الفصل الدراسي الأول

البَديل في الرياضيات

للصف الأول الثانوي

النسخة الكاملة لدى الحزمي

تحتوي على أمثلة محلولة

إعداد وطباعة : أ / إبراهيم الحبابي

مدرس مادة الرياضيات في مدارس التميز الأهلية - قسم الثانوية

الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

القضية المنطقية ونفيها

- القضية المنطقية : **هي جملة خبرية مفيدة يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كليهما معاً .**

" ملاحظة " ١) الجمل الإنشائية (الأمر ، النهي ، الاستفهام ، التعجب) لا تسمى قضايا منطقية .
٢) نرمز عادة لقضية ما بحرف من الحروف (م ، ب ، جـ ، ك) فنقول القضية م ، القضية جـ ، وهكذا .

مثال ١ : **ميّز القضايا المنطقية من غيرها :**

م	الجملة	نوعها	م	الجملة	نوعها
١	المكلا مدينة يمنية ساحلية	....	٥	اكتب دروسك كلها	....
٢	٥ + ٤ = ٧	....	٦	ما أحسن خُلُق المسلم	....
٣	لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد	....	٧	القدس عاصمة فلسطين	....
٤	هل العدد ٥ عدد زوجي	....	٨	أركان الإسلام ستة	....

- قيمتي صواب القضية المنطقية :

أي صواب أو خطأ القضية م وليس كليهما ، لتكن م قضية منطقية ، فإما أن تكون صائبة ونرمز لها بـ(ص) أو تكون خاطئة ونرمز لها بـ(خ) .

جدول قيمتي الصواب		
القضية	لفظياً	رمزياً
م	صائبة	ص
	خاطئة	خ

مثال ٢ : **حدّد قيمة صواب كل قضية من القضايا التالية :**

م	القضية المنطقية	قيمة صوابها	م	القضية المنطقية	قيمة صوابها
١	الصلاة الركن الثالث من أركان الإسلام	....	٥	المربع له ٤ أضلاع وزاويتين	....
٢	٧ – ٩ = ٢	....	٦	(س٢ – ص٢) فرق بين مربعين	....
٣	العدد ٢ عدد زوجي	....	٧	المثلث دائماً حاد الزاوية	....
٤	العدد ٣٦ من مضاعفات العدد ٤	....	٨	٣ + ٤ = ٨ – ١	....

- نفي القضية المنطقية :

عند إدخال أدوات النفي (لا ، ليس ، غير) أو رموز النفي على القضية المنطقية أو حذفها من القضية المنطقية نحصل على النفي ، مثل : القضية (الجو ممطر) نفيها (الجو غير ممطر) ، والقضية (العدد ٥ ليس عدد زوجي) يكون نفيها (العدد ٥ عدد زوجي) ، والقضية (٧ ∈ ط) نفيها (٧ ∉ ط) وهكذا .

" ملاحظة " ١) نرمز لنفي القضية م بالرمز (~م) وتقرأ (نفي م) أو (ليس م) .
٢) القضية (م) والقضية (~م) لهما نفس الألفاظ ونفس الرموز إلا بزيادة أداة النفي في إحدى القضيتين .
٣) إذا كانت القضية صائبة (ص) فإن نفيها يكون خاطئاً (خ) والعكس صحيح .
٤) يمكن نفي أي قضية بكتابة القضية بين قوسين بعد جملة (ليس صحيحاً أن) .
٥) (نفي النفي إثبات) ، تكرار أداة النفي يُثبت القضية .

جدول قيم صواب القضية م ونفيها	
م	~م
ص	خ
خ	ص

الرمز	نفيه	الرمز	نفيه
∈	∉	<	≮ أو ≥
⊂	⊄	>	≯ أو ≤
≡	≢	=	≠

مثال ٣ انفِ القضايا المنطقية التالية :

م	القضية المنطقية	قيمة صوابها	نفي القضية المنطقية	قيمة صوابها
١	بيروت عاصمة لبنان	....	....	....
٢	زوايا المربع ليست قائمة	....	....	....
٣	يقع المسجد النبوي في مكة	....	....	....
٤	مجموعة الأعداد الطبيعية منتهية	....	....	....
٥	العدد (٧) لا يقبل القسمة على ٢	....	....	....
٦	٢ + ٣ $\neq$ ٦	....	....	....
٧	العدد ٢٣ $\ni$ ط	....	....	....
٨	العدد ٩ $\geqslant$ ٥	....	....	....
٩	١ + ٨ $<$ ٣	....	....	....
١٠	مساحة المربع $\equiv$ مساحة المستطيل	....	....	....

****

القضايا المنطقية المركبة

- **القضية المنطقية البسيطة :** هي قضية منطقية تتكون من جملة خبرية واحدة فقط ،
مثل : **أ** / العدد ٣ عدد فردي ،
ب / زوايا المثلث مختلفة القياسات .

- **القضية المنطقية المركبة :** هي قضية منطقية مركبة من قضيتين بسيطتين أو أكثر ،
مثل : **أ** / العدد ٣ عدد فردي و هو لا يقبل القسمة على ٢ ،
ب / إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن أضلاعه متساوية .

- **عدد الحالات الممكنة لقيم جدول الصواب :** $٢^{ن}$ ، حيث ن عدد القضايا البسيطة .

مثال : ١) قضية مركبة من ٣ قضايا بسيطة ، فإن جدول صوابها يتكون من = $٢^{٣}$ = ٨ خانات .

٢) قضية مركبة من ٢ قضايا بسيطة ، فإن جدول صوابها يتكون من = $٢^{٢}$ = ٤ خانات .

جدول قيم صواب قضية مركبة من قضيتين

أ	ب	وصف الحالة
ص	ص	صائبتين معاً
ص	خ	الأولى صائبة والأخرى خاطئة
خ	ص	الأولى خاطئة والأخرى صائبة
خ	خ	خاطئتين معاً

جدول قيم صواب قضية مركبة من ٣ قضايا

أ	ب	جـ	وصف الحالة
ص	ص	ص	كلها صائبة
ص	ص	خ	الثالثة خاطئة فقط
ص	خ	ص	الثانية خاطئة فقط
ص	خ	خ	الأولى صائبة فقط
خ	ص	ص	الأولى خاطئة فقط
خ	ص	خ	الثانية صائبة فقط
خ	خ	ص	الثالثة صائبة فقط
خ	خ	خ	كلها خاطئة

لا بد أن يكون ترتيب الحالات كما هو موضح في الجداول المرسومة أعلاه ، فالترتيب مهم .

****

أدوات الربط وأدوات الشرط

أولاً : أدوات الربط : وهي حروف العطف (و ، أو) تربط بين قضيتين بسيطتين أو أكثر فتكّون قضية مركبة .

أولاً : القضية المركبة بأداة الربط (و)

الربط بين القضيتين (أ) ، (ب) بأداة العطف (و) تسمى القضية المركبة **(أ و ب)** ، وتكتب رمزياً **(أ ∧ ب)** .

مثل : المثلث له ٣ أضلاع **و** زوايا المربع قائمة .

- قــاعــدة :

١) القضية المركبة (أ ∧ ب) تكون صائبة فقط عندما تكون كلٌ من القضيتين أ ، ب صائبتين معاً .

٢) القضية المركبة (أ ∧ ب) تكون خاطئة عندما تكون القضيتين أ ، ب إحداهما خاطئة على الأقل .

جدول قيم صواب القضية (أ ∧ ب) :

أ	ب	(أ ∧ ب)
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

مثال ١ **لتكن :** أ : العدد ٧ من عوامل ٣٥ ، ب : المربع له ٤ زوايا قائمة ،

بيّن قيم صواب القضايا المركبة التالية بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	قيمة صوابها	السبب
أ ∧ ب	....	....	....
ب ∧ أ	....	....	....
~أ ∧ ب	....	....	....
أ ∧ ~ ب	....	....	....
~ (أ ∧ ب)	....	....	....
~أ ∧ ~ ب	....	....	....

مثال ٢ **أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :**

أ	ب	~أ	~ ب	أ ∧ ب	~أ ∧ ~ ب	~أ ∧ ب	أ ∧ ~ ب	~ (أ ∧ ب)
ص	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
ص	خ	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	خ	.....	.....	....	....	....	....	....

ثانياً : القضية المركبة بأداة الربط (أو)

الربط بين القضيتين (أ) ، (ب) بأداة العطف (أو) تسمى القضية المركبة **(أ أو ب)** ، وتكتب رمزياً **(أ ∨ ب)** .

مثل : المثلث له ٣ أضلاع **أو** أضلاع المربع متساوية .

- قـــاعـدة :

١) القضية المركبة (٩ ∧ ب) تكون خاطئة فقط عندما تكون كلٌ من القضيتين ٩ ، ب خاطئتين معاً .
٢) القضية المركبة (٩ ∧ ب) تكون صائبة عندما تكون القضيتين ٩ ، ب إحداهما صائبة على الأقل .

جدول قيم صواب القضية (٩ ∨ ب) :

٩	ب	(٩ ∨ ب)
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

مثال ١ لتكن: ٩ : العدد ٦ من عوامل ٢٤ ، ب : المستطيل له ٤ زوايا قائمة ،
بيّن قيم صواب القضايا المركبة التالية بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	قيمة صوابها	السبب
٩ ∨ ب	....	....	....
ب ∨ ٩	....	....	....
~٩ ∨ ب	....	....	....
٩ ∨ ~ ب	....	....	....
~ (٩ ∨ ب)	....	....	....
~٩ ∨ ~ ب	....	....	....

مثال ٢ أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

٩	ب	~٩	~ ب	٩ ∨ ب	~٩ ∨ ~ ب	~٩ ∨ ب	٩ ∨ ~ ب	~ (٩ ∨ ب)
ص	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
ص	خ	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	خ	.....	.....	....	....	....	....	....

ثانياً : أدوات الشرط : وهي حروف الشرط (إذا كان .. فإن ، .. إذا وفقط إذا ..) تربط بين قضيتين بسيطتين فتكّون قضية شرطية مركبة من شرط وجواب الشرط .

أولاً : القضية الشرطية (إذا كان .. فإن ..)

الربط بين القضيتين(٩) ، (ب) بأداة الشرط (**إذا كان .. فإن ..**) تسمى القضية الشرطية (**إذا كان ٩ فإن ب**) ، حيث القضية **٩** تسمى الشرط (المقدمة) و القضية **ب** تسمى الجواب (النتيجة) ، وتكتب رمزياً : **(٩ ⟵ ب)** .

مثل : إذا كان المثلث متساوي الأضلاع **فإنه** متساوي الزوايا .

- قـــاعـدة :

١) القضية الشرطية (٩ ⟵ ب) تكون خاطئة فقط عندما تكون ٩ صائبة و ب خاطئة ، أي الشرط صائب والجواب خاطئ ، (الترتيب مهم) .
٢) القضية (٩ ⟵ ب) تكون صائبة في بقية الحالات .

جدول قيم صواب القضية (٩ ⟵ ب)

٩	ب	(٩ ⟵ ب)
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

مثال ١ **لتكن:** أ : العدد ٨ عدد زوجي ، **ب** : العدد ٨ يقبل القسمة على ٢ ،

بيّن قيم صواب القضايا الشرطية التالية بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	قيمة صوابها	السبب
أ ← ب	………………	………………	………………
ب ← أ	………………	………………	………………
~أ ← ب	………………	………………	………………
أ ← ~ ب	………………	………………	………………
~ (أ ← ب)	………………	………………	………………
~أ ← ~ ب	………………	………………	………………

مثال ٢ **أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :**

أ	ب	~أ	~ ب	أ ← ب	~أ ← ~ ب	~أ ← ب	أ ← ~ ب	~ (أ ← ب)
ص	ص	…..	…..	………………	………………	………………	………………	………………
ص	خ	…..	…..	………………	………………	………………	………………	………………
خ	ص	…..	…..	………………	………………	………………	………………	………………
خ	خ	…..	…..	………………	………………	………………	………………	………………

ثانياً : القضية الشرطية (.. إذا وفقط إذا ..)

الربط بين القضيتين (أ) ، (ب) بأداة الشرط (.. إذا وفقط إذا ..) تسمى القضية الشرطية المزدوجة **(أ إذا وفقط إذا ب)** لأنها تتكون من القضيتين الشرطيتين (أ ← ب) ، (ب ← أ) تربط بينهما أداة الربط **(∧)** ،

وتكتب رمزياً **(أ ↔ ب)** . مثل : المثلث متساوي الأضلاع **إذا وفقط إذا** المثلث متساوي الزوايا .

- قــاعـدة :

١) القضية الشرطية المزدوجة (أ ↔ ب) تكون صائبة عندما تكون القضيتان أ ، ب صائبتين معاً أو خاطئتين معاً ، أي عند تشابههما في قيم الصواب

٢) القضية الشرطية المزدوجة (أ ↔ ب) تكون خاطئة عندما تكون القضيتان أ ، ب احداهما صائبة والأخرى خاطئة ، أي عند اختلافهما في قيم الصواب ، (الترتيب غير مهم) .

