قواعد الاشتقاق :

شغف الرياضيات

* $f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0$

* $f(x) = ax \Longrightarrow f'(x) = a$

* $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

* $f(x) = ax^n \Longrightarrow f'(x) = a.n x^{n-1}$

* $f(x) = H^n \Longrightarrow f'(x) = n H^{n-1} . H'$

* $f(x) = \sqrt{H} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{H'}{2\sqrt{H}}$

* $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* $f(x) = h(x) + g(x) \Longrightarrow f'(x) = h'(x) + g'(x)$

* $f(x) = h(x) . g(x) \Longrightarrow f'(x) = h'(x) . g(x) + g'(x) . h(x)$

* $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) . h(x) - h'(x) . g(x)}{h(x)^2}$

* $f(x) = \sqrt[n]{H^m} = H^{\frac{m}{n}}$

اولاً نحول الشكل

ثم نستخدم قاعدة رقم ٤

$f'(x) = \frac{m}{n} H^{\frac{m}{n}-1} . H'$

"مشتق توابع مثلثية"

* $\sin x = \cos x$

* $\cos x = -\sin x$

* $\sin(H) = H' \cos H$

* $\cos(H) = -H' \sin H$

"استنتاج مشتق tan x"

* $\tan x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x' \cdot \cos x - \cos x' \cdot \sin x}{\cos x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos x^2} \Rightarrow \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2}$$

* $f'(x) = \frac{1}{\cos x^2}$

نفرق المقام :

$$\frac{\cos x^2}{\cos x^2} + \frac{\sin x^2}{\cos x^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

* $f'(x) = 1 + \tan x^2$

معادلة المماس

الشكل العام :

$* \; T: y = f'(x)\,(x - x_0) + f(x_0)$

$* \; T: y = m\,(x - x_0) + y_0$

نصل بالنهاية إلى شكل $y = mx + b$

نستنتج ان المشتق هو نفسه الميل حيث ← (x_0, y_0) نقطة تماس

← m ميل المماس

"كتابة معادلة المماس"

نحتاج إلى

ميل نقطة	ترتيب نقطة	فاصلة نقطة
m	y_0	x_0
هي تعويض الفاصلة في المشتق	هي تعويض الفاصلة في التابع الأصلي	غالباً معطاة في نص السؤال
$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	

يمكن أن يكون للتابع أكثر من مماس وهذا يعود إلى عدد حلول المعادلة .

كتابة معادلة المماس علم فيه فاصلة

- x_0 معلومة فرضاً.
- y_0 نعوض x_0 في التابع الأصلي.
- m نعوض x_0 في المشتق.

كتابة معادلة مماس علم فيه ترتيب

- y_0 معلومة فرضاً.
- x_0 نحل المعادلة $f(x)=y$ حل المعادلة هو الفاصلة

m نعوض الفاصلة في المشتق

كتابة معادلة مماس خطه البياني يتقاطع مع محور التراتيب

تقاطع مع محور التراتيب ⇐ $x=0$

ثم نعود للحالة الأولى.

كتابة معادلة مماس خطه البياني يتقاطع مع محور الفواصل.

تقاطع مع محور الفواصل ⇐ $y=0$

ثم نعود إلى الحالة الثانية

* لإيجاد x_0 نحل معادلة $f(x)=0$

تكملة

كتابة معادلة مماس في فاصلة تعدم المشتق الثاني.

نحل المعادلة $f''(x)=0$ وحل المعادلة هو فاصلة نقطة، نعوض في تابع أصلي لإيجاد y

"حالات خاصة لمعادلة المماس"

مماس يوازي مستقيم $\Leftarrow$ ميل المماس نفسه ميل المستقيم $m_T = m_d$

معادلة مماس أفقي $\Leftarrow$ ميل معدوم $m = 0$ ، شكل المماس $y = y_0$

معادلة مماس في نقطة تقبل قيمة حدية $\Leftarrow$ المماس أفقي ، الميل معدوم

في حال وجود رسم هندسي وطلب ايجاد معادلة المماس $\Leftarrow$ لايجاد الميل

$$m = \frac{y - y}{x - x}$$

نقطة اختيارية x_0, y_0

نختار نقطتين اختياريتين ونعوض فرضهن

اذا كان المستقيم من الشكل

$ax + by + c = 0$

$\Rightarrow m = \frac{a}{b}$

y عزل

قابلية الاشتقاق عند نقطة

ليكن f تابع معرف على I وليكن a عدد حقيقي $a \in R$ عندئذٍ نقول أن f اشتقاقي أو غير اشتقاقي عند a وفق ما يلي :

1] نشكل تابع مساعد لحل صحيح : $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2] نبسط ، نختزل ، نجري عمليات حسابية إلى آخر حد .

