اختبار الوحدة الأولى من الجزء الأول

إعداد : الأستاذ صالح طراف
0988462708

السؤال الأول: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على N بالتدريج هي: $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 3)$ حيث $U_0 = 4$ ، المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالعلاقة $V_n = U_n - 3$ والمطلوب:

1- أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

2- عبر عن V_n بدلالة n.

3- أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة.

السؤال الثاني: لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $U_1 = \frac{7}{3}$ بالشكل : $U_{n+1} = \frac{7U_n+3}{3U_n+7}$ أياً كان $n \in N^*$

أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالعلاقة $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$ هندسية ثم اكتب V_n بدلالة n.

السؤال الثالث: لتكن $U_n = 4n + 1$ ، أثبت أن المتتالية حسابية عين أساسها واحسب المجموع

$$S = U_0 + U_1 + \text{------} + U_{10}$$

السؤال الرابع: لدينا $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ، $U_2 = 4$ ، $U_6 = 20$ والمطلوب:

1- احسب r ، U_0 ، U_5.

2- احسب المجموع $S = U_3 + U_4 + \text{------} + U_8$.

3- اكتب U_n بدلالة n

السؤال الخامس: أثبت بالتدريج صحة العلاقة أياً كان العدد الطبيعي n : $n^4 + 5$ مضاعف للعدد 3.

نموذج اختبار (أشعة) للوحدات الأولى + الثانية + الثالثة من الجزء الثاني

إعداد : الأستاذ صالح طراف
0988462708

السؤال الأول:

لدينا المستويان : $P_1: x + 2y - z + 1 = 0$ و $P_2: x - 2y + z - 1 = 0$ والمطلوب:

1- أثبت أن المستويان متقاطعان.
2- أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P_1 و P_2.
3- احسب بعد النقطة $A(1, -\frac{1}{2}, 1)$ عن المستوي P_1.

السؤال الثاني:

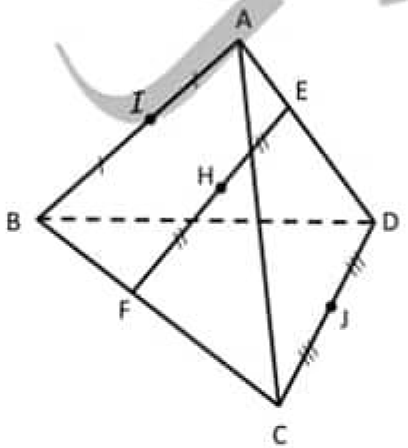
لدينا معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تأمل النقاط $A(1, -1, 2)$ ، $B(3, 0, 4)$ ، $C(3, 3, -2)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط A, B, C تمثل مستوي.
2- اكتب معادلة المستوي ABC .
3- اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار بالنقطة $D(-1, -2, 0)$ ويقبل الشعاع $\vec{u}(2, -2, 8)$ شعاعاً موجهاً له.
4- أوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي ABC.
5- لتكن $G(0, 0, -2)$ أوجد بعد النقطة G عند المستوي ABC.
6- أثبت أن $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G.

السؤال الثالث:

$ABCD$ رباعي وجوه I منتصف AB ، J منتصف CD فيه النقطتان E و F تحققان $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ وأخيراً H منتصف EF والمطلوب:

أثبت أن النقاط I , J , H تقع على استقامة واحدة.



Subject

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{n+1}{n!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

ندرس اشارة الفرق مع 1

$$\frac{n+1}{n^2} - 1 = \frac{n+1-n^2}{n^2}$$ ندرس اشارة البسط

موجب

$$-n^2 + n + 1 = 0$$

نحسب المميز ثم نجد الجذور

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
	$-$	0	$+$	0	$-$
	متناقصة		متزايدة		متناقصة

1 - $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مقارنة بـ 1 خارج الجذرين وموجب داخلهما

نعوض بقيم الحدود $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$n = 1 \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

$n = 2 \rightarrow \frac{2^2}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$ متزايدة

$n = 3 \rightarrow \frac{3^2}{3 \times 2 \times 1} = \frac{9}{6} = 1,5$ متناقصة

$n = 4 \rightarrow \frac{16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{16}{24} = 0,35$

المتتالية متناقصة بدءا من الدليل $n = 2$

KORAN

Subject

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة: $U_n = 2n + 3$

$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

لدينا طريقة ثانية في دراسة الاطراد وهي: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \overset{?}{=} 1$

① $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة

تستخدم مع متتاليات الحدود a^n ، $n!$

② $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة

أ. جميع حدود

③ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة

مثال: ادرس اطراد المتتالية $U_n = 2^n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2 > 1$ فالمتتالية متزايدة تماماً