- جدول قيم صواب القضية (أ ↔ ب) :

أ	ب	(أ ← ب)	(ب ← أ)	(أ ← ب) ∧ (ب ← أ) (أ ↔ ب)
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

مثال ١ **لتكن:** م : العدد ٣٢ من مضاعفات ٤ ، **ب** : العدد ٤ من قواسم العدد ٣٢ .

بيّن قيم صواب القضايا الشرطية التالية بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	قيمة صوابها	السبب
م ⟷ ب	....	....	....
ب ⟷ م	....	....	....
~م ⟷ ب	....	....	....
م ⟷ ~ ب	....	....	....
~ (م ⟷ ب)	....	....	....
~م ⟷ ~ ب	....	....	....

مثال ٢ أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

م	ب	~م	~ ب	م ⟷ ب	~م ⟷ ~ ب	~م ⟷ ب	م ⟷ ~ ب	~ (م ⟷ ب)
ص	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
ص	خ	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	ص	.....	.....	....	....	....	....	....
خ	خ	.....	.....	....	....	....	....	....

❖ **تمرين** ❖ أكمل الجدول التالي بشكل صحيح :

م	ب	~م	~ ب	ب ⟷ م	~ ب ⟷ ~م	~ ب ⟷ م	ب ⟷ ~م	~ (ب ⟷ م)
ص	ص	......	......	......	......	......	......	......
ص	خ	......	......	......	......	......	......	......
خ	ص	......	......	......	......	......	......	......
خ	خ	......	......	......	......	......	......	......

****

تمارين ومسائل

❖ **تمرين ١** ❖ أنشئ جداول القضايا التالية :

١) م ∧ ~ ب　　　　٢) ~م ∨ ~ ب

٣) ~م ⟵ ب　　　　٤) ~م ⟷ ب

٥) ب ⟷ ~م

الحل :

❖ **تمرين ٢** ❖ **أكمل القضايا التالية ما يجعلها صائبة :**

١) العدد ٨ جذر تربيعي للعدد ..... و هو مكعب للعدد ....

٢) ٢ + ٥ > ١٠ أو ٢ × ٥ ≠ ....

٣) العدد ٢٥ من مضاعفات العدد .... ⟵ العدد ٢٥ يقبل القسمة على ....

أو ....

٤) ١٢ ÷ ٣ > ...... ⟷ ٧ × ٤ > ....

....

٥) **إذا كانت** زوايا المستطيل .... **فإن** زوايا المربع ....

أو ....

أو ....

****

نفي القضايا المركبة

- الطريقة العامة : إدخال جملة **(** ليس صحيحاً أن **)** على القضية المركبة مع وضع القضية المركبة بين قوسين ، أما بالرموز فيكون بإدخال رمز النفي **(~)** على القضية المركبة مع وضع القضية بين قوسين ( ) ،

~ (أ ∧ ب) ، ~ (أ ∨ ب) ، ~ (أ ⟵ ب) ، ~ (أ ⟷ ب)

- الطريقة الخاصة : لكل قضية مركبة طريقة خاصة في النفي تبعاً لأداة الربط أو أداة الشرط كما في الجدول التالي :

القضايا المركبة	أدوات الربط		أدوات الشرط	
	(أ ∧ ب)	(أ ∨ ب)	(أ ⟵ ب)	(أ ⟷ ب)
النفي بالطريقة الخاصة	~أ ∨ ~ ب	~أ ∧ ~ ب	أ ∧ ~ ب	~ (أ ⟷ ب)
الشرح	نفي القضية الأولى ونفي أداة الربط ونفي القضية الثانية		كتابة الشرط مع أداة الربط ∧ ونفي الجواب	ليس صحيحاً أن : (القضية)

➢ **مثال ١** ➢ **: انفِ القضايا المركبة التالية :**

القضية المركبة	نفيها رمزياً	القضية المركبة	نفيها لفظياً
أ ∧ ~ ب	....	فصل الصيف حار و فصل الشتاء بارد	....
أ ⟵ ~ ب	....	إذا كان $\sqrt{٣٦}$ = ٦ فإن $(٦)^٢$ = ١٢	....
~أ ∨ ~ ب	....	٣ + ٥ = ٨ إذا وفقط إذا ٨ − ٥ = ٢	....
~ ب ⟵ أ	....	٥ > ٧ أو ٧ > ٥	....
~أ ∨ ب	....	إذا كان $\sqrt{٣٦}$ ≠ ٦ فإن $(٦)^٢$ ∌ ط	....
أ ⟷ ~ ب	....	إذا كان ٩ ⩽ ٤ فإن ٣ × ٤ = ١٢	....
~ ب ⟷ أ	....	المثلث قائم ⟷ إحدى زواياه قائمة	....
~أ ∧ ~ ب	....	ضعف ٥ = ٢٥ و جذر ٢٥ = ٥	....
~ (أ ⟵ ب)	....	٥ ∋ ط أو −٧ ∌ ص	....

❖ **تمرين ١** ❖ **لتكن** : أ : العدد ٢٧ من مضاعفات ٣ ، ب : العدد ٣ جذر تكعيبي لـ ٢٧ .

انفِ القضايا التالية رمزيا ولفظياً ، بعد كتابتها لفظياً :

القضية المركبة	القضية بالألفاظ	نفيها رمزياً	نفيها لفظياً
أ ← ~ ب	....	....	....
~أ ∨ ~ ب	....	....	....
~ ب ← أ	....	....	....
~أ ∨ ب	....	....	....
أ ∧ ~ ب	....	....	....
~ ب ↔ أ	....	....	....

التكافؤ المنطقي للقضايا

- التعريف : يقال عن القضيتين ه ، ل أنهما متكافئتان منطقياً إذا كان لهما قيم الصواب نفسها ، ونرمز للتكافؤ بالرمز ه ≡ ل ، وتقرأ " ه تكافئ ل " .

- بعض القضايا المتكافئة منطقياً :

1) نفي النفي للقضية : أي أن النفي للقضية المنفية يلغي النفي السابق ويرجع القضية إلى أصلها .

مثل : ~(~أ) ≡ أ ، ~(~(أ ∨ ب)) ≡ (أ ∨ ب) ، وهكذا .

2) خاصية الإبدال : في القضايا المركبة بأداتي الربط { ∧ ، ∨ } ، وكذلك القضية الشرطية { ↔ } .

مثل : (أ ∧ ب) ≡ (ب ∧ أ) ، (أ ∨ ب) ≡ (ب ∨ أ) ، (أ ↔ ب) ≡ (ب ↔ أ)

ملاحظة : (أ ← ب) ≢ (ب ← أ)

3) خاصية التجميع : في القضايا المركبة بأداتي الربط { ∧ ، ∨ } فقط .

مثل : أ ∧ (ب ∧ جـ) ≡ (أ ∧ ب) ∧ جـ ، أ ∨ (ب ∨ جـ) ≡ (أ ∨ ب) ∨ جـ

4) خاصية التوزيع : في القضايا المركبة بأداتي الربط { ∧ ، ∨ } فقط ، حيث توزع كلٌّ منها على الأخرى .

مثل :
أ ∧ (ب ∨ جـ) ≡ (أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ)
أ ∨ (ب ∧ جـ) ≡ (أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ جـ)

5) القضية المنطقية المزدوجة : حيث : (أ ↔ ب) ≡ (أ ← ب) ∧ (ب ← أ)

6) قواعد نفي القضايا المنطقية : الطريقة العامة تكافئ الطريقة الخاصة ، كما هو موضح في الشكل التالي :

~(أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ ب ، ~(أ ∨ ب) ≡ ~أ ∧ ~ ب
~(أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ ب ، ~(أ ↔ ب) ≡ ~(أ ↔ ب)

7) حالة خاصة : لأي قضيتين أ ، ب فإن : (أ ← ب) ≡ ~أ ∨ ب ≡ ~ ب ← ~أ

مثال ١ أثبت تكافؤ القضايا التالية :

١] ~ (~أ) ≡ أ

...	....	....
...	....	....
...	....	....

٢] (أ ∨ ب) ≡ (ب ∨ أ)

...	....	....	....
...	....	....	....
...	....	....	....
...	....	....	....
...	....	....	....

٣] ~ (أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ ب

...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....

تابع المثال : ٤] (أ ← ب) ≡ ~أ ∨ ب ≡ ~ ب ← ~أ

...	....	...	....	....	....	....
ص	ص	...	....	....	....	....
ص	خ	...	....	....	....	....
خ	ص	...	....	....	....	....
خ	خ	...	....	....	....	....

ملاحظة :
لتكوين الجدول نتبع الخطوات التالية :
* نضع عمود لكل قضية بسيطة .
* نضع عمود لكل قضية بسيطة منفية .
* نضع عمود لكل قضية داخل الأقواس .
* نضع عمود لكل قضية مركبة في كل طرف من أطراف التكافؤ .

٥] ~أ ∨ ب ≡ ~ (أ ∧ ~ ب) ≢ ~ (أ ∨ ~ ب)

أ	ب	...	....	....	....	....	....	....
ص	ص	...	....	....	....	....	....	....
ص	خ	...	....	....	....	....	....	....
خ	ص	...	....	....	....	....	....	....
خ	خ	...	....	....	....	....	....	....

مثال ٢ : اكتب قضية مكافئة لكل قضية من القضايا المركبة التالية :

القضية المركبة	القضية المكافئة لها
إذا كان ٧ + ٨ = ١٥ **فإن** ١٥ – ٧ = ٨	....
العدد ٩ مربع ٣ **و** العدد ٣ جذر تربيعي لـ ٩	....
إذا كان المثلث متساوي الساقين **فإن** زاويتا القاعدة متطابقة	....
قياس الزاوية القائمة = ٩٠ **أو** قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠	....
المثلث حاد الزاوية ⟷ كل زواياه حادة	....
ليس صحيحاً أن : (٢ عدد موجب **و** –٢ عدد سالب)	....

- القضية الصائبة منطقياً :

وهي القضية الصائبة دائماً مهما اختلفت قيم صواب مركباتها ، وتسمى (تحصيل حاصل) .

مثل :

$\text{أ} \vee \sim\text{أ}$ ،

$\sim(\text{أ} \wedge \text{ب}) \vee (\text{أ} \wedge \text{ب})$ ،

$(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \vee (\text{أ} \wedge \sim\text{ب})$

ملاحظة : كل قضية مركبة من قضية ونفيها بأداة الربط { ∨ } تكون صائبة منطقيا .

- القضية الخاطئة منطقياً :

وهي القضية الخاطئة دائماً مهما اختلفت قيم صواب مركباتها ، وتسمى (تناقض) .

مثل :

$\text{أ} \wedge \sim\text{أ}$ ، $\text{أ} \leftrightarrow \sim\text{أ}$

$\sim(\text{أ} \vee \text{ب}) \wedge (\text{أ} \vee \text{ب})$ ، $\sim(\text{أ} \wedge \text{ب}) \leftrightarrow (\text{أ} \wedge \text{ب})$

$(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \wedge (\text{أ} \wedge \sim\text{ب})$ ، $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \leftrightarrow (\text{أ} \wedge \sim\text{ب})$

ملاحظة : كل قضية مركبة من قضية ونفيها بأداة الربط { ∧ } أو أداة الشرط { ↔ } تكون خاطئة منطقيا .

مثال ١ : باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن القضايا التالية صائبة منطقياً ؟

١] $\sim(\text{أ} \wedge \text{ب}) \vee (\text{أ} \wedge \text{ب})$

...	....	...	....	....
...	....	...	....	....
...	....	...	....	....
...	....	...	....	....
...	....	...	....	....

٢] $(\text{أ} \rightarrow \text{ب}) \vee (\text{أ} \wedge \sim\text{ب})$

...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....

٣] $(\text{أ} \vee \text{ب}) \rightarrow (\sim\text{أ} \rightarrow \text{ب})$

...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....

٤] $(\text{أ} \wedge \text{ب}) \rightarrow \text{أ}$

...	....	...	....
...	....	...	....
...	....	...	....
...	....	...	....
...	....	...	....

مثال ٢ : باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن القضايا التالية خاطئة منطقياً ؟

١] $أ \wedge \sim أ$

....	...	....
....	...	....
....	...	....
....	...	....
....	...	....

٢] $(أ \longrightarrow ب) \longleftrightarrow (أ \wedge \sim ب)$

...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....
...	....	...	....	....	....

❖ **تمرين** ❖ باستخدام جدول الصواب ، أثبت أن : $أ \wedge (ب \vee جـ) \equiv (أ \wedge ب) \vee (أ \wedge جـ)$

****

الاقتضاء المنطقي

- **التعريف :** لأي قضيتين أ ، ب نقول أن : أ تقتضي ب إذا كانت القضية الشرطية $(أ \longrightarrow ب)$ صائبة منطقياً ، ونسمي القضية الشرطية $(أ \longrightarrow ب)$ اقتضاء منطقياً ، ونعبر عنها رمزياً $(أ \Longrightarrow ب)$.

