MRS

أ. محمد رسول صباغ

المكتب العلمي الرياضي

الأشعة

أولاً: جمع الأشعة

طريقة شال (نهاية - بداية)

شرط: نهاية الأول هي بداية الثاني.

الناتج: شعاع بدايته بداية الأول ونهايته نهاية الثاني.

فوائده: - جمع عدة أشعة

$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$

- إدخال نقطة:

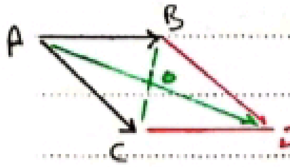
$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$

$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$

طريقة متوازي الأضلاع (بداية - بداية)

شرط: بداية الأول بداية الثاني

الناتج: قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين.



$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$ أو

$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AO}$

إذا تساوى شعاعين متقابلين في رباعي ما كان الرباعي متوازي أضلاع.

$\vec{AB}=\vec{CD}$

ABDC متوازي أضلاع

إذا تساوى شعاعين لهما البداية ذاتها فالنهايات منطبقة

$\vec{AM}=\vec{AB} \Rightarrow$ M منطبقة على B

ثانياً: قوانين

١) الشعاع $\vec{AB}$

$\vec{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$

٢) مركبات الشعاع $\vec{AB}$

$\vec{AB}(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A\,,\,z_B-z_A)$

٣) المسافة بين النقطتين A , B

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_A-y_B)^2+(z_B-z_A)^2}$

٤) احداثيات I منتصف AB

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

٥) احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

٦) طويلة (نظيم) شعاع

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

٦) إذا تساوى شعاعين تساوت مركباتهما

$\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x_1=x_2$

$y_1=y_2$, $z_1=z_2$

ثالثاً: الارتباط الخطي لشعاعين

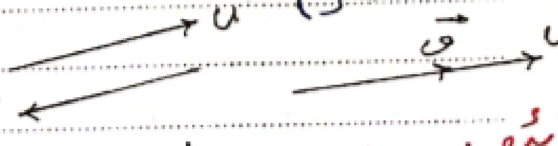
المفهوم الهندسي: التوازي أو الانطباق

المفهوم الجبري: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

$$\vec{u}=\lambda\vec{v} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

(الشعاع الصفري يرتبط خطياً مع أي شعاع آخر)



فوائد:

١) اثبات ثلاث نقط على استقامة واحدة.

٢) اثبات ثلاث نقط تحدد مستوٍ (غير مرتبطان خطياً)

٣) الارتباط الخطي لشعاعين من اربع نقط (يعني التوازي لحاملي الشعاعين).

٤) اثبات توازي أو انطباق.

اثبات ثلاث نقط على استقامة واحدة

١) ارتباط خطي لشعاعين من ثلاث نقط

٢) احداثيات مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين الأخريين

٣) وقوع النقاط الثلاث على الفصل المشترك لمستويين (على مستقيم واحد)

اثبات مستقيم يوازي مستوٍ..

١) الارتباط الخطي لشعاع توجيه المستقيم مع شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي

٢) $\vec{n}$: ناظم المستوي $\vec{n}\times\vec{v}=0$

$\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم.

لثلاث أشعة ..

تعريف: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط.

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

- اربع نقط: الارتباط الخطي لثلاث أشعة مكونة من اربع نقط تعني (وقوع النقاط الأربع في مستوٍ واحد)

صيغة السؤال: اثبت أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.

- خمس نقط: الارتباط الخطي لثلاث أشعة مكونة من خمس نقط تعني (شعاع يوازي مستوٍ).

صيغة السؤال: اثبت AB يوازي المستوي CDE

$$\vec{AB}=\alpha\vec{CD}+\beta\vec{CE}$$

مثال: $A(1,-1,0)$ $B(1,2,-3)$ $C(0,1,-1)$ $D(-1,0,1)$

اثبت أنها تقع في مستوٍ واحد.

