطبيق المتباين :

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة على الأكثر ،  $t^{-1}(v) = \{ s_1 , s_2 , \dots \}$   
 $t(s_1) = t(s_2) \iff s_1 = s_2$  أو  $t(s_1) \neq t(s_2) \iff s_1 \neq s_2$

” ملاحظة “

( ١ ) في التطبيق المتباين المدى جزئي أو يساوي المجال المقابل ، أي : المدى  $\subseteq$  المجال المقابل .  
( ٢ ) يكون التطبيق ليس متبايناً إذا وُجد عنصر من المجال المقابل له أكثر من صورة عكسية ،  
أي أن :  $t^{-1}(v) = \{ s_1 , \dots \}$  .  
( ٣ ) معكوس التطبيق المتباين يكون تطبيقاً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط .

◀ مثال ١ ▶ : أي التطبيقات التالية تمثل تطبيقاً متبايناً ؟ مع ذكر السبب .



” ملاحظة “ : من المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق ( متباين أو ليس متبايناً ) من خلال المجال المقابل .

◀ مثال ٢ ▶ : ليكن  $t : E \leftarrow E$  ، أي القواعد التالية تمثل تطبيقاً متبايناً ؟ مع ذكر السبب .

( ٢ ) $t(s) = s^2 - 1$	( ١ ) $t(s) = s + 3$
( ٤ ) $t(s) = \frac{2 - s^3}{4}$	( ٣ ) $t(s) = \frac{2}{s + 1}$

” ملاحظة “ : نحدد نوع التطبيق ( متباين أو ليس متبايناً ) من خلال تطبيق شرط المتباين .

**خامساً : التطبيق التقابل**

- **التعريف :** يسمى التطبيق  $f : S \rightarrow V$  تقابلاً إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة فقط لعنصر من عناصر المجال ، أي أن التطبيق غامرّ ومتباين في آن واحد .

أي أن  $\forall v \in V \exists s \in S : f(s) = v$  .

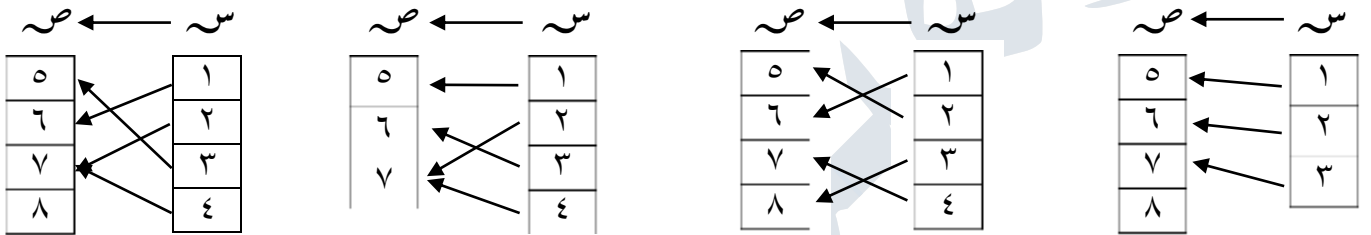
- **شرط التطبيق التقابل :**

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط ،  $f^{-1}(v) = s$  .

**“ ملاحظة ”**

( ١ ) في التطبيق التقابل المدى يساوي المجال المقابل ، أي : المدى = المجال المقابل .  
 ( ٢ ) يكون التطبيق ليس تقابلاً إذا وُجد عنصر من المجال المقابل له أكثر من صورة عكسية أو ليس له صورة عكسية ، أي ليس متبايناً أو ليس غامراً أو ليس كليهما .  
 ( ٣ ) معكوس التطبيق التقابل يكون تطبيقاً دائماً .

➤ **مثال ١** : أي التطبيقات التالية تمثل تطبيقاً تقابلاً ؟ مع ذكر السبب .



“ ملاحظة ” : من المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق ( تقابل أو ليس تقابلاً ) من خلال المجال المقابل .

➤ **مثال ٢** : ليكن  $f : S \rightarrow V$  ، أي القواعد التالية تمثل تطبيقاً تقابلاً ؟ مع ذكر السبب .

$(3) f(s) = \frac{2}{s+3}$	$(2) f(s) = 6s - 5$	$(1) f(s) = s + 7$
<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

“ ملاحظة ” : نحدد نوع التطبيق ( تقابل أو ليس تقابلاً ) من خلال شرطي الغامر والمتباين .

\*\*\*\*\*

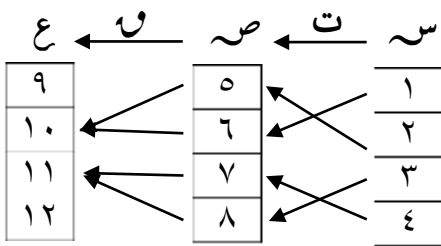


تركيب تطبيقين

- التعريف : تركيب التطبيقين  $t : S \rightarrow V$  ،  $u : V \rightarrow E$  هو التطبيق  $(u \circ t) : S \rightarrow E$  والمعرف بالقاعدة :  $(u \circ t)(s) = u(t(s))$  ، لكل  $s \in S$  .

” ملاحظة “  
 (١) لتركيب تطبيقين  $(u \circ t)$  لا بد أن يكون المجال المقابل في التطبيق الأول  $t$  مساوياً للمجال في التطبيق الثاني  $u$  ، أي أن : مدى  $t \subseteq$  مجال  $u$  .  
 (٢)  $(u \circ t) \neq (t \circ u)$  .

مثال ١ : ليكن  $t : S \rightarrow V$  ،  $u : V \rightarrow E$  ، والتركيب  $(u \circ t) : S \rightarrow E$  موضح بالمخطط السهمي ، أوجد : المجال والمجال المقابل للتركيب ، ثم أوجد المدى .



الحل :  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

مثال ٢ : ليكن  $t : S \rightarrow V$  ،  $u : V \rightarrow E$  ، حيث :  $t(3) = 7$  ،  $t(5) = 9$  ،  $u(9) = 12$  ،  $u(8) = 3$  .  
 أوجد :  $(u \circ t)(5) =$  .....  
 $(t \circ u)(8) =$  .....