" ملاحظة "

الشرط المتحقق	النتيجة لفظياً	النتيجة رمزياً
القضية $(أ \longrightarrow ب)$ صائبة منطقياً	أ تقتضي ب	$أ \Longrightarrow ب$
القضية $(أ \longrightarrow ب)$ ليست صائبة منطقياً	أ لا تقتضي ب	$أ \not\Longrightarrow ب$
$أ \Longrightarrow ب$ ، $ب \Longrightarrow أ$	أ تكافئ ب	$أ \Longleftrightarrow ب$
$أ \Longrightarrow ب$ ، $ب \not\Longrightarrow أ$	أ لا تكافئ ب	$أ \not\Longleftrightarrow ب$

مثال ١ : باستخدام جدول القيم أثبت أن :

١] (أ ∧ ب) ⟸ ب　　،　　٢] (أ ∧ ب) ⟸ أ

......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....

......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....
......	......	....	....

....　　...

مثال ٢ : أكمل الجدول بوضع أحد الرموز التالية { ⟸ ، ⇍ ، ⟺ } :

القضية أ	الرمز	القضية ب
٦ × ٧ = ٤٢	....	٤٢ ÷ ٧ = ٦
مربع العدد ٣ = ٩	....	الجذر التربيعي للعدد ٩ = ٣
المثلث أ ب جـ متساوي الساقين	....	زاويتا قاعدة المثلث متطابقة
قياس الزاوية المحيطية = ٩٠	....	الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة
شكل رباعي زواياه قائمة	....	الشكل الرباعي عبارة عن مربع
س عدد ∈ ص	....	س عدد سالب
س عدد سالب	....	س عدد ∈ ص
س عدد زوجي	....	س عدد يقبل القسمة على ٢

مثال ٣ : ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة أو علامة (×) أمام العبارة الخاطئة :

١	س = − ٢ ⟸ $س^٣$ = − ٨ .	(　　)
٢	س ⩾ صفر ⟸ س ∈ ط .	(　　)
٣	المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع ⟺ المثلث أ ب جـ حاد الزوايا .	(　　)
٤	س ∈ ط ⇎ س ∈ ص .	(　　)
٥	أ ب جـ د مستطيل ⇍ أ ب جـ د مربع .	(　　)

- **طرق البرهان الرياضي :** فيما يلي نتناول أسلوبين للبرهان الرياضي :

أولاً : طريقة البرهان المباشر

فكرتها الأساسية تعتمد على أن الاقتضاء (⟸) علاقة متعدية ، حيث :

[(أ ⟸ ب) ∧ (ب ⟸ جـ)] ⟸ (أ ⟸ جـ)

⮜ مثال ١ ⮞ باستخدام طريقة البرهان المباشر أثبت أن :

١) س = ٣ ⟸ س^{٢} = ٩	٢) س = ٥ ⟺ س^{٣} = ١٢٥
الحل :	الحل : ....
....	....
....	....
....	....
....	....

ثانياً : طريقة نقض الفرض

فكرتها الأساسية تعتمد على أن الاقتضاء (⟸) يتحقق عندما تكون القضية الشرطية (م ⟵ ب) صائبة منطقياً

وكذلك القضية (~ ب ⟵ ~م) صائبة منطقياً ، حيث : (م ⟸ ب) ≡ ~ ب ⟸ ~م

⮜ مثال ١ ⮞ باستخدام طريقة نقض الفرض أثبت أن :

١) س^{٢} عدد زوجي ⟸ س عدد زوجي	٢) س = ٤ ⟸ س^{٣} = ٦٤
الحل :	الحل : ....
....	....
....	....
....	....
....	....

****

الـمـسـوّرات

- الجملة المفتوحة : هي جملة خبرية تتضمن متغيراً أو أكثر ، وتتحول إلى قضية عند التعويض عن كل متغير بعنصر من مجموعة التعويض ، ونرمز لها بالرمز : هـ (س) ، م (س) ، ق (س) .

- مجموعة حل الجملة المفتوحة : العناصر من مجموعة التعويض التي يُعوض بها عن المتغير وتجعل الجملة المفتوحة قضية صائبة .

مثل : س عدد طبيعي أصغر من ٥ . (جملة مفتوحة مجموعة تعويضها الأعداد الطبيعية)

عندما : س = صفر ⟸ صفر عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية صائبة)

س = ١ ⟸ ١ عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية صائبة)

س = ٢ ⟸ ٢ عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية صائبة)

س = ٣ ⟸ ٣ عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية صائبة)

س = ٤ ⟸ ٤ عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية صائبة)

س = ٥ ⟸ ٥ عدد طبيعي أصغر من ٥ . (قضية خاطئة)

س = ٦ ⟸ ١ عدد طبيعي أصغر من ٦ . (قضية خاطئة)

وهكذا بقية الأعداد الطبيعية تعطي قضايا خاطئة ، ∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } .

- **أنواع القضايا المسوّرة :** لها نوعان وهما :

أولاً : القضايا المسوّرة كلياً

- **التعريف :** هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ العموم { كل ، جميع ، كافة } أو الرمز (∀) ،

وتكتب رمزياً : ∀ س ∈ سـ : ق (س)

حيث سـ : مجموعة التعويض ، ق (س) : الجملة المفتوحة .

مثل : كل الأعداد الطبيعية ≥ صفر ، ∀ س ∈ صـ : س – ٥ ∈ صـ

- **قـــاعـدة :**

١) القضية المسورة كلياً (∀) تكون **صائبة** إذا كانت **كل قيم س** تعطي قضايا **صائبة** بعد التعويض .

٢) القضية المسورة كلياً (∀) تكون **خاطئة** فقط إذا كانت **إحدى قيم س على الأقل** تعطي قضية **خاطئة** بعد التعويض.

ثانياً : القضايا المسوّرة جزئياً

- **التعريف :** هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ الخصوص { بعض ، جزء من } أو الرمز (∃) ،

وتكتب رمزياً : ∃ س ∈ سـ : ق (س)

حيث سـ : مجموعة التعويض ، ق (س) : الجملة المفتوحة .

مثل : بعض الأعداد الطبيعية ≥ ١٠٠ ، ∃ س ∈ صـ : س – ٥ ∈ ط .

- **قـــاعـدة :**

١) القضية المسورة جزئياً (∃) تكون **خاطئة** إذا كانت **كل قيم س** تعطي قضايا **خاطئة** بعد التعويض .

٢) القضية المسورة كلياً (∃) تكون **صائبة** فقط إذا كانت **إحدى قيم س على الأقل** تعطي قضية **صائبة** بعد التعويض .

مثال ١ : **بيّن قيم صواب القضايا المسورة التالية ، بعد تحديد نوعها :**

القضية المسورة	نوعها	قيمة صوابها
كل الأعداد الطبيعية > صفر	....	....
∃ س ∈ صـ : س عدد سالب	....	....
∀ س ∈ ط : س + ٥ = ٥ + س	....	....
∃ س ∈ ط : س – ١ ≥ صفر .	....	....
∀ س ∈ صـ : س٢ = ٣	....	....
بعض الأعداد الطبيعية تقبل القسمة على ٢١	....	....

مثال ٢ اكتب المسورات التالية لفظياً أو رمزياً حسب المطلوب : (الحل باللون الأحمر)

القضية المسورة لفظياً	القضية المسورة رمزياً
كل الأعداد الصحيحة أصغر من الصفر	....
....	∃ س ∈ ص : س > صفر
جزء من الأعداد النسبية تنتمي للأعداد الطبيعية	....
....	∃ س ∈ ط : س + صفر = صفر + س
بعض الأعداد الصحيحة إبدالية في الضرب	....
....	∀ س ∈ ص : س + (– س) = صفر
الواحد هو العنصر المحايد الضربي في الأعداد الحقيقية	....
....	∀ س ∈ ح : √س ∈ ح

- نفي القضايا المسوّرة : نقوم بالخطوتين التاليتين :

١) نغيّر ألفاظ العموم إلى ألفاظ الخصوص أو رمز (∀) إلى (∃) والعكس صحيح .

٢) ننفي الجملة المفتوحة لفظياً أو رمزياً حسب نوعها بالطرق الخاصة بنفي القضايا البسيطة .

أي أن :

~ [∀ س ∈ سـ : هـ(س)] ≡ [∃ س ∈ سـ : ~ هـ(س)]

~ [∃ س ∈ سـ : هـ(س)] ≡ [∀ س ∈ سـ : ~ هـ(س)]

مثال ١ انفِ المسورات التالية حسب نوعها

القضية المسورة	نفيها
كل الأعداد الصحيحة أصغر من الصفر	....
∃ س ∈ ط : س + صفر = صفر + س	....
جزء من الأعداد النسبية تنتمي للأعداد الطبيعية	....
∀ س ∈ ص : س + (– س) = صفر	....
بعض الأعداد الصحيحة لها خاصية الإبدال في الضرب	....
∃ س ∈ ص : س ≥ صفر	....
الواحد هو العنصر المحايد الضربي في الأعداد الحقيقية	....
∀ س ∈ ح : √س ∈ ح	....
كل عدد أولي هو عدد فردي	....
∃ س ∈ $ص^+$: س × س = ٢س	....

- مقارنة بين المسورات :

وجه المقارنة	المسورة كلياً	المسورة جزئياً
التعريف	هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ أو رمز العموم .	هي جملة مفتوحة تحتوي على ألفاظ أو رمز الخصوص .
ألفاظها	كل ، جميع ، كافة	بعض ، جزء من ، قليل من
رموزها	∀	∃
صورتها العامة	∀ س ∈ س~ : هـ(س)	∃ س ∈ س~ : هـ(س)
نفيها	∃ س ∈ س~ : ~ هـ(س)	∀ س ∈ س~ : ~ هـ(س)
تكون صائبة	كل قيم س تعطي قضايا صائبة	إحدى قيم س على الأقل تعطي قضية صائبة
تكون خاطئة	إحدى قيم س على الأقل تعطي قضية خاطئة	كل قيم س تعطي قضايا خاطئة
أمثلة	كل الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على ٢ ∀ س ∈ س~ : س × ١ = س	بعض الأعداد الفردية هي أعداد أولية ∃ س ∈ س~ : س + صفر = س

****

تمارين الوحدة الأولى

[١] حدّد قيمة صواب كل قضية من القضايا التالية :

١) الرياض عاصمة الكويت .
٢) عدد سكان اليمن أقل من عشرين مليون .
٣) أضلاع المعين متساوية في الطول .
٤) العدد ٧ لا يقبل القسمة على ٢ .
٥) قطرا متوازي الأضلاع متناصفان .
٦) ٢ – ∌ ط .
٧) العدد ٣ < العدد ٧ .
٨) ٢٥ = $٥^{٢}$.
٩) المثلث المتساوي الأضلاع قائم الزاوية .
١٠) الزاويتان المتتامتان قياسهما يساوي ١٨٠ .
١١) مجموع زوايا المثلث ٣٦٠ .

[٢] انفِ القضايا الموجودة في التمرين ١ :

[٣] اكتب قضايا وصفية للقضايا التالية ، حيث :
م (المثلث قائم) ، ب (الزاوية منفرجة) :

١) م ∧ ~ب
٢) ~م ∨ ب
٣) ~م ∧ ~ب
٤) ب ∨ ~م
٥) م ⟵ ~ب
٦) ~ب ⟷ ~م
٧) ~(م ⟷ ~ب)

[٤] حدد قيم صواب القضايا الموجودة في التمرين ٣ :

[٥] أكمل القضايا ما يجعلها صائبة مرة وخاطئة مرة :

١) ٥٤ عدد صحيح و يقبل القسمة على العدد ....
٢) ٢ + ٧ = ٤ أو ٢ × ٧ = ...
٣) ١٠ > ٨ ⟵ ٩ > ....
٤) ٢ + ٣ ≠ ٥ ⟷ ٢ + ٢ ≠ ....

[٦] أنشئ جدول صواب القضايا التالية :

١) ~م ∧ ~ب
٢) (ب ∨ ~م) ⟵ ~ب
٣) (م ⟵ ~ب) ∨ (~ب ⟷ ~م)
٤) ~ب ⟷ (~م ∧ ~ب)

[٧] لأي قضيتين م ، ب أثبت أن :

١) (م ∨ ب) ≡ (م ⟵ ب) ⟵ ب
٢) ~(~م ∧ ~ب) ≡ م ∨ ب
٣) م ∨ (م ∧ ب) ≡ (م ∨ ب) ∧ (م ∨ ب)
٤) م ∨ ~(م ∧ ب) صائبة منطقياً
٥) (م ∧ ب) ⟵ (م ∨ ب) صائبة منطقياً
٦) (م ⟷ ب) ⟸ (م ⟵ ب)

الوحدة الثانية

التطبيقات

مراجعة التطبيق

- **تعريف التطبيق :** **هو علاقة تربط كل عنصر من المجال (سـ) بعنصر وحيد من المجال المقابل (صـ) ،**
ويكتب رمزياً / ت : سـ ⟵ صـ .

