## النواس الفتل

نبدل $\theta \to x$ — $m \cdot v$

$\Gamma_{\text{الدوران}} = -K\theta$

من الجيبي الزاوي

$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x = \theta \cdot r$

$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$v = \omega \cdot r$

$\alpha = -\omega_0^2 \cdot \theta$

$a = \alpha \cdot r$

$E = \frac{1}{2} K \theta^2_{max}$

$K$ هو ثابت فتل السلك

$E_p = \frac{1}{2} K \theta^2$

$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

**سؤال نظري:**

برهن في النواس الفتل أن الجسم الحاصل هو عزم الإرجاع

$\sum \Gamma = I_\Delta \alpha$

$\Gamma_{w/\Delta} + \Gamma_{T/\Delta} + \Gamma_{\tau/\Delta} = I_\Delta \alpha \Rightarrow -K\theta = I_\Delta \alpha$

لأن حامل القوة يلاقي محور الدوران — عزم مزدوجة الفتل الإرجاع

**سؤال نظري:**

انطلاقاً من العلاقة $-K\theta = I_\Delta \alpha$ استنتج صيغة الحركة في النواس الفتل

ومن ثم استنتج دوره الخاص

$-K\theta = I_\Delta \alpha$

$\alpha = (\theta)''_t$

$-K\theta = I_\Delta (\theta)''_t$

$(\theta)''_t = -\frac{K\theta}{I_\Delta}$ ...(1

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن كما يلي:

$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta$ ...(2

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$-\omega_0^2 \theta = -\frac{K\theta}{I_\Delta}$

$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$ دائماً

النبض الخاص بالنواس الفتل

صيغة حركة النواس الفتل جيبية دورانية بشرط $K$ و $I_\Delta$ موجبان

تابعها الزمني $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

الدور الخاص:

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$ s

لا علاقة لـ $T_0$ بـ $\theta_{max}$

$T_0 \propto \sqrt{I_\Delta}$ — $T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$

---

$*\ (\theta)''_t = \frac{-K}{I_\Delta} \theta$

$*\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$I_\Delta$ ($kg \cdot m^2$):

- جملة (ساق + كتل): $I_\Delta = I_{\Delta}$ جملة (قرص، ساق) $+ I_{\Delta/m}$ بعد الجملة عن سلك الفتل ($m \cdot r^2$)
- ساق + قرص: $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m l^2$ للساق — $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$ للقرص ((حفظ بحل المسألة))

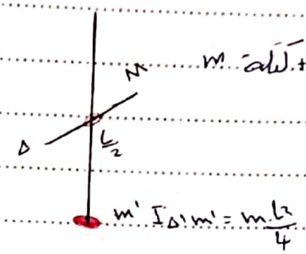
- ثابت فتل السلك $K$ ($m \cdot N / rad$) يحسب من علاقة الدور عند تربيعها

- إذا أعطانا النبض الخاص: $\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta}$

- أو يحسب من العلاقة الدور بعد تربيعها ⟸

$T_0 = \left(2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}\right)^2 \to T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_\Delta}{K} \Rightarrow K = 4\pi^2 \frac{I_\Delta}{T_0^2}$

4- عزم عطالة جملة مادية حول محور Δ



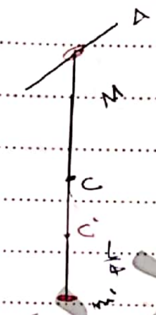
$I_{\Delta/ جملة}$ هو مجموع عزوم عطالة مكوناته ساق M + كتلة m'

جملة $I_\Delta = I_{\Delta/c}$ ساق $+ I_{\Delta/m'}$

$= \frac{1}{12} M L^2 + m' \frac{L^2}{4}$

$m' \; I_{\Delta/m'} = m' \frac{L^2}{4}$

$I_\Delta = \frac{L^2}{4} \left(\frac{1}{3} M + m'\right)$



$I_{\Delta}$ جملة $= I_{\Delta/c} + I_{\Delta m'}$

هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + M d^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{M L^2}{4}$

