$$f(x) = \frac{4x^2 + 3 - 3\cos x}{2x^2}$$

9:0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x^2} + \frac{3 - 3\cos x}{2x^2} \Rightarrow 2 + 3\,\frac{(1-\cos x)}{2x^2}$$

$$\frac{2 + 3\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{2x^2} \Rightarrow 2 + 3\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

نضرب بسط ومقام ب 2

$$2 + 3\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2 + 3\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$x \to 0$

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$ a: 0^+

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \cdot \infty$$ ح.ع.ت

$$f(x) = \sin x \sqrt{\frac{1}{1}_{(x^2)} + \frac{1}{x^2}_{(1)}} \Rightarrow \sin x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$= \sin x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} \Rightarrow \frac{\sin x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ a:0

$\lim f(x) = 0 \cdot \sin(\infty)$

نستخدم مبرهنة الإحاطة

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1$

أولاً . نضرب بـ x موجب $x > 0$

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq +x$

$-x \leq f(x) \leq +x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim(-x) = 0 \\ \lim(+x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

ثانياً . نضرب بـ x سالب $x < 0$

$-x \geq x \cdot \sin \frac{1}{x} \geq +x$

نقلب المتراجحة عند الضرب بعدد سالب

$-x \geq f(x) \geq +x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim(-x) = 0 \\ \lim(+x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x \cdot \sin 3x}$$

9:0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4} - 2)(\sqrt{x^2+4} + 2)}{(x \cdot \sin 3x)(\sqrt{x^2+4} + 2)} = \frac{x^{\cancel{2}} + \cancel{4} - \cancel{4}}{(\cancel{x} \cdot \sin 3x)(\sqrt{x^2+4} + 2)}$$

$$= \frac{x}{\sin 3x \cdot \sqrt{x^2+4} + 2} \Rightarrow \frac{x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2}$$

نضرب بـ 3

$$f(x) = \frac{3x}{3 \cdot \sin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4} + 2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

محدودية تابع f

نقول عن f إنه محدود إذا تحقق $\Longleftarrow$ $m \leq f(x) \leq M$
حيث m و M عددين حقيقيين (إحاطة)

مثال: ليكن

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4}$$

1. استنتج أن f محدود
2. استنتج نهاية $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4}\right)$

1- لإيجاد محدودية تابع نتبع الإحاطة:

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

- نضيف $+4$

$$3 \leq \sin x + 4 \leq 5$$

- نقسم على 5

$$\frac{3}{5} \leq \frac{\sin x + 4}{5} \leq 1$$

- نقلب الأطراف ونقلب إشارة المتراجحة

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{3} \geq f(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \in \left[1, \frac{5}{3}\right]$$

2- لإيجاد نهاية تابع نستفيد من طلب السابق:

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1$$

- نضرب الكل بـ x^2 علماً أن $x^2 \geq 0$ لوجود الترتيب

$$\frac{5}{3}x^2 \geq \frac{5x^2}{\sin x + 4} \geq x^2 \Rightarrow \frac{5}{3}x^2 \geq f(x) \geq x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim \left(\frac{5}{3}x^2\right) = +\infty \\ \lim (x^2) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4}\right) = +\infty$$

ليكن التابع f المعرف على R بالعلاقة :

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

① اوجد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

② اوجد معادلة المقارب المائل للتابع :

1 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{3(\infty)^2 + (\infty) + 1} = +\infty$$

2 : لوجود المقارب المائل نوجد :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{3x^2 + x + 1}}{x} = \frac{\sqrt{3(\infty)^2 + \infty + 1}}{\infty}$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

نسحب x^2 كعامل مشترك

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$\sqrt{x^2} = \underset{x \to +\infty}{|x|} = +x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}$$

نوجد $b : f(x) - ax$

$$b : [f(x) - ax] \Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3}x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3}x\right) = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعيين يجب ازالتها

نضرب بالمرافق

$$f(x) = \frac{(\sqrt{3x^2+x+1} - \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+x+1} + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+x+1} + \sqrt{3}x}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+x+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3}x}$$

نسحب لا عامل مشترك

$$\Rightarrow \frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{3}x}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \underset{x\to+\infty}{=} +x$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{3+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y = ax+b$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2x-2}{x^2}$$

1) احسب نهاية f عند (0)

2) اثبت ان المستقيم $y=x-2$ مقارب مائل في جوار ∞-

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0-2(0)^2+2\cos^2(0)-2}{0^2}=\frac{0}{0}$$

1) حالة عدم تعيين تجب ازالتها

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2\cos^2x-2}{x^2}$$

$$f(x)=x-2+\frac{2(\cos x^2-1)}{x^2}\Rightarrow x-2-2\left[\frac{1-\cos^2x}{x^2}\right]$$

$$f(x)=x-2-2\left[\frac{\sin^2x}{x^2}\right]\Rightarrow f(x)=x-2-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0-2-2(1)^2=-4$$

2) نشكل الفرق

$$[f(x)-y_0]=\frac{x^3-2x^2+2\cos x^2-2}{x^2}-(x-2)$$

نوحد مقامات

$$\frac{x^3-2x^2+2\cos^2x-2-(x^3-2x^2)}{x^2}\Rightarrow[f(x)-y_0]=\frac{2\cos^2x-2}{x^2}$$

ثم نوجد نهاية عند ∞-

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_0] = \frac{2\cos^2(-\infty) - 2}{-\infty}$$

نستخدم إحاطة

$$0 \leq \cos x^2 \leq +1$$

نضرب ب 2

$$0 \leq 2\cos x^2 \leq 2$$

نضيف -2

$$-2 \leq 2\cos x^2 - 2 \leq 0$$

نقسم على x^2

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{2\cos x^2 - 2}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{-2}{x^2} \leq f(x) - y_0 \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2}{x^2}\right) = 0 \\ \\ \lim_{x \to -\infty} (0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_0] = 0$$

علماً أن $\lim [f(x) - y_0] = 0$

إذاً $y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

نعرف الخط البياني C_f للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$$

1) احسب نهاية f عند (0).