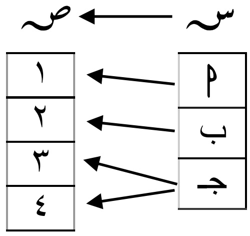
- **مكونات التطبيق :** ١) المجال (المنطلق) ، ٢) المجال المقابل (المستقر) ، ٣) قاعدة التطبيق

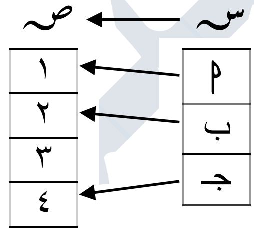
- **قاعدة التطبيق :** هي العلاقة التي تربط كل عنصر من المجال بصورته من المجال المقابل ،
وتكتب رمزياً / **ت(س) = ص .**

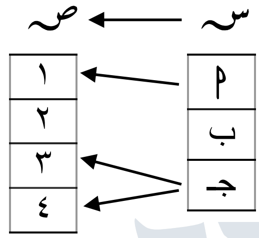
- **مدى التطبيق :** هو مجموعة صور عناصر المجال من المجال المقابل . وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل .
المدى ⊆ المجال المقابل .

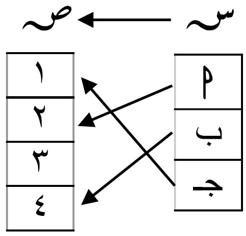
" ملاحظة " يمكن التمييز بين العلاقة والتطبيق من خلال عناصر المجال ، حيث كل عنصر منه له صورة وحيدة .

⋞ مثال ١ ⋟ : لتكن : سـ = { ا ، ب ، جـ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فبيّن :
أي العلاقات التالية تمثل تطبيقاً ؟ مع ذكر السبب .





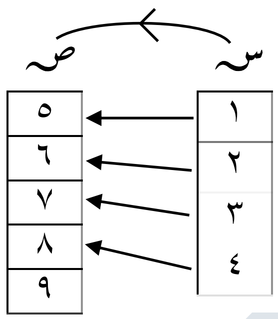




....

....

⋞ مثال ٢ ⋟ : ليكن / ت : سـ ⟵ صـ موضحاً بالشكل المرسوم جانباً ،
حدّد : المجال و المجال المقابل والمدى وقاعدة التطبيق .



الحـل : ....

....

....

....

- **أساليب التعبير عن التطبيق :** **يمكن التعبير عن التطبيق بأحد الأساليب الآتية :**

١) القاعدة (معادلة رياضية) . ٢) الأزواج المرتبة .
٣) المخططات السهمية . ٤) الجدول البياني . ٥) الرسم البياني .

⋞ مثال ٣ ⋟ : ليكن / ت : سـ ⟵ صـ والمعرّف بالقاعدة **ت(س) = ١ – س** ، حيث :
سـ = { ٣ ، ٥ ، ٨ } ، صـ = { –٢ ، –٤ ، –٧ ، –٨ } ، مثّل التطبيق كأزواج مرتبة ، وكمخطط سهمي .

الحـل : ....

....

....

....

مثال ٤ : ليكن / ت : ح ⟵ ح والمعرّف بالقاعدة **ت(س) = س – ٥** ،
مثّل التطبيق بالجدول والرسم البياني .

الحل : ....
....
....
....

مثال ٥ : ليكن / ت : س ⟵ ص والمعرّف بالقاعدة **ت(س) = س – ٢** ، حيث :
س = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، أوجد المدى ومثّل التطبيق كأزواج مرتبة وبالمخطط السهمي .

الحل : ....
....
....
....

****

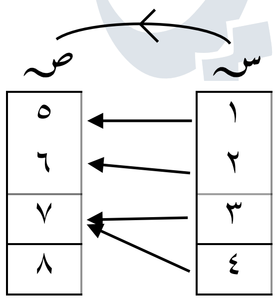
الصورة العكسية للتطبيق (معكوس التطبيق)

* **لتكن :** ت(أ) = ١ ، ت(ب) = ٢ ، ت(جـ) = ٣ ، ت(د) = ٣ ، فإننا نقول أن صورة العنصر أ هي ١ ، وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ١ هي أ ، وصورة العنصر ب هي ٢ ، وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ٢ هي ب ، وصورتي العنصرين { جـ ، د } هي ٣ ، وبذلك تكون الصورة العكسية للعنصر ٣ هي المجموعة { جـ ، د } ،
فإذا كانت : صورة العنصر **ت(س) = ص** ، فإن الصورة العكسية للعنصر ص يرمز لها بالرمز **ت$^{-1}$(ص) = س** ،
فإذا كان التطبيق يرمز له بالرمز **ت : س ⟵ ص** فإن معكوسه يرمز له بالرمز **ت$^{-1}$: ص ⟵ س** .

" ملاحظة "

١) الصورة العكسية لأي عنصر من المجال المقابل إما أن تكون عنصراً من المجال أو أكثر من عنصر أو لا توجد صورة عكسية .
٢) الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من المجال المقابل هي مجموعة جزئية من المجال .
٣) معكوس أي تطبيق هو علاقة قد تكون تطبيقاً إذا توفرت فيها الشرط (كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط) .
٤) أي عنصر من المجال المقابل ليس له صورة عكسية فإنه لا ينتمي لعناصر مدى التطبيق .

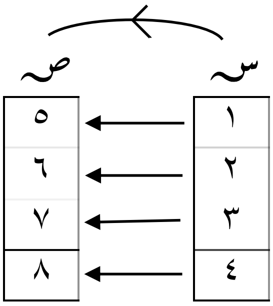
مثال ١ : ليكن / ت : س ⟵ ص موضحاً بالمخطط السهمي ،
هل معكوس التطبيق ت$^{-1}$: ص ⟵ س يسمى تطبيقاً ، ولماذا ؟



الحل : ....
....
....
....

مثال ٢ : ليكن / ت : س ⟵ ص موضحاً بالمخطط السهمي ،

هل معكوس التطبيق ت$^{-1}$: ص ⟵ س يسمى تطبيقاً ، ولماذا ؟



الحـل : ....
....
....

مثال ٣ : ليكن / ت : س ⟵ ص ، حيث ت = {(٣ ، ٥) ، (٢ ، ١) ، (٥ ، ٧)}

أوجد ما يلي :

١) المجال = ... ، ٢) المدى = ...

٣) معكوس التطبيق كأزواج مرتبة **ت**$^{-1}$ = ...

٤) ت(٥) = ... ، ت$^{-1}$(٥) = ...

٥) هل ت(٥) = ت$^{-1}$(٥) .... ، ولماذا ؟ ....

مثال ٤ : ليكن / ت : ع ⟵ ع ، معرفاً بالقاعدة ت(س) = س + ٣

أوجد ما يلي : ت$^{-1}$(٣) ، ت$^{-1}$(٤) ، ت$^{-1}$(٢) ، ت$^{-1}${٤ ⩽ ه ⩽ ٧} .

الحل : ....
....
....
....

مثال ٥ : ليكن التطبيق / ت : ع ⟵ ع ، معرفاً بالقاعدة ت(س) = س^{2} + ٢

أوجد : ت$^{-1}$(٤) ، ثم بيّن أن معكوس التطبيق ليس تطبيقاً .

الحل : ....
....

****

أنواع التطبيقات

أولاً : التطبيق الثابت

- التعريف : يسمى التطبيق ت : س ⟵ ص تطبيقاً ثابتاً إذا ارتبطت جميع عناصر المجال بعنصر واحد فقط من المجال المقابل .

أي أن : ∀ س ∋ س : ت(س) = م ، حيث : م ∋ ص (المجال المقابل) .

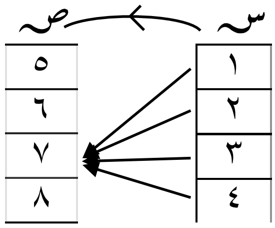
- شرط التطبيق الثابت :

توجد صورة موحدة لجميع عناصر المجال .

أي مهما اختلفت عناصر المجال فإن صورتها هي عنصر ثابت من المجال المقابل .

مثال ١ : ليكن / ت : س ⟵ ص معرفاً بالقاعدة ت(س) = ٧

حدد : المدى ، و نوع التطبيق ؟



الحل : ....

....

" ملاحظة "

١) مدى التطبيق الثابت دائماً عبارة عن عنصر واحد فقط .

٢) الصورة العكسية في التطبيق الثابت تساوي المجال ، أي أن : ت$^{-1}$(ص) = س .

٣) معكوس التطبيق الثابت لا يسمى تطبيقاً ، إلا إذا كان التطبيق بين عنصرين فقط .

مثال ٢ : ليكن / ت : س ⟵ ص ، قاعدته " س يقبل القسمة على ص " ، حيث :

س = {٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥} ، ص = {٧ ، ٣ ، ١١} ، أثبت أن التطبيق ثابت ؟

الحل : ....

....

****

ثانياً : التطبيق المحايد (المطابق)

- التعريف : يسمى التطبيق ت : س ⟵ ص محايداً (مطابقاً) إذا ارتبط كل عنصر في المجال بنفسه في المجال المقابل .

أي أن : ∀ س ∋ س : **ت(س) = س .**

- شرط التطبيق المحايد :

الصورة العكسية لكل عنصر تساوي صورة العنصر وتساوي العنصر نفسه .

مثال ١ : ليكن / ت : س ⟵ س تطبيقاً محايداً ، حيث : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

أوجد مدى التطبيق ، ومثله بالمخطط السهمي .

الحل : ....

....

....

" ملاحظة "

١) مدى التطبيق المحايد دائماً يساوي المجال ، أي أن : المدى = المجال المقابل .

٢) الصورة العكسية في التطبيق المحايد تساوي الصورة ، أي أن : ت$^{-1}$(ص) = ت(س) = س .

٣) معكوس التطبيق المحايد يسمى تطبيقاً إذا كان التطبيق من مجموعة إلى نفسها .

مثال ٢ : ليكن / ت : ط ⟵ ص معرفاً بالقاعدة ت(س) = س

أوجد مدى التطبيق ، ما نوع التطبيق ؟ وهل معكوس التطبيق يسمى تطبيق ؟

الحل : ....

....

....

****

ثالثاً : التطبيق الغامر (الشامل)

- التعريف : يسمى التطبيق ت : س ← ص غامراً (شاملاً) إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة على الأقل لعنصر من عناصر المجال .

أي أن : $\forall$ ص $\in$ ص فإنه $\exists$ س $\in$ س بحيث ت(س) = ص .

- شرط التطبيق الغامر :

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة على الأقل ، $ت^{-1}($ ص$_1) \neq \emptyset$.

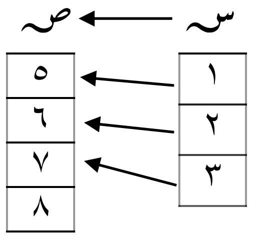
" ملاحظة "

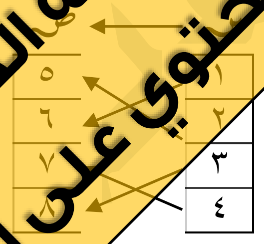
١) في التطبيق الغامر المدى دائماً يساوي المجال المقابل ، أي : المدى = المجال المقابل .

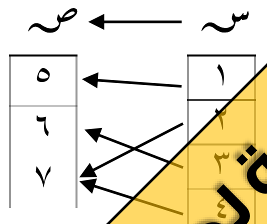
٢) يكون التطبيق ليس غامراً إذا وُجد عنصر من المجال المقابل ليس له صورة عكسية ، أي أن : $ت^{-1}($ص$_1) = \emptyset$.

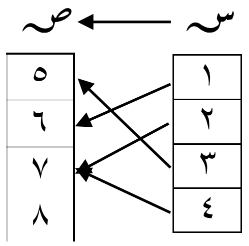
٣) معكوس التطبيق الغامر يكون تطبيقاً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط .

مثال ١ : أي التطبيقات التالية تمثّل تطبيقاً غامراً ؟ مع ذكر السبب .









" ملاحظة " : في المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق (غامر أو ليس غامراً) من خلال المجال المقابل .

مثال ٢ : أي القواعد التالية تمثّل تطبيقاً غامراً ؟ مع ذكر السبب .

١) ت(س) = س + ٣ ، حيث ت : ص ← ص **الحل :**	٢) ت(س) = ٢س − ١ ، حيث ت : ص ← ص **الحل :**
٣) ت(س) = $\frac{٢}{س + ١}$ ، حيث ت : ع ← ع **الحل :**	٤) ت(س) = $\frac{٣س - ٢}{٤}$ ، حيث ت : ع ← ع **الحل :**

" ملاحظة " : نحدد نوع التطبيق (غامر أو ليس غامراً) من خلال الصورة العكسية لقاعدة التطبيق .

رابعاً : التطبيق المتباين (الأحادي)

- التعريف : يسمى التطبيق ت : س ⟵ ص متبايناً (أحاديّاً) إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة على الأكثر لعنصر من عناصر المجال .

أي أن : $\forall$ ص $\in$ ص : ت$^{-1}$(ص$_1$) $\neq$ { س$_1$ ، ... } .

