نهايات

الأصل في إيجاد نهاية هو التعويض بعد إيجاد مجموعة التعريف وعند إيجاد نهاية نوجد عند أطراف مفتوحة .

قواعد إيجاد النهايات :

الجمع والطرح	الضرب	القسمة	الجذور
$-\infty - a = -\infty$	$\mp a \cdot \mp\infty = \mp\infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$ ، $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$	$\sqrt{+\infty} = +\infty$
$+\infty - a = +\infty$	$-a \cdot +\infty = -\infty$		$\sqrt{-\infty} =$ مستحيلة
$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty \cdot +\infty = -\infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$ ، $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$	
$-\infty - \infty = -\infty$	$-\infty \cdot -\infty = +\infty$		القوى
إشارة ∞ فقط	ضرب الإشارتين	$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ ، $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$	∞^{n} (n زوجي) $= +\infty$ موجبة ∞^{n} (n فردي) $=$ ∞ تحافظ على الإشارة

$\frac{\text{عدد}}{0}$ غير صالحة

اللهم توفيقا

فكرة في النهايات :

هل التابع له نهاية حقيقية ؟؟

$\lim f(x) = L$

حيث L عدد حقيقي

نعم

$\lim f(x) = \infty$

ليس للتابع نهاية حقيقية

نهاية تابع صحيح

المسعى a
الأصل هو التعويض
بدل كل x بـ a
في كل التابع

المسعى ∞
الأصل هو تعويض بالحد الأكبر
مع أمثاله ثم استخدام قواعد

نهاية تابع كسري

المسعى a
التعويض في كل تابع

لا تنسى الاختزال إن وجد

المسعى ∞
التعويض في حد مسيطر (مع أمثاله)
حد مسيطر (مع أمثاله)

$\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$

$\frac{\text{عدد}}{0}$
غير
حالتين
عن طريق دراسة
اشارة المقام

$\frac{0}{0}$
ح.ع.ت

درجة البسط أكبر من درجة المقام
∞

درجة البسط أصغر من درجة المقام
0

درجة البسط تساوي درجة المقام
عدد

حالات عدم تعيين

الحالة الأولى $\gg \frac{0}{0} \ll$

* تحليل :

متى نستخدم تحليل : اذا كان البسط او المقام قابل للتحليل

* ضرب بالمرافق :

متى نستخدم المرافق : اذا لم تنجح عملية التحليل او عندما نشاهد مقدار + $\sqrt{\ }$

<< الأصل في استخدام مرافق هو الوصول إلى مطابقة من المطابقات لإزالة الجذر >>

$(\ \ )^2$ أو $(\ \ -\ \ )(\ \ +\ \ ) = (\ )^2 - (\ )^2$

الحالة الثانية $\gg \frac{\infty}{\infty} \ll$

* اذا كان مضمون الجذر لا فقط :

نسحب لا عامل مناسب ونقسم عليه ونستفيد من خاصية $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ ثم نختزل ثم نعوض .

* المكان الذي لا يحوي $\sqrt{x}$:

نسحب اكبر لا عامل مناسب

* اذا كان تحت الجذر مقدار $\sqrt{ax+b}$:

حصراً نسحب x^2 عامل مناسب ونقسم عليه ثم نفرق الجذر $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

ثم نستخدم خاصية $\sqrt{x^2} = |x|$

$a \to +\infty \Rightarrow +x$ $a \to -\infty \Rightarrow -x$

الحالة الثالثة $\gg \infty - \infty \ll$

* اذا تحقق $(\text{حد خارج الجذر})^2 = \text{حد داخل الجذر}$ نضرب بالمرافق ونحصل على مطابقة

* $(\text{حد خارج الجذر})^2 \neq (\text{حد داخل الجذر})$ نسحب عامل مناسب

نهاية مثلثية (مميزة)

المبرهنات

$$\lim \frac{\sin \text{شغلة}}{\text{شغلة}} = 1$$

$$\lim \frac{\text{شغلة}}{\sin \text{شغلة}} = 1$$

$$\lim \frac{\tan \text{شغلة}}{\text{شغلة}} = 1$$

$$\lim \frac{\text{شغلة}}{\tan \text{شغلة}} = 1$$

الأصل في إيجاد نهاية مثلثية هو التعويض فوراً:

- يوجد نهاية مباشرة
- لا يوجد نهاية مباشرة ← نلجأ إلى مبرهنات ثم تعويض ويمكن استخدام خواص رياضية

★ تباعد:

$$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$$

★ تفريق مقام:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

/ /

دساتير مثلثية

* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

* $1 - \cos x = 2 \sin^2$ (نصف الزاوية)

* $1 + \cos x = 2 \cos^2$ (نصف الزاوية)

* $\sin x = 2 \sin$ (نصف الزاوية) . $\cos$ (نصف الزاوية)

* $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

* $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

اذا لم تحدد لنا العنصر
«موجب أو سالب»
ندرس الاشارتين
على مرحلتين ......
وشكراً

تغير متحول في نهاية مثلثية

$\sin(\theta \mp a)$

* نفرض مضمون $\sin$ هو متحول t
* نكتب عبارة t بدلالة x
ونكتب عبارة x بدلالة T
* نوجد نهاية جديدة بعد تعويض نهاية قديمة
* أخيراً نصل إلى مبرهنة

مثال : $a:3$

* $f(x) = \dfrac{\sin(x-3)}{3-x}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{\sin(3-3)}{3-3} = \dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(x-3)}{-(x-3)}$ نفرض $t = x-3$

عبارة t بدلالة x

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3-3 = 0 \rightsquigarrow$ نهاية جديدة هي (0)

$f(x) = \dfrac{\sin t}{-t} \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} f(t) = -\dfrac{\sin t}{t} = -1$

* $f(x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{x - \pi}$ $a:\pi$

$\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow \lim f(x) = -1$

نفس مضمون السؤال السابق

مبرهنات إحاطة

المبرهنة الأولى

نستخدمها عند ظهور $\sin(\infty)$ ، $\cos(\infty)$

$-1 \leq \sin x \leq +1$ $\quad$ $0 \leq \sin^2 x \leq +1$

$-1 \leq \cos x \leq +1$ $\quad$ $0 \leq \cos^2 x \leq +1$

في حال كان $\lim g(x) = \lim h(x) = l$ عندئذٍ نهاية $f(x)$ تساوي l

<< حيث $g(x)$ ، $h(x)$ تابعين يحصران $f(x)$ >>

اذا كانت امثال اكبر حد داخل الجذر تساوي امثال اكبر حد خارج الجذر بإشارة مخالفة فالنهاية تساوي $\infty - \infty$

للأعشبة

$y_0 = \sqrt{a}\,|x| - \frac{b}{2a}$

إذا كان لدينا جذر

المبرهنة الثانية

ليكن f و g و h ثلاث توابع تحقق : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

حيث f تابع المراد معرفته نهايته ، h و g يحصران f عندئذٍ

$*\ \lim g(x) = \lim h(x) = l \implies \lim f(x) = l$

$*\ \lim g(x) \neq \lim h(x) \implies$ لا يمكن تعيين نهاية f

المبرهنة الثالثة

ليكن f و g تابعين تحققان : $|f(x) - l| \leq g(x)$

وتحقق $\lim_{x \to a} g(x) = 0 \implies \lim_{x \to a} f(x) = l$

محدودية تابع f

نقول عن f انه محدود اذا تحقق $\Longleftarrow$ $m \leq f(x) \leq M$
حيث m و M عددين حقيقيين (إحاطة)

مثال: ليكن

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4}$$

. استنتج ان f محدود

. استنتج نهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4}\right)$

1 - لايجاد محدودية تابع نتبع الإحاطة:

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

- نضيف $+4$

$$3 \leq \sin x + 4 \leq 5$$

- نقسم على 5

$$\frac{3}{5} \leq \frac{\sin x + 4}{5} \leq 1$$

. نقلب الاطراف ونقلب المتراجحة

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1 \Rightarrow \frac{5}{3} \geq f(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow f(x) \in \left[1 . \frac{5}{3}\right]$$

2 - لايجاد نهاية تابع نستفيد من طلب السابق:

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1$$

نضرب الكل بـ x^2 علماً أن $x^2 > 0$ لوجود التربيع

$$\frac{5}{3}x^2 \geq \frac{5x^2}{\sin x + 4} \geq x^2 \Rightarrow \frac{5}{3}x^2 \geq f(x) \geq x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim \left(\frac{5}{3}x^2\right) = +\infty \\ \lim (x^2) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4}\right) = +\infty$$

/ /

نهاية تركيب تابعين $g\circ f$

تذكرة : لكتابة $g\circ f$ نذهب إلى g ونضع بدل كل $x \leftarrow f(x)$.