مثال ٣ : ليكن  $t : S \rightarrow V$  ،  $u : V \rightarrow E$  ، حيث :  $t(s) = s^2$  ،  $u(s) = s^3$  .  
 أوجد :  $(u \circ t)(s) =$  .....  
 $(t \circ u)(s) =$  .....

مثال ٤ : ليكن  $t : S \rightarrow V$  ،  $u : V \rightarrow E$  ، حيث :  $t(s) = s^2 - 1$  ،  $u(s) = (s + 2)^2$  .  
 أوجد :  $(u \circ t)(s) =$  .....  
 $(t \circ u)(s) =$  .....

مثال ٥ : ليكن  $f : E \rightarrow S$  ،  $g : S \rightarrow E$  حيث  $f(s) = s + 1$  ،  
 $g(s) = s^3$  .  
 (١) أوجد :  $(f \circ g)(s) =$  .....  
 $(g \circ f)(s) =$  .....  
 (٢) هل  $(f \circ g)(s) = (g \circ f)(s)$  ؟  
 (٣) أوجد :  $(f \circ g)(s^2) =$  .....  
 $(g \circ f)(5) =$  .....

\*\*\*\*\*

الوحدة الثالثة

القوى والجذور



القوى الصحيحة

أولاً : القوى الصحيحة الموجبة

- التعريف :  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists \text{ص}^+ \text{فإن } : p^{\text{ص}}$  يعني ضرب العدد  $p$  في نفسه  $\text{ص}$  مرة ، وتقرأ (  $p$  أس  $\text{ص}$  )  
 أو (  $p$  مرفوع للقوة  $\text{ص}$  ) أو ( القوة  $\text{ص}$  للعدد  $p$  ) ، حيث  $p$  يسمى الأساس ،  $\text{ص}$  يسمى الأس أو القوة .

- قوانين الأسس الصحيحة الموجبة :  $\forall p, b \in \mathbb{N}, m, n \in \mathbb{N}, \text{ص}^+ \text{فإن } :$

(١)  $p^{m+n} = p^m \times p^n$  (نجم الأسس المتحدة الأساسات عند الضرب) .

(٢)  $p^{m-n} = \frac{p^m}{p^n}$  ، حيث  $m > n, 0 \neq p$  (نطح الأسس المتحدة الأساسات عند القسمة) .

(٣)  $p^{m \times n} = (p^m)^n$  (نضرب عند القوة المرفوعة للقوة) .

(٤)  $p^b \times p^m = p^{(b \times m)}$  (توزيع الأس على الأساسات) .

(٥)  $\frac{p^m}{p^n} = p^{(\frac{m}{n})}$  ، حيث  $b \neq 0$  (توزيع الأس على القسمة) .

- حالات خاصة : يمكن استنتاج الحالات التالية :

(١) إذا كان  $m \neq 0, m > n$  فإن  $\frac{1}{p^{m-n}} = \frac{p^n}{p^m}$   
 (٢) إذا كان  $m \neq 0, m = n$  فإن  $1 = p^0 = \frac{p^m}{p^m}$   
 (٣)  $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 = p^0$  ، فإن  $1 = p^0$

مثال ١ < اكتب ما يلي في أبسط صورة :

(١)  $3^3 \times 3^4 = \dots$  ، (٢)  $3^3 \times 4^3 = \dots$  ، (٣)  $3^2 \times 6^2 = \dots$

(٤)  $\frac{7^6}{2^7} = \dots$  ، (٥)  $\frac{3^6}{4^6} = \dots$  ، (٦)  $\frac{5^2}{2^5} = \dots$

(٧)  $7^3 = \dots$  ، (٨)  $2^2 \times 2^4 = \dots$

(٩)  $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^3 = \dots$  ، (١٠)  $\frac{س^2}{س^{2+س}} = \dots$

(١١)  $9 \times 81 \times 27 = \dots$  ، (١٢)  $125 \times 25 = \dots$

(١٣)  $2^2 = \dots$  ، (١٤)  $\frac{16 \times 2 \times 8}{2 \times 4} = \dots$

ثانياً : القوى الصحيحة السالبة

- التعريف :  $a \neq 0$  ،  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  ، فإن  $a^{-m}$  يعني مقلوب ضرب العدد  $a$  في نفسه  $m$  مرة ،

وتقرأ (مقلوب  $a$  أس  $m$ ) ، حيث  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  .

- حالات خاصة : يمكن استنتاج الحالات التالية :

(1)  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ،  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  (تحويل الأس الموجب إلى أس سالب والعكس)

(2)  $a^{-m} \div a^{-n} = a^{-m-(-n)} = a^{-m+n}$  ،  $a^m \div a^{-n} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$  ،  $a^{-m} \div a^n = a^{-m-n}$  ،  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(تحويل البسط إلى مقام أو العكس يُغيّر إشارة الأس)

مثال ١ < اكتب ما يلي بأس موجب :

(1)  $2^{-3} = \dots\dots\dots$  ، (2)  $(\sqrt{2})^{-1} = \dots\dots\dots$  ، (3)  $3^{-3} = \dots\dots\dots$  ،  
 (4)  $\frac{1}{7^{-5}} = \dots\dots\dots$  ، (5)  $(\frac{3}{4})^{-2} = \dots\dots\dots$  ، (6)  $(\frac{1}{5})^{-4} = \dots\dots\dots$

مثال ٢ < أوجد قيمة ما يلي :

(1)  $(\frac{3}{4})^{-2} \times (\frac{4}{3})^{-3} = \dots\dots\dots$   
 (2)  $(\frac{2}{3})^{-2} \div (\frac{3}{4})^{-1} = \dots\dots\dots$   
 (3)  $\frac{8^{+2} + 8^{+1}}{8^{+2} - 8^{+1} \times 2} = \dots\dots\dots$   
 (4)  $\frac{2^{+2} \times 12 + 2^{+3}}{8^{+2} \times 3 - 8^{+2} \times 64} = \dots\dots\dots$   
 (5)  $\frac{(-3)^2 \times (-5)^3 \times (-2)^4}{(-15)^2 \times (-6)^2} = \dots\dots\dots$

مثال ٢ < بسّط ما يلي إلى أبسط صورة :