$\vec{AB}(0,3,-3)$

$\vec{AC}(-1,2,-1)$

$\vec{AD}(-2,1,1)$

$\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ غير مرتبطان خطياً

$$\vec{AB}=\alpha\vec{AC}+\beta\vec{AD}$$

$$(0,3,-3)=\alpha(-1,2,-1)+\beta(-2,1,1)$$

$$=(-\alpha-2\beta,\ 2\alpha+\beta,\ -\alpha+\beta)$$

$-\alpha-2\beta=0$

$2\alpha+\beta=3$

$-\alpha+\beta=-3$

من ١ و ٢: $\alpha=2,\ \beta=-1$

نلاحظ أنها تحقق المعادلة (٣)

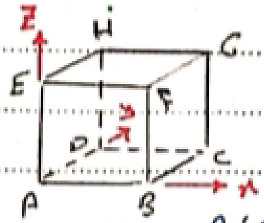
فالأشعة مرتبطة خطياً.

المدرس محمد رسول الصباغ
0934131159

ثالثاً: احداثيات رؤوس مكعب (متوازي مستطيلات)

مبدؤه A

أ) طول حرفه (1)



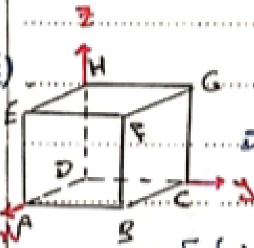
$(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

A(0,0,0) B(1,0,0)

C(1,1,0) D(0,1,0) E(0,0,1)

H(0,1,1) F(1,0,1) G(1,1,1)

مبدؤه D



$(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$

D(0,0,0) A(1,0,0)

B(1,1,0) C(0,1,0)

E(1,0,1) H(0,0,1)

F(1,1,1) G(0,1,1)

ب) طول حرفه (a)

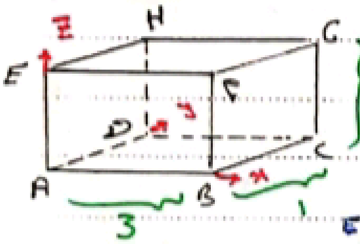
$(A; \frac{1}{a}\vec{AB}, \frac{1}{a}\vec{AD}, \frac{1}{a}\vec{AE})$

A(0,0,0) B(a,0,0) C(a,a,0)

D(0,a,0) E(0,0,a) F(a,0,a)

H(0,a,a) G(a,a,a)

متوازي مستطيلات .



$(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$

2

A(0,0,0) B(3,0,0)

C(3,1,0) D(0,1,0)

E(0,0,2) F(3,0,2)

H(0,1,2) G(3,1,2)

رابعاً: معادلة مستوٍ (P: ax + by + cz + d = 0)

لإيجاد معادلة مستوٍ يلزمنا ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ ونقطة $P(x_0, y_0, z_0)$

طرائق إيجاد معادلة مستوٍ ..

- نقطة وناظم $A(x_0,y_0,z_0)$ $\vec{n}(a,b,c)$
- نقطة وشعاعي توجيه غير متوازيين فقط
- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة
- معادلة مستوٍ Q يمر بنقطتين والعامود على مستوٍ P
- معادلة مستوٍ عمودي على مستويين متقاطعين
- معادلة المستوي يحوي تقاطع مستويين

حالة خاصة : معادلة مستوٍ يقطع محاور الاحداثيات الثلاث .

مثال : جد معادلة المستوي المار بالنقاط A(1,0,0) B(0,2,0) C(0,0,3)

معادلة مستوٍ يمر بالنقاط A(a,0,0) B(0,b,0) C(0,0,c)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \quad \times 6$$

$$6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

بالإمكان حلها بطرق مختلفة ولكن هذه الطريقة أسرع ..

مثال مهم

$$L: \begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad L': \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

اثبت ان L, L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين احداثياتها

اوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L, L'.

الحل :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1}(-5, -2, 2) \\ \vec{u_2}(0, -1, -2) \end{array}\right\} \quad \frac{-2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$$

فالمستقيمان متقاطعان او متخالفان.

بالمطابقة

$$\left.\begin{array}{l} 4 - 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 3 - 2\lambda = 1 - t \Rightarrow t = 0 \\ -1 + 2\lambda = 1 - 2t \end{array}\right\}$$

نلاحظ ان $\lambda = 1$, $t = 0$ تحققان (3)

فالمستقيمان متقاطعان ولايجاد نقطة التقاطع نعوض $t = 0$ في حدهما :

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad I(-1, 1, 1) \text{ نقطة التقاطع}$$

لايجاد معادلة المستوي لدينا نقطة I

وشعاعي توجيه غير مرتبطان خطياً ....