هايغنز $I_\Delta = \frac{1}{3} M L^2$

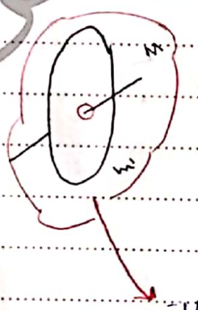
جملة $I_\Delta = \frac{1}{3} M L^2 + m' L^2$

جملة $I_\Delta = L^2 \left[\frac{1}{3} M + m'\right]$

حالة خاصة : في حالة M ساق = m' نقطية

$\Rightarrow I_{\Delta}$ جملة $= M L^2 \left[\frac{1}{3} + 1\right]$

جملة $I_\Delta = \frac{4}{3} M L^2$



جملة $I_\Delta = I_\Delta$ قرص $+ I_{\Delta/m'}$

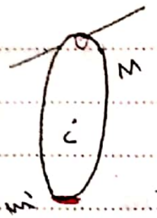
$= \frac{1}{2} M r^2 + m' r^2$

جملة $I_\Delta = r^2 \left(\frac{1}{2} M + m'\right)$

حالة خاصة: M قرص = m' نقطية

جملة $I_\Delta = M r^2 \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} M r^2$





جملة $I_\Delta = I_{\Delta/O}$ حلقة قرص $+ I_{\Delta/m'}$

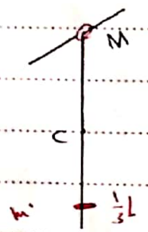
هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + M d^2$

$= \frac{3}{2} M r^2$

جملة $I_\Delta = \frac{3}{2} M r^2 + m' \cdot 4 r^2$

$= \frac{3}{2} M r^2 + 4 m' r^2$

جملة $I_\Delta = r^2 \left[\frac{3}{2} M + 4 m'\right]$



جملة $I_\Delta = I_{\Delta/O}$ هايغنز $+ I_{\Delta/m'}$

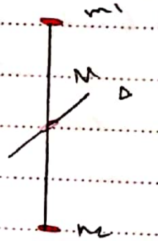
هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + M d^2$

$= \frac{1}{12} M L^2 + M \frac{L^2}{4}$

$= \frac{1}{3} M L^2$

جملة $I_\Delta = \frac{1}{3} M L^2 + m' \frac{4}{9} L^2$

جملة $I_\Delta = \frac{1}{3} L^2 \left[M + \frac{4}{3} m'\right]$



جملة $I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= \frac{1}{12} M L^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m_2$ $\Big\}$ $I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2}$ حالة خاصة

جملة $I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2 I_{\Delta/m_1}$

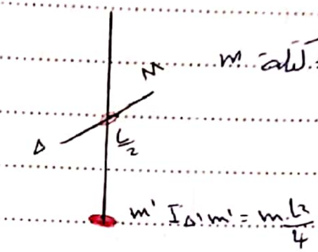
ساق مهملة الكتلة $M = 0$

$I_{\Delta/c} = 0$

جملة $I_\Delta = I_{\Delta/m}$

4- عزم عطالة جملة مادية حول محور Δ

$I_{\Delta}$ الجملة هو مجموع عزوم عطالة مكوناتها ساق M + الكتلة m'

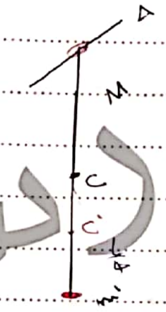


$I_{\Delta}$ الجملة $= I_{\Delta/c}$ (ساق) $+ I_{\Delta/m'}$

$= \frac{1}{12}ML^2 + m'\frac{L^2}{4}$

$I_{\Delta/m'} = m'\frac{L^2}{4}$

$I_{\Delta} = \frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{3}M + m'\right)$



$I_{\Delta}$ (الجملة) $= I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$

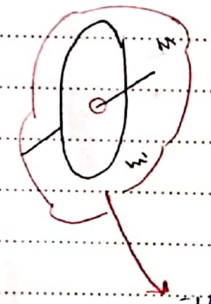
هايغنز $I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{4}$