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{5^n}{6^{n+1}}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{6^{n+2}}}{\frac{5^n}{6^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{6^{n+2}} \times \frac{6^{n+1}}{5^n} = \frac{5^n \cdot 5 \cdot 6^{n+1}}{6^{n+1} \cdot 6 \cdot 5^n} = \frac{5}{6} < 1$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{\frac{1}{22}}$ ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة: $U_n = \frac{n^2}{n!}$ ، $n \geq 1$

$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}$ و $(n+1)! = (n+1)\,n!$

$= \frac{n+1}{n!}$

KORAN

Subject

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة: $u_n = 2n + 3$

$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

لدينا طريقة ثانية في دراسة الاطراد وهي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \overset{?}{\gtrless} 1$

① $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ متزايدة — تستخدم مع متتاليات لحدودها $n!$

② $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ متناقصة — أو مرافع طرفات

③ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ثابتة

مثال: ادرس اطراد المتتالية $u_n = 2^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2 > 1$$

فالمتتالية متزايدة تماماً

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{5^n}{6^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{6^{n+2}}}{\frac{5^n}{6^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{6^{n+2}} \times \frac{6^{n+1}}{5^n} = \frac{5^n \cdot 5 \cdot 6^{n+1}}{6^{n+1} \cdot 6 \cdot 5^n} = \frac{5}{6} < 1$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

$\boxed{\frac{6.1}{22}}$ ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة: $u_n = \frac{n^2}{n!}$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}$$

و $(n+1)! = (n+1)\,n!$

$$= \frac{n+1}{n!}$$

KORAN

Subject

المتتاليات

تعريف: هي تابع منطلقه (مجموعة تعريفه) هي مجموعة الأعداد الطبيعية N أو أي مجموعة جزئية منه (غير منتهية)

من $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ حيث n_0 الحد الأول

ونرمز للمتتالية بحدها العام U_n ، t_n ، n حيث:

$(U_n)_{n \geq n_0}$ ، $(t_n)_{n \geq n_0}$

$U_n \in R$ ، $n_0 \in N$

توليد متتالية: المتتالية عدد غير منته من الحدود ونسمي n دليل الحد: n_1 هو الأول، n_2 هو الثاني

تولد بطريقتين:

1- الحد العام الصريح (مثل التابع عامةً) $U_n = f(n)$

مثال: لتكن المتتالية المعرفة بالعلاقة: $U_n = n^2 + n + 2$; $n \geq 0$

$U_0 = 0^2 + 0 + 2 = 2$

$U_1 = 1^2 + 1 + 2 = 4$

$U_2 = 2^2 + 2 + 2 = 8$

أ. صالح الزراف

2) العلاقة التدريجية: يحسب الحد بدلالة حدود مسبقة.

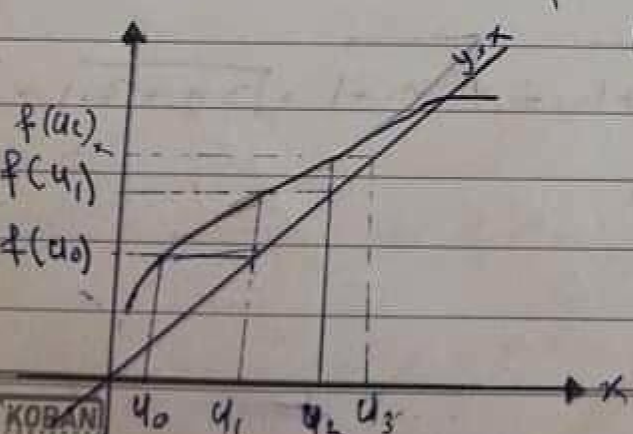
$U_{n+1} = f(U_n)$ $\qquad U_n \in R$

$U_1 = f(U_0)$

$U_2 = f(U_1)$ $\qquad U_{n+1} \in R$

$U_3 = f(U_2)$

مثال: لتكن المتتالية: $U_0 = 3$ ، $U_{n+1} = U_n^2 - 1$ احسب U_1 ، U_2



$U_1 = f(U_0) = U_0^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$U_2 = f(U_1) = U_1^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$

$U_3 = f(U_2) = U_2^2 - 1 = 63^2 - 1 = 3969$

Subject

ج) العلاقة بين حدين متعاقبين: $U_n = U_p + (n-p)r$

حد ما ، حد سابق ، فرق الدليلين

$\boxed{U_n - U_p = (n-p)r}$ مثلا: $U_{10} - U_5 = (10-5)r$

مثال: متتالية حسابية فيها $U_5 = -13$ و $U_2 = 41$ أوجد أساس المتتالية و U_{20}

$U_n - U_p = (n-p)r \Rightarrow U_5 - U_2 = (5-2)r \Rightarrow -13 - 41 = 3r$

$-54 = 3r \Rightarrow r = \frac{-54}{3} = -18$

$U_{20} = U_5 + (20-5)r \Rightarrow U_{20} = -13 + (15)(-18) = -283$

حساب مجموع حدود متتالية: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$

عدد حدود متتالية = (دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول) + 1