- شرط التطبيق المتباين :

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة على الأكثر ، ت$^{-1}$(ص$_1$) = { س$_1$ ، س$_2$ ، ... }
ت(س$_1$) = ت(س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$ أو س$_1$ $\neq$ س$_2$ $\Leftarrow$ ت(س$_1$) $\neq$ ت(س$_2$)

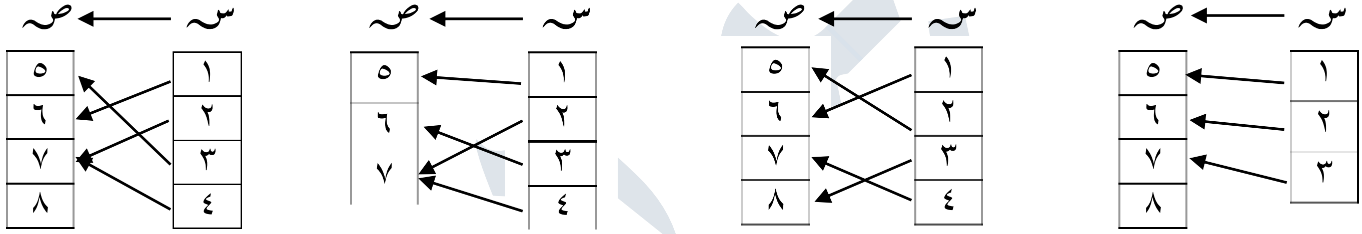
" ملاحظة "

١) في التطبيق المتباين المدى جزئي أو يساوي المجال المقابل ، أي : المدى $\subseteq$ المجال المقابل .

٢) يكون التطبيق ليس متبايناً إذا وُجد عنصر من المجال المقابل له أكثر من صورة عكسية ، أي أن : ت$^{-1}$(ص$_1$) = { س$_1$ ، ... } .

٣) معكوس التطبيق المتباين يكون تطبيقاً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط .

> مثال ١ < : أي التطبيقات التالية تمثّل تطبيقاً متبايناً ؟ مع ذكر السبب .



....

" ملاحظة " : من المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق (متباين أو ليس متبايناً) من خلال المجال المقابل .

> مثال ٢ < : ليكن / ت : ع ⟵ ع ، أي القواعد التالية تمثّل تطبيقاً متبايناً ؟ مع ذكر السبب .

١) ت(س) = س + ٣	٢) ت(س) = ٢س – ١
٣) ت(س) = $\frac{٢}{س + ١}$	٤) ت(س) = $\frac{٣س – ٢}{٤}$

" ملاحظة " : نحدد نوع التطبيق (متباين أو ليس متبايناً) من خلال تطبيق شرط المتباين .

****

خامساً : التطبيق التقابل

- **التعريف : يسمى التطبيق ت : س ← ص تقابلاً إذا كان كل عنصر من عناصر المجال المقابل يمثل صورة واحدة فقط لعنصر من عناصر المجال ، أي أن التطبيقَ غامرٌ ومتباينٌ في آنٍ واحد .**

أي أن : $\forall$ ص $\in$ ص : ت$^{-1}$(صم) = سم .

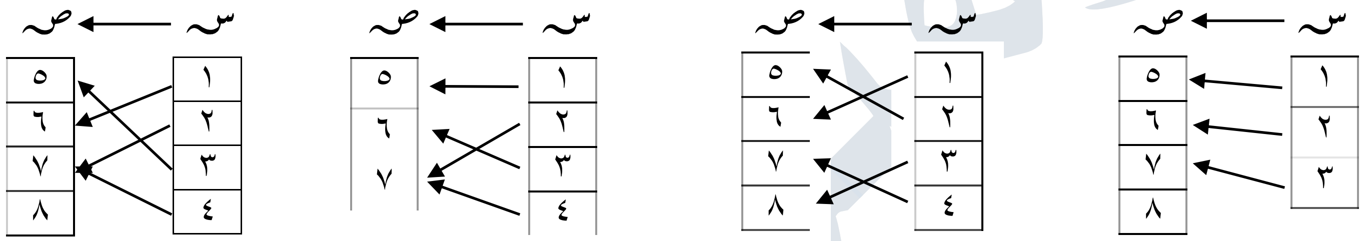
- **شرط التطبيق التقابل :**

كل عنصر من المجال المقابل له صورة عكسية واحدة فقط ، ت$^{-1}$(ص$_1$) = س$_1$.

" ملاحظة "

١) في التطبيق التقابل المدى يساوي المجال المقابل ، أي : المدى = المجال المقابل .
٢) يكون التطبيق ليس تقابلاً إذا وُجد عنصر من المجال المقابل له أكثر من صورة عكسية أو ليس له صورة عكسية ، أي ليس متبايناً أو ليس غامراً أو ليس كليهما .
٣) معكوس التطبيق التقابل يكون تطبيقاً دائماً .

مثال ١ : أي التطبيقات التالية تمثّل تطبيقاً تقابلاً ؟ مع ذكر السبب .



....
....

" ملاحظة " : من المخططات السهمية نحدد نوع التطبيق (تقابل أو ليس تقابلاً) من خلال المجال المقابل .

مثال ٢ : ليكن / ت : ع ← ع ، أي القواعد التالية تمثّل تطبيقاً تقابلاً ؟ مع ذكر السبب .

١) ت(س) = س + ٧	٢) ت(س) = ٦س − ٥	٣) ت(س) = $\frac{٢}{س + ٣}$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

" ملاحظة " : نحدد نوع التطبيق (تقابل أو ليس تقابلاً) من خلال شرطي الغامر والمتباين .

****

التطبيق العكسي

- **التعريف :** يسمى التطبيق ت : س ← ص عكسياً إذا كان معكوسه تطبيق ، أي أن التطبيقَ تقابلٌ ، أي أن التطبيقَ غامرٌ ومتباينٌ في آنٍ واحد .

أي أن : ت$^{-1}$(صہ) = سہ ، حيث ت$^{-1}$: ص ← س .

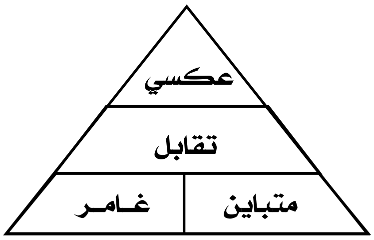
- **شرط التطبيق العكسي :**

يكون التطبيق عكسياً إذا وفقط إذا كان التطبيق تقابلاً .

" ملاحظة "

١) في التطبيق العكسي المدى يساوي المجال المقابل ، أي : المدى = المجال المقابل .
٢) يكون التطبيق ليس عكسياً إذا كان التطبيق ليس تقابلاً ، أي ليس متبايناً أو ليس غامراً أو ليس كليهما .
٣) قاعدة التطبيق العكسي هي الصورة العكسية للتطبيق .

" ملاحظة " :
١) كل تطبيق تقابل هو تطبيق عكسي والعكس صحيح .
٢) كل تطبيق تقابل هو تطبيق متباين وليس العكس .
٣) كل تطبيق تقابل هو تطبيق غامر وليس العكس .
٤) كل تطبيق عكسي هو تطبيق متباين وليس العكس .
٥) كل تطبيق عكسي هو تطبيق غامر وليس العكس .



مثال ١ : ليكن / ت : ع ← ع ،
أي القواعد التالية تمثّل تطبيقاً عكسياً ، ثم أوجد قاعدة التطبيق العكسي .

١) ت(س) = س^{٣} − ٨	٢) ت(س) = $\frac{١}{٢}$ س − ٦	٣) ت(س) = $\frac{س − ٥}{٣}$
....	....	....

" ملاحظة " : نحدد نوع التطبيق (عكسي أو ليس عكسياً) من خلال شرطي المتباين والغامر .

مثال ١ : ليكن / هـ : ع ← ع معرفاً بالقاعدة **هـ(س) = س^{٢}** ، هل لهذا التطبيق تطبيق عكسي ، ولماذا ؟
....
....
....

تركيب تطبيقين

- التعريف : تركيب التطبيقين ت : س ← ص ، ق : ص ← ع هو التطبيق (ق ∘ ت)(س): س ← ع

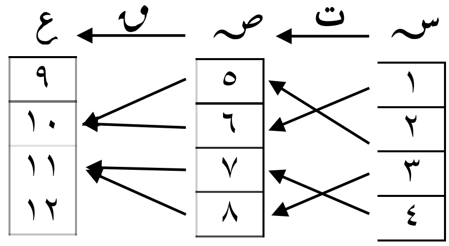
والمعرف بالقاعدة : (ق ∘ ت)(س) = ق [ت(س)] ، لكل س ∈ س .

" ملاحظة "

١) لتركيب تطبيقين (ق ∘ ت) لا بد أن يكون المجال المقابل في التطبيق الأول ت مساوياً المجال في التطبيق الثاني ق ، أي أن : مدى ت ⊆ مجال ق .

٢) (ق ∘ ت) ≠ (ت ∘ ق) .

< مثال ١ > : ليكن / ت : س ← ص ، ق : ص ← ع ، والتركيب (ق ∘ ت)(س) موضح بالمخطط السهمي ، أوجد : المجال والمجال المقابل للتركيب ، ثم أوجد المدى .



الحل : ....

....

....

....

....

....

< مثال ٢ > : ليكن / ت ، ق تطبيقين ، حيث : ت(٣) = ٧ ، ت(٥) = ٩ ، ق(٩) = ١٢ ، ق(٨) = ٣

أوجد : (ق ∘ ت)(٥) = ...

(ت ∘ ق)(٨) = ...

< مثال ٣ > : ليكن / ت ، ق تطبيقين ، حيث : ت(س) = س^{٢} ، ق(س) = ٣س

أوجد : (ق ∘ ت)(س) = ...

(ت ∘ ق)(س) = ...

< مثال ٤ > : ليكن / ت ، ق تطبيقين ، حيث : ت(س) = ٢س − ١ ، ق(س) = (س + ٢)^{٢} .

أوجد : (ق ∘ ت)(س) = ...

(ت ∘ ق)(س) = ...

< مثال ٥ > : ليكن / ر : ع ← ع حيث ر(س) = ٤س + ١ ،

هـ : ع ← ع حيث هـ(س) = ٣س ،

١) أوجد : (هـ ∘ ر)(س) = ...

(ر ∘ هـ)(س) = ...

٢) هل (هـ ∘ ر)(س) = (ر ∘ هـ)(س) ؟ ....

٣) أوجد : (هـ ∘ ر)(٢س) = ...

(ر ∘ هـ)(٥) = ...

الوحدة الثالثة

القوى والجذور

القوى الصحيحة

أولاً : القوى الصحيحة الموجبة

- التعريف : $\forall$ أ $\in$ ع ، ن $\in$ ص$^{+}$ فإن : أ^{ن} يعني ضرب العدد أ في نفسه ن مرة ، وتقرأ (أ أس ن) أو (أ مرفوع للقوة ن) أو (القوة ن للعدد أ) ، حيث أ يسمى الأساس ، ن يسمى الأس أو القوة .

- قوانين الأسس الصحيحة الموجبة : $\forall$ أ ، ب $\in$ ع ، م ، ن $\in$ ص ، فإن :

1) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ (نجمع الأسس المتحدة الأساسات عند الضرب) .
2) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ ، حيث أ $\neq$ ٠ ، م $>$ ن (نطرح الأسس المتحدة الأساسات عند القسمة) .
3) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$ (نضرب عند القوة المرفوعة للقوة) .
4) $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$ (توزيع الأس على الأساسات) .
5) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ ، حيث ب $\neq$ ٠ (توزيع الأس على القسمة) .

- حالات خاصة : يمكن استنتاج الحالات التالية :

1) إذا كان أ $\neq$ ٠ ، م $<$ ن فإن $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = \frac{١}{أ^{ن-م}}$
2) إذا كان أ $\neq$ ٠ ، م $=$ ن فإن $\frac{أ^{ن}}{أ^{ن}} = أ^{ن-ن} = أ^{٠} = ١$.
3) $\forall$ أ $\in$ ع* ، فإن أ^{٠} = ١ .

➢ مثال ١ ➢ : اكتب ما يلي في أبسط صورة :

١) $٣^{٤} \times ٣^{٥} =$ .... ، ٢) $٤^{٥} \times ٣^{٥} =$ .... ، ٣) $(٦^{٢})^{٣} =$ ....

٤) $\frac{٧^{٦}}{٧^{٢}} =$ .... ، ٥) $\frac{٣^{٦}}{٤^{٦}} =$ .... ، ٦) $\frac{٥^{٢}}{٥^{٢}} =$ ....

٧) $(س^{٣})^{٧} =$ .... ، ٨) $(٢أ^{٢}ب)^{٤} =$ ....

٩) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} =$ .... ، ١٠) $\frac{س^{ن}}{س^{ن+٢}} =$ ....

١١) $٢٧ \times ٨١ \times ٩ =$ .... ، ١٢) $٢٥^{٢} \times ١٢٥ =$ ....

١٣) $(ص^{٣})^{٢ن} =$ .... ، ١٤) $\frac{٨ \times ٢ \times ١٦}{٤ \times ٢} =$ ....