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$

$\vec{n} \cdot \vec{u_1} = 0 \Rightarrow -5a - 2b + 2c = 0$ ---(1)

$\vec{n} \cdot \vec{u_2} = 0 \Rightarrow -b - 2c = 0$ ---(2)

نفرض $b = 2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow a = \frac{-6}{5}$

$\vec{n}(\frac{-6}{5}, 2, -1) = (-6, 10, -5)$

ومنه معادلة المستوي

$-6x + 10y - 5z + d = 0$

نعوض $I \Rightarrow d = -11$

$P: -6x + 10y - 5z - 11 = 0$

خامساً : دراسة وضع مستويين

$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$\vec{n_1}, \vec{n_2}$ مرتبطان خطياً: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

فالمستويان متوازيان

- مع انطباق: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{d_1}{d_2}$
- دون انطباق: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

اذا كان $d = 0$ فالمستوي يمر بالمبدأ

$\vec{n_1}, \vec{n_2}$ غير مرتبطين خطياً: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

فالمستويان متقاطعان

- مع تعامد: $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$
- دون تعامد: $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \neq 0$

تمرين :

$P: x + y + z + 1 = 0$

$Q: x + y + z - 2 = 0$

احسب البعد بين P, Q

اولاً يجب ان نكون المستويان متوازيان

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n_P}(1, 1, 1) \\ \vec{n_Q}(1, 1, 1) \end{array}\right\} \text{ مرتبطان خطياً فالمستويان متوازيان}$$

ثانياً : نختار نقطة من المستوي P

وذلك بفرض $x = y = 0$

ومنه $z = -1$

ثم نحسب البعد للنقطة $(0, 0, -1)$ عن Q

$$dist(A, Q) = \frac{|0 + 0 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

وهو البعد بين المستويين

سادساً: معادلة مستقيم

في الهندسة المستوية | في الهندسة الفراغية

- الشكل العام: $ax + by + c = 0$
- الشكل المختزل: $y = ax + b$
- معادلة مستقيم مار بالنقطة (x_0, y_0) وميله m: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- d_1 مستقيم ميله m_1 و d_2 مستقيم ميله m_2:
  $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$
- ميل مستقيم مار بنقطتين: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

معادلات وسيطية
بالنسبة للنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$

$x = x_0 + at$
$y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$

$t \in \mathbb{R}$ مستقيم
$t \in [0, 1]$ قطعة مستقيمة
$t \in [0, +\infty[$ نصف مستقيم

طرائق إيجاد المعادلات الوسيطية:
- نقطة وشعاع توجيه
- نقطتين A, B
- مستويين (الفصل المشترك)

سابعاً: دراسة وضع مستقيمين (فراغياً)
نوجد أشعة توجيه كل منهما ثم نختبر:
- مرتبطان خطياً: فالمستقيمان يقعان في مستوٍ واحد ومتوازيان
- غير مرتبطان خطياً: فالمستقيمان متقاطعان أو لا يقعان في مستوٍ واحد

ثامناً: ... دراسة وضع مستقيم مع مستوٍ ...
نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على المعادلة بالشكل $at = b$

- $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$: فالمستقيم يشترك مع المستوي بنقطة واحدة فقط ولإيجاد احداثيات هذه النقطة نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية.
- $a = b = 0$: للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول فالمستقيم محتوى في المستوي.
- $a = 0, b \neq 0$: المعادلة مستحيلة الحل فالمستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهما متوازيان.

تكملة

معادلة الكرة ..

الشكل النموذجي

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$\Omega(x_0,y_0,z_0)$ مركزها

R ونصف قطرها

وتستخدم لإيجاد معادلة الكرة.

* وضع مستوٍ مع كرة

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي (dist) ونميز الحالات التالية.

1) $dist > R$ المستوي خارج الكرة

2) $dist = R$ المستوي يمس الكرة

3) $dist < R$ المستوي يقطع الكرة

نحصل على دائرة نصف قطرها (r) نعطى بالعلاقة $r^2=R^2-dist^2$

وتسمى الدائرة العظمى إذا كانت $R=r$

* جد معادلة الكرة التي تمثل فيها نقطتين قطريتين حيث B ، A

$A(1,2,-1)\quad B(1,0,-3)$

مركز الكرة هو منتصف [AB]

$\Omega(\frac{1+1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{-1-3}{2})$

$\Omega(1,1,-2)$

$AB=2R=\sqrt{0+4+4}=\sqrt{8}$

$2R=2\sqrt{2} \Rightarrow R=\sqrt{2}$

ومنه معادلة الكرة

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$

الشكل العام

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$\Omega(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$ مركزها

$R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$

موجب ← كرة

معدوم ← نقطة

سالب ← مجموعة خالية.