3] نوجد نهاية $g(x)$ عند a

$$\lim_{x \to a} g(x) = \square$$

- ℓ : التابع f قابل للاشتقاق عند a
- ∞ : التابع f غير قابل للاشتقاق عند a

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

أي عدد غير صفر

إذا f اشتقاقي عند a

ويكون قيمة مشتقه عند a تساوي ℓ

$\Rightarrow f'(a) = \ell \Rightarrow m = \ell$

التأويل الهندسي:

الخط Cf يقبل مماساً مائلاً ميله ℓ عند النقطة $A(a.f(a))$

معادلته ← $T: y = m(x - a) + y_0$

....

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

إذا f اشتقاقي عند a

وقيمة مشتقه عند a تساوي 0

$\Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow m = 0$

التأويل الهندسي:

الخط Cf يقبل مماس أفقي عند النقطة $A(a.f(a))$

معادلته ← $y = f(a)$

....

$$\lim_{x \to a^-} g(x) \neq \lim_{x \to a^+} g(x)$$

f غير قابل للاشتقاق عند a

التأويل الهندسي:

الخط Cf يقبل نصف مماسين عند نقطة $A(a.f(a))$

زاوية نقطة

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = l$$

f قابل للاشتقاق عند اليمين

قيمة مشتقه عند a^+ تساوي l

$\Rightarrow f'(a^+) = l \Rightarrow m = l$

التأويل الهندسي:

الخط C_f يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a, f(a))$

معادلته ← $y = f'(a^+)(x - x_0) f(a)$

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = l$$

f قابل للاشتقاق عند اليسار

قيمة مشتقه $f'(a^-) = m \Rightarrow m = l$

التأويل الهندسي:

الخط C_f يقبل نصف مماس من اليسار عند النقطة $A(a, f(a))$

معادلته ← $y = f'(a^-)(x - x_0) + f(a)$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

f غير قابل للاشتقاق عند a

إذاً لا يوجد قيمة للمشتق أي لا يوجد ميل

التأويل الهندسي:

الخط C_f يقبل مماس شاقولي عند النقطة a

معادلته ← $x = a$

إذا كان ملمسي بقيم أكبر
أو أصغر وكان الجواب ∞
التأويل الهندسي:
C_f يقبل مماس شاقولي
من اليمين ودون اليسار

دراسة تغيرات تابع

عند دراسة تغيرات تابع f نتبع الخطوات الآتية :

* نوجد مجموعة تعريف ونكتبها بشكل مجالات .
نوجد نهايات عند الأطراف المفتوحة ونصور عند المجالات المغلقة .
نسجل ما وجدناه من مقاربات أفقية أو شاقولية .

* نشتق
نحل المعادلة $f'(x)=0$
نوجد جذور المعادلة ونصورها في تابع الأصلي لدراسة الاطراد .

* نشكل جدول الآتي :

x	
f'	
f	

حقل x :

← مجموعة تعريف تابع f

← جذور المعادلة $f'(x)=0$

حقل المشتق f' :

← العدد (0) تحت كل جذر

← نضع (||) عندما يكون الجذر لا ينتمي لمجموعة تعريف أي أن f غير اشتقاقي

← اشارة + أو − وفقاً للاطراد وأفضل طريقة هي التجريب .

حقل f :

← صور الجذور - النهايات - نرسم ↗ ↘

← شحطة (||) طولية إذا كان التابع غير معرف عند x [شحطة طولية توضع في حقلين f' , f معاً]

استنتاج وقراءة الجدول بيانياً

أولاً: استنتاج مجموعة تعريف:

ننظر إلى حقل x حصراً ونميز حالتين:

* لا يوجد شكونة طولية ⟵ [أكبر قيمة ، أصغر قيمة] Df
* يوجد شكونة طولية ⟵ [أكبر قيمة ، أصغر قيمة] Df باستثناء العدد فوق ||

ثانياً: استنتاج صور وزيادات:

ننظر نظرة مزدوجة إلى حقل x وحقل $f(x)$

تكون صورة أو زيادة x هي العدد المقابل له.

