MRS

أ. محمد رسول صباغ

المكتب العلمي الرياضي

التحليل التوافقي

طرائق العد

التباديل ← مرتب (موصوف)
- كلي ← تباديل ← عاملي / المبدأ الأساسي / الترتيب
- جزئي
  - مع تكرار ← المبدأ الأساسي بالعد
  - دون تكرار ← المبدأ الأساسي بالعد / ترتيب P_n^r

التوافيق ← غير مرتب (عشوائي) ← توافيق $\binom{n}{r}$

التباديل

$E=\{a,b\}$ → (a,b) ، (b,a)

إذن لها تبديلتين

$E=\{a,b,c\}$

a → b → c
a → c → b
b
c

نتفرع بثلاث ثم اثنين ثم واحد لذلك

عدد التباديل $3! = 1\times2\times3$

قاعدة:

عدد التباديل لمجموعة تضم n عنصر مختلف يساوي $n!$ تبديلة

$E=\{a,b,c,d\}$

عدد التباديل $=4!$

$E=\{a,a,b\}$

$\frac{3!}{2!}$ ← 3 عدد عناصر المجموعة ، 2 عدد مرات تكرار a

$E=\{a,a,b,b,c\}$

عدد التباديل $=\frac{5!}{2!\times2!}$

عدد مرات تكرار a ، عدد مرات تكرار b

$E=\{a,a,a,b,b,c\}$

$=\frac{6!}{3!\times2!}$

نريد تشكيل أعداد من أربع خانات بالأرقام 9952 بكم طريقة

$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$

نريد ترتيب 6 كتب على رف بكم طريقة يمكننا ذلك.

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$

كم كلمة مختلفة يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

$5! = 5\times4\times3\times2\times1=120$

العاملية ... (!)

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!}$

$6! = 6 \times 5!$

$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)!$

$(n+1)! = (n+1)n(n-1)!$

$1! = 1 \qquad 0! = 1$

تمرين عاملي ..

أ) $2! + 3! = 5!$

ب) $2! \times 3! = 6$

ج) $(3!)^2 = 9!$

د) $\frac{8!}{2!} = 4!$

التراتيب

$P_n^r \qquad n \geq r$

$P_8^3 = 8 \times 7 \times 6$

$P_5^2 = 5 \times 4$

$P_n^n = n! \qquad P_n^1 = n$

صف فيه 8 طلاب نريد اختيار ثلاث طلاب للدخول في مسابقة على أن يكون الأول ملك والثاني وزير والثالث حاجب

بكم طريقة يمكننا ذلك.

اختيار من صف من جزئي من دون تكرار

ط: $P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 =$

ط: وفق المبدأ الأساسي بالعد

الملك $= 8$

الوزير $= 7$

حاجب $= 6$

$8 \times 7 \times 6 =$

$E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

1) بكم طريقة يمكننا اختيار عدد مكون من منزلتين

منازل ترتيب

يمكن الاختيار أن يتكرر بتكرار

وفق المبدأ الأساسي بالعد

آحاد $= 5$

عشرات $=$

$\times 5 = 2$

2) عدد مكون من منزلتين مختلفتين

ترتيب — دون تكرار

ط: وفق المبدأ الأساسي بالعد

آحاد $= 5$

عشرات $= 4$

$4 \times 5 = 20$

ط: $P_5^2 = 5 \times 4 = 20$

صف فيه 8 طلاب نريد اختيار ثلاث طلاب لدخول مسابقة ثقافية.

بكم طريقة يمكننا ذلك

الاختيار جزئي ليس هناك تمييز (ترتيب)

الحل باستخدام التوافيق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التوافيق $\binom{n}{r}$ $r \le n$

1) $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1}$

2) $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

4) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ نستخدم إذا كان r أكبر من نصف n

$\binom{12}{8} = \binom{12}{12-8} = \binom{12}{4}$

$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

5) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ نستخدم مع الإثبات أو البراهين

6) $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow r_1 = r_2$ أو $r_1 + r_2 = n$

مركز لصيانة الهاتف فيه 4 مهندسين و 5 عمال نريد تشكيل لجنة مكونة من مهندسين أحدهما كرئيس والآخر كنائب ومن 3 عمال بكم طريقة يمكننا ذلك

نلاحظ أن المهندسين تم توصيفهم أما العمال فالاختيار عشوائي

$P_4^2 \times \binom{5}{3} = 4 \times 3 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$

$= 12 \times 10 = 120$

كم كلمة من ثلاث حروف مختلفة يمكن تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA

نمط الاختيار: مرتب لخانات ثلاثة جزئي دون تكرار

حسب المبدأ الأساسي بالعد:
- الخانة الأولى = 5
- الثانية = 4
- الثالثة = 3

$5 \times 4 \times 3 = 60$

قاعدة هامة جداً

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة تحوي n عنصراً = 2^n.

