
ملخصات
العرب
3RAB TEAM

حل المعادلات في c

درجة 3

تقبل z_0 جذرا لها

1- نساوي قسمة المعادلة على $(z-z_0)$

2- بصير عنا هاد الشكل $(z-z_0)Q(z)=0$

3- ومنحل عادي

تقبل حلاً

حقيقياً

نفرض الحل هو $z=a$ نقسم على

$(z-a)(z^2+bz+c)$

تخيلياً

نفرض الحل هو $z=a$ نقسم على

$(z-ai)(z^2+bz+c)$

وبتكفي طبيعي ياحلووو

درجة 4

بيعطيني معادلة درجة 4 و بساويها جداء قوسين وبقلي عين مثلا a و b بروح بنشر القوسين وبرتب المعادلة وبعدا بقارن

لما يقلي حل المعادلة ويكون معي قوسين بروح باخد كل قوس وبحله متل الحل العادي للدرجة 2

المعادلات التكعيبية من الشكل $z^3=a$

نعطى عدد عقدي غير الصفر $w=x+yi$ نهدف الى حل المعادلة $z^n-w=0$ وفق :

1- نعزل $z^n=w$ 2- نكتب كل من w و z بالشكل الاسي وفق : $z=re^{i\theta}, w=r_1e^{i\theta_1}$ نعوض في 1 بحيث $r^ne^{in\theta}=r_1e^{i\theta_1}$ تساوي أي عددين عقديين يعني انه $r_1=r_2$ و $\theta_1=\theta_2+2\pi k$ حيث k عدد الدورات ومن خلال المطابقة نجد $r^n=r_1\to r=\sqrt[n]{r}$ و $\theta_1=\theta_2+2\pi k$ حيث اذا كان المطلوب جذور تربيعية نعوض $k=0,1$ اما اذا تكعيبية $k=0,1,2$ ونكتب الحلول بشكل الاسي

مثال :

$$z^3=27i$$

$$r^3e^{i3\theta}=27e^{\frac{i\pi}{2}}\to r^3=27\to r=3 \qquad 3\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k\to\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$$

$$k=0\to\theta=\frac{\pi}{6}\to z_1=3e^{\frac{\pi}{6}i} \qquad k=1\to\theta=\frac{5\pi}{6}\to z_2=3e^{\frac{5\pi}{6}i} \qquad k=2\to\theta=\frac{3\pi}{2}\to z_3=3e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

حل المعادلات في c

درجة 2

$az^2+bz+c=0$

نحل على

$\Delta=b^2-4ac$

نميز ثلاث حالات مع حالة خاصة

(قلبي دق 3 دقات) ههههه

1- $\Delta>0$ =

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- $\Delta<0$ =

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{|\Delta|}i}{2a}, z_2=\frac{-b+\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$$

3- $\Delta=0$

$$z=\frac{-b}{2a}$$

4- $\Delta=a+bi$:

$z^2=-a$

$z=|\sqrt{a}|i$

$z^2=a+bi$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي

1- نفرض $z=x+yi$

2- نكتب الجمل الاتية

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$x^2-y^2=a$$
$$x,y=\frac{b}{2}$$

نجمع 1 و2 ثم نطرحهما اما 3 لتحديد الإشارات اذا كان ناتج ضرب موجب اذا نفس الإشارات اما اذا كان سالب لهما عكس الإشارات

درجة 1

معادلات تحوي $z, \bar{z}$:

1- الحل المشترك (بجوز نضرب معادلة بعدد وبعدين نجمعها مع التانية او نطرح الخ)

2- عند إيجاد قيمة احد المجاهيل نعوض لنجد المجهول الاخر

حل المعادلة الاتية

$$\begin{cases}3z+\bar{z}=5+2i\\-z+\bar{z}=1-2i\end{cases}$$

الحل:

اذا طرحنا المعادلتين بروح $\bar{z}$

نطرح المعادلتين بصير معنا

$$4z=4+4i$$
$$z=1+i$$

منعوض في احدى المعادلتين

$$\bar{z}=4i$$

معادلة تحوي $z, \bar{z}$:

1- نفرض $z=a+bi$ و $\bar{z}=a-bi$

2- نصلح المعادلة (منحط كلشي مضروب ب i عجنب و كلشي موم ضورب ب i عجنب)

3- منعمل مقارنة

حل المعادلة

$$2iz+\bar{z}=3+3i$$

$$z=a+bi$$

$$2ia-2b+a-bi=3+3i$$

ترتيب

$$x-2y+i(2x-y)=3+3i$$

مقارنة

$$\begin{cases}x-2y=3\\2x-y=3\end{cases}$$

نحل عادي

مووووووولاحظة خوييييبي :

$az^2+bz+c=0$

إن حلولها $z_1.z_2=\frac{c}{a}$, $z_2+z_1=-\frac{b}{a}$

أفكار أساسية

تعين أساس الزاوية

اذا كانت الزاوية بسطها اكبر من المقام يجب نعين الأساس :

1- θ موجبة: نطرح -2π

2- θ سالبة: نضيف 2π

اذا كانت θ تساوي عدد فردي من π فهي تساوي π

اذا كانت θ تساوي عدد فردي من π فهي تساوي 0

لقياس الأساسي للزاوية هو من 0 درجة الى 360 درجةاو

$$]-\pi,\pi]$$

اذا كانت الزاوية بهاد المجال منخليها متل ما هي اما لوكانت اكبر او اصغر من هاد المجال شرحناه فوق