2) استنتج ان المستقيم $y = -2x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

يجب إزالتها

$$f(x) = \frac{-2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$$

$$f(x) = -2x + 1 + 2\left[\frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}\right]$$

$$f(x) = -2x + 1 + 2\left[-\frac{(1-\cos\sqrt{x})}{x}\right] \Rightarrow f(x) = -2x+1-2\left(\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}\right)$$

$$f(x) = -2x+1-4\left(\frac{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}^2}\right) \Rightarrow f(x) = -2x+1-4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$f(x) = -2x+1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

نوجد الفرق

$$\left(f(x) - y_0\right) = \frac{-2x^2 + x + 2\cos\sqrt{x} - 2}{x\ (1)} - \frac{(-2x+1)}{(x)\ \ 1}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{-2x^2} + \cancel{x} + 2\cos\sqrt{x} - 2 + \cancel{2x^2} - \cancel{x}}{x} \Rightarrow \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{2\cos\sqrt{\infty} - 2}{\infty}$$

نستخدم الإحاطة

$$-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq +1$$

نضرب بـ 2

$$-2 \leq 2\cos\sqrt{x} \leq 2$$

نضيف -2

$$-4 \leq 2\cos\sqrt{x} - 2 \leq 0$$

نقسم على x

$$\frac{-4}{x} \leq \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x} \leq 0$$

$$\frac{-4}{x} \leq f(x) - y_0 \leq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{4}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - y_0\right) = 0$$

ومنه $y = -2x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim (0) = 0$$

هام : نعرف التابع f بالعلاقة

$$f(x) = \frac{2 - 3\cos x}{4 + 3\cos x}$$

اثبت ان f محدد :

لا نستطيع استخدام إحاطة لوجود نسبتين مثلثيتين في البسط والمقام نصحح التابع عن طريق القسمة الاقليدية

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline 4+3\cos x & 2 - 3\cos x \\ & -4 - 3\cos x \\ \hline & 6 \end{array}$$

$f(x) =$ ناتج + $\frac{\text{باقي}}{\text{مقسوم عليه}}$

$$f(x) = -1 + \frac{6}{4 + 3\cos x}$$

$$-1 \leq \cos x \leq +1$$

نضرب بـ 3

$$-3 \leq 3\cos x \leq +3$$

نضيف $+4$

$$+1 \leq 4 + 3\cos x \leq 7$$

نقسم على 6

$$\frac{1}{6} \leq \frac{4 + 3\cos x}{6} \leq \frac{7}{6}$$

نقلب

$$6 \geq \frac{6}{4 + 3\cos x} \geq \frac{6}{7}$$

نضيف -1

$$5 \geq -1 + \frac{6}{4 + 3\cos x} \geq \frac{-1}{7}$$

تعرف التابع f بالعلاقة.

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

1- اكتب f بصيغة مستقلة عن القيمة المطلقة.

2- ادرس النزوع عند $\mp\infty$.

3- احسب نهاية $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$.

4- احسب نهاية $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x]$.

5- استنتج وجود مستقيمين احدهما مقارب مائل.

6- ادرس الوضع النسبي للمقارب الثاني.

* تخلص من القيمة المطلقة الا اذا درست اشارة المقدار «صفحات»

$|4x^2 - 1|$ ندرس اشارة المقدار

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = +1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \to -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$4x^2-1$		$-4x^2+1$		$4x^2-1$	

$$\begin{cases}]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\to f(x) = x + \sqrt{4x^2+1} \\ ]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[\to f(x) = x + \sqrt{1-4x^2} \end{cases}$$

* اوجد نزوع عند $\mp\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \sqrt{4(\infty)^2+1} = +\infty + \infty = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + \sqrt{-\infty^2 + 1} = -\infty + \infty$$ حالة عدم تعيين.

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 \cdot \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = x + |x| \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \Rightarrow f(x) = x - x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(-1) = +\infty$$

* نزع $\left[f(x) - 3x\right]$ $x \longrightarrow +\infty$

$$f(x) - 3x = x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$$
$$= \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 3x\right] = +\infty - \infty$$ حالة عدم تعيين

$$\frac{\left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \Rightarrow \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - 3x\right] = \frac{-1}{\sqrt{4(\infty)^2 - 1} + 2(\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f(x)+x = x+\sqrt{4x^2+1}+x$$

اصبر في $\left(f(x)+x\right)$
$x \longrightarrow -\infty$

$$= \sqrt{4x^2+1}+2x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \sqrt{4(-\infty)^2+1}+2(-\infty) = +\infty-\infty$$

حالة عدم تعيين

$$= \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)} \Rightarrow \frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right) = \frac{+1}{\sqrt{4(-\infty)^2+1}-2(-\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

* استنتج وجود مستقيمين d_1 و d_2 مقاربين مائلين

من طلب 3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right) = 0$$

وهو شرط مقارب مائل

اذاً $y=3x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

من طلب 4

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+x\right) = 0$$

اذاً $y=x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

الوضع النسبي

$$\sqrt{4x^2+1} + 2x = 0$$

$$\sqrt{4x^2-1} = -2x$$

نربع بشرط $x \leq 0$

$$4x^2-1 = 4x^2$$

$$-1 \neq 0$$

بالتعريف

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة		
وضعه	ح فوق م	

شغف الرياضيات :