/ /

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* بالعلاقة :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

① احسب نهاية f عند (0)

② اثبت ان المستقيم $y=x-2$ مقارب مائل في جوار ∞.

الحل :

① $$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0-2(0)^2+2\cos^2(0)-2}{0^2}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

$$f(x)=x-2+\frac{2(\cos x^2-1)}{x^2}\Rightarrow x-2-2\left[\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right]$$

$$f(x)=x-2-2\left[\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]\Rightarrow f(x)=x-2-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0-2-2(1)^2=-4$$

② نشكل الفرق

$$[f(x)-y_0]=\frac{x^3-2x^2+2\cos x^2-2}{x^2}-(x-2)$$

نوحد مقامات

$$\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2-(x^3-2x^2)}{x^2}\Rightarrow[f(x)-y_0]=\frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

ثم نوجد نهاية عند ∞.

/ /

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_0] = \frac{2\cos^2(-\infty) - 2}{-\infty}$$

نستخدم إحاطة

$$0 \leq \cos x^2 \leq +1$$

نضرب ب 2

$$0 \leq 2\cos x^2 \leq 2$$

نضيف -2

$$-2 \leq 2\cos x^2 - 2 \leq 0$$

نقسم على x^2

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{2\cos x^2 - 2}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{-2}{x^2} \leq f(x) - y_0 \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2}{x^2}\right) = 0 \\ \\ \lim_{x \to -\infty} (0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_0] = 0$$

بما أن $\lim [f(x) - y_0] = 0$

إذاً $y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

نعرف الخط البياني f، للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

1) احسب نهاية f عند (0).

2) استنتج ان المستقيم $y=-2x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

يجب إزالتها

$$f(x)=\frac{-2x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

$$f(x)=-2x+1+2\left[\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\right]$$

$$f(x)=-2x+1+2\left[\frac{-(1-\cos\sqrt{x})}{x}\right] \Rightarrow f(x)=-2x+1-2\left(\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}\right)$$

$$f(x)=-2x+1-4\left(\frac{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}^2}\right) \Rightarrow f(x)=-2x+1-4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$f(x)=-2x+1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

د/2 أولاً: الفرق

$$[f(x) - y_\Delta] = \frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x} - (-2x+1)$$

$$[f(x) - y_\Delta] = \frac{\cancel{-2x^2}+\cancel{x}+2\cos\sqrt{x}-2+\cancel{2x^2}-\cancel{x}}{x} = \frac{2\cos(\sqrt{x})-2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2\cos(\sqrt{\infty})-2}{\infty} = \;\to\; \cos(\infty)$$ امالة.

$$-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq +1$$

نضرب بـ 2

$$-2 \leq 2\cos\sqrt{x} \leq +2$$

نضيف -2

$$-4 \leq 2\cos\sqrt{x}-2 \leq 0$$

نقسم علا x

$$\frac{-4}{x} \leq \frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x} \leq 0$$

لن يبلى ,لـ

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{x}\right) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty}(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

إذاً (Δ): $y = -2x+1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

/ /

• $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ $a : +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

• نوحد مقامات.

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

• نخرج x عامل مشترك.

$$= \frac{x\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

• نباعد رياضياً.

$$= \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} \cdot \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$$

نضرب بالمرافق.

نشر

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}\right)}$$

مطابقة

كتب عامل مناسب

/ /

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} \cdot \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$$

نعوض من النهاية

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

/ /

ليكن التابع f المعرف على R بالعلاقة :

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

① اوجد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

② اوجد معادلة المقارب المائل للتابع :

1:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{3(\infty)^2 + (\infty) + 1} = +\infty$$

2 : لوجود المقارب المائل نوجد :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{3x^2 + x + 1}}{x} = \frac{\sqrt{3(\infty)^2 + \infty + 1}}{\infty}$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

نسحب x^2 كعامل مشترك

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow \frac{\cancel{x}\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \underset{x \to +\infty}{=} +x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}$$

نوجد $b : f(x) - ax$

$$b : [f(x) - ax] \Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3}x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3}x\right) = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

/ /

نضرب بالمرافق

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{3x^2+x+1} - \sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{3x^2+x+1} + \sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3x^2+x+1} + \sqrt{3}x}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+x+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{3}x}$$

نسحب x عامل مشترك

$$\Rightarrow \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{3}x}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \underset{x \to +\infty}{=} +x$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - ax\right] = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{3+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y = ax + b$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$