- الارتباط الخطي -

لشعاعين

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ انهما مرتبطين خطياً

إذا نتج أحدهم عن الآخر بضربه بعدد حقيقي $\vec{u} = k\vec{v}$

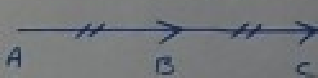
★ القول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً أي أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

- متوازيين
- منطبقين
- نقاطهم على استقامة واحدة
- لهما نفس الحامل

والعكس صحيح إذا لم يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين

إيجاد ارتباط الخطي

وجود رسم



$\Rightarrow \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

وجود مركبات

$\vec{u} : (x . y . z)$

$\vec{v} : (x' . y' . z')$

يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين إذا تناسب مركباتهم مع بعضهم البعض

$\Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$

ملاحظة

في حال وجود أصفار:

★ في حال كل شعاع تحوي صفراً والأصفار فوق بعضها نختبر باقي مركبات

★ في حال كانت الأشعة تحوي أصفار وليست فوق بعضها البعض تكون الأشعة غير مرتبطة خطياً

★ اختبار انتماء ثلاث نقاط إلى مستوٍ أم على استقامة واحدة:

نشكل شعاعين من نقاط وندرس الارتباط الخطي:

- مرتبطين: على استقامة واحدة
- غير مرتبطين: تشكل مستوٍ

لثلاث أشعة

ليكن A و B و C و D أربع نقاط نقول عن الأشعة $\vec{AB}$. $\vec{AC}$. $\vec{AD}$ إنها مرتبطة خطياً

← نختبر الارتباط الخطي لشعاعين منهم، نثبت ان نقاطهم تشكل مستوٍ

← نشكل العلاقة $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta A$

إذا أمكن حساب α و β نقول A.B.C.D تقع في مستوٍ واحد

مبرهنة

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير مرتبطين خطياً فهما يشكلان مستوٍ

عندئذٍ يوجد شعاع ثالث $\vec{w}$ يحقق العلاقة:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

يحقق أن الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً عندما يكون حامل شعاع $\vec{w}$ يوازي المستوي المشكل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

صيغ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليس لهم نفس البداية

شغف الرياضيات

جودي

ملخص حول الأشعة

الشعاع: هو نقطتين A و B من الفراغ نسمي $\overrightarrow{AB}$ شعاع الذي ينتج من انسحاب A إلى B

← اذا كان $A \neq B$ يكون للشعاع منحى وجهة وطويلة

← اذا كان $A = B$ نقول ان الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هو شعاع صفري $\vec{0}$ له نفس البداية والنهاية

⇐ نتيجة: $\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$

عمليات على الأشعة

جمع شعاعين

★ نفس شعاع:

$\star\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

★ عكس أشعة

$\star\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$

★ أشعة متعاقبة «شال»:

$\star\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

★ أشعة لا نفس البداية:

$\star\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

(الحاصل هو قطر متوازي أضلاع)

مركبات شعاع

اذا كانت M و N نقطتين من الفراغ

$$\overrightarrow{MN} : \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix}$$

طويلة شعاع:

★ اذا كان لدينا أشعة

$\vec{U} : (x . y . z)$

$$|\vec{U}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

★ اذا كان لدينا M و N

$$\overrightarrow{MN} = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 \ldots}$$

جمع شعاعين:

$*\vec{U} = (x_1, y_1, z_1)$ ، $\vec{V} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{U} + \vec{V} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_2 + z_1)$

$*\vec{U} : x i + y j + z k$

$\vec{V} : x' i + y' j + z' k$

$\vec{U} + \vec{V} = (x + x') i + (y + y') j + (z \ldots$

ضرب عدد بشعاع:

$K . \vec{U} = K (x . y . z)$

$\Rightarrow (Kx . Ky . Kz)$

تعيين إحداثيات منتصف قطعة

N منتصف شعاع $\overrightarrow{AB}$

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_N = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_N = \frac{z_A + z_B}{2}$$

تعيين مركز ثقل أو نقطة تلاقي المتوسطات

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

تعيين نقطة نظيرة بالنسبة لنقطة

نرسم شكل توضيحي عبارة عن شعاع حيث الحرف الذي نعد كله بالنسبة يقع بالمنتصف ثم نكتب علاقة شعاعية

ex: B نظيرة A بالنسبة لـ C:

