المتتاليات الحسابية والهندسية

الحسابية

- ❖ ذات العلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \end{cases}$$

- ❖ ذات الدليل الصريح للمتحول n :

$$u_n = u_0 + n.r$$

نستخدم العلاقة السابقة في حال كانت u_0 و r معلومة.

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

نستخدم العلاقة السابقة في حال كانت u_m و r معلومة.

- وتفيد في حساب أساس متتالية حسابية عُلِم منها حدين مختلفين

- ❖ لإثبات أن متتالية ما حسابية :

نحسب الفرق ويجب أن يتحقق:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

أي يجب أن يكون ناتج الفرق عدد حقيقي وهذا العدد يمثل أساس هذه المتتالية .

- ❖ حساب مجموع حدود لمتتالية حسابية:

$$S = u_i + u_{i+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + u_j$$

نوجد عدد الحدود: $(n = j - i + 1)$

وقيمة الحد الأول والأخير: $(l = u_j)$, $(a = u_i)$

وبالتالي نجد أن المجموع :

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$S = \frac{\text{(الحد الأول + الحد الأخير) عدد الحدود}}{2}$$

- ❖ خاصة هامة: بفرض a , b , c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنها تحقق: $\boxed{a + c = 2b}$

- ❖ اطراد المتتالية حسابة:

$$\begin{cases} r > 0 \Rightarrow \text{المتتالية متزايدة تماماً} \\ r = 0 \Rightarrow \text{المتتالية ثابتة} \\ r < 0 \Rightarrow \text{المتتالية متناقصة تماماً} \end{cases}$$

الهندسية

- ❖ ذات العلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = q.u_n \\ u_0 \end{cases}$$

- ❖ ذات الدليل الصريح للمتحول n :

$$u_n = u_0(q)^n$$

نستخدم العلاقة السابقة في حال كانت u_0 و q معلومة.

$$u_n = u_m(q)^{n-m}$$

نستخدم العلاقة السابقة في حال كانت u_m و q معلومة.

- وتفيد في حساب أساس متتالية هندسية عُلِم منها حدين مختلفين

- ❖ لإثبات أن متتالية ما هندسية :

نحسب النسبة ويجب أن يتحقق:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

أي يجب أن يكون ناتج القسمة عدد حقيقي وهذا العدد يمثل أساس هذه المتتالية .

- ❖ حساب مجموع حدود لمتتالية هندسية:

$$S = u_i + u_{i+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + u_j$$

نوجد عدد الحدود: $(n = j - i + 1)$

وقيمة الحد الأول : $(a = u_i)$

وبالتالي نجد أن المجموع :

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- ❖ خاصة هامة: بفرض a , b , c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنها تحقق: $\boxed{a.c = b^2}$

- ❖ اطراد المتتالية هندسية:

$$\{\ q = 1 \Rightarrow \text{المتتالية ثابتة}$$

0967 920 823

(ملخص حول حل المعادلات من الدرجة الثانية)

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0} \qquad ; a, b, c \in C$$

أولاً نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4(a)(c)$

ونناقش الحالات الآتية:

Δ عدد حقيقي

$\Delta > 0$

للمعادلة حلان مختلفان وهما :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$

للمعادلة حل وحيد

وهو:

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0$

للمعادلة حلان مختلفان وهما :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a}$$

ملاحظة: في حال كان a, b, c أعداد حقيقية يكون z_1 و z_2 مترافقان

$\Delta = a + bi$ عددعقدي

نوجد الجذور التربيعية ل Δ ونفرض $w = x + iy$ هو أحد الجذور التربيعية ل Δ

فتنتج لدينا جملة المعادلات الثلاث الآتية:

(1 $x^2 - y^2 = a$

(2 $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

(3 $2x.y = b$

بجمع 1) +2) والتعويض في 3) ينتج الجذران:

$(w_1 = x_1 + y_1 i)\,,(w_2 = x_2 + y_2 i)$

فيكون الحلان من الشكل:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} \;\&\; z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

أ.سليم شحادة 0967 920 823

المقاربات

(المقارب الأفقي)

بفرض لدينا التابع f الذي خطه البياني c , نوجد نهاية التابع f :

$$\boxed{\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = A}$$

عندئذٍ $y = A$ مقارب أفقي

(يوازي المحور $x\acute{x}$)

للمنحني c في جوار $\mp\infty$

(الوضع النسبي)

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y]$ وتناقش الحالات الآتية :

$f(x) - y > 0 \Rightarrow$ فوق المقارب c

$f(x) - y < 0 \Rightarrow$ تحت المقارب c

أ.سليم شحادة 0967 920 823

(المقارب الشاقولي)

بفرض لدينا التابع f الذي خطه البياني c , نوجد نهاية التابع f :

$$\boxed{\lim_{x\to B} f(x) = \mp\infty}$$

عندئذٍ $x = B$ مقارب شاقولي

(يوازي المحور $y\acute{y}$)

للمنحني c عند $\mp\infty$

(الوضع النسبي)

نعتمد على جهة المتراجحة في حساب النهاية أي كما في الحالات الآتية :