هايغنز $I_{\Delta} = \frac{1}{3}ML^2$

الجملة $I_{\Delta} = \frac{1}{3}ML^2 + m'L^2$

الجملة $I_{\Delta} = L^2\left[\frac{1}{3}M + m'\right]$

حالة خاصة : في حالة M الساق = m' نقطية



$\Rightarrow I_{\Delta}$ (الجملة) $= ML^2\left[\frac{1}{3} + 1\right]$

الجملة $I_{\Delta} = \frac{4}{3}ML^2$

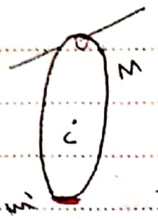
الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta}$ (قرص) $+ I_{\Delta/m'}$

$= \frac{1}{2}Mr^2 + m'r^2$

الجملة $I_{\Delta} = r^2\left(\frac{1}{2}M + m'\right)$

حالة خاصة: M = كتلة m' نقطية

الجملة $I_{\Delta} = Mr^2\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}Mr^2$



الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta/O}$ (حلقة / قرص) $+ I_{\Delta/m'}$

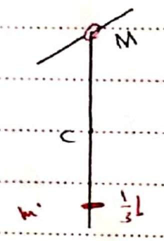
هايغنز $I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + md^2$

$= \frac{3}{2}Mr^2$

الجملة $I_{\Delta} = \frac{3}{2}Mr^2 + m'4r^2$

$= \frac{3}{2}Mr^2 + 4m'r^2$

الجملة $I_{\Delta} = r^2\left[\frac{3}{2}M + 4m'\right]$



الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta/O}$ (هايغنز) $+ I_{\Delta/m'}$

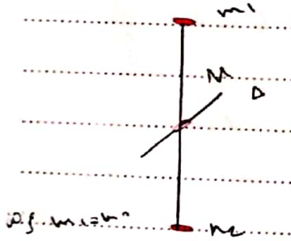
هايغنز $I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + Md^2$

$= \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4}$

$= \frac{1}{3}ML^2$

الجملة $I_{\Delta} = \frac{1}{3}ML^2 + m'\frac{4}{9}L^2$

الجملة $I_{\Delta} = \frac{1}{3}L^2\left[M + \frac{4}{3}m'\right]$



الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= \frac{1}{12}ML^2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

$r_1 = r_2 = \frac{L}{2}$

$m_1 = m_2$ } $I_{\Delta/m_1} = I_{\Delta/m_2}$ حالة خاصة

إذا $m_1 = m_2$

الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta/c} + 2I_{\Delta/m_1}$

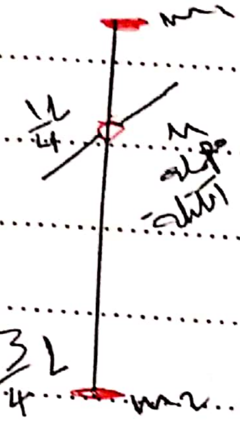
ساق مهملة الكتلة ساق $M = 0$

$I_{\Delta/c} = 0$

الجملة $I_{\Delta} = I_{\Delta/m}$

Farah Notebook

Farah Notebook

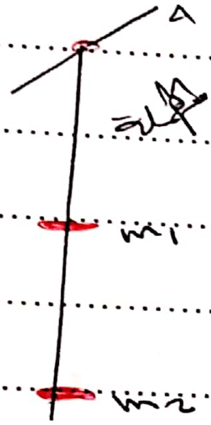



جملة $I_\Delta = \cancel{I_{\Delta, c}} + I_{\Delta, m_1} + I_{\Delta, m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{16} + m_2 \frac{9}{16} L^2$

جملة $I_\Delta = \frac{L^2}{16}\left[m_1 + 9 m_2\right]$

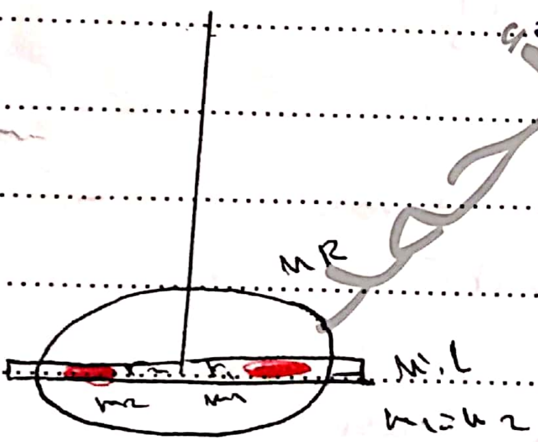



جملة $I_\Delta = \cancel{I_{\Delta/c}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 L^2$