نريد $\lim\limits_{x \to a} g\circ f$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to b} g(x) = c$$

$$\lim_{x \to a} g\circ f = c$$

استخدام مبرهنات التركيب لإيجاد بعض النهايات

الاستخدام : في حال وجود $\sqrt{\infty - \infty}$ أو $\sqrt{\frac{\infty}{\infty}}$

نفرض ان المقدار تحت الجذر هو تابع جديد $g(x)$ نوجد نهايته عند ∞ ، المعطى
ثم نعوض النتيجة بدلاً من $g(x)$ بالتابع الأصلي

«« ايجاد نهاية تابع وفق التعريف »»

تعيين عدد A

تجب ايجاد نصف قطر المجال

ومركز المجال

ن

$r = \frac{b-a}{2}$ ← ص

$c = \frac{a+b}{2}$

نكتب العلاقة $|f(x) - c| < r$

نضع تابع نعوض نجري عمليات

حسابية حتى نجد A

تعيين مجال

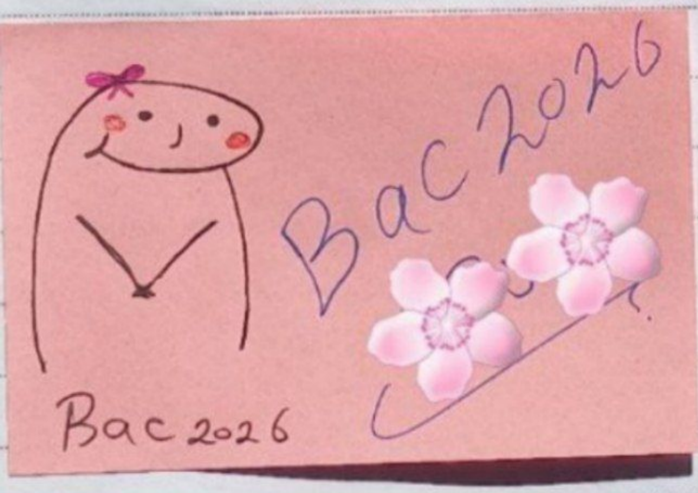
انطلق من العلاقة الرئيسية

إلى أن تعزل X لوحدها

* ملاحظة : اذا كان تابع كسري

بسطه ومقامه تحوي على X

قم افقليا وغير شكل تابع .



مقاربات

/ /

المقارب : هو مستقيم نتقارب من الخط C_f ولا يقطعه في أجواء تقاربه .

مقارب شاقولي

هو مستقيم من شكل $x = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$ وهو شاقولي
إما يوازي تراتيب ، أو ينطبق على التراتيب في حال $x = 0$.

كيف يتم الكشف عنه :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

سيكون دراسة في مقام نقم :

$\frac{\text{عدد}}{0^+}$ ، $\frac{\text{عدد}}{0^-}$

وضعه النسبي : إما يسار الخط أو يمين الخط .

مقارب أفقي

هو مستقيم من شكل $y = b$ حيث $b \in \mathbb{R}$ وهو أفقي
إما يوازي فواصل ، أو ينطبق على الفواصل في حال $y = 0$.

كيف يتم الكشف عنه :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

دراسة وضعه النسبي : نوجد الفرق بين $f(x) - b$

x	تجريب أعداد بالفرق	
$f(x) - b$	فوق الخط	تحت الخط

مقارب مائل

هو مستقيم من شكل $y = ax + b$ له عدة صيغ للسؤال.

← بين وجود مقارب مائل.

← اثبات ان مستقيم هو مقارب مائل.

← وضع نسبي للمقارب.

← استنتاج معادلة مقارب مائل.