(1)  $\frac{5^2 \times 3^2}{5^{-2} \times 3^{-2}} = \dots\dots\dots$   
 (2)  $\frac{4^{+2} \times 4^2}{2^2 \times 16^2} = \dots\dots\dots$

الجذور النونية

- مقدمة : تعلم أن :  $2 = \sqrt[2]{4} \leftarrow 4 = 2^2$  وكذلك  $2 = \sqrt[3]{8} \leftarrow 8 = 2^3$
- $2 = \sqrt[4]{16} \leftarrow 16 = 2^4$  وكذلك  $2 = \sqrt[5]{32} \leftarrow 32 = 2^5$
- $2 = \sqrt[6]{64} \leftarrow 64 = 2^6$  وكذلك  $2 = \sqrt[7]{128} \leftarrow 128 = 2^7$
- $3 = \sqrt[2]{9} \leftarrow 9 = 3^2$  وكذلك  $3 = \sqrt[3]{27} \leftarrow 27 = 3^3$
- $3 = \sqrt[4]{81} \leftarrow 81 = 3^4$  وكذلك  $3 = \sqrt[5]{243} \leftarrow 243 = 3^5$
- $4 = \sqrt[2]{16} \leftarrow 16 = 4^2$  وكذلك  $4 = \sqrt[3]{64} \leftarrow 64 = 4^3$
- $5 = \sqrt[2]{25} \leftarrow 25 = 5^2$  وكذلك  $5 = \sqrt[3]{125} \leftarrow 125 = 5^3$
- $6 = \sqrt[2]{36} \leftarrow 36 = 6^2$  وكذلك  $6 = \sqrt[3]{216} \leftarrow 216 = 6^3$
- $7 = \sqrt[2]{49} \leftarrow 49 = 7^2$  وكذلك  $7 = \sqrt[3]{343} \leftarrow 343 = 7^3$
- $8 = \sqrt[2]{64} \leftarrow 64 = 8^2$  وكذلك  $8 = \sqrt[3]{512} \leftarrow 512 = 8^3$
- $10 = \sqrt[2]{100} \leftarrow 100 = 10^2$  وكذلك  $10 = \sqrt[3]{1000} \leftarrow 1000 = 10^3$

- تعريف : (١)  $\forall p, b, c, d, p > 1$  إذا كان  $b^p = c \leftarrow c = b^p$  ، والصيغة :

$b = \sqrt[p]{c}$  ب تقرأ : ( ب هو الجذر النوني لـ c ) ، حيث يسمى p المجذور ، د دليل الجذر ، ب الجذر .

(٢)  $\forall p, b, c, d, p \geq 2$  إذا كان  $b^p = c \leftarrow c = b^p$  ، فإن ب عدد حقيقي غير سالب .

(٣)  $\forall p, b, c, d, p < 2$  إذا كان  $b^p = c \leftarrow c = b^p$  ، فإن ب عدد حقيقي موجب أو سالب .

- ملاحظة :

(١) بمقارنة القوة النونية (  $b^p$  ) مع الجذر النوني (  $b = \sqrt[p]{c}$  ) فإن : الأساس = الجذر ، والأس = دليل الجذر ، وناتج القوة = المجذور ، وبذلك يمكن تحويل القوة إلى جذر والجذر إلى قوة .

(٢) القوة النونية (  $b^p$  ) يكون ناتجها موجبا إذا كان د عدداً زوجياً ، ويكون ناتجها سالباً إذا كان د عدداً فردياً .

(٣) الجذر النوني  $\sqrt[p]{c}$  لا يوجد له جذر  $c$  إذا كان د عدداً زوجياً ، ويكون جذره سالباً إذا كان د عدداً فردياً .

(٤) الجذور الصماء : هي الجذور التي لا يمكن كتابتها بصورة عدد نسبي ، مثل :  $\sqrt[3]{4}$  ،  $\sqrt[4]{7}$  ،  $\sqrt[5]{2}$  ،  $\sqrt[3]{8}$  .

مثال ١ < أوجد قيمة ما يلي :

(١) ..... =  $\sqrt[2]{64}$  (٢) ..... =  $\sqrt[2]{64}$  (٣) ..... =  $\sqrt[3]{64}$  (٤) ..... =  $\sqrt[3]{27}$   
 (٥) ..... =  $\sqrt[3]{27}$  (٦) ..... =  $\sqrt[5]{32}$  (٧) ..... =  $\sqrt[5]{243}$  (٨) ..... =  $\sqrt[4]{16}$   
 (٩) ..... =  $\sqrt[4]{49}$  (١٠) ..... =  $\sqrt[4]{81}$  (١١) ..... =  $\sqrt[6]{64}$   
 \*\*\*\*\*

الأسس النسبية

- تعريف: (١)  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \exists \sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  ، حيث  $\sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}$  .  
 (٢)  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \exists \sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  ، وهما عدنان أوليان ، فإن  $\sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  أو  $(\sqrt[p]{p})^p = p$  .

- ملاحظة : يمكن كتابة الأس النسبي كصورة جذر نوني مرفوع للقوة  $p$  والعكس صحيح ، وذلك كما هو موضح في تعريف ٢ .

مثال ١ < اكتب ما يلي بصورة جذرية ، وبسط إن أمكن :

(١)  $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$  أو ..... (٢)  $\sqrt[2]{\frac{1}{p}}$  أو .....  
 (٣)  $\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$  أو ..... (٤)  $\sqrt[2]{27}$  أو .....  
 (٥)  $\sqrt[3]{(8-)}$  أو ..... (٦)  $\sqrt[3]{8-}$  أو .....  
 (٧)  $\sqrt[2]{(25)}$  أو ..... (٨)  $\sqrt[3]{(49)}$  أو .....

- نتيجة:  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \exists \sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  ، إذا كان  $\sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}$  ، فإن  $\frac{1}{\sqrt[p]{p}} = p^{-\frac{1}{p}}$  .

- تعريف (١)  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \exists \sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  ، وهما عدنان زوجيان ، فإن  $\sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  .  
 (٢)  $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \exists \sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  ، حيث  $p \leq 2$  ، فإن  $\sqrt[p]{p} = p^{\frac{1}{p}}$  .  
 (\* )  $|p|$  إذا كان  $p$  عدداً زوجياً ، (\* )  $p$  إذا كان  $p$  عدداً فردياً .