جملة $I_\Delta = L^2\left[\frac{m_1}{4} + m_2\right]$




جملة $I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta_1}}_{\text{قرص}} + \underbrace{I_{\Delta_2}}_{\text{ساق}} + 2 I_{\Delta m}$

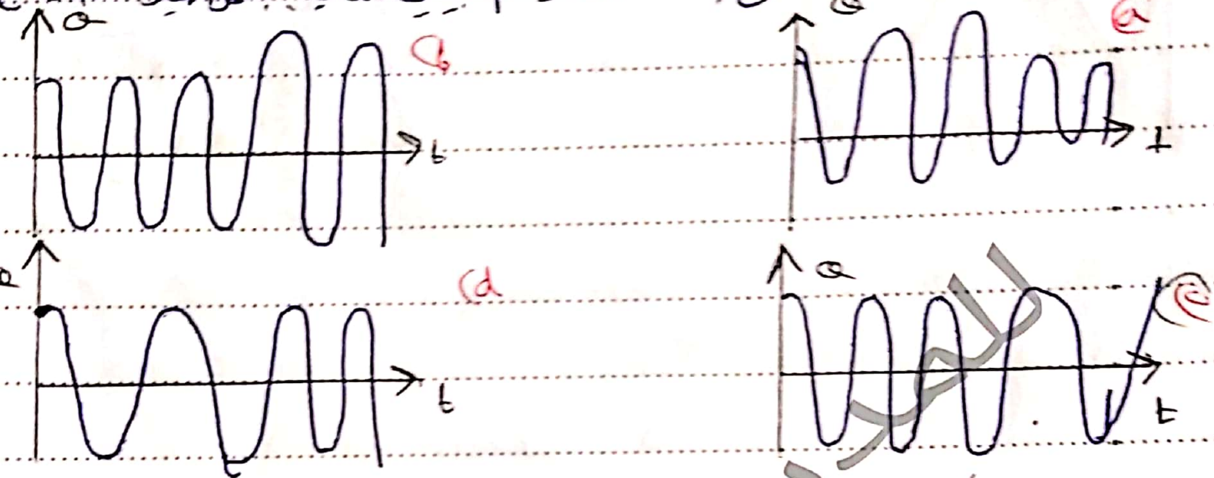
$= \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 + 2 m r_1^2$

/ /

اختبر نفسك

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة:

1. يهتز بندول لي فتل بسعة ما ثم أثناء حركته انحرفت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح بالشكل فالرسم البياني الذي يعبر عن تغير المطال مع الزمن في هذه الحالة هو




عند ابتعاد الكتل عن محور الدوران يزداد $I_\Delta$ حيث $= mr^2$ ويزداد $T_o$ تبعاً له يتغير الدور

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2mr^2$

2. ميقاتية يعتمد في عملها على بندول فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخر الحاصل بالوقت فيها قدم الطلاب مقترحاتهم، فإن الاقتراح الصحيح هو:

a. زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره

c. إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل

d. زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$k = \frac{k'(2r)^4}{L}$$

$T_o$ عكسي $\sqrt{k}$ طردي $\sqrt{L}$

طردي

2. اذا كان قانون مصونية الطاقة الميكانيكية برهن ان حركة النواس الفتل حركة جيبية دورانية

$E = E_p + E_k = const$

$E = \frac{1}{2} K\theta^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$0 = \frac{1}{2} K (2\theta(\theta)'_t) + \frac{1}{2} I_\Delta (2\omega(\omega)'_t)$

$(\omega)'_t = \alpha \quad (\theta)'_t = \omega$

$\omega [K\theta + I_\Delta \alpha] = 0 \Rightarrow \omega \neq 0$

$K\theta + I_\Delta \alpha = 0$

$K\theta + I_\Delta (\theta)''_t = 0 \qquad \alpha = (\theta)''_t$

$(\theta)''_t = -\frac{K\theta}{I_\Delta}$ ---- (1

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل

$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن :

$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta$ ---- (2

بالمساواة بين (1) و (2)

$-\frac{K\theta}{I_\Delta} = -\omega_0^2 \theta$

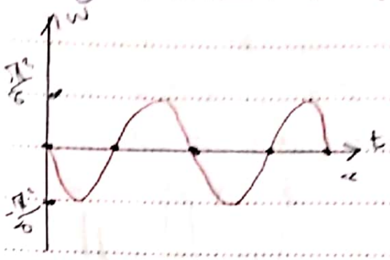
$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

نتيجة حركة النواس الفتل جيبية دورانية بشرط $K, I_\Delta$ ثابتان

تابعها الزمني $\Leftarrow \theta = \theta_{max} (\omega_0 t + \bar{\varphi})$

3. يمثل الخط البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن والتابع الزمني

للزاوية الموافقة للمنحني هو




a. $\omega = \frac{\pi^2}{6} \sin 3\pi t$

b. $\omega = -\frac{\pi^2}{6} \sin 2\pi t$

c. $\omega = \frac{\pi^2}{6} \sin \frac{\pi}{2} t$

d. $\omega = -\frac{\pi^2}{6} \sin \frac{\pi}{2} t$

$\frac{8 T_0}{4} = 2$ ... $\omega = \omega_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\Rightarrow T_0 = 4s$ ... $\omega = \omega_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$ ... $t = 0 \quad \omega = 0$

$0 = \omega_{max} \sin \bar{\varphi}$

$\sin \bar{\varphi} = 0 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0$

ثانياً. أجب عن الأسئلة :

1. نعلق بقضيب معدني متماثلين سلكين فتل متماثلين طول الأول $L_1$ وطول الثاني $L_2$

فإذا علمت أن $T_{01} = 2 T_{02}$ أوجد العلاقة بين طولي السلكين

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{\frac{K'(2r)^4}{L}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta L}{K'(2r)^4}}$

$T_0 = const \sqrt{L} \Rightarrow$ النواس الأول $T_{01} = const \sqrt{L_1} \Rightarrow$ النواس الثاني $T_{02} = const \sqrt{L_2}$

نأخذ النسبة بين المعادلتين

$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{const \sqrt{L_1}}{const \sqrt{L_2}}$

$\frac{2 T_{02}}{T_{02}} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$

$4 = \frac{L_1}{L_2}$

$L_1 = 4 L_2$

$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\theta = 2\pi$

**المسألة الأولى**

- يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2\,Kg$، نصف قطره $r = 4cm$ معلق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 16 \times 10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$
ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = \frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنه ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$، المطلوب:

1- احسب الدور الخاص للنواس
2- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.
3- احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8} rad$، ثم احسب الطاقة الحركية عندئذ
(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$)

$m = 2\,Kg \quad r = 4 \cdot 10^{-2} m \quad K = 16 \cdot 10^{-3} m.N.rad^{-1}$
$\theta = \frac{\pi}{4} \quad t = 0 \quad \omega = 0$

1-
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{K}}$
$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$
$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \Rightarrow I_{\Delta/c} = 16 \cdot 10^{-4} kg.m^2$
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-3}}} = 2s$

2-
$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,rad.s^{-1}$
نترك دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0 \Leftarrow$ $\theta = \theta_{max} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \theta$
$\theta_{max} = \frac{\pi}{4} rad$
نعين $\varphi$ من الشروط البدئية: $t = 0 / \theta = \theta_{max} \Leftarrow \theta_{max} = \theta_{max} \cos\varphi$
$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$
$\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \cos \pi t \; m$

3-
$E_p = ? \quad \theta = \frac{\pi}{8} rad \quad E_k = ?$
$E_p = \frac{1}{2} K \theta^2$
$E_p = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi^2}{64} = \frac{\pi^2}{8} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-2} J$
$E = \frac{1}{2} K \theta^2_{max} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} J$
$E_k = E - E_p = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} - \frac{1}{8} \cdot 10^{-2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-2} J$