$n = 20 - 0 + 1 = 21$

[illegible]

$\boxed{S = \frac{n}{2}(a + \ell)}$

a: الحد الأول

ℓ: الحد الأخير

مثال: متتالية حسابية حدها العام $U_n = 3n - 5$ ، $n \geq 0$

$S = U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$ أوجد المجموع

$U_0 = 3(0) - 5 = -5$

$U_{20} = 3(20) - 5 = 55$

$n = 20 - 0 + 1 = 21$

$a = U_0$

$\ell = U_{20}$

$S = \frac{21}{2}(-5 + 55) = 21 \times 25 = 525$

العلاقة بين ثلاث حدود متعاقبة a, b, c في متتالية حسابية

$b = \frac{a+c}{2}$

KORAN

المتتالية الحسابية

هي متتالية تنتقل من الحد إلى الحد الذي يليه بإضافة عدد حقيقي ثابت r

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3$$

يسمى r أساس المتتالية $r \in \mathbb{R}$

لإثبات متتالية حسابية: $U_{n+1} - U_n = r \in \mathbb{R}$

u_0 الأول ، $u_0 + r$ الثاني ، $u_0 + 2r$ الثالث ، $u_0 + 3r$ الرابع ... أو

$u_0 , u_0 + r , u_1 + r , u_2 + r$ ...

① إثبات متتالية حسابية

مثال: أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية:

$$U_n = \frac{4n+1}{3} , \quad n \geq 0$$

الحل:

$$U_{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{3} = \frac{4n+4+1}{3} = \frac{4n+5}{3}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4n+5}{3} - \frac{4n+1}{3} = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}$$

فالمتتالية حسابية أساسها $r = \frac{4}{3}$

مثال: أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية علماً أن: $U_n = 2n + 3$

$$U_{n+1} - U_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2 \in \mathbb{R}$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$

② إيجاد صيغة الحد العام: U_n بدلالة n

حالة ① الحد الأول u_0 ← $\boxed{U_n = U_0 + nr}$

مثال: متتالية حسابية فيها $u_0 = 3$ و $r = -2$ أوجد عبارة U_n بدلالة n

$$U_n = U_0 + nr = 3 + n(-2) \Rightarrow U_n = -2n + 3$$

حالة ② الحد الأول U_1 ← $\boxed{U_n = U_1 + (n-1)r}$

مثال: متتالية حسابية فيها $U_1 = 4$ و $r = 3$ أوجد U_n بدلالة n

$$U_n = U_1 + (n-1)r = 4 + (n-1) \times 3 = 4 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n + 1$$

Subject

اطراد المتتاليات

1. المتتاليات ذات الحد الصريح
$U_n = f(n)$
$U_n \in R \quad , \quad n \in N$

المتتالية ذات العلاقة التدريجية
$U_{n+1} = f(U_n)$
$U_{n+1} \in R \quad , \quad U_n \in R$

نحسب الفرق $t_n = U_{n+1} - U_n$

$t_n \geq 0$ متزايدة

$t_n > 0$ متزايدة تماماً

$t_n \leq 0$ متناقصة

$t_n < 0$ متناقصة تماماً

$t_n = 0$ ثابتة

رياضيات دروس صالح طراف

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة: $U_n = \frac{1}{n+1}$

$t_n = U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$

طريقة ①: لدينا $n+2 > n+1$

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} < 0$

فالمتتالية متناقصة تماماً

طريقة ②: نوحد المقامات

$\frac{1}{n+2}_{(n+1)} - \frac{1}{n+1}_{(n+2)}$

$= \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$

وهي متناقصة تماماً

مثال: ادرس اطراد المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة: $U_n = \sqrt{3n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3(n+1)+1} - \sqrt{3n+1} = \sqrt{3n+3+1} - \sqrt{3n+1}$

$= \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$

KORAN

Subject

المتتاليات الهندسية

تعريف: هي متتالية ننتقل من الحد الأول إلى الحد الذي يليه بالضرب بعدد حقيقي ثابت q يسمى الأساس أو ينتج كل حد من سابقه بضربه بعدد حقيقي ثابت q يسمى أساس المتتالية

$$U_0 \xrightarrow{\times q} U_1 \xrightarrow{\times q} U_2 \xrightarrow{\times q} U_3$$