الزاوية $\cos(5\pi/3)$

$\theta = 5\pi/3$

ليست بالقياس الأساسي منطرح $\pi 2$

$\pi/3 - 2\pi = (5\pi - 6\pi)/3 = -\pi/65$

$\cos(5\pi/3) = \cos(-\pi/3) = \Longrightarrow \cos(\pi/3) = 1/2$

اويلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

نجمع

$$e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2}$$

نطرح المعادلات :

$$e^{-i\theta} - e^{i\theta} = 2\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2}$$

بس تشوف أي شكل فيه

$$z = 1 \pm e^{i\text{زاوية}}$$

او أي شكل شبيه اله وبدو ياه بشكل الاسي

1- بتسحب $e^{\frac{\text{زاوية}}{2}}$ عامل مشترك

2- استخدم الدستور الي طلع معك

3- الطويلة دايما موجبة نتبه للمجال

حركات مهمة

طويلة عدد عقدي :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

نظير عدد عقدي : معكوسه :

$$z = a + bi$$

$$-z = -a - bi$$

جمع مرافق مع عدده :

$$z + \bar{z} = 2a$$

طرح المرافق وعدده :

$$z - \bar{z} = 2bi$$

ملاحظة للعلاقات :

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

ضرب عدد مع مرافقه :

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2$$

استنتاج :

$$z.\bar{z} = |z|^2$$

قوانين الارجاع

ربع رابع
$$\begin{cases}\sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x\end{cases}$$

ربع اول:
$$x = \theta \quad \begin{cases}\sin(x + 2\pi k) = \sin x \\ \cos(x + 2\pi k) = \cos x\end{cases}$$

ربع ثالث :
$$x = \pi + \theta \quad \begin{cases}\sin(x + \pi) = -\sin x \\ \cos(x + \pi) = -\cos x\end{cases}$$

ربع ثاني:
$$x = \pi - \theta \quad \begin{cases}\sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x\end{cases}$$

ربع اول :
$$x = +\emptyset \quad \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\end{cases}$$

ربع رابع :
$$x = -\emptyset \quad \begin{cases}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x\end{cases}$$

أنواع الاثبات

تخيلي

يكون عنا عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد :بكل بساطة منروح منحط رمز العدد هيك : $\frac{1}{\text{العدد}} =$ مرافق العدد وباخد مرافق العدد كله وبيبدل وبس

ليكن z عدد عقدي ما وليكن w عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد وليكن u معرف وفق:

$u = \frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ اثبت انه تخيلي

$\bar{w} = \frac{1}{w}$ ومناخد مرافق العدد كله

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{w}z - \bar{z}}{-i.\frac{1}{w} + i} = \frac{\frac{z}{w} - \bar{z}}{-\frac{i}{w} + i}$$

دايما وحد المقامات

$$\frac{\frac{z - w\bar{z}}{w}}{\frac{-i + iw}{w}} = \frac{z - w\bar{z}}{-i + iw}$$

نحاول سحب ناقص عامل مشترك

$$\frac{-(w\bar{z} - z)}{(iw - i)} = -\frac{w\bar{z} - z}{iw - i} = -u$$

حقيقي

نفس طريقة التخيلي بلبداية بس يمكن يقلي $|w| = 1$ مثلا ف ماتغير شي نفس لحل

نتأمل عدد عقديين w,z يحققان $|w| = 1, |z| = 1$ و $wz \neq -1$ أثبت ان العدد العقدي $u = \frac{z+w}{1+z}$ حقيقي :

دايما اول شي مناخد المرافق وطالما حقيقي لازم $\bar{u} = u$

كمان $\bar{z} = \frac{1}{z}$ و $\bar{w} = \frac{1}{w}$

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{w}}{1 + \frac{1}{z}.\frac{1}{w}} = \frac{\frac{w + z}{w.z}}{\frac{z.w + 1}{w.z}} = \frac{z + w}{1 + z.w}$$

طلع نفسه

طويله تساوي الواحد

هون بكون قايلك مثلا انه حقيقي وبدو الطويلة هون مناخد المرافق ومنعمل طرفين بلوسطين مثلا ومنحل لنوصل لعلاقة الطويلة او للعدد يساوي مرافقه

نفترض أن $u \neq 1$ وان $w = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي اثبت انه اما ان يكون z حقيقيا او ان يكون $|u| = 1$

$$\frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

$$(\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) = (1 - \bar{u})(z - u\bar{z})$$

$$\bar{z} - u\bar{z} - z\bar{u} + zu\bar{u} = z - z\bar{u} - u\bar{z} + \bar{z}u\bar{u}$$

$$\bar{z} + zu\bar{u} = z + \bar{z}u\bar{u}$$

$$\bar{z} - z + zu\bar{u} - \bar{z}u\bar{u} = 0$$

$$\bar{z} - z + u\bar{u}(z - \bar{z}) = 0$$

نسحب القوس عامل مشترك

$$(\bar{z} - z)(1 - u\bar{u}) = 0$$

أما:

$\bar{z} - z = 0 \to z = \bar{z}$ حقيقي

او :

$$1 - u\bar{u} = 0 \to u\bar{u} = 1 \to |u| = 1$$

ملاحظات للشكل المثلثي

معكوس ونكشات

اذا شفت هيك :

$$z = r(sin\theta + icos\theta)$$

دغري بتعمل هيك

$$z = r\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

اذا كان في سالب بين الكوساين وساين ومضروب بسالب :

$$z = (\sqrt{3} - 2)(cos\frac{\pi}{5} - isin\frac{\pi}{5})$$

اول شي حب روح الناقص الي بينن

$$z = (\sqrt{3} - 2)(cos\frac{-\pi}{5} + isin\frac{-\pi}{5})$$

هلق لبرا سالب لازم يكون موجب منساويه موجب ومنضيف π

$$z = (2 - \sqrt{4})(cos\pi - \frac{\pi}{5} + isin\pi - \frac{\pi}{5})$$

دوموافر

اذا شفت في اس ومعكوس بين ساين وكوساين اول شي

تسويه هو ارجاع للحالة الطبيعية

$$z = (sin\frac{\pi}{16} + icos\frac{\pi}{16})^4$$

بتروح فورا

$$z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right)\right]^4$$

$$z = \left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right]^4$$

$$= \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{8\pi - \pi}{4}\right) + isin\left(\frac{8\pi - \pi}{4}\right)\right]$$

$$\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

سالب ونكشات

1– اذا شفت فيه كوساين مرتبن بسحب

عامل مشترك وبحل

$$z = cos\frac{4\pi}{5} + icos\frac{4\pi}{5}$$

منروح نسحب عامل مشترك ومنزبط

الزاوية شرحنا كيف

$$z = cos\frac{4\pi}{5}(1 + i)$$

منزبط الزاوية ومنكفي طبعا بتجيكن زوايا

مدروسة انا حطيتا بس مشان المثال

2– التنين سالبيين :

بسحب السالب لبرا وبرجع

الشكل نظامي وبضيف للزاوية π

$$z = 3[-cos\frac{2\pi}{5} - isin\frac{2\pi}{5}]$$

سحاب السالب وزبط الشكل جوا :

$$z = -3[cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}]$$

هلق ضيف π وبس مارح اكتبه انا

ياروحي لاني تعبت

أسئلة متنوعة

استنتاج زاوية COS

بيعطيك عددين عقدين وبقلك اكتب ببشكل الجبري

وبعدا مثلا الهندسي والخ

بعدين بقلك ضربن ببعض او قسمن وبدرجلك الطلبات

وبعدا بيطلب استنتاج زاوية معينة بكل بشاطة

بتروح بتعمل مساواة

الشكل الي معك = الشكل المثلثي

وبعدا ياروحيييي شوبتساوي بتروح بتاخد الكوساين

مع امثاله يعني طويلته تساوي مين تساوي القسم

الحقيقي من العدد الي معك وعزول خلصت القصة

اما بده ساين زاوية بتاخد القسم التخيلي

مجموع

هاد ياصديقي بيعطيك قيمة α وبقلك عنا مثلا A,B

1– بيطلب منك تثبت مجموع بساوي الصفر مثلا هون الحل بكون عن طريق مجموع متتالية هندسية

2– بقلك تحقق انو A,B جذرين للمعادلة وبحطلك معادلة بترو حشو بتساوي بتروح بتعوض كل اكس ب A وبتبلش تفك المطابقة الي معك وتعمل حركات لتوصل لنفس المجموع الي قلك تأثبتو مشان يطلع صفر ويكون حل ونفس الشي مع الB

3– بقلك اكتب مثلاA بدلالة زاوية بتروح طبعا هو معرفلك الA شوهي بتروح بتعمل شي حركة لتوصل لقيمتها مثلا α^4 هي نفسها $\frac{\alpha^5}{\alpha}$ كل هر=ل حركو لان معي قيمة α^5 وماومعي قيمة α^4 وهون بيطلع معي اويلر

مدري مابظن ضل افكار

دعيلي ياروح لان العراب اسم على مسمى وفوت علقناة تبعنا لنوصلك ل 600 العراب في الرياضيات

أولا: في كل من الأسئلة الاتية أربع إجابات مقترحة واحدة منها صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثم اكتب على ورقة إجابتك الإجابة ورمز الحرف الموافق له

1) اذا كان $z = 2\sqrt{3} - 2i$ عند $im(\frac{1}{z})$ تساوي

$\mathcal{A}$	$\frac{1}{8}$	$\mathcal{B}$	$\frac{-1}{8}$	$\mathcal{C}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\mathcal{D}$	8

2) ليكن العدد العقدي : $z = \frac{1+cos2x-isin2x}{1+cos2x+isin2x}$ علما أن $x \neq \{\frac{\pi}{2}, \pi k\}$ عندئذ إن z^2

$\mathcal{A}$	e^{-2xi}	$\mathcal{B}$	e^{2xi}	$\mathcal{C}$	e^{-4xi}	$\mathcal{D}$	e^{4xi}

3) اذا كان $\arg(z) = -\frac{\pi}{10}$ فإن $\arg(\frac{i}{z})$ يساوي

$\mathcal{A}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\mathcal{B}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\mathcal{C}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\mathcal{D}$	$\frac{9\pi}{10}$

4) الشكل الجبري للعدد العقدي $z = \frac{(1+i)^{11}}{(1-i)^7}$

$\mathcal{A}$	2i	$\mathcal{B}$	4i	$\mathcal{C}$	1+i	$\mathcal{D}$	1-i

5) اذا كان $\bar{z} = \frac{1}{1-i}$ إن $arg\ z^4$ تساوي

$\mathcal{A}$	π	$\mathcal{B}$	$-\pi$	$\mathcal{C}$	$\frac{\pi}{4}$	$\mathcal{D}$	$\frac{-\pi}{4}$

6) في c اذا كان $\sqrt{z} = 2 - 3i$ فإن $\sqrt{-z}$ يساوي

$\mathcal{A}$	$-2+3i$	$\mathcal{B}$	$3+2i$	$\mathcal{C}$	$3-2i$	$\mathcal{D}$	$2+3i$

7) ان طويلة العدد العقدي $z = 1 + exp(i\emptyset)$ ضمن المجال $\emptyset \in]\pi, 2\pi[$ هي :

$\mathcal{A}$	$-2\cos(\frac{\emptyset}{2})$	$\mathcal{B}$	$2\cos(\emptyset)$	$\mathcal{C}$	$-2\cos(\emptyset)$	$\mathcal{D}$	$2\cos(\frac{\emptyset}{2})$

8) نعرف $z = ie^{i2\emptyset} - i$ حيث $\emptyset \in]-\pi, 0[$ عندئذ $|z|$

$\mathcal{A}$	$2sin\emptyset$	$\mathcal{B}$	$2isin\emptyset$	$\mathcal{C}$	$-sin\emptyset$	$\mathcal{D}$	$-2sin\emptyset$

9) اذا كان $A = cos^2x - sin^2x$ عندئذ A

$\mathcal{A}$	$A = \frac{e^{2i\emptyset} + e^{-2i\emptyset}}{2}$	$\mathcal{B}$	$A = \frac{e^{2i\emptyset} - e^{-2i\emptyset}}{2i}$	$\mathcal{C}$	$A = \frac{e^{2i\emptyset} - e^{-2i\emptyset}}{2}$	$\mathcal{D}$	$A = \frac{e^{2i\emptyset} + e^{-2i\emptyset}}{2i}$

10) احد الجذور التكعيبية للعدد $z = 27$ هو w

$\mathcal{A}$	$e^{\frac{\pi}{3}i}$	$\mathcal{B}$	$3e^{\frac{\pi}{3}i}$	$\mathcal{C}$	$6e^{\frac{2\pi}{3}i}$	$\mathcal{D}$	$3e^{\frac{-\pi}{6}i}$

ثانيا:

أجب عن أربع أسئلة من الخمسة الاتية:

السؤال الأول :

ليكن العدد العقدي $z = (sin\frac{\pi}{20} - icos\frac{\pi}{20})^8$ المطلوب:

1- اكتب العدد العقدي بالشكل الاسي
2- اثبت ان $z + z^2 + z^3 + +z^4 + 1 = 0$
3- احسب قيمة المجموع $i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}$
4- اكتب بالشكل الاسي : $z = (1 - \sqrt{3})ie^{\frac{-\pi}{3}i}$

السؤال الثاني:

في المستوي العقدي المحدث بمعلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقطة M ممثلة العدد العقدي $z \neq -i$ وليكن العدد العقدي $z = \frac{z-i}{z+i}$ المطلوب:

1- اثبت ان مجموع النقاط M(z) التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة
2- اثبت ان مجموع النقاط M(z) التي يكون عندها Z تخيلياً هي دائرة محذوف منها نقطة
3- في حال عدد عقدي $z \neq i$ نضع $z = \frac{1-iz}{1+iz}$ اثبت انه اذا كان |z|=1 كان z عددا تخيلياً
4- نفرض ان |u|=1 ، وليكن $z = \frac{2u+1}{u+2}$ اثبت انه |z|=1

السؤال الثالث :

ليكن $\theta \in]-\pi, \pi]$ حيث : $z^2 - 2sin\theta.z + 1 = 0$

1- حل في c المعادلة السابقة واكتب الحلول بالشكل الاسي
2- ماهي قيم θ التي تجعل للمعادلة جذر وحيد (مضاعف) ، اكتبه بالشكل الجبري
3- حل المعادلة $z^3 + (2-i)z^2 + (5-2i)z - 5i = 0$ اذا علمت انها تقبل حلاً تخيلياً

السؤال الرابع :

1- حل في c المعادلة الاتية $iz^2 + (-3+4i)z + i - 5 = 0$
2- بفرض z_1, z_2 جذرا المعادلة احسب $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ بالشكل الجبري
3- حل المعادلة $z^3 + (1-4i)z^2 - 6z + 4 + 4i = 0$ اذا علمت انها تقبل حلاً حقيقياً
4- حل المعادلة الاتية $7z - 3\bar{z} = 4 - 5i$

السؤال الخامس :

لتكن الاعداد الاتية $z = \frac{z_1}{z_2}\ , z_2 = 1 + i\ , z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$

1- اكتب z بالشكل الجبري
2- اكتب بالشكل المثلثي كلاً من $z_2\ z, z_1$, واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$
3- عين العددين p,q إذا علمت أن للمعادلة $z^2 + pz + q = 0$ حلان هما $2e^{\frac{i\pi}{12}}, 2e^{\frac{-i\pi}{12}}$

ثالثا : أجب عن التمارين الاتية:

التمرين الأول :

1- بفرض $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ اكتب بالشكل المثلثي : $z = \cos\theta + \cos\theta . i$
2- اكتب بالشكل المثلثي : $z = (\sqrt{3} - 2)(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5})$
3- نتأمل كثير الحدود من الدرجة الرابعة :

$$P(z) = z^4 - (2+i)z^3 + 2(-3+i)z^2 + 4(-1+2i)z - 16$$

1- عين عددين a,b يحققان $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 - bz - 4b)$
2- حل في c المعادلة $P(z) = 0$

التمرين الثاني :

1- في المستوي العقدي المحدث بمعلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ بفرض M(x,y) تمثل العدد العقدي $Z = x + yi$ حدد مجموعة النقاط Mالتي تحقق: $z^2 - (1+i)^2 = \bar{z}^2 - (1-i)^2$
2- ماذا تمثل مجموعة النقاط M(z) في المستوي التي تحقق المساواة: $|iz + 2 - i| = 3$
3- اثبت ان $|iz + 2 - i| = |z - 1 - 2i|$

رابعا:

حل المسألتين الاتيتين :

المسألة الأولى :

ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ نضع $A = \alpha^4 + \alpha\ , B = \alpha^2 + \alpha^3$ والمعادلة من الدرجة الثانية $x^2 + x - 1 = 0$

1- اثبت ان $1 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 0$ واستنتج أن A,B هما جذرا المعادلة
2- عبر عن B بدلالة $\cos(\frac{\pi}{5})$
3- حل المعادلة ، و استنتج قيمة $\cos(\frac{\pi}{5})$

المسألة الثانية :

ليكن لدينا في المستوي العقدي العدد: $z = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i$

1- أثبت أن $z^2 = 8\sqrt{3} + 8i$
2- اكتب بالشكل المثلثي العدد z^2
3- استنتج $|z|$ و $arg\, z$
4- احسب $sin\frac{\pi}{12}$ و $cos\frac{\pi}{12}$
5- اوجد قيمة العدد z^{24}
6- اثبت انه $w = \frac{i+i^2+i^3+i^5}{1+i}$ تخيلي بحت

الطلب الثالث:

$i^{2022} = -1$

$i^{2023} = -i$

$i^{2024} = 1$

$i^{2025} = i$

$\Rightarrow -1+1-i+i=0$

الطلب الرابع:

$Z = (1-\sqrt{3})\, i\, e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= -(\sqrt{3}-1)\, i \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= e^{\pi i}(\sqrt{3}-1)\, e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= (\sqrt{3}-1)\, e^{(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})i}$

$= (\sqrt{3}-1)\, e^{\frac{7\pi}{6}i}$

س1: $Z = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right)\right]^8$

$Z = \left[\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) - i\sin\left(\frac{9\pi}{20}\right)\right]^8$

$Z = \left[\cos\left(\frac{18\pi}{20}\right) - i\sin\left(\frac{18\pi}{20}\right)\right]$

$= \cos\left(\frac{20\pi-2\pi}{20}\right) - i\sin\left(\frac{20\pi-2\pi}{20}\right)$

$= \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

★ نعلم أنَّ: $-\sin\theta = \sin(-\theta)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\Rightarrow Z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

الطلب الثاني: $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$a=1$

$Z^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = 1$

$S = 1 \cdot \frac{1-1}{1-Z} = 0$

المطلب الأول : (س2)

يكون z حقيقياً إذا وفقط إذا كان :

$$\bar z = z$$

$$\overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = \frac{z-i}{z+i}$$

$$\frac{\bar z+i}{\bar z-i} = \frac{z-i}{z+i}$$

$$(\bar z+i)(z+i) = (z-i)(\bar z-i)$$

$$\bar z z + i\bar z + iz - 1 = z\bar z - iz - i\bar z - 1$$

$$2i\bar z + 2iz = 0$$

$$2i(\bar z + z) = 0$$

$$\bar z + z = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

إذاً مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل المستقيم $\boxed{x=0}$ المنطبق على yy'
و يحذف منه النقطة $(0,-1)$ لأنّ $(z \neq -1)$ فرضاً.

المطلب الثاني : يكون z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان :

$$\bar z = -z$$

$$\overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = -\frac{z-i}{z+i}$$

$$\frac{\bar z+i}{\bar z-i} = \frac{-z+i}{z+i}$$

$$(\bar z+i)(z+i) = (\bar z-i)(-z-i)$$

$$z\bar z + i\bar z + iz - 1 = -\bar z z - i\bar z + iz + 1$$

$$2z\bar z = 2$$

$$z\bar z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$\Leftarrow$ $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$
و يحذف منها النقطة $(0,-1)$.

المطلب الثالث : $w = \bar w$

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{1-i\bar z}{1+i\bar z}$$

$$(1-iz)(1-i\bar z) = (1+iz)(1+i\bar z)$$

$$1 - i\bar z - iz - z\bar z = 1 + i\bar z + iz - z\bar z$$

$$-i\bar z - iz - i\bar z - iz = 0$$

$$-2i\bar z - 2iz = 0$$

$$-\bar z - z = 0$$

$$\bar z = -z$$

الطلب الرابع :

حتى يكون $|z_3| = 1$ يجب أن يكون :

$$z_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

$$\bar{z}_3 = \frac{2\bar{u}+1}{\bar{u}+2}$$

$$z \cdot \bar{z}_3 = \frac{2u+1}{u+2} \times \frac{2\bar{u}+1}{\bar{u}+2}$$

$$= \frac{2u\cdot\bar{u} + 2u + 2\bar{u} + 1}{u\bar{u} + 2u + 2\bar{u} + 4}$$

$$u \cdot \bar{u} = |u|^2 = 1$$

ومنه :

$$z_3 \cdot \bar{z}_3 = \frac{4 + 2u + 2\bar{u} + 1}{1 + 2u + 2\bar{u}^2 + 4}$$

$$= \frac{5 + 2u + 2\bar{u}}{5 + 2u + 2\bar{u}} = 1$$

أصبح : $|z_3| = 1$

السؤال الثالث

2-1

$\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1)$

$= 4(-\cos^2\theta) = -4\cos^2\theta < 0$

$\sqrt{-\Delta} = 2\cos\theta$

للمعادلة حلين عقديين مترافقين:

$z_1 = \dfrac{2\sin\theta + i2\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{(\frac{\pi}{2} - \theta)i}$

$z_2 = \bar{z}_1 = e^{-(\frac{\pi}{2} - \theta)i} = e^{(\theta - \frac{\pi}{2})i}$

3 نفرض

$p(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (5-2i)z - 5i$

لنفرض ai جذراً لـ p و $p(ai) = 0$ ومنه

$p(ai) = (ai)^3 + (2-i)(ai)^2 + (5-2i)(ai) - 5i = 0$

$= -a^3 i + (2-i)(-a^2) + (5-2i)(ai) - 5i = 0$

$= -a^3 i - 2a^2 + a^2 i + 5ai + 2ai - 5i = 0$

$= -a^3 i + a^2 i + 5ai - 5i + 2a - 2a^2 = 0$

$= (-a^3 + a^2 + 5a - 5)i + 2a - 2a^2 = 0$

(1 $\boxed{2a - 2a^2 = 0} \Rightarrow 2a = 2a^2 \Rightarrow a = 1$

(2 $-a^3 + a^2 + 5a - 5 = 0$

نعوض $a = 1$ في 2 نجد

$-1 + 1 + 5 - 5 = 0$ محققة

ومنه $z_1 = i$ جذر لـ p ومنه $p(z)$ يقبل القسمة على $(z - i)$

$$
\begin{array}{r|l}
z^3 + (2-i)z^2 + (5-2i)z - 5i & z - i \\
\hline
\mp z^3 \pm iz^2 & z^2 + 2z + 5 \\
2z^2 + (5-2i)z - 5i & \\
\mp 2z^2 \pm 2iz & \\
0 + 5z - 5i & \\
\mp 5z \pm 5i & \\
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

ومنه

$p(z) = (z - i)(z^2 + 2z + 5) = 0$

$z^2 + 2z + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 4(5) = 4 - 20 = -16 = 16i^2$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4i$

ومنه

$z_2 = -1 + 2i \Leftarrow z_2 = \dfrac{-2 + 4i}{2}$

و $z_3 = -1 - 2i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي

$z \in \{i, -1-2i, -1+2i\}$

4 نضع

$P(z) = z^3 + (1-4i)z^2 - 6z + 4 + 4i$

نفترض أن a جذراً للمعادلة $P(z) = 0$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ومنه $P(a) = 0$

$P(a) = a^3 + (1-4i)a^2 - 6a + 4 + 4i = 0$

$= a^3 + a^2 - 4a^2 i - 6a + 4 + 4i = 0$

$(-4a^2 + 4)i + a^3 + a^2 - 6a + 4 = 0$

$a^3 + a^2 - 6a + 4 = 0$ ①

$-4a^2 + 4 = 0$ ②

من ② نجد $4a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

نعوض في ① للتحقق نجد: $a = 1$

محققة $1 + 1 - 6 + 4 = 0$

غير محققة (مرفوض) $-1 + 1 + 6 + 4 \neq 0$: $a = -1$

ومنه $z_1 = 1$ ومنه $P(z)$ يقبل القسمة على $z - 1$

$$\begin{array}{r|l} z^3 + (1-4i)z^2 - 6z + 4 + 4i & z - 1 \\ \hline \mp z^3 \pm z^2 & z^2 + (2-4i)z - 4 - 4i \\ 0 + (2-4i)z^2 - 6z + 4 + 4i & \\ \mp (2-4i)z^2 \pm (2-4i)z & \\ 0 + (-4-4i)z + 4 + 4i & \\ \mp (-4-4i)z \mp 4 \mp 4i & \\ 0 & \end{array}$$

ومنه

$P(z) = (z-1)(z^2 + (2-4i)z - 4 - 4i)$

$z^2 + (2-4i)z - 4 - 4i = 0$

$\Delta = (2-4i)^2 - 4(-(4+4i))$

$\Delta = 4 - 16i - 16 + 4(4+4i)$

$\Delta = 4 - 16i - 16 + 16 + 16i$

$\Delta = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2$

$z_2 = \frac{-(2-4i)+2}{2} = \frac{-2+4i+2}{2} = 2i$

$z_3 = \frac{-(2-4i)-2}{2} = \frac{-2-4i-2}{2}$

$z_3 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i$

3

$7(x+yi)-3(x-yi)=4-5i$

$7x+7yi-3x+3yi=4-5i$

$4x+10yi=4-5i$

بالمطابقة

$4x=4 \Rightarrow x=1$

$10y=-5 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow Z=1-\frac{1}{2}i$

السؤال الرابع :

1

$\Delta=b^2-4ac=(-3+4i)^2-4(i)(i-5)$

$=9-24i-16+4+20i=-3-4i$

نفرض $w=x+iy$ هو الجذر التربيعي

لـ $\Delta=-3-4i$ ونكتب :

$x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5$ 1

$x^2-y^2=-3$ 2

$2xy=-4$ 3

$1+2 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

$1-2 \Rightarrow 2y^2=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ y=2 \end{cases}$

$3\ 2xy=-4 \Rightarrow x.y<0$

X و Y من إشارتين متعاكستين :

$+\sqrt{\Delta}=w_1=1-2i \quad , \quad -\sqrt{\Delta}=w_2=-1+2i$

$Z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3+4i)+1-2i}{2i}=-3-2i$

$Z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3+4i)-1+2i}{2i}=-1-i$

2 نفرض Z_1 و Z_2 جذرا المعادلة السابقة

احسب $\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$ بالشكل الجبري:

$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}=\frac{Z_2+Z_1}{Z_1.Z_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$

$=\frac{-b}{c}=\frac{3-4i}{-5+i}$

$=\frac{(3-4i)(-5-i)}{(-5+i)(-5-i)}$

$=\frac{-19+17i}{26}=-\frac{19}{26}+\frac{17}{26}i$

* السؤال الخامس:

1)

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{1+i}$$

$$z=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{6}}{2}$$

$$z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

2)

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$$

$$r=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2=1+i \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

* بالمقارنة بين الشكل المثلثي والجبري للعدد z نجد:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$$

ومنه:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

3)

$$z^2+pz+q=0$$

$$z_1+z_2=-p$$

$$2e^{i\frac{\pi}{12}}+2e^{-i\frac{\pi}{12}}=-p$$

$$2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)=-p$$

$$2\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)=-p$$

$$4\cos\frac{\pi}{12}=-p$$

$$4\left\{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right\}=-p$$

$$p=-\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$z_1\cdot z_2=q$$

$$2e^{i\frac{\pi}{12}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{12}}=q$$

$$q=4$$

فالمعادلة:

$$z^2+(-\sqrt{6}-\sqrt{2})z+4=0$$

$$Z = \cos\theta + i\cos\theta$$
$$= \cos\theta\,(1+i)$$
$$= (\cos\theta)(\sqrt{2})\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$Z = -(-\cos\theta)(\sqrt{2})\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= -\sqrt{2}\cos\theta\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right][\cos\pi + i\sin\pi]$$
$$Z = -\sqrt{2}\cos\theta\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$1+i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$\cos\theta < 0$

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

****

Subject:

1) $Z = (\sqrt{3} - 2)\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= -(2-\sqrt{3})\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right)$

$= (2-\sqrt{3})\left(\cos \pi - \frac{\pi}{3} + i\sin \pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow Z = -(2-\sqrt{3})\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$(Z) = (z^2 + az + b)(z^2 - bz - 4b)$ $\boxed{1}$

$z^4 - bz^3 - 4bz^2 + az^3 - abz^2 - 4ab + bz^2 - b^2z - 4b^2$

$z^4 + (-b+a)z^3 + (-4b - ab + b)z^2 + (-4ab - b^2)z - 4b^2$

$z^4 + (a-b)z^3 + (-3b - ab)z^2 + (-4ab - b^2)z - 4b^2$

بالمطابقة،

ISIS كتيبة

$a - b = -2i$ --- $\boxed{1}$

$3b - ab = -6 + 2i$ --- $\boxed{2}$

$ab - b^2 = -4 + 8i$ --- $\boxed{3}$

$-4b^2 = -16 \Rightarrow \boxed{b^2 = 4}$ --- $\boxed{4}$

من $\boxed{4}$ نجد أن

$b = -2$ $b = 2$

في حال $\boxed{b = -2}$ نعوض في $\boxed{1}$

$a + 2 = -2 - i \Rightarrow a = -4i$

نعوض في $\boxed{3}$ و $\boxed{2}$ للتحقق،

$-3(-2) - (-4 - i)(-2) = -6 + 2i$

$6 - 8 - 2i = -2 - 2i \neq -6 + 2i$

غير محققة فالحل $b = -2$ مرفوض

في حال $\boxed{b = 2}$ نعوض في $\boxed{1}$

$a - 2 = -2 - i \Rightarrow \boxed{a = -i}$

معوضا في (2) و (3) للتحقق

$-3(2) - (-i)(2) = -6 + 2i$ محققة

$4(-i)(2) - (2)^2 = 8i - 4$ محققة

$P(z) = (z^2 - iz + 2)(z^2 - 2z - 8)$

$P(z) = 0 \Rightarrow$

إما $z^2 - iz + 2 = 0$

$\Delta = -1 - 8 = -9 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta} = 3i}$