ماذا تمثل مجموعة النقاط

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$

$a=-2\quad b=4\quad c=0\quad d=-4$

$\Omega(1,-2,0)$

$R^2=(1)^2+(-2)^2+0+4=9$

وهي إذن معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها R.

$x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+9=0$

$a=4\quad b=-2\quad c=4\quad d=9$

$\Omega(-2,1,-2)$

$R^2=4+1+4-9=0$

تمثل نقطة هي Ω.

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+8=0$

$a=-2\quad b=4\quad c=0\quad d=8$

$\Omega(1,-2,0)$

$R^2=1+4+0-8$

$=-3<0$

مجموعة النقاط تمثل مجموعة خالية.

ملاحظة: دعاؤكم هو توقيعي

عاشراً: معادلة الاسطوانة.....

محورها ox $(\vec{i})$: $y^2+z^2=R^2$; $x \le x \le x$ (سفلية، علوية)

$h = x_{\text{علوية}} - x_{\text{سفلية}}$

محورها oy $(\vec{j})$: $x^2+z^2=R^2$; $y \le y \le y$ (سفلية، علوية)

$h = y_{\text{علوية}} - y_{\text{سفلية}}$

محورها oz $(\vec{k})$: $x^2+y^2=R^2$; $z \le z \le z$ (سفلية، علوية)

$h = z_{\text{علوية}} - z_{\text{سفلية}}$

وكي تقع النقطة على الاسطوانة يجب أن تحقق المعادلة والشرط معاً.
وإذا لم يتحقق احدهما فإن النقطة لا تقع على الاسطوانة (كذلك المخروط)

معادلة المخروط

المحور ox $(\vec{i})$: $y^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}x^2$; $x \le x \le x$ (سفلية، علوية)

$h = x_{\text{علوية}} - x_{\text{سفلية}}$

المحور oy $(\vec{j})$: $x^2+z^2=\frac{R^2}{h^2}y^2$; $y \le y \le y$ (سفلية، علوية)

$h = y_{\text{علوية}} - y_{\text{سفلية}}$

المحور oz $(\vec{k})$: $x^2+y^2=\frac{R^2}{h^2}z^2$; $z \le z \le z$ (سفلية، علوية)

$h = z_{\text{علوية}} - z_{\text{سفلية}}$

جد معادلة الاسطوانة التي محورها $(\vec{i})$ ومركزي قاعدتيها A و B حيث A(2,0,0) و B(5,0,0) ونصف قطر قاعدتها $R=\sqrt{3}$

$y^2+z^2=R^2$ ، $x_A \le x \le x_B$ $\Leftrightarrow$ $y^2+z^2=3$ ، $2 \le x \le 5$

بيّن أي النقاط التالية تقع على الاسطوانة: $E(3,\sqrt{3},0)$ ، $C(-1,0,\sqrt{3})$ ، $D(3,1,2)$

$C: 0+3=3$ محقق و $2 \le -1 \le 5$ غير محقق

ومنه C تحقق المعادلة لا تحقق الشرط اذن C لا تقع على الاسطوانة

$E: 3+0=3$ محقق ، $2 \le 3 \le 5$ محقق

$D: 1+4 \neq 3$ ، $D \notin$ للاسطوانة

ومنه $E \in$ للاسطوانة

المدرس محمد رسول الصباغ
0934131159

حادي عشر

بعد نقطة

عن مستقيم (x,y)

$d: ax+by+c=0$

$A(x_0,y_0)$

$$dist(A,d) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

عن مستقيم (x,y,z)

١) نكتب المعادلات الوسيطية لمستقيم d

٢) نختار نقطة K من المستقيم تكون إحداثياتها هي المعادلات الوسيطية لـ d

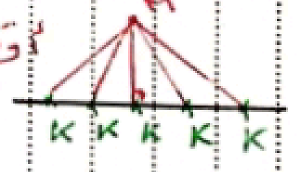
٣) نحسب المسافة بين M و K ونكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية

$MK = \sqrt{a(t-b)^2+c}$

٤) نختار أقصر مسافة وذلك عندما $a(t-b)^2=0 \Leftarrow t=b$

فيكون $MK=\sqrt{c}$ البعد M عن المستقيم

أقصر المسافات العمود



عن فصل مشترك

المستويان متقاطعان وغير متعامدان

١) نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك بين مستويين أي حل المشترك لجملة المعادلتين P_1, P_2

٢) نتابع الحل بنفس الطريقة لبعد نقطة عن مستقيم فراغي (x,y,z)

المستويان متقاطعان ومتعامدان

١) نحسب d_1 البعد النقطة M عن P

٢) نحسب d_2 البعد النقطة M عن Q

٣) نشكل مثلث قائم وبالاعتماد على نظرية فيثاغورث نكتب لدينا:

$d^2 = d_1^2 + d_2^2$

عن مستوٍ

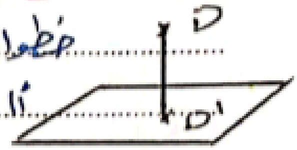
$P: ax+by+cz+d=0$

$A(x_0,y_0,z_0)$

$$dist(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$dist = 0$ أي أن النقطة تقع في المستوي.

اثنا عشر: إيجاد احداثيات نقطة المسقط العمودي لنقطة على المستوي P.



خطوات الحل:

١) نوجد معادلة المستوي إن لم تكن معطاة.

٢) نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم 'DD المار بالنقطة D والذي يقبل ناظم المستوي شعاع توجيه له.

٣) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم 'DD في معادلة المستوي فنحصل على قيمة t نعوضها في المعادلات الوسيطية فنحصل على احداثيات 'D.

ثلاثة عشر: حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل (غاوص)

(دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات.)

خطوات غاوص

١) نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة

٢) نحذف y من المعادلة الثالثة

٣) نحصل على جملة مدرجة
ثلاث مجاهيل، مجهولين، مجهول

ثم نوجد قيمة z من المعادلة الثالثة

* للجملة حل وحيد: المستويات الثلاث متقاطعة بنقطة واحدة.

* للجملة عدد لانهائي من الحلول: المستويات الثلاث تشترك بفصل مشترك.

* الجملة مستحيلة الحل: المستويات الثلاث لا تشترك مع بعضها البعض بأي نقطة.

$P_1: x+y+z=3$ $\quad L_1$

$P_2: 2x+y-z=2$ $\quad L_2$

$P_3: 3x-y-z=1$ $\quad L_3$

$-2L_1+L_2 \quad * \quad -3L_1+L_3$

$x+y+z=3$ $\quad L_1$

$-y-3z=-4$ $\quad L_2'$

$-4y-4z=-8$ $\quad L_3'$

$-4L_2'+L_3'$

$x+y+z=3$ $\quad (1)$

$-y-3z=-4$ $\quad (2)$

$8z=8$ $\quad (3)$

∴ المستويات الثلاث تشترك بنقطة

$z=1$ من (3)

$y=1$ نعوض في (2)

$x=1$ نعوض في (1)

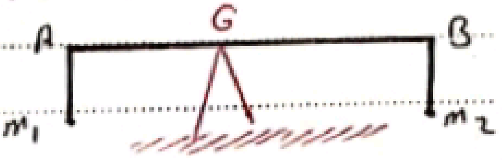
ومنه $(1,1,1)$ نقطة تقاطع المستويات الثلاث

نفضل أن يكون أمثال x في المعادلة الأولى (1)
لذلك نقوم بتبديل المعادلات
$L_2 \leftrightarrow L_1$

مركز الأبعاد المتناسبة ...

مركز الأبعاد المتناسبة أي مركز التوازن.

فيزياء: قانون ارخميدس في التوازن



كي تتوازن المسطرة بالنقطة G يجب أن يتحقق قانون ارخميدس

$$m_1 \times AG = m_2 \times GB$$

أي كي تتوازن المسطرة يجب أن تكون هناك تناسب بين المسافة والكتلة المعلقة.