$E = \{1, 2, 3\}$

المجموعات الجزئية هي:

$\Phi, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123$

كم طريقة ممكنة لترتيب حروف كلمة سلسبيل

عدد الطرق $= \frac{6!}{2! \times 2!}$

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 9 مخارج امتحانية مختلفة على ثلاث طلاب بحيث يأخذ الأول 4 مخارج والثاني مخرجين والثالث 3 مخارج

عدد الطرق $= \frac{9!}{4! \times 2! \times 3!}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

من بين 12 شخصاً، بكم طريقة يمكن اختيار لجنتين كل منها تتكون من 3 أشخاص بحيث لا يكون شخص واحد عضواً في اللجنتين معاً

$\binom{12}{3} \times \binom{9}{3} = 220 \times 84 = 18480$

بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على المتسابقين في إحدى المسابقات علماً بأن عدد المتسابقين عشرة

عدد الطرق $= P_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

بكم طريقة يمكن تشكيل مجلس مؤلف من خمسة أشخاص إذا كان عدد المتقدمين (12) شخصاً في الحالتين

أ) دون شروط

ب) مدير ومعاون مدير وأمين سر وعضوين

أ) عدد الطرق $= \binom{12}{5} = 792$

ب) $P_{12}^{3} \times \binom{9}{2}$

أ) اختبار يتكون من 8 أسئلة بكم طريقة يستطيع الطالب أن يختار 6 منها إذا كان عليه أن يجيب عن سؤالين على الأقل من بين الثلاثة الأولى

ب) احسب r : $\binom{7}{2r-5} = \binom{7}{r+3}$

أ) $\binom{3}{2}\binom{5}{4} + \binom{3}{3}\binom{5}{3}$

$= 3 \times 5 + 1 \times 10 = 25$

ب) إما $2r-5 = r+3 \Rightarrow r = 8$

أو $2r-5+r+3 = 7 \Rightarrow r = 3$

نريد تأليف لجنة مكونة من مدير ونائب ومراسل من مجموعة تضم خمسة أشخاص بكم طريقة يمكننا اختيار هذه اللجنة علماً أنه في هذه المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في لجنة واحدة

2 متخاصمين	3

$P_{3}^{3} + P_{2}^{1} \times P_{3}^{2} \times 3$

$6 + 2 \times 6 \times 3 = 6 + 36 = 42$

لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

أ) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة والتي يمكن تشكيلها من عناصر S

ب) ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة والتي يمكن تشكيلها من S وكل عدد منها يقبل القسمة على 5 وأصغر من 500

أ) عدد الخانة الأولى = 6، الثانية = 5، الثالثة = 4

حسب المبدأ الأساسي بالعد $= 6 \times 5 \times 4$

آحاد	عشرات	مئات
5		2 3

آحاد = 1، مئات = 2، عشرات = 4

حسب المبدأ الأساسي بالعد $1 \times 2 \times 4 = 8$

منشور ثنائي الحد

الشكل العام ..

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

اذا كان $(a-b)^n$ نفس المنشور لكن الحدود تكون متناوبة بالاشارات بالموجبة

ونستخدم هذا الشكل اذا كانت صيغة السؤال اوجد منشور

الشكل المختزل ..

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$r = 0, 1, 2, \dots, n$

$r=3$ الحد الرابع $r=5$ الحد السادس

ونستخدم هذا الشكل اذا كانت صيغة السؤال ← ما الحد الذي يحوي x^n ،

← ما أمثال الحد x^n

عين الحد المستقل عن x في المنشور

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$$

$n = 6 \quad a = x \quad b = \frac{1}{x^2}$

$$T_r = \binom{n}{r} x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= \binom{6}{r} x^{6-r} \cdot x^{-2r}$$

$$= \binom{6}{r} x^{6-3r}$$

حد مستقل عن x اي

$$x^0 = x^{6-3r}$$

$6 - 3r = 0 \Rightarrow r = 2$

م الحد المستقل عن x هو الحد الثالث

$$T_r = \binom{6}{2}$$

ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي منشور $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x

$$T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} x^{2n-2r} \cdot x^{-r}$$

$$= \binom{n}{r} x^{2n-3r}$$

حد مستقل عن x

$$x^0 = x^{2n-3r}$$

ومنه

$2n - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} n$

r طبيعي

ومنه يجب ان تكون

n من مضاعفات العدد 3