الاستقراء الرياضي

البرهان بالتراجع

الخطوات :

1- نرمز للقضية $E(n)$

2- نثبت صحة القضية $E(n_0)$

3- نفرض صحة القضية $E(n)$

4- نثبت صحة القضية $E(n+1)$

في المجموع نعوض فقط في الحد الذي يحوي n
أما الجداء فنعوض في الحد كامل

- n عدد طبيعي $\Leftarrow n_0 = 0$
- n عدد موجب تماما $\Leftarrow n_0 = 1$
- $n \in \mathbb{N} \Leftarrow n_0 = 0$
- $n \in \mathbb{N}^* \Leftarrow n_0 = 1$

المضاعفات

توضيح : ماذا يعني القول مضاعف للعدد (....) $\Rightarrow$ العدد $= K(....)$

* نفس الخطوات

المتراجحات

* نفس الخطوات

فكرة $n!$

كبير عاملي = كبير . صغير عاملي

Ex: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4!$

الاستقراء الرياضي 2):

اثبت n عدد طبيعي ان المقدار 4^n+5 مضاعف للعدد 3 :

$E_n = 4^n + 5 = 3K$

نثبت صحة القضية $E(n_0)$

$n_0 = 0$

$4^0 + 5 = 6 \longrightarrow$ مضاعف للعدد 3

نفرض صحة القضية E_n

$E_n = 4^n + 5 = 3K \longrightarrow$ الفرض

نثبت صحة القضية E_{n+1}

$E(n+1) = 4^{n+1} + 5 = 3K \longrightarrow$ الطلب

ننطلق من الفرض إلى الطلب:

$4^n + 5 = 3K$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$4^{n+1} + 20 = 12K$

$\Rightarrow \underbrace{4^{n+1} + 5} + 15 = 12K \Rightarrow 3K + 15 = 12K$

في حال $1 > x$ ، n عدد طبيعي أثبت صحة المتراجحة :

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

نرمز للقضية

$E_n = (1+x)^n \geq 1 + nx$

نثبت صحة القضية $E(0)$

$(1+x)^0 \geq 1 + \cancel{0x} \Rightarrow 1 \geq 1$ محققة

الفرض $(1+x)^n \geq 1+nx$

نثبت صحة القضية E_{n+1}

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \longrightarrow$ الطلب

في الطلب اذا كان هناك علاقة ضربية انجزها دد نشر - مطابقة - عامل ...»

$\Leftarrow$ من الفرض الى الطلب

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$ طلب

نضرب الطرفين بـ $(1+x) \Leftarrow (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow (1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$

$L_1 = (1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx \boxed{+nx^2} \longrightarrow$ «زيادة دد تصغير الصغير»

نحذف nx^2 وفق قاعدة

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$

في حال كان n موجب تماماً اثبت صحة القضية :

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$E_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة القضية $n = 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1!} &= 1 \\ \frac{1}{2^{1-1}} &= 1 \end{aligned}\right\}$$ القضية صحيحة

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$ محققة «الفرض»

نثبت صحة القضية E_{n+1}

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n}}$$ «الطلب»

من الفرض نجد

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n} \cdot 2^{-1}} \cdot \frac{1}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n}} \cdot \frac{\cancel{2}}{(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n}}$$

الاستقراء الرياضي (3)

اثبت مهما يكن n عدد موجب تماماً وفي حال $1 \geq$ لا صحة القضية

$n! \geq 2^{n-1}$

$E_n = n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة القضية

$n = 1$

$\left.\begin{array}{l} 1! = 1 \\ 2^{1-1} = 1 \end{array}\right\}$ القضية صحيحة

$n! \geq 2^{n-1}$ محققة   الفرض

نثبت صحة القضية E_{n+1}

$(n+1)! \geq 2^{n}$

من الفرض نجد

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الكل ب $(n+1)$ للكل

$(n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}$

حسب فكرة العاملي

$(n+1)! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}$

$(n+1)! \geq (n+1) \cdot 2^{n} \cdot 2^{1}$

$(n+1)! \geq (n+1) \cdot 2^{n} \cdot \frac{1}{2}$

$(n+1)! \geq \frac{(n+1)}{2} \cdot 2^{n}$

نحذف $n+1$ لأنه مقدار موجب
وفق قاعدة تصغير الصغير

$(n+1)! \geq 2^{n}$

نحذف الزيادة اذا كان موجب فقط
اما اذا كان سالب لا نحذف

اطراد متتالية

أولاً << الفرق >>

عندما يكون تابع بلا شروط (تابع صريح بدلالة n)

$$U_{n+1} - U_n = \boxed{\ldots}$$

ناتج > 0 متتالية متزايدة تماماً.

ناتج < 0 متتالية متناقصة تماماً.

ثانياً << نسبة >>

عندما تحوي المتتالية على أسس.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \boxed{\ldots}$$

ناتج > 1 متتالية متزايدة تماماً.

ناتج < 1 متتالية متناقصة تماماً.

ثالثاً << الاشتقاق >>

عندما يكون التابع بلا حدود أو تابع جذري.

$f'(x) > 0$ متتالية متزايدة تماماً.

$f'(x) < 0$ متتالية متناقصة تماماً.

ادرس اطراد متتالية U_n حيث $U_n = 3n - 4$

نشكل الفرق $U_{n+1} - U_n =$

$3(n+1) - 4 - (3n - 4) \Rightarrow \cancel{3n} + 3 \cancel{-4} \cancel{-3n} \cancel{+4} = 3$

$U_{n+1} - U_n = 3 \Rightarrow 3 > 0$

و المتتالية متزايدة تماماً.

ادرس اطراد متتالية حيث $U_n = 3^n$

نشكل نسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \Rightarrow \frac{\cancel{3^n} \cdot 3^1}{\cancel{3^n}} = 3^1$

$\Rightarrow 3 > 1$

ومنه المتتالية متزايدة تماماً.

نعرف المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة: $U_n = \sqrt{3n - 2}$

ادرس اطراد المتتالية: $U_0 = 1$

نشتق $U_n = f(n) = \sqrt{3n - 2} \Rightarrow f'(n) = \frac{3}{2\sqrt{3n - 2}}$ $\frac{+}{+}$

$\Rightarrow f'(n) > 0$ ← والمتتالية متزايدة تماماً.

عند دراسة اطراد متتالية مجاميع => نوجد الفرق مباشرةً .

ادرس اطراد المتتالية U_{2n} حيث :

$$U_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n}$$

نوجد الفرق :

$$U_{2n+1} - U_n =$$

حد فاصل وهو ذاته 2n

$$\left[\cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \dots \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right] - \left[\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots \cancel{\frac{1}{2n}}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}_{(1)} - \frac{1}{n+1}_{(2)}$$

نوحد المقامات

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2} \Rightarrow \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow \frac{+1}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow U_{2n+1} - U_{2n} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً .