★ استنتاج رسم الخطوط البيانية ★

يكون لدينا تابع f خطه البياني C_f والمطلوب استنتاج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث g معطى بصيغة ما سنقارنها مع f.

لذلك دائمًا نكتب التابع g بدلالة f وسنهتم بالحالات الآتية:

① التناظر

- إذا كان $g(x) = f(-x)$ فإن C_g هو نظير C_f بالنسبة إلى **محور التراتيب**.

- إذا كان $g(x) = -f(x)$ فإن C_g هو نظير C_f بالنسبة إلى **محور الفواصل**.

- إذا كان $g(x) = -f(-x)$ فإن C_g هو نظير C_f بالنسبة إلى **المبدأ**.

② الانسحابات العمودية

- إذا كان $g(x) = f(x) + a$ فإن C_g ينتج عن C_f **بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى** بمقدار a.

- إذا كان $g(x) = f(x) - a$ فإن C_g ينتج عن C_f **بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل** بمقدار a.

③ الانسحابات الأفقية

- إذا كان $g(x) = f(x+a)$ فإن C_g ينتج عن C_f **بانسحابه على محور الفواصل نحو اليسار** بمقدار a.

- إذا كان $g(x) = f(x-a)$ فإن C_g ينتج عن C_f **بانسحابه على محور الفواصل نحو اليمين** بمقدار a.

④ القيم المطلقة

- إذا كان $g(x) = |f(x)|$ فإن C_g ينتج عن C_f **بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة**، وأخذ **نظائر النقاط ذات التراتيب السالبة** بالنسبة إلى محور الفواصل.

- إذا كان $g(x) = f(|x|)$ فإن C_g ينتج عن C_f **بالمحافظة على النقاط ذات الفواصل الموجبة**، وأخذ **نظائر النقاط ذات الفواصل السالبة** بالنسبة إلى محور التراتيب.

⑤ التحويلات الخطية

- إذا كان $g(x) = af(x)$ فإن C_g ينتج عن C_f **بالمحافظة على فواصل النقاط** وضرب **تراتيب النقاط بالعدد** a.

- إذا كان $g(x) = f(a \cdot x)$ فإن C_g ينتج عن C_f **بالمحافظة على تراتيب النقاط** وضرب **فواصل النقاط بالعدد** a.

⑥ حالة خاصة:

- إذا كان g هو **التابع العكسي** للتابع f فإن C_g هو نظير C_f بالنسبة إلى **منصف الربعين الأول والثالث**: $y = x$

✦ ملاحظات مهمه ✦

- عند الاستنتاج يمكن الانطلاق من $f(x)$ للوصول إلى $g(x)$ أو بالعكس.

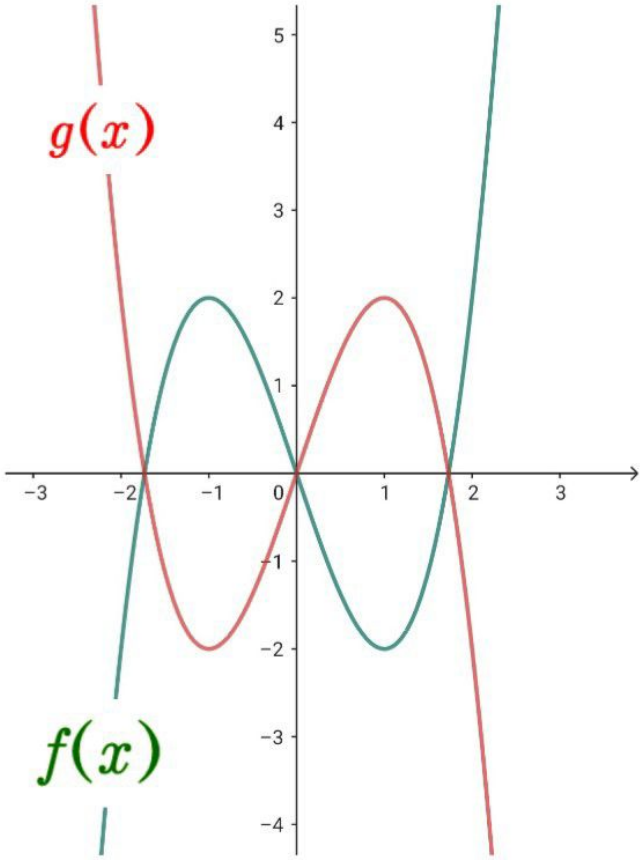
- بعض الحالات تحتمل أكثر من حاله للاستنتاج:

- اذا كان التابع f زوجي وكان C_g نظير C_f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات فهو أيضًا نظيره بالنسبة إلى محور الفواصل.

- اذا كان التابع f فردي وكان C_g نظير C_f بالنسبة لـمحور الفواصل فهو أيضًا نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب.

مثال 1

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:



$$f(x) = x^3 - 3x$$

الطلب الأول:

استنتج رسم C_g للتابع :

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

- طريقه أولى :

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

$$g(x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

ومنه C_g نظير الخط C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

- طريقه ثانيه :

نلاحظ أن

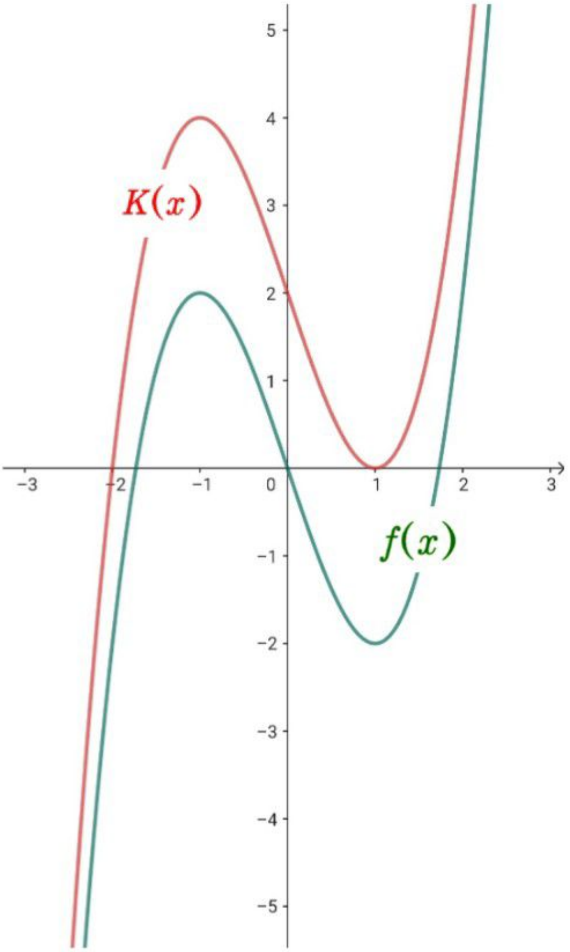
$$g(x) = f(-x)$$

ومنه C_g نظير الخط C_f بالنسبة إلى محور التراتيب.

الطلب الثاني :

استنتج رسم C_k للتابع :

$$K(x) = x^3 - 3x + 2$$



ان

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$K(x) = x^3 - 3x + 2$$

نلاحظ أن :

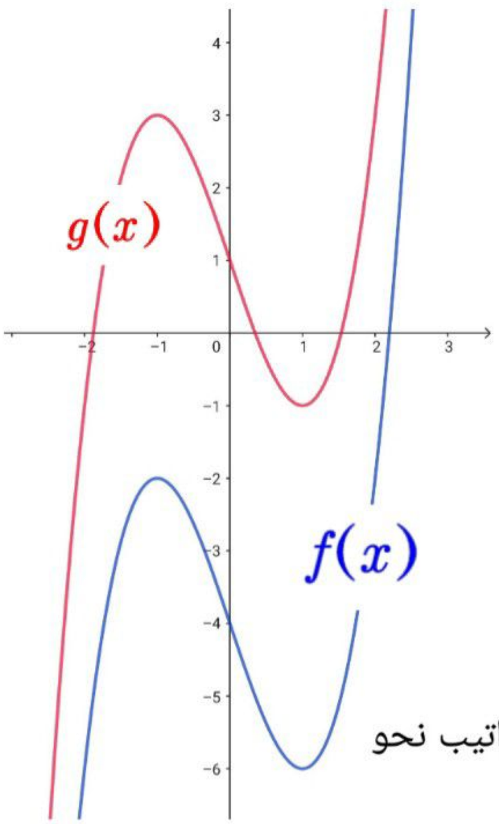
$$K(x) = f(x) + 2$$

ومنه نجد أن C_k ينتج عن C_f بانسحابه على **محور التراتيب** نحو الأعلى بمقدار 2

مثال 2

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$



استنتج رسم C_g للتابع:

$$g(x) = \quad x^3 - 3x - 4$$

الحل:

$$g(x) = \quad x^3 - 3x - 4$$

$$g(x) = \quad x^3 - 3x + 1 - 5$$

$$g(x) = f(x) - 5$$

ومنه، C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 5.

مثال 3 ليكُنْ C_f الخطّ البياني للتابع $f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$ المُعرَّف على $\mathbb{R}$

استنتج رسم C_g الخطّ البياني للتابع: $g(x) = |x|.(1 + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}})$.

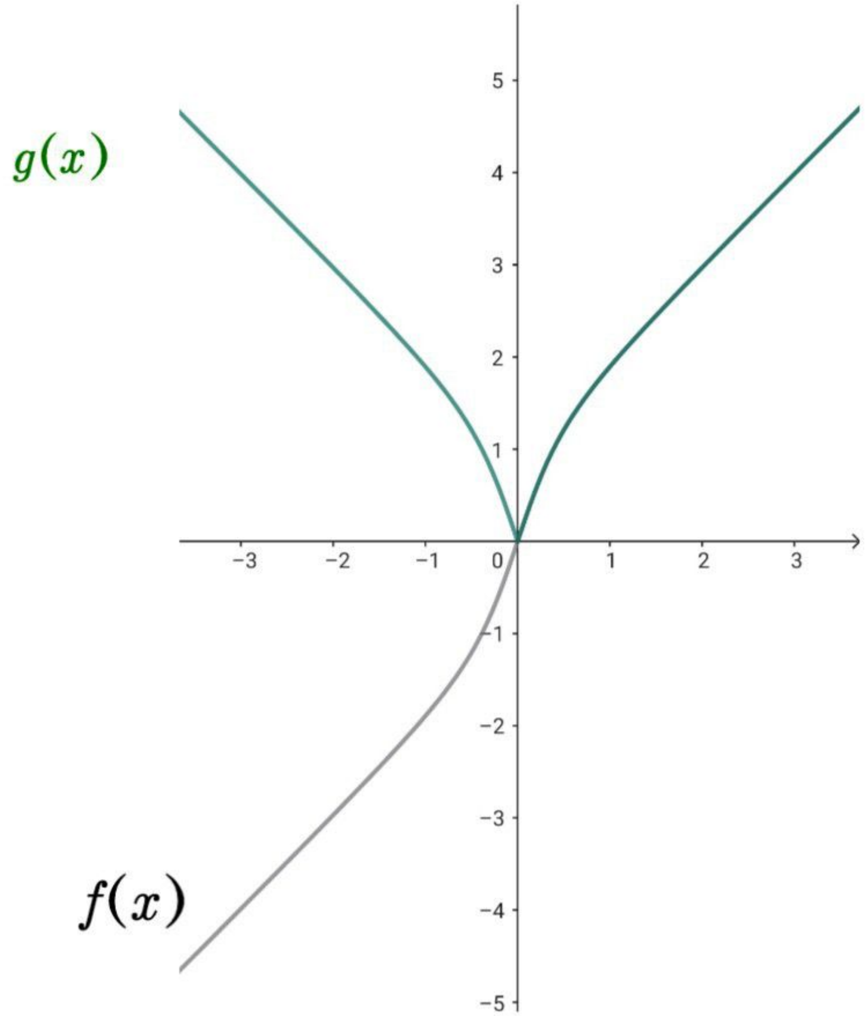
$$f(x) = x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$g(x) = |x|.\underbrace{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\right)}_{>0} \Rightarrow$$

$$g(x) = |x|.\left|1 + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\right| \quad \boxed{|a.b| = |a|.|b|} \Rightarrow$$

$$g(x) = \left|x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right| = |f(x)|$$

- إذا كان $g(x) = |f(x)|$ فإن C_g ينتج عن C_f **بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة، وأخذ نظائر النقاط ذات التراتيب السالبة** بالنسبة إلى محور الفواصل.



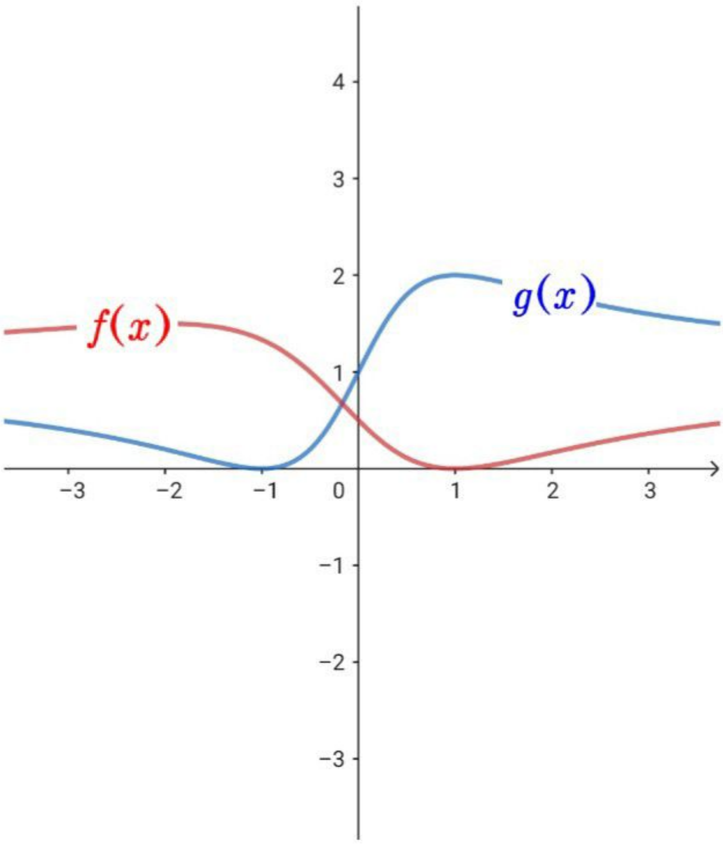
مثال 4

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

استنتج رسم C_g للتابع:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$



الحل:

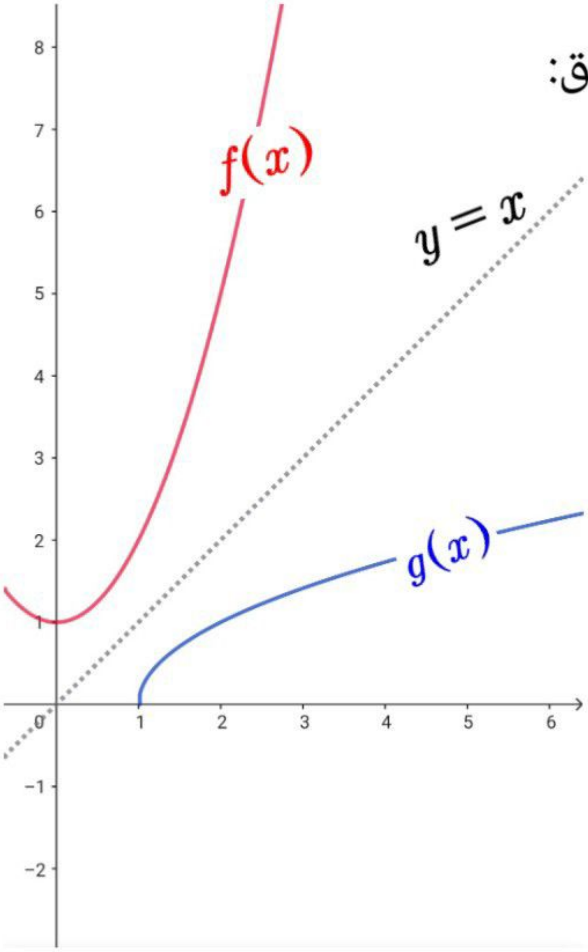
$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$g(x) = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$$

$$g(x) = f(-x)$$

ومنه، C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب.

مثال 5



ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^2 + 1$$

استنتج رسم C_g للتابع:

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$

على المجال $[1, +\infty[$

الحل:

نلاحظ أن $g(x)$ هو تابع التقابل العكسي للتابع $f(x)$ على المجال $[1, +\infty[$

ومنه، C_g هو نظير الخط C_f بالنسبة إلى المستقيم $y = x$

يتبع بعرض أمثلة أخرى حين التعرف على التابعين $\ln(x)$ و e^x