B → C → A

تعيين احداثيات نظيرة نقطة بالنسبة للمبدأ

اذا كانت نقطة $M(x . y . z)$ عندئذ احداثيات نظيرة M للمبدأ هي عكس إشاراتها

تعيين احداثيات نقطة تحقق الرباعي متوازي أضلاع

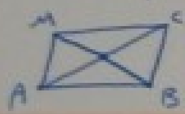
نفرض نقطة $M(x . y . z)$

نرسم شكل تقريبي

نوجد علاقة شعاعية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$

تعيين احداثيات مركز متوازي أضلاع.

نوجد احداثيات منتصف أما القطر AC أو القطر MB



تعيين نقطة بعلاقة شعاعية

نفرض نقطة مجهولة $M(x . y . z)$

نوجد مركبات الأشعة

نعوض ونجري عمليات حسابية حتى نتحصل على قانون تساوي شعاعين

تحديد نوع المثلث:

لتكن النقاط الآتية:

$A(x . y . z), B(x . y . z) C(\ldots)$

نوجد مركبات ثم أطوال الأشعة الثلاث.

اذا كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع نتأكد إذا كان قائم عن طريق عكس فيثاغورث

انتماء نقطة إلى مستوى محوري

لإثبات ان نقطة من الفراغ تنتمي لمستوى محوري $\overrightarrow{AB}$

A ——— B

$MA = MB$

وقوع نقطة على كرة:

لتكن نقطة $M(x . y . z)$ وكرة نصف قطرها R ومركزها $\Omega(x . y)$

- M تنتمي إلى C $\Leftrightarrow \Omega M = R$
- M لا تنتمي إلى C $\Leftrightarrow \Omega M \neq R$

ايجاد احداثيات نقطة تقع على أحد محاور احداثية.

وتقع بعد نقطتين بعد متساوي

لتكن M

M تقع على محور الفواصل $\Leftarrow M(x . 0 . 0)$

M تقع على محور التراتيب $\Leftarrow M(0 . y . 0)$

M تقع على محور الرواقم $\Leftarrow M(0 . 0 . z)$

ثم نشكل علاقة شعاعية

$MA = MB$

مركز أبعاد متناسبة «م . أ . م»

نقول عن M أنها مركز أبعاد متناسبة للثنائيتين $(A.\alpha)$ $(B.\beta)$

حيث $\alpha+\beta \neq 0$

إذا تحقق : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

خاصية (1) :

«خاصية تجميعية»

$(B.\beta).(A.\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

تفيد هذه العلاقة في تحديد موقع M

وتفيد أيضاً في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة .

ex عين م.أ.م للنقاط $(A.2)$ $(B.1)$ واشرح وضع هندسي للنقاط $A.M.B$

$\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

من العلاقة تجميعية نستنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً ومنه نقاط $A.M.B$ على استقامة واحدة .

---

ex عين مركز الأبعاد المتناسبة M حيث تحقق العلاقة :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

نعاكس   نزرع شال   نظامي

$-\overrightarrow{MA} - 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 3\overrightarrow{MA} = 0$

$-\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA} = 0$

$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MA} = 0$

★ $4MA - 2MB = 0 \Rightarrow \alpha \neq \beta \neq 0$ ومنه M هو مركز أبعاد متناسبة

خاصية (2) :

استخدام زرع شال بعد تعيين مركز أبعاد من نصه ⟸ نحلل الوضع وعين المركز .

مركز أبعاد متناسبة لثلاث نقاط

ون G هو مركز أبعاد متناسب للتثقيلات $\Leftarrow$ $(A.\alpha)$ $(B.\beta)$ $(C.\gamma)$

ذا تحقق :

$$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = 0$$

: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

تفيد هذه العلاقة :

في تعيين مستو

ملاحظة

نتيجة (1) : اذا كان لدينا نقطتين ومركز أبعاد متناسب وكان التثقيلين متساويين يكون المركز في منتصف القطعة

نتيجة (2) : اذا كان لدينا ثلاث نقاط ومركز أبعاد متناسب وكان التثقيلات لثلاث متساوية يكون مركز الأبعاد هو مركز ثقل المثلث .