حل إضافي: احسب السرعة الزاوية عندئذ.
$\omega = \omega_0 \sqrt{\theta^2_{max} - \theta^2}$
$= \pi \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{64}} = \pi \sqrt{\frac{4\pi^2}{64} - \frac{\pi^2}{64}}$
$= \pi \sqrt{\frac{3\pi^2}{64}}$
$\omega = \frac{\pi}{8} \sqrt{30}\; m.s^{-1}$

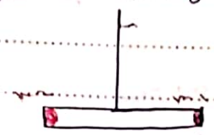
4- إذا علمت أن الدور الخاص $T_0 = 2s$ و $K = 16 \cdot 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ احسب كتلة هذا القرص المعلق من مركزه بسلك الفتل علماً أن نصف قطر هذا القرص $r = 4cm$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{K}}$
$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{\frac{1}{2} m r^2}{K}$
$4 = 4\pi^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} m \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-3}}$
$4 = 2m \Rightarrow m = \frac{4}{2} = 2Kg$

المسألة الثانية:

ساق مهملة الكتلة طولها L نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية 25 g ونعلق الجملة من منتصفها الى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K=16\cdot10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$

ندير الجملة بزاوية ... نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}\,rad$ وتترك دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن، فتهتز حركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0=2.5\,s$ المطلوب:



1. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام، ثم عين لحظتي مرور الجملة بوضع توازنها الأفقي للمرة الأولى والثانية
2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها بوضع التوازن
3. احسب طول الساق.

$m=125\cdot10^{-3}\,kg$ $\quad K=16\cdot10^{-3}\,m.N.rad^{-1}$ $\quad T_0=2.5\,s$

$\theta=\frac{\pi}{3}\,rad$ $\quad t=0$ $\quad w=0$ $\quad I_\Delta=?$ $\quad m=?$

1. $\theta=\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$w=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi\times2}{2.5\times2}=\frac{4\pi}{5}\,rad.s^{-1}$

ترك دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t=0$

$\theta=\theta_{max}=\frac{\pi}{3}\,rad$

نعوض شروط البدء بتابع المطال $t=0$ $\quad \theta=\theta_{max}$

$\theta_{max}=\theta_{max}\cos(\omega t+\varphi)$

$\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{5}t$

$t_1=\frac{T_0}{4}=\frac{2.5\times2}{4\times2}=\frac{5}{8}\,s$

$t_2=\frac{3T_0}{4}=\frac{3\times2.5}{4}=\frac{7.5\times2}{4\times2}=\frac{15}{8}\,s$

2. لحظة المرور الأول بوضع التوازن

$t=\frac{1}{4}T_0\Rightarrow t=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{8}\,s$

$w=-\frac{40}{15}\sin\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{5}{8}$

$=-\frac{40}{15}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{-40}{15}\times1=-\frac{40}{15}=-\frac{8}{3}\,rad.s^{-1}$

3. الطول الساق $L=?$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}\Rightarrow I_\Delta=I_{\Delta c}+I_{\Delta m_1}+I_{\Delta m_2}$

$I_\Delta=2I_{\Delta m_1}\Rightarrow I_\Delta=2m_1(\frac{L}{2})^2=2m_1\frac{L^2}{4}$

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{m_1L^2}{2}}{K}}$

$25\cdot10^{-1}=2\pi\sqrt{\frac{125\cdot10^{-3}\cdot\frac{L^2}{2}}{16\cdot10^{-3}}}$

$625\cdot10^{-2}=4\pi^2\cdot\frac{125\frac{L^2}{2}}{16}$

$625\cdot10^{-2}=4\pi^2\cdot\frac{125L^2}{2}$

$L^2=\frac{625\cdot10^{-2}\cdot16\,4}{2\pi^2\cdot125}$

$L^2=4\cdot10^{-2}\Rightarrow L=2\cdot10^{-1}\,m$

المسألة الثالثة

ساق متجانسة مهملة الكتلة طولها ... [illegible] ... مثبت في طرفها ... [illegible]

... [illegible] ... $\theta = 0$ ... [illegible]

... [illegible] ... سرعة ... في الاتجاه ... [illegible]

... [illegible] ... $I$ ... [illegible]

... [illegible] ... $x = 2$ ... [illegible] ... المطلوب.