رياضياً: $m_1 = \alpha \quad m_2 = \beta$

$$\alpha \vec{AG} = \beta \vec{GB}$$

$$\alpha \vec{AG} - \beta \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

العلاقة الشعاعية لمركز الأبعاد المتناسبة

ملاحظة: الشعاعين إما أن ينتهيا بـ G أو أن يبدأ بـ G

تعريف: G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha)(B,\beta)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

أ) $\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$

ب) $\alpha + \beta \neq 0$

الاستنتاج: تعيين موضع مركز الأبعاد

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

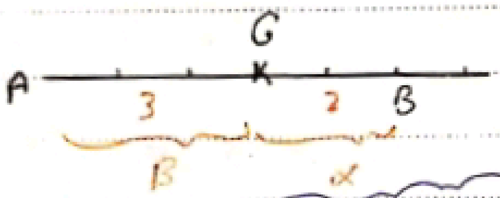
أ) $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$

$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$

مثال: عين موقع G كي تكون مركز أبعاد متناسبة للنقطتين

أ) $(A,2)(B,3)$

$\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB}$

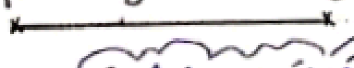


- بداية العد المتعدد
- بالعكس على المسافات

ب) $(A,2)(B,-3)$

$\vec{AG} = \frac{-3}{-1}\vec{AB}$

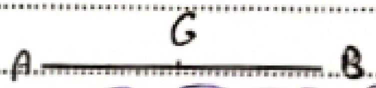
$\vec{AG} = 3\vec{AB}$



- إذا كانت التثقيلات من إشارة واحدة للنقطتين كان مركز الأبعاد داخل النقطتين
- إذا كانت التثقيلات من إشارتين مختلفتين كان مركز الأبعاد خارج النقطتين

3) $(A,2)(B,2)$

$\vec{AG} = \frac{2}{4}\vec{AB} \Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB}$



إذا كانت المثقلات متساوية للنقطتين كان مركز الأبعاد في المنتصف

G م.أ.ن لـ A ، B فإن G ، A ، B على استقامة واحدة

4) $(A,2)(B,-2)$

لا يمكن تعيينه وذلك لأن مجموع المثقلات معدوم

ثانياً: مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقط

تعريف: G م.أ.ن لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

1) $\alpha\vec{AG} + \beta\vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$

2) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

** G م.أ.ن لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{AC}$$

$$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{BC}$$

$$\vec{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\vec{CB}$$

إذا G م.أ.ن لـ A ، B ، C فإن G ، A ، B ، C في مستوٍ واحد

G م.أ.ن لثلاث نقط متساوية المثقلات فإن G مركز ثقل المثلث ABC

ثالثاً: الصفة التجميعية.

G م.أ.ن لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$ فإن تثقيل G هو $\alpha+\beta$

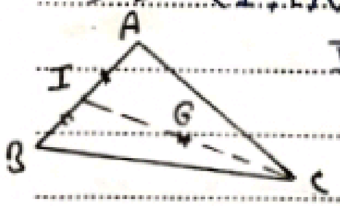
عيّن موضع G م.أ.ن لـ $(A,1)(B,1)(C,2)$

لتكن I م.أ.ن لـ $(A,1)(B,1)$

إذن I في منتصف $[AB]$ ومنه

G م.أ.ن لـ $(I,2)(C,2)$ إذن

G في منتصف IC



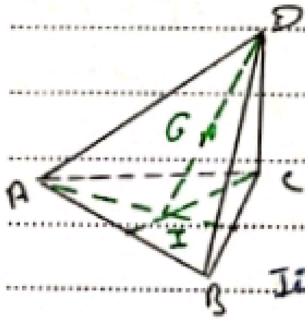
G م.أ.ن لـ $(A,1)(B,1)(C,1)(D,3)$

لتكن I م.أ.ن لـ $(A,1)(B,1)(C,1)$

إذن I مركز ثقل المثلث ABC ومنه

G م.أ.ن لـ $(I,3)(D,3)$

إذن G في منتصف ID



رابعاً : ماذا تمثل مجموعة النقط

لتكن G م.م.أ. لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

ولتكن M نقطة ما من الفراغ .

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

المحلات لمجموعة النقط

1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

معادلة كرة قطرها AB .

2) $MA = MB$

مستوي محوري للقطعة $[AB]$.

3) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$

مستوي محوري للقطعة $[AB]$.

4) $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

كرة مركزها A و $R = \|\overrightarrow{BC}\|$

5) $\|\overrightarrow{MA}\| = a\|\overrightarrow{MB}\|$ $\quad a \neq 1,\ a \neq 0$

كرة .

6) $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

مستوي محوري للقطعة $[AB]$

خامساً : احداثيات مركز الأبعاد .

G م.م.أ. لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

أي

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$