مثال ٢ < اكتب ما يلي بصورة جذرية ، ثم أوجد القيمة :

(١) ..... =  $\frac{1}{4}(-4-)$  (٢) ..... =  $\frac{1}{3}[2(2-)]$   
 (٣) ..... =  $\frac{3}{4}(16-)$  (٤) ..... =  $\frac{2}{3}(8-)$

- قوانين الأسس النسبية :  $\forall p, b \in \mathbb{R}, b > 0, l < k, p \neq 0$  ( مجموعة الأعداد النسبية ) فإن :

(١)  $a^{l+k} = a^l \times a^k$  ( جمع الأسس المتحدة الأساسات عند الضرب ) .

(٢)  $a^{l-k} = \frac{a^l}{a^k}$  ، حيث  $a \neq 0, l < k$  ( نطرح الأسس المتحدة الأساسات عند القسمة ) .

(٣)  $a^{l \times k} = (a^k)^l$  ( نضرب عند القوة المرفوعة للقوة ) .

(٤)  $a^k \times b^k = (a \times b)^k$  ( توزيع الأس على الأساسات ) .

(٥)  $\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$  ، حيث  $b \neq 0$  ( توزيع الأس على القسمة ) .

◀ مثال ٣ ▶ أوجد قيمة ما يلي :

(١)  $2^{\frac{5}{6}} = \dots$  ، (٢)  $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dots$

(٣)  $64^{-\frac{1}{4}} = \dots$  ، (٤)  $\sqrt[2]{\frac{1}{\sqrt[3]{(0,027)}}} = \dots$

(٥)  $\left(\frac{7}{24}\right)^{-\frac{3}{4}} = \dots$  ، (٦)  $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[4]{(0,25)}}} = \dots$

- ملاحظة : لتبسيط الأسس النسبية نبدأ بالجذر قبل الأس إذا كان الأساس جذره معلوم .

❖ تمرين ❖ ضع ما يلي في أبسط صورة علمياً بأن المتغيرات أعداد حقيقية والمقام لا يساوي صفراً :

(١)  $\frac{s^3 \text{ ص}^{-3} \text{ ص}^0}{(s \text{ ص})^4} = \dots$

(٢)  $\frac{125^{\frac{1}{8}} \times 25^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{2}{5}} \times (25)^{\frac{2}{3} + s}}$

(٣)  $\frac{1}{1+s\sqrt{}} \div \sqrt[4]{1+s^2+s^2}$

(٤)  $\frac{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27}}$

تبسيط الجذور

- قوانين الأساسية للجذور: إذا كان  $\sqrt[p]{m}$  ،  $\sqrt[q]{n}$  ،  $\sqrt[p]{a} \times \sqrt[q]{b}$  ،  $\sqrt[p]{a} \div \sqrt[q]{b}$  ،  $\sqrt[p]{a^m}$  ، فإن :

$$(1) \sqrt[p]{a} \times \sqrt[q]{b} = \sqrt[p \times q]{a^q \times b^p} \text{ (توزيع الجذر على الضرب) .}$$

$$(2) \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[p \times q]{\frac{a^q}{b^p}} \text{ حيث } b \neq 0 \text{ (توزيع الجذر على القسمة) .}$$

$$(3) \sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p]{a^m} \text{ حيث } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ ، } m \in \mathbb{Z}^- \text{ ، } m \in \mathbb{Q}^+ \text{ ، } m \in \mathbb{Q}^- \text{ .}$$

- خطوات تبسيط الجذور :  
 (1) قسمة الأس ودليل الجذر على أكبر عامل مشترك بينهما .  
 (2) كتابة المجذور بصورة حاصل ضرب عوامله الأولية .  
 (3) التخلص من الجذر في المقام وذلك بالضرب في مرافق المقام .

مثال ١ < اكتب الجذور التالية في أبسط صورة :

$$\dots\dots\dots = 18\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (1) ، } \dots\dots\dots = 50\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (2) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 27\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (3) ، } \dots\dots\dots = 32\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (4) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 72\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (5) ، } \dots\dots\dots = 125\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (6) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 12\sqrt{\dots\dots\dots} \times 12\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (7) ، } \dots\dots\dots = 0.1\sqrt{\dots\dots\dots} \times 100\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (8) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 6\sqrt{\dots\dots\dots} \times 4\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (9) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 10\sqrt{\dots\dots\dots} \times 2\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (10) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 64\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (11) ،}$$

$$\dots\dots\dots = 27\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (12) ،}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{16}{50}\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (13) ،}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{9}{27}\sqrt{\dots\dots\dots} \text{ (14) ،}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{9 + 27s + 27s^2} \text{ (15) ، } \dots\dots\dots = \sqrt[3]{27s^3 + 27s^2 + 27s} \text{ (16) ،}$$

- ملاحظة : قسمة العدد (p) على جذره ( $\sqrt[p]{p}$ ) يساوي جذر العدد ( $\sqrt[p]{p}$ ) . مثلاً :  $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27} \div 3$  .

جمع وطرح الجذور

- قاعدة: تجمع وتطرح الجذور المتشابهة فقط كما هو الحال في جمع وطرح الحدود المتشابهة .

- تعريف: الجذور المتشابهة هي التي تتساوى في المجذور وكذلك في دليل الجذر بعد التبسيط .

- خطوات جمع وطرح الجذور : (١) توحيد المجذور ودليل الجذر لكي تكون الجذور متشابهة .  
 (٢) نجمع ونطرح معاملات الجذور المتشابهة فقط ونضع الجذر نفسه .  
 (٣) ناتج الجمع والطرح يكون جذراً مشابهاً للجذور التي جُمعت أو طُرحت .

مثال ١ < أوجد ناتج ما يلي :

(١) ..... =  $2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

(٢) ..... =  $3\sqrt{4} - 3\sqrt{7}$

(٣) ..... =  $5\sqrt{6} + 5\sqrt{7}$

(٤) ..... =  $7\sqrt{4} - 7\sqrt{7}$

(٥) ..... =  $3\sqrt{2} - 3\sqrt{18}$

(٦) ..... =  $2\sqrt{18} + 18\sqrt{2}$

(٧) ..... =  $4\sqrt{2} + 2\sqrt{4}$

(٨) ..... =  $32\sqrt{5} - 5\sqrt{7}$

(٩) ..... =  $45\sqrt{6} + 50\sqrt{7}$

(١٠) ..... =  $64\sqrt{2} - 27\sqrt{2}$

(١١) ..... =  $72\sqrt{3} + 32\sqrt{3}$

(١٢) ..... =  $20\sqrt{4} - 125\sqrt{7}$

(١٣) ..... =  $27\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$

(١٤) ..... =  $\frac{5}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}$

(١٥) ..... =  $\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{2\sqrt{5}}$

(١٦) ..... =  $\frac{6}{5\sqrt{10}} - \frac{2}{10\sqrt{10}}$

(١٧) ..... =  $\frac{1}{48\sqrt{12}} - \frac{4}{12\sqrt{12}}$

- ملاحظة: عند جمع أو طرح الكسور التي تحتوي على جذور في المقام لا بد من توحيد الجذور ثم التخلص من الجذر في المقام وذلك بالضرب في مرافق المقام .

\*\*\*\*\*

ضرب الجذور

- قاعدة: تُضرب الجذور المتحدة الدليل باستخدام القانون :  $\sqrt[p]{b \times m} = \sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{m}$  حيث  $2 \leq p$  ،

أما الجذور المختلفة الدليل فيمكن توحيد أدلتها بالقانون :  $\sqrt[p]{b \times m^r} = \sqrt[p]{b} \times \sqrt[p]{m^r} = \sqrt[p]{b} \times m^{\frac{r}{p}}$

- المقدار الجذري: هو كل مقدار يحتوي على جذرين غير متشابهين أو أكثر ، مثلاً :  $(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$  .

- ضرب المقادير الجذرية: طريقة الضرب تشبه طريقة ضرب المقادير الجبرية ، أي : ضرب الكل في الكل .

مثال ١ < أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

..... =  $9\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$  (١)

..... =  $4\sqrt{2} \times 8\sqrt{2}$  (٢)

..... =  $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \sqrt{2}$  (٣)

..... =  $(\sqrt{32} + \sqrt{18}) \sqrt{2}$  (٤)

..... =  $(\sqrt{16} - \sqrt{9}) \sqrt{3}$  (٥)

..... =  $(7 - \sqrt{2}) \times (\sqrt{4} + \sqrt{5})$  (٦)

..... =  $2(2 - \sqrt{7})$  (٧)

..... =  $(\sqrt{3} \sqrt{4} + \sqrt{2} \sqrt{7}) \sqrt{5}$  (٨)

- المقادير الجذرية المترافقة: إذا كان :  $s, v \in \mathbb{C}$  ،  $s, v \in \mathbb{R}$  ، فإن :

مقداران مترافقان  $(\sqrt{v} + \sqrt{s})$  ،  $(\sqrt{v} - \sqrt{s})$

- ضرب المقادير المترافقة: حاصل ضرب مقدارين مترافقين = مربع الحد الأول - مربع الحد الثاني

أي أن :  $(\sqrt{v} + \sqrt{s})(\sqrt{v} - \sqrt{s}) = (\sqrt{v})^2 - (\sqrt{s})^2 = v - s$

مثال ٢ < أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

..... =  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$  (١)

..... =  $(\sqrt{19} + \sqrt{7})(\sqrt{19} - \sqrt{7})$  (٢)

..... =  $(\sqrt{3} \sqrt{4} - \sqrt{2} \sqrt{3})(\sqrt{3} \sqrt{4} + \sqrt{2} \sqrt{3})$  (٣)

..... =  $(\sqrt{7} + 9)(9 - \sqrt{7})$  (٤)

قسمة الجذور

- قاعدة: تُقسَم الجذور المتحدة الدليل باستخدام القانون :  $\frac{p\sqrt[m]{b}}{q\sqrt[m]{b}} = \frac{p\sqrt[m]{b}}{q\sqrt[m]{b}}$  ، حيث  $m \geq 2$  ،

أما الجذور المختلفة الدليل فيمكن توحيد أدلتها باستخدام القانون :  $\frac{p\sqrt[m]{b}}{q\sqrt[n]{b}} = \frac{p\sqrt[mn]{b^n}}{q\sqrt[mn]{b^m}}$

- ملاحظة: للتخلص من الجذر في المقام نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام .

مثال ١ < اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

..... =  $\frac{135}{5}\sqrt[5]{\quad}$  (١)

..... =  $\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt[3]{\quad}}$  (٢)

..... =  $\frac{12\sqrt[3]{\quad}}{4\sqrt[3]{\quad}}$  (٣)

..... =  $\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})\sqrt{d}}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})\sqrt{d}}$  (٤)

..... =  $\frac{1}{2-5\sqrt{\quad}}$  (٥)

مثال ٢ < اختصر ما يأتي:

..... =  $\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{b}+p\sqrt{b}}$  (١)

..... =  $\frac{\sqrt{c}\sqrt{c}-\sqrt{c}\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{c}}$  (٢)

..... =  $\frac{4}{\sqrt[3]{\quad}-10\sqrt[3]{\quad}}$  (٣)

..... =  $\frac{6}{\sqrt[3]{\quad}-3}$  (٤)

حلّ المعادلات الأسية والجذرية

أولاً : المعادلات الأسية

- المعادلة الأسية : هي المعادلة التي تحتوي على متغير أو أكثر في الأس .

مثلاً :  $3^{-1} = 3^4$  ،  $7^{x^2} = 49$  ،  $(\sqrt{5})^x = (\sqrt{5})^2$  كلها معادلات أسية .