$\lim_{x \overset{>}{\to} B} f(x) \Rightarrow$ يقع على يمين المقارب c

$\lim_{x \overset{<}{\to} B} f(x) \Rightarrow$ يقع على يسار المقارب c

(المقارب المائل)

بفرض لدينا التابع f الذي خطه البياني c و المستقيم الذي معادلته :

$$\boxed{\Delta: y = ax + b}$$

لإثبات أن Δ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $\mp\infty$

نوجد نهاية الفرق ويجب أن يتحقق :

$$\lim_{x\to\mp\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$$

عندئذٍ $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $\mp\infty$

(الوضع النسبي)

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_\Delta]$ ونناقش الحالات الآتية :

$f(x) - y_\Delta > 0 \Rightarrow$ فوق المقارب c

$f(x) - y_\Delta < 0 \Rightarrow$ تحت المقارب c

حالات استنتاج المقارب المائل

الحالة الأولى:

$f(x) = ax + b +$ تابع نهايته الصفر

عندئذ نلاحظ أن:

$$y = ax + b$$

مقارب مائل للخط البياني c

ونثبت ذلك عند طريق حساب نهاية الفرق

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

مثال:

$$f(x) = 3x + 2 + \frac{1}{x-3}$$

نلاحظ أن:

$$y = 3x + 2$$

مقارب مائل للخط البياني c في جوار $\pm\infty$

الحالة الثانية:

$f(x) =$ تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه

في هذه الحالة نستخدم القسمة الاقليدية بتقسيم البسط على المقام

$$f(x) = \text{ناتج} + \frac{\text{باقي}}{\text{المقام}}$$

فنلاحظ أن الناتج هو المقارب المائل أي ردت هذه الحالة الى الحالة الأولى

مثال: $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

بعد القسمة الاقليدية يكون:

$$f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$$

فنلاحظ أن $y = x - 3$ مقارب مائل للخط البياني c

الحالة الثالثة:

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

نكتب ثلاثي الحدود تحت الجذر بالصيغة القانونية (الاتمام الى مربع كامل)

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= (\text{تركيب})^2 + \text{عدد}$$

$$f(x) = \sqrt{(\text{تركيب})^2 + \text{عدد}}$$

عندئذ نلاحظ أن:

$$y = \begin{cases} \text{تركيب} & \text{بجوار } +\infty \\ -(\text{تركيب}) & \text{بجوار } -\infty \end{cases}$$

مقارب مائل للخط البياني c

مثال:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 11}$$

$$= \sqrt{(x+3)^2 + 2}$$

فنلاحظ أن $y = x + 3$ مقارب مائل للخط البياني c

الحالة الرابعة:

نوجد النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

عندئذ نستنتج أن:

$$y = ax + b$$

مقارب مائل للخط البياني c بجوار $\pm\infty$

مثال:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 2$$

فنستنتج أن $y = x + 2$ مقارب مائل للخط البياني c

الحالة الخامسة:

عند حساب نهاية المقدار:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

عندئذ نستنتج أن:

$$y = ax + b$$

مقارب مائل للخط البياني c بجوار $\pm\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

فنستنتج أن $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني c بجوار $+\infty$

أ.سليم شحادة 0967 920 823

قواعد الاشتقاق

1	$f(x) = A \Rightarrow \acute{f}(x) = 0$
2	$f(x) = ax + b \Rightarrow \acute{f}(x) = a$
3	$f(x) = x^n \Rightarrow \acute{f}(x) = nx^{n-1}$; $n \in N$
4	$f(x) = x^{-n} \Rightarrow \acute{f}(x) = -nx^{-n-1}$; $n \in N$
5	$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$; $\frac{p}{q} \in Q$

الخواص:

6	$f(x) = h \mp g \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{h} \mp \acute{g}$
7	$f(x) = \lambda.g(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \lambda.\acute{g}(x)$; $\lambda \in R$

الجداء:

8	$f(x) = g.h \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{g}.h + g.\acute{h}$

القسمة:

9	$f(x) = \frac{g}{h} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\acute{g}.h - g.\acute{h}}{h^2}$

الجذر التربيعي:

10	$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

تابع القوة:

11	$f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow \acute{f}(x) = n[g(x)]^{n-1}(\acute{g}(x))$

التوابع المثلثية:

12	$f(x) = \sin(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \cos(x)$
13	$f(x) = \cos(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = -\sin(x)$
14	$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{g}(x)\cos(g(x))$
15	$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow \acute{f}(x) = -\acute{g}(x)\sin(g(x))$
16	$f(x) = \tan(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
17	$f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{g}(x)(1 + \tan^2 g(x)) = \frac{\acute{g}(x)}{\cos^2 g(x)}$

التابع اللوغاريتمي:

18	$f(x) = \ln(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{x}$
19	$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$

التابع الأسي:

20	$f(x) = e^x \Rightarrow \acute{f}(x) = e^x$
21	$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow \acute{f}(x) = \acute{g}(x)e^{g(x)}$

أ.سليم شحادة 0967 920 823