III البرهان على المتتالية هندسية

1) لإثبات أن متتالية هندسية: يكفي أن نثبت أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \in \mathbb{R}$

مثال: أثبت أن المتتالية التالية هندسية وعين أساسها. $U_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1+1}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot 3^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 3 \cdot 2^n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية

$\frac{1}{18}$

2 إيجاد صيغة الحد العام أو عبارة U_n بدلالة n

حالة ① لحد الأول U_0: $U_n = U_0 \cdot q^n$

حالة ② لحد الأول U_1: $U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$

مثال: متتالية هندسية فيها $U_0 = 3$ و $q = \frac{1}{2}$ أكتب عبارة U_n بدلالة n

$$U_n = U_0 \cdot q^n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

أ. صالح طراف

مثال: متتالية هندسية فيها $U_1 = \frac{1}{2}$ ، $q = -2$ اكتب عبارة U_n بدلالة n

$$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2}(-2)^{n-1}$$

3 العلاقة بين حدين غير متتاليين

$$\boxed{\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}}$$

② $\frac{2}{18}$ $U_7 = \frac{1}{1080}$ ، $U_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب U_{30}

$$\frac{U_{10}}{U_7} = \frac{25}{2197} \times 1080 = q^{10-7}$$

خطأ في الحوال الأولية

KORAN

Subject ط.الأمثلة

ط،

$$3n+4 > 3n+1$$

نجذر

$$\sqrt{3n+4} > \sqrt{3n+1}$$

$$\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$$

$$t_n > 0$$

متزايدة تماما

$$\frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$\frac{3n+4-3n-1}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} = \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$t_n > 0$ متزايدة تماما

مثال:

ادرس اطراد المتالية $(U_n)_{n\geq}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = (-1)^n$

نلاحظ أن عندما تكون n عدد زوجي $\Leftarrow U_n = 1$

n عدد فردي $\Leftarrow U_n = -1$

$1 \geq (-1)^n \geq -1$ المتتالية متناوبة وغير مطردة

ملاحظة: طريقة التوابع: تستخدم في الحد الصريح فقط

رياضيات درس صالح مراد

عن طريق المشتق:

$$U_n = f(n)$$

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $U_n = \sqrt{2n+3}$

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماما

مثال: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{1}{n+3}$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0$$

والمتتالية متناقصة تماما

KORAN

Subject

حل متتاليات تراجعية

$U_{n+1} = \underset{a}{-}U_n + 4$, $U_0 = 3$ $\boxed{\frac{3}{22}}$

$U_1 = -U_0 + 4 = -3 + 4 = 1$

$U_2 = -U_1 + 4 = -1 + 4 = 3$

$U_3 = -U_2 + 4 = -3 + 4 = 1$

$U_4 = -U_3 + 4 = -1 + 4 = 3$

$U_5 = -U_4 + 4 = -3 + 4 = 1$

الحالة الثانية من النمط

$U_n = \alpha a^n + \beta$.

$U_n = \alpha \cdot a^n + \beta = \alpha(-1)^n + \beta$

$U_0 = 3 = \alpha(-1)^0 + \beta$

$\boxed{\alpha + \beta = 3}$ --- 1

$U_1 = -U_0 + 4 = 1$

$U_1 = 1 = \alpha(-1)^1 + \beta$

$\boxed{1 = -\alpha + \beta}$ --- 2

$2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$ نجمع 1 و 2

$\alpha = 1$ من 1

نعوض في الصيغة العامة

$U_n = (-1)^n + 2$

$\boxed{U_n = \alpha \cdot a^n + \beta}$

دعونا ننطلق من العلاقة

$U_{n+1} = \underset{a}{2}U_n - 3$, $U_0 = 2$ $\boxed{\frac{2}{22}}$

$U_1 = 2U_0 - 3 = 2 \times 2 - 3 = -1$

$U_2 = 2U_1 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -5$

$U_3 = 2U_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$

$U_4 = 2U_3 - 3 = -13$

$U_5 = 2U_4 - 3 = -29$, $U_5 = -61$

التحقق:

$U_0 = \alpha \cdot (2)^0 + \beta = 2$

$\alpha \cdot 1 + \beta = 2$

$\boxed{\alpha + \beta = 2}$ --- 1

$U_2 = f(U_1) = -1 \Rightarrow U_1 = \alpha(2)^1 + \beta$

$\boxed{-1 = 2\alpha + \beta}$ --- 2

بالحل المشترك لـ 1 و 2 نجد:

$\alpha = -3$, $\beta = 5$

$U_n = -3(2)^n + 5$