اذا وجد لدينا شكونة طولية وطلب حساب نهاية عند العدد وكان له زيادات مختلفة في حقل $f(x)$
$\Leftarrow$ لا يمكن تعيين النهاية إلا إذا حددنا بقيم اكبر أو أصغر

ثالثاً: استنتاج مقاربات (شاقولي - أفقي)

حقل x عدد	حقل x ∞
حقل $f(x)$ ∞	حقل $f(x)$ عدد
↓	↓
x = عدد	y = عدد
مقارب شاقولي	مقارب أفقي

استنتاج مقارب مائل:

في حال L اذا وجد مقارب أفقي هذا يلغي وجود مقارب مائل

في حال J اذا لم نجد مقارب أفقي فهناك احتمال وجود مقارب مائل

استنتاج معادلة المماس

ننظر فوراً إلى حقل f' ونميز

* صفر : يوجد مماس أفقي ميله معدوم لأن مشتقه معدوم.

معادلته : $y =$ العدد تحت صفر

* مغاير للصفر : يوجد مماس ميله ذلك العدد وفاصلته العدد فوق m وتراتيبه العدد تحت m

معادلته : $y = m(x - x_0) + y_0$

* شكونة قصيرة عن يسارها ويمينها أعداد : يوجد نصف مماس ميله العدد جانب الشكونة ثم نعود إلى الحالة الثانية.

معادلته : $y = m(x - x_0) + y_0$

* شكونة طويلة : التابع غير معرف وغير اشتقاقي عند النقطة ولا يوجد مماس.

حل تراجحة $f(x)=m$ حل معادلة

استنتاج صورة مجال :

نميز حالتين :

- اذا كان تابع f متزايد تماماً في مجال I ← فقط ننظر إلى مقابلات a و b في حقل $f(x)$ وتكون هي صورة $f([a,b]) = [c,d]$
- اذا كان تابع f متناقص تماماً في مجال I ← فقط ننظر إلى مقابلات a و b في حقل $f(x)$ وتكون صورة هي عكس مقابلاتها $f([a,b]) = [d,c]$

أي أن نرتب الأعداد تصاعدياً

المستقر الفعلي :

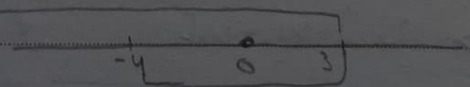
يعني صورة مجموعة تعريف كاملة

هي اجتماع المجالات

ex: $f(D_f) = f(]-\infty,-1]) \cup f([-1,+\infty[)$

$=]-\infty, 3] \cup [-4, 3]$

$\Rightarrow f(D_f) = [-4, 3]$



انتبه في سؤال عدد حلول معادلة $f(x) = m$
عدد الانتماءات هو عدد الحلول.

هام

حل المعادلة $f(x) = m$

أولاً نقوم بتجزئة الجدول إلى مجالات ونرتب كل مجال تصاعدياً
ثم نتحقق من انتماء a إلى المجالات

. . . .

حل المتراجحة في الجدول.

$f(x) \gtrless 0$ ← المقصود هو تزايد أو تناقص

$f(x) \gtrless a$ ←

. . . .

إيجاد نهاية تابع من شكل $f(f(x))$

$$\lim_{x \to a} f(f(x))$$

1) $\lim_{x \to a} f(x) = b$

2) $\lim_{x \to b} f(x) = c$

3) $\lim_{x \to a} f(f(x)) = c$

. . . .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'		0	0	
f	$-\infty$	4	-1	$+\infty$

أوجد حل المتراجحة $f'(x) \leq 0$

أوجد حل المتراجحة $f'(x) > 0$

$f'(x) \leq 0 : [0, 2]$

$f'(x) > 0 :]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		0	
f	$+\infty$	2	$+\infty$

حل المتراجحة $f(x) > 1$

$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) > 1 \Rightarrow S\ ]-\infty, +\infty[$