- حل المعادلات الأسية : إيجاد قيمة المتغير في المعادلة باستخدام إحدى الخاصيتين التاليتين :

(١) الخاصية الأولى : ( إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس )

أي أن :  $\forall b < 0$  ،  $m$  ،  $n \in \mathbb{C}$  ، إذا كان  $b^m = b^n$  فإن  $m = n$

(٢) الخاصية الثانية : ( إذا تساوت الأسس لأساسات مختلفة فإن الأس يساوي صفر )

أي أن :  $\forall b > 0$  ،  $b \neq 1$  ،  $m = n$  فإن  $b^m = b^n$

مثال ١ < حل المعادلات التالية :

$(3) \quad 3^3 = 3^9$	$(2) \quad 2^{x+1} = 32$	$(1) \quad 3^3 = 81$
$(6) \quad 20 = 5^{x+1}$	$(5) \quad \frac{1}{16} = 2^x$	$(4) \quad 10 = 10^{x+3}$
$(9) \quad 3^{x+2} = 3^4 + 2$	$(8) \quad 7^{x+1} = 3^{x+2} + 1$	$(7) \quad 3^{-x} = 4^{-x}$

تابع المثال >

$1 = (س-٢)(٤-س) \quad (١٢)$	$٦٤ = س^٢ \times ٨ \quad (١١)$	$٠,٠٠١ = س^١٠ \quad (١٠)$
$٣-\left(\frac{٥}{٣}\right) = ١-س^٢ \left(\frac{٣}{٥}\right) \quad (١٥)$	$\sqrt[٣]{٣} + س = س^٢ \quad (١٤)$	$٥-س^٢ = س^٣-٢س \quad (١٣)$

ثانياً : المعادلات الجذرية

- المعادلة الجذرية : هي المعادلة التي تحتوي على متغير أو أكثر في مجزورها ( داخل الجذر ) .

مثلاً :  $\sqrt{س} = ٧$  ،  $\sqrt[٣]{س-٢} = ١٠$  ،  $\sqrt[٣]{س} = \sqrt[٣]{ص}$  ، كلها معادلات جذرية .

- حل المعادلات الجذرية : إيجاد قيمة المتغير في المعادلة باتباع الخطوات التالية :

- ١) نحدّد الشرط ( المجذور  $\leq ٠$  ) في بداية الحل لكي تكون قيم  $س \in \mathcal{C}$  .
- أي أن : قيمة  $س$  التي تجعل ما تحت الجذر سالباً تكون مرفوضة .
- ٢) نتخلص من كل الحدود والمعاملات التي خارج الجذر .
- ٣) نتخلص من الجذر برفع الطرفين للقوة  $\mathcal{C}$  وهو دليل الجذر المحدد في المعادلة .

> مثال ١ < حل المعادلات التالية :

$٢ = \sqrt[٣]{٣-س^٢} \quad (٣)$	$\sqrt[٣]{٤+س^٣} = \sqrt[٣]{٥+س^٢} \quad (٢)$	$٣ = ٦ - \sqrt{س} \quad (١)$
---------------------------------	---	------------------------------

تابع المثال

<p>(٦) <math>1 - \sqrt{5 - 2s} = 1 - \sqrt{5 - 2s}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>(٥) <math>1 + \sqrt{s} = \sqrt{6 - 2s}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>(٤) <math>\sqrt{7 + 5s} = \sqrt{2s}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>(٩) <math>1 = \sqrt{3 - s} - \sqrt{4 + s}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>(٨) <math>6 = \sqrt{5 - p} \sqrt{p}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>(٧) <math>12 - s = \sqrt{s}</math></p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

\*\*\*\*\*

# الوحدة الرابعة الحدوديات

(كثيرات الحدود)



الحدوديات

- الحدوديات في متغير واحد : كل مقدار جبري لا يحتوي على متغير في المقام أو تحت الجذر أو في الأس يسمى حدودية ذات متغير واحد أو كثيرة حدود ذات متغير واحد .

- الصورة العامة : الحدودية ذات المتغير  $s$  من الدرجة  $n$  صورتها العامة هي :

$$P_n s^n + P_{n-1} s^{n-1} + \dots + P_1 s + P_0$$

حيث :  $n \in \mathbb{N}$  ويسمى درجة الحدودية ، والمعاملات  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$  ،  $P_n \neq 0$  ، ويسمى  $P_n$  المعامل الرئيس ، بالحد المطلق ، ويرمز للحدودية بالرمز :  $H(s)$  أو  $H$  .

مثال ١ < > أكمل الجدول بتحديد درجة الحدودية ومعاملها الرئيس وحدها المطلق :

م	الحدودية	الدرجة	المعامل الرئيس	الحد المطلق
١	$H_1 = 7s^0 - 4s^1 + 2s^2 + 1$	.....	.....	.....
٢	$H_2 = 10 - 3s^2 + 4s^3 + 6s^4 + 3s^5$	.....	.....	.....
٣	$H_3 = 2 + s$	.....	.....	.....
٤	$H_4 = 8 - 2s^2 - 9s^6$	.....	.....	.....
٥	$H_5 = -3s^3$	.....	.....	.....
٦	$H_6 = 57$	.....	.....	.....

مثال ٢ < > كوّن الحدوديات التي معاملاتها ما يلي :

م	المعاملات	الحدودية
١	$P_1 = 7, P_2 = 4, P_3 = 1, P_4 = 0, P_5 = 2$	.....
٢	$P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 4, P_4 = 1, P_5 = 0, P_6 = 1$	.....
٣	$P_1 = 2, P_2 = 0, P_3 = 1, P_4 = 0, P_5 = 7$	.....
٤	$P_1 = 8, P_2 = 0, P_3 = 5$	.....
٥	$P_1 = 34$	.....
٦	$P_1 = 6$	.....