ثانياً : القوى الصحيحة السالبة

- التعريف : $\forall$ م $\in$ ع* ، ن $\in$ ص+ فإن : $م^{-ن}$ يعني مقلوب ضرب العدد م في نفسه ن مرة ،
وتقرأ (مقلوب م أس ن) ، حيث $م^{-ن} = \frac{١}{م^{ن}}$.

- حالات خاصة : يمكن استنتاج الحالات التالية :

١) $م^{ن} = \frac{١}{م^{-ن}}$ ، $\forall$ م $\in$ ع* **(تحويل الأس الموجب إلى أس سالب والعكس)**

٢) $\left(\frac{م}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{م}\right)^{ن}$ ، $\forall$ م ، ب $\in$ ع* ، ن $\in$ ص+

(تحويل البسط إلى مقام أو العكس يُغـيّر إشارة الأس)

مثال ١ اكتب ما يلي بأس موجب :

١) $٣^{-٤}$ = ... ، ٢) $(\sqrt{٢})^{-١}$ = ... ، ٣) $س^{-٣}$ = ...

٤) $\frac{١}{٥^{-٧}}$ = ... ، ٥) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢}$ = ... ، ٦) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{-٤}$ = ...

مثال ٢ أوجد قيمة ما يلي :

١) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٤} \times \left(\frac{٤}{٣}\right)^{-٢}$ = ...

٢) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٤} \div \left(\frac{٣}{٤}\right)^{-١}$ = ...

٣) $\frac{٨^{ن+٢} + ٨^{ن+١}}{٢ \times ٨^{ن} - ٨^{ن+١}}$ = ...

٤) $\frac{٢^{ن+٣} + ١٢ \times ٢^{ن}}{٣ \times ٨^{ن+٣} - ٦٤ \times ٨^{ن+٤}}$ = ...

....

٥) $\frac{(-٢)^{٤} \times (-٥)^{٣} \times (-٣)^{٢}}{(-٦)^{٢} \times (-١٥)^{٣}}$ = ...

....

مثال ٢ بسّط ما يلي إلى ابسط صورة :

١) $\frac{س^{ن} \times ص^{٢ن+١}}{س^{ن-٣} \times ص^{ن-٤}}$ = ...

٢) $\frac{(٤^{س})^{٢} \times (٤)^{س+٢}}{(١٦)^{٢} \times (٢)^{٢س}}$ = ...

الجـــذور النونيـــة

- مقدمة : تعلم أن : $٢^{٢} = ٤ \Rightarrow \sqrt{٤} = ٢$ **وكــذلك** $٢^{٣} = ٨ \Rightarrow \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$٢^{٤} = ١٦ \Rightarrow \sqrt[٤]{١٦} = ٢$ **وكــذلك** $٢^{٥} = ٣٢ \Rightarrow \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

$٢^{٦} = ٦٤ \Rightarrow \sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ **وكــذلك** $٢^{٧} = ١٢٨ \Rightarrow \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$

$٣^{٢} = ٩ \Rightarrow \sqrt{٩} = ٣$ **وكــذلك** $٣^{٣} = ٢٧ \Rightarrow \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$٣^{٤} = ٨١ \Rightarrow \sqrt[٤]{٨١} = ٣$ **وكــذلك** $٣^{٥} = ٢٤٣ \Rightarrow \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$

$٤^{٢} = ١٦ \Rightarrow \sqrt{١٦} = ٤$ **وكــذلك** $٤^{٣} = ٦٤ \Rightarrow \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

$٥^{٢} = ٢٥ \Rightarrow \sqrt{٢٥} = ٥$ **وكــذلك** $٥^{٣} = ١٢٥ \Rightarrow \sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$

$٦^{٢} = ٣٦ \Rightarrow \sqrt{٣٦} = ٦$ **وكــذلك** $٦^{٣} = ٢١٦ \Rightarrow \sqrt[٣]{٢١٦} = ٦$

$٧^{٢} = ٤٩ \Rightarrow \sqrt{٤٩} = ٧$ **وكــذلك** $٧^{٣} = ٣٤٣ \Rightarrow \sqrt[٣]{٣٤٣} = ٧$

$٨^{٢} = ٦٤ \Rightarrow \sqrt{٦٤} = ٨$ **وكــذلك** $٩^{٢} = ٨١ \Rightarrow \sqrt{٨١} = ٩$

$١٠^{٢} = ١٠٠ \Rightarrow \sqrt{١٠٠} = ١٠$ **وكــذلك** $١٠^{٣} = ١٠٠٠ \Rightarrow \sqrt[٣]{١٠٠٠} = ١٠$

- تعريف :

١) $\forall$ أ ، ب $\in$ ح ، ن $\in$ ط ، ن > ١ إذا كان $ب^{ن} = أ \Rightarrow \sqrt[ن]{أ} = ب$ ، **والصيغة :**

$\sqrt[ن]{أ} = ب$ تقرأ : (ب هو الجذر النوني لـ أ) ، حيث يسمى أ المجذور ، ن دليل الجذر ، ب الجذر .

٢) $\forall$ أ $\in$ $ح^{+}$ ، ن $\in$ ط ، ن ≥ ٢ عدد زوجي إذا كان $ب^{ن} = أ \Rightarrow \sqrt[ن]{أ} = ب$
فإن **ب** عدد حقيقي غير سالب .

٣) $\forall$ أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط ، ن > ٢ عدد فردي إذا كان $ب^{ن} = أ \Rightarrow \sqrt[ن]{أ} = ب$
فإن **ب** عدد حقيقي موجب أو سالب .

- ملاحظة :

١) بمقارنة القوة النونية ($ب^{ن} = أ$) مع الجذر النوني ($\sqrt[ن]{أ} = ب$) فإن : الأساس = الجذر ، والأس = دليل الجذر ، وناتج القوة = المجذور ، وبذلك يمكن تحويل القوة إلى جذر والجذر إلى قوة .

٢) القوة النونية $(-أ)^{ن}$ يكون ناتجها موجباً إذا كان ن عدداً زوجياً ، ويكون ناتجها سالباً إذا كان ن عدداً فردياً .

٣) الجذر النوني $\sqrt[ن]{-أ}$ لا يوجد له جذر $\in$ ح إذا كان ن عدداً زوجياً ، ويكون جذره سالباً إذا كان ن عدداً فردياً .

٤) الجذور الصماء : هي الجذور التي لا يمكن كتابتها بصورة عدد نسبي ، مثل : $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt[٤]{٧}$ ، $\sqrt[٣]{-٤}$.

< مثال ١ > أوجد قيمة ما يلي :

١) $\sqrt{٦٤}$ = ... ، ٢) $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ... ، ٣) $\sqrt[٦]{٦٤}$ = ... ، ٤) $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ...

٥) $\sqrt[٣]{-٢٧}$ = ... ، ٦) $\sqrt[٥]{-٣٢}$ = ... ، ٧) $\sqrt[٥]{-٢٤٣}$ = ... ، ٨) $\sqrt[٤]{-١٦}$ = ...

٩) $\sqrt{-٤٩}$ = ... ، ١٠) $\sqrt[٤]{-٨١}$ = ... ، ١١) $\sqrt[٦]{-٦٤}$ = ...

****

الأسس النسبية

- تعريف : ١) $\forall$ أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط ، ن $>$ ١ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ، حيث $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح .

٢) $\forall$ أ $\in$ ح ، م ، ن $\in$ ص$^+$ ، وهما عددان أوليان ، $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح فإن :

$أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م$ أو $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ^م})$.

- ملاحظة : يمكن كتابة الأس النسبي بصورة جذر نوني مرفوع للقوة م والعكس صحيح ، وذلك كما هو موضح في تعريف ٢ .

< مثال ١ > اكتب ما يلي بصورة جذرية ، وبسّط إن أمكن :

١) $ص^{\frac{٣}{٤}}$ = ... أو .... ، ٢) $أ^{\frac{٢}{٧}}$ = ... أو ....

٣) $س^{\frac{١}{٩}}$ = ... أو .... ، ٤) $٧^{\frac{٢}{٣}}$ = ...

٥) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}}$ = ... ، ٦) $-٨^{\frac{٢}{٣}}$ = ...

٧) $(٢٥)^{\frac{٣}{٢}}$ = ... ، ٨) $(٤٩)^{\frac{١}{٢}}$ = ...

نتيجة : $\forall$ أ $\in$ ح* ، م ، ن $\in$ ص$^+$ إذا كان $\sqrt[ن]{أ^م} \in$ ح فإن : $أ^{-\frac{م}{ن}} = \frac{١}{أ^{\frac{م}{ن}}}$.

- تعريف ١) $\forall$ أ $<$ ٠ ، م ، ن $\in$ ص$^+$ ، وهما عددان زوجيان ، فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = |أ|^{\frac{م}{ن}}$.

٢) $\forall$ أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط ، حيث ن $\geqslant$ ٢ ، فإن : $(أ^ن)^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^ن}$ = ...

*) | أ | إذا كان ن عدداً زوجياً ، *) أ إذا كان ن عدداً فردياً .

< مثال ٢ > اكتب ما يلي بصورة جذرية ، ثم أوجد القيمة :

١) $(-٤)^{\frac{١}{٤}}$ = ... ، ٢) $[(-٢)^٢]^{\frac{١}{٢}}$ = ...

٣) $(١٦)^{-\frac{٣}{٤}}$ = ... ، ٤) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}}$ = ...

- قوانين الأسس النسبية : $\forall$ أ ، ب $\in$ ح ، ك ، ل $\in$ ن (ن مجموعة الأعداد النسبية) فإن :

١) $أ^{ك} \times أ^{ل} = أ^{ك+ل}$ (نجمع الأسس المتحدة الأساسات عند الضرب) .

٢) $\dfrac{أ^{ك}}{أ^{ل}} = أ^{ك-ل}$ ، حيث $أ \neq ٠$ ، $ك > ل$ (نطرح الأسس المتحدة الأساسات عند القسمة) .

٣) $(أ^{ك})^{ل} = أ^{ك \times ل}$ (نضرب عند القوة المرفوعة للقوة) .

٤) $(أ \times ب)^{ك} = أ^{ك} \times ب^{ك}$ (توزيع الأس على الأساسات) .

٥) $\left(\dfrac{أ}{ب}\right)^{ك} = \dfrac{أ^{ك}}{ب^{ك}}$ ، حيث $ب \neq ٠$ (توزيع الأس على القسمة) .

مثال ٣ أوجد قيمة ما يلي :

١) $(٣٢)^{\frac{٤}{٥}} =$ .... ، ٢) $\left[(٨)^{\frac{١}{٣}}\right]^{\frac{١}{٢}} =$ ....

٣) $(٦٤)^{-\frac{١}{٢}} =$ .... ، ٤) $\left[(٠,٠٢٧)^{\frac{١}{٣}}\right]^{٢} =$ ....

٥) $\left(\dfrac{٦}{٢٤}\right)^{-\frac{٣}{٢}} =$ .... ، ٦) $\left[(٠,٢٥)^{\frac{١}{٢}}\right]^{٣} =$ ....

- ملاحظة : لتبسيط الأسس النسبية نبدأ بالجذر قبل الأس إذا كان الأساس جذره معلوم .

❖ **تمرين** ❖ ضع ما يلي في أبسط صورة علماً بأن المتغيرات أعداد حقيقية والمقام لا يساوي صفراً :

١) $\dfrac{س^{٣} ص^{-٥} (س ص)^{٥}}{(٣ س ص)^{-٤}} =$ ....

....

٢) $\dfrac{(٢٥^{س})^{٢} \times (١٢٥)^{٨}}{(٢٥)^{س+٢} \times (٥)^{٢س}} =$ ....

....

٣) $\sqrt[٤]{س^{٢} + ٢س + ١} \div \dfrac{١}{\sqrt{س + ١}} =$ ....

....

٤) $\dfrac{(٩)^{\frac{١}{٤}} \times (٨١)^{\frac{٣}{٤}}}{(٢٧)^{\frac{١}{٢}} \times (٣)^{\frac{١}{٤}}} =$ ....

....

****

تبسيط الجذور

- قوانين الأساسية للجذور : إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geqslant ٢$ فإن :

١) $\sqrt[ن]{أ \times ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ (توزيع الجذر على الضرب) .

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث $ب \neq ٠$ (توزيع الجذر على القسمة) .

٣) $\sqrt[ن]{أ^{م}} = \sqrt[نه]{أ^{مه}}$ ، حيث $أ \in ح^{+}$ ، $م \in ص$ ، $ن$ ، $ه \in ص^{+}$.

- خطوات تبسيط الجذور : ١) قسمة الأس ودليل الجذر على أكبر عامل مشترك بينهما .
٢) كتابة المجذور بصورة حاصل ضرب عوامله الأولية .
٣) التخلص من الجذر في المقام وذلك بالضرب في مرافق المقام .

مثال ١ اكتب الجذور التالية في أبسط صورة :

١) $\sqrt{١٨} =$ .... ، ٢) $\sqrt{٥٠} =$ ....

٣) $\sqrt{٢٧} =$ .... ، ٤) $\sqrt{٣٢} =$ ....

٥) $\sqrt{٧٢} =$ .... ، ٦) $\sqrt{١٢٥} =$ ....