$z_1 = \frac{i - 3i}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = -i}$

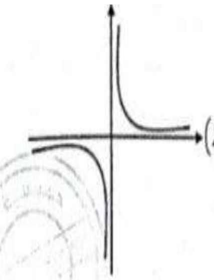
$z_2 = \frac{i + 3i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = 2i}$

أو $z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow$

$(z - 4)(z + 2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{z_3 = 4}$, $\boxed{z_4 = -2}$

التمرين الثاني :



$$z^2 - (1+i)^2 = \bar{z}^2 - (1-i)^2$$
$$z^2 - \bar{z}^2 = (1+i)^2 - (1-i)^2$$
$$(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$$
$$(2yi)(2x) = 2i - (-2i)$$
$$4xyi = 4i$$
$$xy = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x}}$$

إذاً مجموعة النقاط تمثل نقاط قطع زائد فرعيه في الربعين الأول والثالث

1) اثبت أن $|iz + 2 - i| = |z - 1 - 2i|$

$$|iz + 2 - i| = |iz - 2i^2 - i|$$
$$= |i(z - 2i - 1)|$$
$$= |i| . |z - 1 - 2i|$$
$$= 1 . |z - 1 - 2i|$$
$$= |z - 1 - 2i|$$

محققة

2) ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوى التي تحقق المساواة: $|iz + 2 - i| = 3$

$$|z - 1 - 2i| = 3$$
$$|z - (1 + 2i)| = 3$$

بفرض $z_A = 1 + 2i$ العدد العقدي الممثل للنقطة $A(1,2)$

$$|z - z_A| = 3$$
$$MA = 3$$

هذه المساواة تعني هندسياً مجموعة نقاط المستوي M التي تبعد عند نقطة ثابتة A مسافة ثابتة 3 فهي تمثل مجموعة نقاط دائرة مركزها $A(1,2)$ ونصف قطرها يساوي 3.

المسألة الأولى

* $Z^2 = \left[(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right]^2$
$= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})i - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$
$= 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 8i - 6 + 2\sqrt{12} - 2$
$= 4\sqrt{12} + 8i = 8\sqrt{3} + 8i$ محققة

---

* $r = \sqrt{(64 \times 3) + 64} = \sqrt{64(3+1)}$
$= \sqrt{64 \times 4} = 8 \times 4 = 16$

$\cos\theta = \dfrac{8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\theta = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$
$\Bigg\}\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$Z^2 = 16\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

---

* $|Z^2| = 16$
$|Z|^2 = 16$
$\Rightarrow |Z| = 4$
$\arg(Z^2) = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow$
$2\arg Z = \dfrac{\pi}{6}$
$\arg Z = \dfrac{\pi}{12}$

* مثلي $Z = Z$ جبري
$(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i =$
$4\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$
$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)i =$
$\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$
$\Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

* $Z^{24} = 4^{24}\left[\cos\left(24\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(24\frac{\pi}{12}\right)\right]$
$= 4^{24}\left[\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right] =$
$= 4^{24}$

---

* $w = \dfrac{i + i^2 + i^3 + i^5}{1+i} = \dfrac{i}{1+i} = \dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$= \dfrac{-1+i+i+1}{2} = i$ w تخيلي بحت.

Sabbagh

المسالة الثانية:

$A = \alpha + \alpha^4 \; ; \; B = \alpha^2 + \alpha^3 \; ; \; \alpha = e^{2i\frac{\pi}{5}}$

$x^2 + x - 1 = 0 \; \ldots\ldots (*)$

1} $\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$: مجموع حدود متتالية هندسية

أساسها: $q = \alpha$

عدد حدودها $n = 5$ ، حدها الأول: $a = 1$

$$\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = a\frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1-\left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5}{1-\alpha} = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1-e^{0i}}{1-\alpha} = \frac{1-1}{1-\alpha} = \frac{0}{1-\alpha}$$

$$= 0$$

$$\Longrightarrow \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

حتى يكون A و B هما جذرا المعادلة يجب أن يتحقق الشرطان:

1} $A + B = \frac{-b}{a} = -1$

2} $A \times B = \frac{c}{a} = -1$

1) $A + B = \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3$

$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$

بما أن: $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 \Leftarrow$

$A + B = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$ ✓

2) $A \times B = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3)$

$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$

$= \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4)$

بما أن: $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow 1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 = -\alpha^2$

$A \times B = \alpha^3(-\alpha^2) = -\alpha^5 = -\left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5$

$= -e^{2\pi i} = -e^{0i}$

$\Rightarrow A \times B = -1$ ✓

$\Leftarrow$ A و B هما جذرا المعادلة $(*)$

ملاحظات:

يمكن أيضاً التحقق من أنّ A و B هما جذرا المعادلة (*)
من خلال تعويض A و B في المعادلة (*)
والتبسيط وتحقق المعادلة.

(2

$$B = \alpha^2 + \alpha^3 = \left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^3$$

$$= e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{6i\frac{\pi}{5}}$$

$$\boxed{\frac{6\pi}{5} = \frac{10\pi - 4\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}}$$

$$= e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{-4i\frac{\pi}{5}}$$

يمكن الانتقال حسب أويلر

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cdot\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\boxed{B = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

(3

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \ldots (*)$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\Leftarrow B = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0 \Leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$$

$$B = x_1 \Rightarrow -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$