← بين وجود مقارب مائل.

نوجد نهاية تابع عند مجاله

في حال وجود مقارب أفقي $y = b$

هذا يلغي وجود مقارب مائل

مقارب مائل وأفقي لا يلتقيان

والعكس صحيح عدم وجود مقارب

أفقي هذا يعني يمكن أن نجد مقارب مائل.

← اثبات ان مستقيم هو مقارب مائل للخط c_f

المعطى هو تابع ومعادلة Δ نشكل الفرق بين $f(x) - y_\Delta$

نوجد نهاية الفرق عند $\mp\infty$

اذا كان الجواب (0) نقول ان Δ مقارب مائل للخط.

← وضع نسبي للمقارب المائل.

* نعدم الفرق $f(x) - y_\Delta = 0$

نحل معادلة سابقة وننظم جدولاً

x	
$f(x) - y_\Delta$	
وضع نسبي	

* حقل x: نضع فيه مجموعة تعريف بالإضافة للعدد الذي يعدم الفرق
* حقل الفرق: نضع فيه اشارات مأخوذة طريقة تجريب الاعداد
* حقل الوضع: نضع فيه وضع c مع Δ فوق وتحت

← استنتاج معادلة مقارب مائل.

لاستنتاج معادلة مقارب ليس من الصيغ التي درسناها نشكل ما يلي:

* $a = \lim \frac{f(x)}{x}$

* $b = \lim f(x) - ax$

والنهاية حسب السؤال

ونكتب معادلة المقارب المائل $y = ax + b$

استنتاج معادلة مقارب مائل:

صيغة تابعين أن واحد:

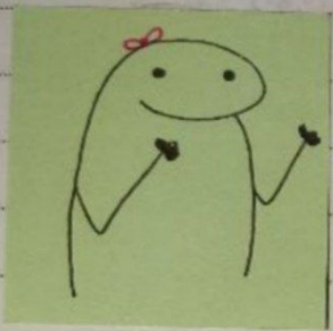
$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$f(x)$: تابع صحيح — $g(x)$: تابع مختلف عن f

* نوجد نهاية g عند ∞ عندئذٍ:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

اذاً $ax+b$ مقارب مائل



صيغة كثير حدود داخل الجذر:

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

نكتب كثير حدود بالصيغة القانونية

نتمم إلى مربع كامل $(\quad)^2 + c$

مضمون القوس هو مقارب مائل.

صيغة كسر بسطه أكبر من مقامه بدرجة

$f(x)$: نقسم اقليدياً $\dfrac{\text{باقي}}{\text{مقسوم عليه}}$ + ناتج

عندها ناتج هو مقارب مائل

الاستمرار

الاستمرار عند نقطة a :

ليكن f تابع معرف على مجال Df نقول ان التابع f مستمر عند a اذا تحقق :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

عندها يكون f مستمر والعكس صحيح .

ملاحظات لايجاد نهاية أو صورة :

نهاية : $x < a - x > a - x \neq a$

صورة : $x \leq a - x \geq a - x = a$

نهاية : $]a.b[$ نوجد نهاية عند طرف مفتوح فقط

تعيين قيمة ثابت m في الاستمرار :

عين قيمة ثابت m اذا علمت ان f مستمر عند a :

$$\begin{cases} f(x) & x \neq a \\ m & x = a \end{cases}$$

طريقة الحل :

نوجد $\lim_{x \to a} f(x)$

ونكتب بما ان f مستمر $\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

المعادلة التي تحوي على m

BAC 2026

تابع الجزء الصحيح :

نسمي $E(x)$ الجزء الصحيح من العدد x الحقيقي

$E(x)$ أصغر من x أو تساويه وهو تحقق :

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

تستخدم هذه العلاقة للإحاطة

الجزء الصحيح	العدد x
3	$E(3.2)$
-1	$E(-1.8)$
1	$E(1)$
0	$E(0.1)$

للتابع الصحيح ثلاث أنماط للسؤال

- اكتب بصيغة مستقلة عن $E(x)$ وادرس استمرار
- ارسم الخط C_f وتعيين نقاط مفتوحة أم مغلقة
- ادرس نهاية تابع يحوي $E(x)$