٧) $\sqrt{١٢} \times \sqrt{١٢} =$ .... ، ٨) $\sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٠,٠١} =$ ....

٩) $\sqrt[٣]{٤} \times \sqrt[٣]{٦} =$ ....

١٠) $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٠} =$ ....

١١) $\sqrt[٣]{٦٤} =$ ....

١٢) $\sqrt[٦]{٢٧} =$ ....

١٣) $\sqrt{\frac{١٦}{٥٠}} =$ ....

١٤) $\sqrt{\frac{٩}{٢٧}} =$ ....

١٥) $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩} =$ .... ، ١٦) $\sqrt[٩]{س^{٣} ص^{٦}} =$ ....

- ملاحظة : قسمة العدد (أ) على جذره ($\sqrt{أ}$) يساوي جذر العدد ($\sqrt{أ}$) . **مثلاً :** $٣ \div \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$.

جمع وطرح الجذور

- **قاعدة : تجمع وتطرح الجذور المتشابهة فقط كما هو الحال في جمع وطرح الحدود المتشابهة .**

- **تعريف : الجذور المتشابهة هي التي تتساوى في المجذور وكذلك في دليل الجذر بعد التبسيط .**

- **خطوات جمع وطرح الجذور :** ١) توحيد المجذور ودليل الجذر لكي تكون الجذور متشابهة .
٢) نجمع ونطرح معاملات الجذور المتشابهة فقط ونضع الجذر نفسه .
٣) ناتج الجمع والطرح يكون جذراً مشابهاً للجذور التي جُمِعت أو طُرِحت .

➢ مثال ١ ➢ أوجد ناتج ما يلي :

١) $٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} =$ .... ، ٢) $٧\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} =$ ....

٣) $-٦\sqrt{٥} + \sqrt{٥} =$ .... ، ٤) $٤\sqrt{٧} - ٧\sqrt{٧} =$ ....

٥) $-\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} =$ .... ، ٦) $\sqrt{١٨} + \sqrt{٢} =$ ....

٧) $\sqrt[٣]{٤^{٢}} + \sqrt[٣]{٢^{٤}} =$ ....

٨) $\sqrt{٥٠} - \sqrt{٣٢} =$ ....

٩) $\sqrt{٥٠٠} + \sqrt{٤٥} =$ ....

١٠) $٢\sqrt{٢٧} - \sqrt{٦٤} =$ ....

١١) $\sqrt{٣٢} + \sqrt{٧٢} =$ ....

١٢) $\sqrt{١٢٥} - ٤\sqrt{٢٠} =$ ....

١٣) $٣\sqrt[٣]{٨} + ٢\sqrt[٣]{٢٧} =$ ....

١٤) $\frac{٤}{\sqrt{٣}} + \frac{٥}{\sqrt{٣}} =$ ....

١٥) $\frac{٣}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٥}} =$ ....

....

١٦) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}} - \frac{٦}{\sqrt{٥}} =$ ....

١٧) $\frac{٤}{\sqrt{١٢}} - \frac{١}{\sqrt{٤٨}} =$ ....

- **ملاحظة :** عند جمع أو طرح الكسور التي تحتوي على جذور في المقام لا بد من توحيد الجذور ثم التخلص من الجذر في المقام وذلك بالضرب في مرافق المقام .

****

ضرب الجـــذور

- **قاعدة :** تُضرَب الجذور المتحدة الدليل باستخدام القانون : $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$ حيث $ن \geqslant ٢$ ،

أما الجذور المختلفة الدليل فيمكن توحيد أدلتها بالقانون : $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{ب} = \sqrt[نم]{أ^{م}} \times \sqrt[نم]{ب^{ن}} = \sqrt[نم]{أ^{م} \times ب^{ن}}$.

- **المقدار الجذري :** هو كل مقدار يحتوي على جذرين غير متشابهين أو أكثر ، مثلاً : $(\sqrt{٢} \pm \sqrt{٣})$.

- **ضرب المقادير الجذرية :** طريقة الضرب تشبه طريقة ضرب المقادير الجبرية ، أي : ضرب الكل في الكل .

مثال ١ أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

١) $\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٩} =$ ....

٢) $\sqrt{٨} \times \sqrt[٣]{٤} =$ ....

٣) $\sqrt{٢} (\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) =$ ....

٤) $\sqrt{٢} (\sqrt{١٨} + \sqrt{٣٢}) =$ ....

٥) $\sqrt[٣]{٣} (\sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{١٦}) =$ ....

٦) $(\sqrt{٥} + ٤) \times (\sqrt{٢} - ٧) =$ ....

....

٧) $(\sqrt{٧} - ٢)^{٢} =$ ....

٨) $٥\sqrt{٥} (٧\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣}) =$ ....

....

- **المقادير الجذرية المترافقة :** إذا كان : س ، ص $\in$ ع ، س ، ص $\geqslant ٠$ فإن :

$(\pm\sqrt{س} + \sqrt{ص})$ ، $(\pm\sqrt{س} - \sqrt{ص})$ مقداران مترافقان .

- **ضرب المقادير المترافقة :** حاصل ضرب مقدارين مترافقين = مربع الحد الأول − مربع الحد الثاني

أي أن : $(\sqrt{س} + \sqrt{ص}) \times (\sqrt{س} - \sqrt{ص}) = (\sqrt{س})^{٢} - (\sqrt{ص})^{٢} = س - ص$.

مثال ٢ أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة :

١) $(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) (\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) =$ ....

٢) $(-\sqrt{٧} - \sqrt{١٩}) (-\sqrt{٧} + \sqrt{١٩}) =$ ....

٣) $(٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣}) (٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٣}) =$ ....

٤) $(\sqrt{٧} - ٩) (٩ + \sqrt{٧}) =$ ....

قسمة الجذور

- **قاعدة :** تُقسَم الجذور المتحدة الدليل باستخدام القانون : $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ ، حيث $ن \geqslant ٢$ ،

أما الجذور المختلفة الدليل فيمكن توحيد أدلتها باستخدام القانون : $\frac{\sqrt[م]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \frac{\sqrt[م ن]{أ^{ن}}}{\sqrt[م ن]{ب^{م}}} = \sqrt[م ن]{\frac{أ^{ن}}{ب^{م}}}$

- **ملاحظة :** للتخلص من الجذر في المقام نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام .

مثال ١ اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

١) $\sqrt{\frac{١٣٥}{٥}}$ = ...

٢) $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt[٣]{٥}}$ = ...

٣) $\frac{\sqrt[٣]{١٢}}{\sqrt[٣]{٤}}$ = ...

٤) $\frac{\sqrt{(ب - جـ)}}{\sqrt[٣]{(ب - جـ)^{٢}}}$ = ...

٥) $\frac{١}{\sqrt{٥} - ٢}$ = ...

مثال ٢ اختصر ما يأتي:

١) $\frac{\sqrt{أ ب}}{\sqrt{أ} + \sqrt{ب}}$ = ...

....

٢) $\frac{س \sqrt{ص} - ص \sqrt{س}}{\sqrt{س} - \sqrt{ص}}$ = ...

....

٣) $\frac{٤}{\sqrt{١٠} - \sqrt{٦}}$ = ...

٤) $\frac{٦}{٣ - \sqrt{٦}}$ = ...

****

حَلّ المعادلات الأسية والجذرية

أولاً : المعادلات الأسية

- المعادلة الأسّية : هي المعادلة التي تحتوي على متغير أو أكثر في الأُس .

مثلاً : $٣^{\text{س} - ١} = ٣^{٤}$ ، $٧^{\text{س}^{٢}} = ٤٩$ ، $(\sqrt{٥})^{\text{س}^{٢}} = (\sqrt{٥})^{٤}$ كلها معادلات أسية .

- حل المعادلات الأسية : إيجاد قيمة المتغير في المعادلة باستخدام إحدى الخاصيتين التاليتين :

١) الخاصية الأولى : (إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس)

أي أن : $\forall$ ب > ٠ ، م ، ن $\in$ ع ، إذا كان $\text{ب}^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{ن}}$ فإن م = ن

٢) الخاصية الثانية : (إذا تساوت الأسس لأساسات مختلفة فإن الأس يساوي صفر)

أي أن : $\forall$ أ ، ب > ٠ ، أ $\neq$ ب ، إذا كان $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}}$ فإن ن = ٠

مثال ١ حل المعادلات التالية :

١) $٣^{\text{س}} = ٨١$	٢) $٢^{\text{س} + ١} = ٣٢$	٣) $٣^{\text{س}^{٣}} = ٩^{٣}$ ....
٤) $١٠^{\text{س} + ٣} = ١٠^{\text{س}^{٣}}$	٥) $٢^{\text{س}} = \frac{١}{١٦}$	٦) $٢٥^{٢\text{س}} = ٥^{\text{س} + ١}$ ....
٧) $٣^{\text{س} - ٥} = ٤^{\text{س} - ٥}$	٨) $٧^{\text{س}^{٢} + ١} = ٣^{\text{س}^{٢} + ١}$	٩) $٣^{\text{س}^{٢} + ٤} = ٤٩^{\text{س} + ٢}$ ....

⮜ تابع المثال ⮞

١٠) $\text{١٠}^{\text{س}} = \text{٠,٠٠١}$	١١) $\text{٨} \times \text{٢}^{\text{س}} = \text{٦٤}$	١٢) $\text{١٠}^{(\text{س}-\text{٤})(\text{س}-\text{٢})} = \text{١}$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
١٣) $\text{٥}^{\text{س}^{٢} - \text{٥س}} = \text{٣}^{\text{س}^{٢} - \text{٥س}}$	١٤) $\text{٣}^{\text{س}^{٢}} = \text{٣}^{\text{س} + \sqrt{\text{٢}}}$	١٥) $\left(\frac{\text{٣}}{\text{٥}}\right)^{\text{٢س} - \text{١}} = \left(\frac{\text{٥}}{\text{٣}}\right)^{-\text{٣}}$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

ثانياً : المعادلات الجذرية

- المعادلة الجذرية : هي المعادلة التي تحتوي على متغير أو أكثر في مجذورها (داخل الجذر) .

مثلاً : $\sqrt{\text{س}} = \text{٧}$ ، $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٣}} = \text{١٠}$ ، $(\sqrt[3]{\text{س}}) = (\sqrt{\text{ص}})^{٣}$ ، كلها معادلات جذرية .

- حل المعادلات الجذرية : إيجاد قيمة المتغير في المعادلة باتباع الخطوات التالية :

١) نحدّد الشرط (المجذور ≥ ٠) في بداية الحل لكي نحدّد قيم س ∋
أي أن : قيمة س التي تجعل ما تحت الجذر سالباً تكون مرفوضة .
٢) نتخلص من كل الحدود والمعاملات التي خارج الجذر .
٣) نتخلص من الجذر برفع الطرفين للقوة ن وهو دليل الجذر المحدد في المعادلة .

⮜ مثال ١ ⮞ حل المعادلات التالية :

١) $\sqrt{\text{س}} - \text{٦} = \text{٣}$	٢) $\sqrt{\text{٢س} + \text{٥}} = \sqrt{\text{٣س} + \text{٤}}$	٣) $\sqrt[3]{\text{٢س} - \text{٣}} = \text{٢}$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

تابع المثال

٤) $٢\sqrt{\text{٢س}} = \sqrt{\text{٥س} + ٧}$	٥) $\sqrt{\text{٢س} - ٦} = \sqrt{\text{س} + ١}$	٦) $\sqrt[٥]{\text{٢ص} - ٥} = -١$
٧) $\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ١٢$	٨) $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{أ} - ٥} = ٦$	٩) $\sqrt{\text{ص} + ٤} - \sqrt{\text{ص} - ٣} = ١$

****

الوحدة الرابعة

الحدوديات

(كثيرات الحدود)

الحـــدوديـــات

- الحدوديات في متغير واحد : كل مقدار جبري لا يحتوي على متغير في المقام أو تحت الجذر أو في الأس يسمى حدودية ذات متغير واحد أو كثيرة حدود ذات متغير واحد .

- الصورة العامة : الحدودية ذات المتغير **س** من الدرجة ن صورتها العامة هي :

$$أ_{ن}س^{ن} + أ_{ن-١}س^{ن-١} + أ_{ن-٢}س^{ن-٢} + ... + أ_{١}س + أ_{.}$$

حيث : ن ∈ ط ويسمى درجة الحدودية ، والمعاملات $أ_{ن}$ ، $أ_{ن-١}$ ، ... ، $أ_{.}$ ∈ ح ، $أ_{ن} \neq$ صفر

ويسمى $أ_{ن}$ المعامل الرئيس ، $أ_{.}$ بالحد المطلق ، ويرمز للحدودية بالرمز : ح(س) أو ح .

مثال ١ أكمل الجدول بتحديد درجة الحدودية ومعاملها الرئيس وحدها المطلق :

م	الحدودية	الدرجة	المعامل الرئيس	الحد المطلق
١	$ح_{١} = ٧س^{٥} - ٤س^{٤} + س^{٢} - ٢س + ١$	....	....	....
٢	$ح_{٢} = ١٠ - ٣س^{٤} + س^{٣} - ٢س^{٦} + ٣س$	....	....	....
٣	$ح_{٣} = س + ٢$	....	....	....
٤	$ح_{٤} = ٩س^{٢} - ٢س - ٨$	....	....	....
٥	$ح_{٥} = -٣س$	....	....	....
٦	$ح_{٦} = ٥٧$	....	....	....