مثال ٣ < > أوجد القيمة العددية للحدوديات التالية :

.....	$H(s) = 3s^2 - 2s + 4$ ، عند $s = 2$	١
.....	$H(s) = 2s^2 - 3s + 3$ ، عند $s = 0$	٢
.....	$H(s) = 6s - 12$ ، عند $s = \frac{1}{2}$	٣
.....	$H(s) = 5s^2 - 8$ ، عند $s = 3$	٤

العمليات على الحدوديات

أولاً : الجمع والطرح

- **تعريف :** ناتج جمع أو طرح حدوديتين يكون حدودية درجتها أصغر من أو تساوي درجة الحدودية الأعلى درجة ،

$$\text{أي أن : } \text{درجة} [ ح_1 \pm ح_2 ] \geq \text{درجة} ح_1 \text{ أو } ح_2$$

**ملاحظة :** يمكن جمع أو طرح حدوديتين أو أكثر من درجات مختلفة .

◀ **مثال ١** ▶ ليكن لدينا الحدوديات التالية :

$$ح_1 = ٢س^٣ + ٢س^٢ - ٢س + ٥ ، ح_2 = ٢س^٤ + ٢س^٥ - ٢ ، ح_3 = ٢س^٧ - ٢س^٨$$

أوجد ما يلي :

.....	=	ح <sub>١</sub> + ح <sub>٢</sub> (١)
.....	=	ح <sub>١</sub> - ح <sub>٢</sub> (٢)
.....	=	ح <sub>١</sub> + ح <sub>٣</sub> (٣)
.....	=	ح <sub>١</sub> - ح <sub>٣</sub> (٤)
.....	=	ح <sub>١</sub> + ح <sub>٢</sub> (٥)
.....	=	ح <sub>١</sub> + (ح <sub>٢</sub> + ح <sub>٣</sub> ) (٦)

- **خواص عمليتي الجمع والطرح :**

(١) جمع الحدوديات عملية إبدالية بينما الطرح ليست عملية إبدالية ،

$$\text{أي أن : } ح_1 + ح_2 = ح_2 + ح_1 \text{ بينما } ح_1 - ح_2 \neq ح_2 - ح_1$$

(٢) جمع الحدوديات عملية تجميعية بينما الطرح ليست عملية تجميعية ،

$$\text{أي أن : } ح_1 + (ح_2 + ح_3) = (ح_1 + ح_2) + ح_3 ،$$

$$\text{بينما } ح_1 - (ح_2 - ح_3) \neq (ح_1 - ح_2) - ح_3$$

\*\*\*\*\*

ثانياً : ضرب الحدوديات

- **تعريف :** (١) عند ضرب حدودية في عدد حقيقي غير الصفر ؛ فإننا نضرب العدد في جميع حدود الحدودية ويكون

الناتج حدودية لها درجة الحدودية المضروبة في ذلك العدد .

(٢) عند ضرب حدوديتين متشابهتين أو مختلفتين في الدرجة فإننا نقوم بضرب حدود الحدودية الأولى في جميع حدود الحدودية الثانية باستخدام التوزيع ، ثم نجمع الحدود المتشابهة فيكون الناتج حدودية درجتها تساوي مجموع درجتي الحدوديتين المضروبتين .

$$\text{أي أن : } \boxed{\text{درجة } [ح_1 \times ح_2] = \text{درجة } ح_1 + \text{درجة } ح_2}$$

مثال ١ < ليكن لدينا الحدوديات التالية :

$$ح_1 = ٣س^٢ + ٢س - ٤ ، ح_2 = ٢س^٣ + ١ - ٣س ، ح_3 = ٤س - ٣$$

أوجد ما يلي :

(١)  $ح_1 \cdot ح_2 =$  .....

(٢)  $ح_2 \cdot ح_3 =$  .....

(٣)  $ح_1 \cdot ح_3 =$  .....

(٤)  $٧ ح_3 =$  .....

(٥)  $٢ ح_2 \cdot ح_3 =$  .....

(٦)  $ح_1 (ح_2 + ح_3) =$  .....

- خواص عملية الضرب : (١) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية الإبدال ،

$$\text{أي أن : } ح_1 \times ح_2 = ح_2 \times ح_1 \text{ (إبدالية)}$$

(٢) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية التجميع ،

$$\text{أي أن : } ح_1 \cdot (ح_2 \cdot ح_3) = (ح_1 \cdot ح_2) \cdot ح_3 \text{ (تجميعية)}$$

(٢) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية التوزيع ( توزيع الضرب على الجمع ) ،

$$\text{أي أن : } ح_1 \cdot (ح_2 + ح_3) = (ح_1 \cdot ح_2) + (ح_1 \cdot ح_3)$$

(٣) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية العنصر المحايد الضربي وهو الواحد ،

$$\text{أي أن : } ح_1 \times ١ = ١ \times ح_1$$

\*\*\*\*\*

**ثالثاً : قسمة الحدوديات**

**- تعريف :** إذا كان  $ح_1 \times ح_2 = ح_3$  ، و  $ح_2 \neq 0$  ، ودرجة  $ح_1 \geq$  درجة  $ح_2$  ، فإننا نقول أن :  $ح_1$  تقبل القسمة على  $ح_2$  وتكون  $ح_1$  عاملاً من عوامل  $ح_3$  ، ويكون  $ح_1 = ح_2 \div ح_3$  ، وكذلك الحال بالنسبة لـ  $ح_2$  .

**- ملاحظة : (1)** ناتج قسمة حدودية على حدودية أخرى هو حدودية أيضاً ،

$$ح_1 = ح_2 \div ح_3 \text{ ، حيث : } ح_2 \text{ ، } ح_3 \neq 0$$

(2) درجة حدودية المقسوم توزع بالشكل التالي :




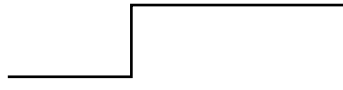
$$\text{درجة المقسوم} = \text{درجة المقسوم عليه} + \text{درجة ناتج القسمة} .$$

(3) إذا كان باقي القسمة يساوي صفرًا فإن باقي القسمة هو الحدودية الصفرية .