1- استنتج التابع الزمني ... [illegible] ... انطلاقاً من شكله العام.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية ... [illegible] ... مروره الأول ... التوازن.

3- احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما ... [illegible] ... مع وضع توازنها.

4- نثبت ... [illegible] ... و ... [illegible] ... استنتج قيمة الدور

... [illegible] ... ثم احسب قيمة ... [illegible]

5- نقسم ... [illegible] ... الساق ... [illegible]

... [illegible] ... ومن منتصفها ... [illegible]

... [illegible] ... استنتج قيمة الدور ... [illegible]

وحدد كل تفضيلة). افترض $\pi^2 = 10$

... [illegible] ... $\theta = 60°$ ... $I_\Delta = 2 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2$

1. $\theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad \cdot s^{-1}$

$\theta = 60°$

$\theta = \theta_{max} = 60 = \frac{\pi}{3}\ rad$ ... [illegible] ... السعة

نعيّن $\varphi$ من شروط البدء

$\theta_{max} = \theta_{max} \cdot \cos\varphi$

$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ ... [illegible] ...

$\theta = \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2\pi t\ rad$

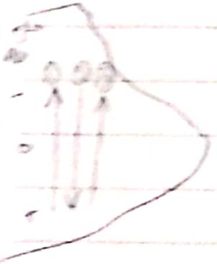
Farah Notebook

2- $\omega = -\omega_0\, \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$t_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\ s$ ... $\frac{3T_0}{4}$ | $t_2 = \frac{3T_0}{4} = \frac{3}{4}\ s$

$\omega = -2\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin(2\pi \frac{1}{4} + 0)$ | $\omega = -2\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})$

$\omega = -\frac{2\pi^2}{3}\ rad \cdot s^{-1}$ | $\omega = \frac{2\pi^2}{3}$



2-b $\omega = \omega_0\, \theta_{max}$

$\omega = 2\pi \cdot \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi^2}{3}\ rad \cdot s^{-1}$

3- $\alpha = ?$ $\quad \theta = -30° = -\frac{\pi}{6}\ rad$

$\alpha = -\omega_0^2 \cdot \theta = -4\pi^2 \cdot -\frac{\pi}{6} = \frac{20}{3}\ rad \cdot s^{-2}$

4- $m = m' = 75 \cdot 10^{-3}\ kg$

$I_\Delta = I_{\Delta c} + 2 I_{\Delta m}$

$= I_{\Delta c} + 2 m r^2$

$= I_{\Delta c} + 2m \frac{L^2}{4}$

$= 2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 75 \cdot 10^{-3} \frac{(10^{-1})^2}{4}$

$I_\Delta = 8 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ قبل تعليق الكتل

$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{k}}$ بعد تعليق الكتل

$\frac{T_0'}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}} = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_\Delta}}$

$T_0' = \sqrt{\frac{I'_\Delta}{I_\Delta}}\ T_0$

$T_0' = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}}\ 1 \Rightarrow T_0' = 2\ s$

Farah Notebook

/ /

حساب ثابت فتل السلك نحسبه من علاقة الدور

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{k}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_{\Delta/c}}{k}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{I_{\Delta/c}}{T_0^2}$$

$$k = 4 \cdot 10 \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1}$$

$$k = 8 \cdot 10^{-2}\ m \cdot N \cdot rad^{-1}$$

ثابت فتل السلك الأول $k_1 = k' \frac{(2r)^4}{L_1} = \frac{k'(2r)^4}{\frac{L}{2}}$     $k = \frac{k'(2r)^4}{L}$ لـ

$$= 2\frac{k'(2r)^4}{L} \Rightarrow k_1 = 2k$$

ثابت فتل السلك الثاني $k_2 = \frac{k'(2r)^4}{L_2} = \frac{k'(2r)^4}{\frac{L}{2}}$

$$= 2\frac{k'(2r)^4}{L} \Rightarrow k_2 = 2k$$

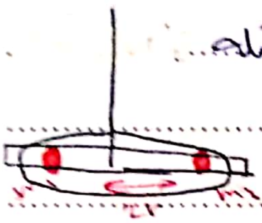
$k_{\text{الكلية}} = k_1 + k_2 \Rightarrow k_{\text{كلية}} = 4k$

$$T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{k}} \Rightarrow T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{4k}}$$

$$T_0'' = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{k}}\right) \Rightarrow T_0'' = \frac{1}{2}T_0 \Rightarrow T_0'' = \frac{1}{2}\ s$$