مثال ٢ كوّن الحدوديات التي معاملاتها ما يلي :

م	المعاملات	الحدودية
١	$أ_{٤} = ٧$ ، $أ_{٣} = ٤$ ، $أ_{٢} = ١$ ، $أ_{١} =$ صفر ، $أ_{.} = -٢$	....
٢	$أ_{٦} = ٢$ ، $أ_{.} = ٣$ ، $أ_{١} = -٤$ ، $أ_{٢} = \frac{-١}{٢}$ ، $أ_{٥} = أ_{٤} = أ_{٣} =$ صفر	....
٣	$أ_{٣} = ٢$ ، $أ_{٢} = أ_{١} =$ صفر ، $أ_{.} = ٧$	....
٤	$أ_{٤} = ٨$ ، $أ_{.} = -٥$	....
٥	$أ_{.} = ٣٤$	....
٦	$أ_{١} = ٦$	....

مثال ٣ أوجد القيمة العددية للحدوديات التالية :

١	$ح(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٤$ ، عند س = ٢	....
٢	$ح(ص) = ٢ص^{٣} - ص^{٢} + ٣$ ، عند ص = ٠	....
٣	$ح(ع) = ٦ع - ١٢$ ، عند $ع = \frac{-١}{٢}$	....
٤	$ح(أ) = ٥أ^{٢} - ٨$ ، عند س = – ٣	....

العمليات على الحدوديات

أولاً : الجمع والطرح

- تعريف : ناتج جمع أو طرح حدوديتين يكون حدودية درجتها أصغر من أو تساوي درجة الحدودية الأعلى درجة ،

أي أن : $\boxed{\text{درجة } [\,ح_١ \pm ح_٢\,] \leqslant \text{درجة } ح_١ \text{ أو } ح_٢}$

ملاحظة : يمكن جمع أو طرح حدوديتين أو أكثر من درجات مختلفة .

➢ مثال ١ ➢ ليكن لدينا الحدوديات التالية :

$ح_١ = س^٣ + ٣س^٢ - ٢س + ٥$ ، $ح_٢ = ٤س^٢ + ٥س - ٢$ ، $ح_٣ = -٧س - ٨$

أوجد ما يلي :

١) $ح_١ + ح_٢ =$ ....

....

٢) $ح_١ - ح_٢ =$ ....

....

٣) $ح_١ + ح_٣ =$ ....

....

٤) $ح_٣ - ح_٢ =$ ....

....

٥) $ح_٢ + ح_٣ =$ ....

....

٦) $ح_١ + (ح_٢ + ح_٣) =$ ....

....

- خواص عمليتي الجمع والطرح :

١) جمع الحدوديات عملية إبدالية بينما الطرح ليست عملية إبدالية ،

أي أن : $ح_١ + ح_٢ = ح_٢ + ح_١$ بينما $ح_١ - ح_٢ \neq ح_٢ - ح_١$

٢) جمع الحدوديات عملية تجميعية بينما الطرح ليست عملية تجميعية ،

أي أن : $ح_١ + (ح_٢ + ح_٣) = (ح_١ + ح_٢) + ح_٣$ ،

بينما $ح_١ - (ح_٢ - ح_٣) \neq (ح_١ - ح_٢) - ح_٣$

****

ثانياً : ضرب الحدوديات

- تعريف : ١) عند ضرب حدودية في عدد حقيقي غير الصفر ؛ فإننا نضرب العدد في جميع حدود الحدودية ويكون الناتج حدودية لها درجة الحدودية المضروبة في ذلك العدد .

٢) عند ضرب حدوديتين متشابهتين أو مختلفتين في الدرجة فإننا نقوم بضرب حدود الحدودية الأولى في جميع حدود الحدودية الثانية باستخدام التوزيع ، ثم نجمع الحدود المتشابهة فيكون الناتج حدودية درجتها تساوي مجموع درجتي الحدوديتين المضروبتين .

أي أن : $\boxed{\text{درجة } [\,ح_١ \times ح_٢\,] = \text{درجة } ح_١ + \text{درجة } ح_٢}$

مثال ١ **ليكن لدينا الحدوديات التالية :**

$ح_١ = س^٣ + ٣س^٢ - ٢س + ٤$ ، $ح_٢ = س^٢ + ٣س - ١$ ، $ح_٣ = ٤س - ٣$

أوجد ما يلي :

١) $ح_١ \bullet ح_٢ =$ ....

....

٢) $ح_٢ \bullet ح_٣ =$ ....

....

٣) $ح_١ \bullet ح_٣ =$ ....

....

٤) $٧\,ح_٣ =$ ....

٥) $٢\,ح_١ \bullet ح_٣ =$ ....

....

٦) $ح_١\,(\,ح_٢ + ح_٣\,) =$ ....

....

- خواص عملية الضرب : ١) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية الإبدال ،

أي أن : $ح_١ \times ح_٢ = ح_٢ \times ح_١$ (إبدالية)

٢) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية التجميع ،

أي أن : $ح_١ \bullet (\,ح_٢ \bullet ح_٣\,) = (\,ح_١ \bullet ح_٢\,) \bullet ح_٣$ (تجميعية)

٢) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية التوزيع (توزيع الضرب على الجمع) ،

أي أن : $ح_١ \bullet (\,ح_٢ + ح_٣\,) = (\,ح_١ \bullet ح_٢\,) + (\,ح_١ \bullet ح_٣\,)$

٣) عملية ضرب الحدوديات لها خاصية العنصر المحايد الضربي وهو الواحد ،

أي أن : $ح_١ \times ١ = ١ \times ح_١$

****

ثالثاً : قسمة الحدوديات

- تعريف : إذا كان $ح_١ \times ح_٢ = ح_٣$ ، و $ح_٢ \neq$ **صفر** ، ودرجة $ح_٢ \leqslant$ درجة $ح_٣$ ، فإننا نقول أن :
$ح_٣$ تقبل القسمة على $ح_٢$ وتكون $ح_٢$ عاملاً من عوامل $ح_٣$ ، ويكون $ح_٣ \div ح_٢ = ح_١$ ،
وكذلك الحال بالنسبة لـ $ح_١$.

- ملاحظة : ١) ناتج قسمة حدودية على حدودية أخرى هو حدودية أيضاً ،

$ح_٣ \div ح_٢ = ح_١$ ، حيث : $ح_٢$ ، $ح_٢ \neq$ **صفر**

٢) درجة حدودية المقسوم توزّع بالشكل التالي :

درجة المقسوم = درجة المقسوم عليه + درجة ناتج القسمة .

٣) إذا كان باقي القسمة يساوي صفراً فإن باقي القسمة هو الحدودية الصفرية .

٤) تكون مخرجات القسمة عل النحو التالي :

المقسوم = المقسوم عليه × ناتج القسمة + الباقي .

مثال ١ أوجد ناتج قسمة $ح_١$ على $ح_٢$ في كلاً مما يأتي :

$ح_١ = ٣س^٤ + س^٣ - ٢س + ٤$ ، $ح_٢ = ٢س - ١$	$ح_١ = ٢س^٣ + ٥س^٤ - ٤$ ، $ح_٢ = س^٢ - ١$
$ح_١ = ٢س^٣ - ٥س^٤ + ٨$ ، $ح_٢ = س^٢ - ١$	$ح_١ = س^٣ + ١$ ، $ح_٢ = س + ١$

- الطريقة التركيبية : يمكن إجراء عملية القسمة $ح_١ \div ح_٢$ باتباع الخطوات التالية :

١) نكتب معاملات المقسوم $ح_١$ بعد ترتيب الحدود ترتيباً تنازلياً حسب قوى س .

٢) نكتب صفر المقسوم عليه $ح_٢$ على اليسار .

٣) ننزل المعامل الرئيس لـ $ح_١$ ونضعه تحت الخط .

٤) نضرب المعامل الرئيس في صفر المقسوم عليه ونكتب الناتج تحت المعامل الثاني .

٥) نجمع المعامل الثاني مع الناتج ونضع النتيجة تحت الخط .

٦) نكرر الخطوات السابقة إلى أن تنتهي المعاملات .

➢ مثال ٢ ➢ أوجد ناتج قسمة $ح_١$ على $ح_٢$ في كلاً مما يأتي :

$ح_١ = س^٢ - ٥ س + ٩$ ، $ح_٢ = س - ٣$	$ح_١ = ٣س^٣ + ٥ س - ١$ ، $ح_٢ = س - ٢$
$ح_١ = س^٣ - ٢س + ٥$ ، $ح_٢ = ٢س + ١$	$ح_١ = س^٣ - ٤س + ٤$ ، $ح_٢ = س - ٢$

****

مبــرهــنتا الباقي والعامل

أولاً : مبرهـنة البـاقـي

- نص المبرهنة :

باقي قسمة أي حدودية $ح_١$ على حدودية من الدرجة الأولى $ح_٢ = (أ س + ب)$ ، أ ، ب $\ni$ ح يساوي $ح_٤$ وهي القيمة العددية للحدودية $ح_١$ عندما س = $\left(\frac{-ب}{أ}\right)$.

أي : نوجد قيمة $\left(\frac{-ب}{أ}\right)$ من الحدودية $ح_٢$ ثم نعوض بها في الحدودية $ح_١$ لإيجاد قيمة باقي القسمة .

مثال ١ أوجد باقي قسمة $حـ_1 = ٣س^3 - ٢س^2 + ١$ على $حـ_2$ في كلاً مما يأتي :

$حـ_2 = س + ٢$	$حـ_2 = ٣س - ١$
$حـ_2 = ٢س + ١$	$حـ_2 = ٣س - ٤$

مثال ٢ لتكن $حـ_1 = س^5 + ب\,س^3 + ٨\,س + ١٧$ ، $حـ_2 = ٨\,س^2 + ١٧$ ، باقي قسمة $حـ_1$ على $حـ_2$ يساوي ٣٣ ، فأوجد قيمة ب :

ثانياً : مبرهنة العوامل

- نص المبرهنة : يكون (ﻡ س – ب) عاملاً من عوامل الحدودية حـ (س) إذا وفقط إذا كان حـ $\left(\frac{ب}{ﻡ}\right)$ = صفراً ، ﻡ ، ب ∈ ع .

- عكس المبرهنة : إذا كان حـ $\left(\frac{ب}{ﻡ}\right)$ = صفراً فإن (ﻡ س – ب) عاملاً من عوامل الحدودية حـ (س) .

مثال ٣ بيّن أن $حـ_1$ عاملاً من عوامل $حـ = س^3 - ٥\,س + ٢$ في كلاً مما يأتي :

$حـ_1 = س - ٢$	$حـ_1 = س + ٣$
$حـ_2 = ٢س + ١$	$حـ_2 = ٣س - ٤$

مثال ٤ لتكن د = – ٣ س^{٢} + ب س + ٥ ، ب ∈ ح ، أوجد قيمة ب التي تجعل (س – ١) عاملاً من عوامل د .

....

....

....

....

****

أصفار الحدودية

- **صفر الحدودية :** هو أي عدد حقيقي يجعل الحدودية تساوي صفر عند التعويض به عن المتغير .

- **تعريف :** إذا كانت د حدودية متغيرها س من الدرجة ن ، ن ∈ ط ، فإن قيم س التي تجعل د = ٠ هي أصفار الحدودية .

- **ملاحظة :** ١) عدد أصفار الحدودية د يساوي درجتها ، أي أن : عدد أصفار الحدودية = ن .
٢) إذا كانت الحدودية د فإن كل صفر من أصفارها هو عامل من عوامل حدها المطلق .

مثال ١ لتكن د = س^{٣} – ٢س^{٢} – ٩س + ١٨ ، وكان العدد ٢ أحد أصفارها ، أوجد بقية أصفار الحدودية ، ثم اكتب تحليل الحدودية .

الحل : ....

....

....

....

....

....

مثال ٢ لتكن د = س^{٤} – ٧س^{٣} + ٥س^{٢} + ٣١ س – ٣٠ ،

١) بين أن العددين ١ ، –٢ صفران للحدودية .

....

....

....

٢) أوجد بقية الأصفار .

....

....

....

٣) اكتب تحليل الحدودية .

....

....

****

تَمّ بِحَمدِ اللّٰهِ

الفصل الأول

تحياتي لكم

إبراهيم الحبابي

نبذة عن الكتاب

يعتبر هذا الملخص بديلاً للكتاب المدرسي يمكن أن يستغني به الطالب عن كل الملخصات الأخرى ، لأنه يحتوي على :

- تعريفات ومفاهيم لعناصر المنهج .
- قوانين وقواعد مهمة وسهلة التطبيق .
- أمثلة محلولة كثيرة ومفصلة لكل الدروس .
- تمارين محلولة من تمارين الكتاب المدرسي وغيره .
- مقارنات بين المواضيع في أوجه التشابه والاختلاف .

المؤلف