(4) تكون مخرجات القسمة على النحو التالي :

$$\text{المقسوم} = \text{المقسوم عليه} \times \text{ناتج القسمة} + \text{الباقى} .$$

**مثال 1 < >** أوجد ناتج قسمة  $ح_1$  على  $ح_2$  في كل ما يأتي :

$ح_1 = 2س^3 + 5س^2 - 4$ ، $ح_2 = س^2 - 1$ 	$ح_1 = 3س^4 + س^3 - 2س^2 + 4$ ، $ح_2 = 2س - 1$ 
$ح_1 = 3س^2 + 1$ ، $ح_2 = س + 1$ 	$ح_1 = 2س^2 - 5س^4 + 8$ ، $ح_2 = س^2 - 1$ 

- الطريقة التركيبية : يمكن إجراء عملية القسمة  $ح_1 \div ح_2$  باتتباع الخطوات التالية :

- (١) نكتب معاملات المقسوم  $ح_1$  بعد ترتيب الحدود ترتيباً تنازلياً حسب قوى  $س$  .
- (٢) نكتب صفر المقسوم عليه  $ح_2$  على اليسار .
- (٣) ننزل المعامل الرئيس لـ  $ح_1$  ونضعه تحت الخط .
- (٤) نضرب المعامل الرئيس في صفر المقسوم عليه ونكتب الناتج تحت المعامل الثاني .
- (٥) نجمع المعامل الثاني مع الناتج ونضع النتيجة تحت الخط .
- (٦) نكرر الخطوات السابقة إلى أن تنتهي المعاملات .

➤ مثال ٢ < أوجد ناتج قسمة  $ح_1$  على  $ح_2$  في كلا مما يأتي :

$ح_1 = ٣س^٣ + ٥س - ١$ ، $ح_2 = ٣س - ٢$ <div style="border: 1px solid black; height: 100px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>	$ح_1 = ٥س^٢ - ٩س + ٩$ ، $ح_2 = ٣س - ٢$ <div style="border: 1px solid black; height: 100px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>
$ح_1 = ٤س^٣ - ٤س + ٤$ ، $ح_2 = ٣س - ٢$ <div style="border: 1px solid black; height: 100px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>	$ح_1 = ٥س^٢ - ٢س + ٥$ ، $ح_2 = ٣س - ٢$ <div style="border: 1px solid black; height: 100px; width: 100%; margin-top: 10px;"></div>

\*\*\*\*\*

### مبرهنتنا الباقي والعامل

أولاً : مبرهنة الباقي

- نص المبرهنة : باقي قسمة أي حدودية  $ح_1$  على حدودية من الدرجة الأولى  $ح_2 = (س + ب)$  ،  $ب ، س \in \mathbb{C}$  يساوي  $ح_2$  وهي القيمة العددية للحدودية  $ح_1$  عندما  $س = \left(\frac{-ب}{١}\right)$  .

أي : نوجد قيمة  $\left(\frac{-ب}{١}\right)$  من الحدودية  $ح_2$  ثم نعوض بها في الحدودية  $ح_1$  لإيجاد قيمة باقي القسمة .

مثال ١ < أوجد باقي قسمة  $ح_١ = ٣س٣ - ٢س٢ + ١$  على  $ح_٢$  في كلاً مما يأتي :

$ح_٢ = ٢ + س$	$ح_٢ = ٣س - ١$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
$ح_٢ = ١ + ٢س$	$ح_٢ = ٤ - ٣س$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

مثال ٢ < لتكن  $ح_١ = ٣س٣ - ٢س٢ + ١٧$  ،  $ح_٢ = ٨س٢ + ١٧$  ، باقي قسمة  $ح_١$  على  $ح_٢$  يساوي ٣٣ ، فأوجد قيمة ب :

.....

.....

.....

.....

ثانياً : مبرهنة العامل

- نص المبرهنة : يكون  $(٢س - ب)$  عاملاً من عوامل الحدودية  $ح(س)$  إذا وفقط إذا كان  $ح(\frac{ب}{٢}) = ٠$  صفراً ،  $٢$  ،  $ب \in ح$  .

- عكس المبرهنة : إذا كان  $ح(\frac{ب}{٢}) = ٠$  صفراً فإن  $(٢س - ب)$  عاملاً من عوامل الحدودية  $ح(س)$  .

مثال ٣ < بين أن  $ح_١$  عاملاً من عوامل  $ح_٢ = ٣س٣ - ٥س٢ + ٢$  في كلاً مما يأتي :

$ح_٢ = ٣س + ٢$	$ح_٢ = ٢ - س$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
$ح_٢ = ٤ - ٣س$	$ح_٢ = ١ + ٢س$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

مثال ٤ < > لتكن  $= > - 3س + 2س + 5$  ،  $ب \in ح$  ، أوجد قيمة ب التي تجعل (س - ١) عاملاً من عوامل  $>$  .

.....

.....

.....

.....

\*\*\*\*\*

**أصفار الحدودية**

- **صفر الحدودية** : هو أي عدد حقيقي يجعل الحدودية تساوي صفر عند التعويض به عن المتغير .

- **تعريف** : إذا كانت  $ح$  حدودية متغيرها س من الدرجة  $ح$  ، فإن قيم س التي تجعل  $ح = ٠$  هي أصفار الحدودية .

- **ملاحظة** : (١) عدد أصفار الحدودية  $ح$  يساوي درجتها ، أي أن : عدد أصفار الحدودية  $= ح$  .  
(٢) إذا كانت الحدودية  $ح$  فإن كل صفر من أصفارها هو عامل من عوامل حدها المطلق .

مثال ١ < > لتكن  $= > - 3س - 2س + 9س + 18$  ، وكان العدد ٢ أحد أصفارها ، أوجد بقية أصفار الحدودية ، ثم اكتب تحليل الحدودية .

الحل : .....

.....

.....

.....

.....

مثال ٢ < > لتكن  $= > - 7س + 5س + 3س - 30$  ،  
(١) بين أن العددين ١ ، -٢ صفران للحدودية .

.....

.....

.....

(٢) أوجد بقية الأصفار .

.....

.....

(٣) اكتب تحليل الحدودية .

.....

.....

\*\*\*\*\*

أَسْمَاءُ بِحَمْدِ اللَّهِ

التفصيل اللؤلؤ

تحياتي لكم

إبراهيم الحجابي

## نبذة عن الكتاب

يعتبر هذا الملخص بديلاً للكتاب المدرسي يهكن أن يستغني به الطالب عن كل الملخصات الأخرى ، لأنه يحتوي على :

- تعريفات وهفاهيم لعناصر النهج .
- قوانين وقواعد مهمة وسهلة التطبيق .
- أمثلة محلولة كثيرة وهفصلة لكل الدروس .
- تهايرين محلولة من تهايرين الكتاب المدرسي وغيره .
- مقارنات بين الهموضيع في أوجه التشابه والاختلاف .

المؤلف