## مسألة التعاونية

تتألف ميقاتية من قرص من زجاج كتلته $M_1 = 0.12\ kg$ ونصف قطره $r = 0.05\ m$ مثبت عليه ساق كتلتها $M_2 = 0.012\ kg$ وطولها $L = 0.1\ m$ تحمل في طرفيها كتلتين نعدهما نقطيتين $m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ كتلتان تبعدان عن بعضهما البعض مسافة قدرها $2r = 0.04\ m$ يمكن تغييرها بواسطة برغي، يخترق مركز القرص ومعلق من مركز عطالتها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 8\times10^{-4}\ m.N.rad^{-1}$ كما في الشكل المجاور




1- احسب دور الميقاتية.

2- إذا أردنا أن يزداد بمقدار 0.86 وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين m، فما البعد الجديد الذي يجب أن يصبح بينهما؟

(عزم عطالة القرص حول محور عمودي على مستويه مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2$، وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12} M_2 L^2$، $\pi = 3.14$، $\pi^2 = 10$)

قرص $M_1 = 0.12 = 12.10^{-2}\ kg$

قرص $R = 0.05\ m = 5.10^{-2}\ m$

ساق $M_2 = 12.10^{-3}$

ساق $L = 10^{-1}\ m$

نقطية $m = m_2 = 5.10^{-2}\ kg$

البعد بين النقطتين $2r = 4.10^{-2}\ m$

$r = 2.10^{-2}\ m$

$K = 8.10^{-4}\ m.N.rad^{-1}$

/ /

1. الكلي $I_{\Delta}$ = قرص $I_{\Delta}$ + ساق $I_{\Delta}$ + $2I_{\Delta m_1}$

$I_{\Delta_1} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 15 \cdot 10^{-6}$

$I_{\Delta_1} = 15 \cdot 10^{-5}\ kg.m^2$

$I_{\Delta_2} = \frac{1}{12} M_2 L^2 = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}$

$I_{\Delta_2} = 1 \cdot 10^{-5}\ kg.m^2$

نقطية $I_{\Delta m_1} = m_1 r^2 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}$

$I_{\Delta m_1} = 2 \cdot 10^{-5}\ kg.m^2$

الكلي $I_{\Delta} = 15 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot 10^{-5}$

$= 10^{-5}(15+1+4) = 10^{-5} \cdot 20 = 2 \cdot 10^{-4}$

الكلي $I_{\Delta} = 2 \cdot 10^{-4}\ kg.m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}}$

$= 2\pi(\frac{1}{4})$

$T_0 = \pi\ s$

$T_0 = 3.14\ s$

Farah Notebook

/ /

2. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{k}}$

$2r'$ ؟ البعدين الكليين

$I_{\Delta m_1} = m_1 r^2$

$T_0' = T_0 + 0.86$

$T_0' = 3.14 + 0.86 = 4\ s$

$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}\text{الكلي}}{k}}$

الكلي $I_{\Delta} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + 2I_{\Delta m_1}$

$I_{\Delta} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + 2m_1 r'^2$

$= 15 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot r'^2$

$4 = 2\pi\sqrt{\frac{16 \cdot 10^{-5} + 10^{-1} r'^2}{8 \cdot 10^{-4}}}$

$16 = 40\frac{(16 \cdot 10^{-5} + 10^{-1} \cdot r'^2)}{8 \cdot 10^{-4}}$

$16 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 40 \cdot 16 \cdot 10^{-5} + 40 \cdot 10^{-1} r'^2$

$128 \cdot 10^{-4} = 64 \cdot 10^{-4} + 4r'^2$

$128 \cdot 10^{-4} - 64 \cdot 10^{-4} = 4r'^2$

$(128 - 64)10^{-4} = 4r'^2$

$64 \cdot 10^{-4} = 4r'^2$

البعد الكلي $2r' = 8 \cdot 10^{-2}$

Farah Notebook