نعرف الدالة f بالعلاقة

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1. احسب f' ، f''
2. اثبت ان $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$
3. اثبت ان $(1+x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) = 0$

شغف الرياضيات

* $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

* $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

---

* $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow \sqrt{1+x^2} + \frac{x\cancel{\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{\sqrt{1+x^2}}} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x$$

إجراء عملية تبسيط

$$\Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

$$(1+x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) = 0$$

$$\cancel{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(1+x^2)}\sqrt{1+x^2}} + x \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \cancel{x} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \left(\cancel{x} + \sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow \frac{1+x^2-(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+x^2}} = \boxed{0}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)}$$

نعرف التابع f على $R \setminus (1)$

أوجد f' , f'' , f'''

استنتج صيغة المشتق من الدرجة n

$$* \quad f'(x) = \frac{(1)'(1-x) - (1-x)'(1)}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(1-x) - (-1)(1)}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{+1}{(1-x)^2}}$$

$$* \quad f''(x) = \frac{(1)'(1-x) - (1-x)^{2'}(1)}{(1-x)^3} \Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{+2 \times 1}{(1-x)^3}}$$

$$* \quad f'''(x) = \frac{(2)'(1-x) - (1-x)^{3'}(2)}{(1-x)^4} \Rightarrow \boxed{f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}}$$

$$\boxed{f^{n}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

نعرف الدالة f على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

1- هل يقبل الخط البياني C_f مماس يوازي المستقيم d حيث $d = -4x$

2- هل يقبل الخط C مماس يوازي المستقيم $3x - 2y = 0$

1- لمعرفة عدد المماسات نحل المعادلة $f'(x) = m$

لكن مستقيم d يوازي T

$\Rightarrow m_d = m_T$

$\Rightarrow m_T = -4$

نشتق

$$f'(x) = \frac{(x^2-3x+1)'(x+1) - (x+1)'(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$$

نحل المعادلة $f'(x) = m$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = -4 \Rightarrow \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-4+4x^2+8x+4}{(x^2+2x+1)}$$

$$\frac{5x^2+10x}{(x^2+2x+1)} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow 5x(x+2) = 0$$

أما: $x = 0$

أو: $x = -2$

إذاً الدالة يقبل مماسين يوازي مستقيم d

$x = 0 \,/\, m = -4 \,/\, y = 1$

$x = -2 \,/\, m = -4 \,/\, y = -11$

$y = -4x - 19$

$y = -4x + 1$

ليكن لدينا التابع الآتي. $f(x) = x^2 + 1$

اكتب معادلة المماس للتابع f إذا علمت أن المماس يمر من المبدأ

لكتابة معادلة المماس نحتاج إلى x_0 ، y_0 ، m.

نفرض أن فاصلة نقطة تماس $\boxed{x_0 = a}$

نعوض بالتابع الأصلي لإيجاد y_0

$$f(a) = a^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y_0 = a^2 + 1}$$

نعوض في المشتق لإيجاد الميل m

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(a) = 2a \Rightarrow \boxed{m = 2a}$$

نكتب معادلة المماس

$$T: y = m(x - x_0) + y$$

$$y = 2a(x - a) + a^2 + 1 \Rightarrow y = 2ax - 2a^2 + a^2 + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -a^2 + 2ax + 1}$$ معادلة مماس

بما أن T مار من المبدأ فهو يحقق نقطة $(0,0)$

$$0 = -a^2 + \cancel{2a(0)} + 1 \Rightarrow 0 = -a^2 + 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

إما: $x = -1$ $\Rightarrow$ $y = (-1)^2 + 1 = 2$ $\Rightarrow$ $m = 2(-1) = -2$

أو: $x = +1$ $\Rightarrow$ $y = (1)^2 + 1 = 2$ $\Rightarrow$ $m = 2(1) = +2$

$$T_1: y = m_1(x - x_1) + y_1 \Rightarrow y: -2(x+1) + 2 \Rightarrow y: -2x$$

$$T_2: y = m_2(x - x_2) + y_2 \Rightarrow y: 2(x-1) + 2 \Rightarrow y: 2x$$

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,1[$ بالعلاقة:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f

ثم اكتب معادلة المماس

نوجد تابع $g(x)$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} - \sqrt{\frac{0^2}{1-0}}}{x - 0} \Rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}}$$

تذكرة: $\sqrt{a^3} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^2}$

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2}}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow g(x) = \cancel{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1-0}}$$

التابع f اشتقاقي عند 0 ويقبل مماساً $m = 0$

وفاصلته $x = 0$ وترتيبه $f(0) = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$$T: y = 0(x - 0) + 0 = y = 0$$