ثالث ثانوي علمي

اختبار النهايات والاشتقاق

الاسم: ....

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي وانقلها إلى ورقة إجابتك: (50 درجة: لكل سؤال 10)

-1 ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$ فإن g محدودة:

A)	$[1\,,2]$	B)	$[-1\,,1]$	C)	$\left[\frac{1}{5},1\right]$	D)	$\left[\frac{1}{3},1\right]$

-2 f معرف على المجال $[0\,,2[$ وفق: $f(x)=E(x)+2x$ إن عبارة $f(x)$ مستقلة عن $E(x)$ تعطى:

A)	$f(x)=\begin{cases}2x & ;x\in[0\,,1[\\ 2x+2 & ;x\in[1\,,2[\end{cases}$	B)	$f(x)=\begin{cases}2x & ;x\in[0\,,1[\\ 2x+1 & ;x\in[1\,,2[\end{cases}$
C)	$f(x)=\begin{cases}2x+2 & ;x\in[0\,,1[\\ 2x & ;x\in[1\,,2[\end{cases}$	D)	$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ;x\in[0\,,1[\\ 2x & ;x\in[1\,,2[\end{cases}$

-3 ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x)=\frac{\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\pi}{8}}$ نهاية f عند $a=-\frac{\pi}{8}$

A)	$-\sqrt{2}$	B)	$\sqrt{2}$	C)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

-4 ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$ فإن g محدودة:

A)	$[1\,,2]$	B)	$[-1\,,1]$	C)	$\left[\frac{1}{5},1\right]$	D)	$\left[\frac{1}{3},1\right]$

-5 ليكن التابع المعرف وفق: $f(x)=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$ إحدى الخواص محققة:

A)	f غير اشتقاقي على $\mathbb{R}$	B)	f اشتقاقي على $\mathbb{R}$	C)	f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$	D)	f اشتقاقي على المجال $]0\,,+\infty[$

ثانياً: حل السؤالين الآتيين: (90 درجة: لكل سؤال 45)

السؤال الأول: أثبت أن المشتق من المرتبة n للتابع $f(x)=\cos x$ يعطى بالشكل $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$.

السؤال الثاني: ليكن التابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$، عيّن العددين a و b كي يقبل التابع f قيمة حديّة في النقطة $(1,0)$.

ثالثاً: حل التمرين الآتي: (60 درجة)

f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ ، $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ في حالة $x\neq 0$ المطلوب:

1) أثبت أن f اشتقاقي عند $x=0$.
2) احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}$
3) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

رابعاً: حل المسألة الآتية: (100 درجة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، حدد القيم الحدية للتابع f.
2) عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$.
3) أثبت أن C يقبل مقارباً مائلاً اكتب معادلته وادرس وضعه النسبي.
4) ارسم ما وجدته من مقاربات C ثم ارسم C.
5) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $x^2-(m+5)x+3m+7=0$.

حل النموذج

أولاً:

1	نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1 \xrightarrow{\text{نضرب بـ } 2} -2 \le 2\sin x \le 2$ نضيف 3 $1 \le 3+2\sin x \le 5 \xrightarrow{\text{نقلب}} 1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$ الجواب (C)
2	$x \in [0\,,1[\Rightarrow E(x)=0 \Rightarrow f(x)=0+2x=2x$ $x \in [1\,,2[\Rightarrow E(x)=1 \Rightarrow f(x)=1+2x$ الجواب (B)
3	$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{8}} \frac{g(x)-g\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{x+\frac{\pi}{8}} \Rightarrow g(x)=\sin 2x \Rightarrow g'(x)=2\cos(2x)$ $g'\left(-\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ الجواب (B)
4	نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1 \xrightarrow{\text{نضرب بـ } 2} -2 \le 2\sin x \le 2$ نضيف 3 $1 \le 3+2\sin x \le 5 \xrightarrow{\text{نقلب}} 1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$ الجواب (C)
5	$2+\cos x \ne 0 \Rightarrow \cos x \ne -2$ مستحيلة الحل $\Leftarrow$ f اشتقاقي في على $\mathbb{R}$ الجواب (B)

ثانياً:

السؤال الأول:

نفرض القضية $E(n): f^{(n)}(x)=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$

- نثبت صحة العلاقة $E(1)$ من أجل $n=1$: $f^{(1)}(x)=(-1)^1\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x=f'(x)$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}-x\right)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}-x\right)=(-1)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$$

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=\left((-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)\right)'=(-1)^n\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)(-1)\right)=(-1)^{n+2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-x\right)$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

السؤال الثاني:

للتابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ قيمة حديّة عند النقطة $(1,0)$ أي أن:

$f(1)=0$: $f(1)=1+a+b=0$ أي أن $a+b=-1$ … (1)

و $f'(1)=0$: لدينا $f'(x)=3x^2+2ax+b$ وبالتالي $f'(x)=3+2a+b=0$ أي أن $2a+b=-3$ … (2)

بطرح العلاقتين (1) و (2) نجد $a=-2$ وبالتعويض في (1) نجد $b=1$

ثالثاً:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x}=0.\sin\infty$$

تحتاج إحاطة

ويجب اختبار $x<0\ ,x>0$

نعلم أن:

$$(*)\qquad -1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$$

نضرب بـ $x>0$

$$-x\le x.\sin\frac{1}{x}\le x$$

$$\lim_{x\to 0^+}-x=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1): $\lim_{x\to 0^+}x.\sin\frac{1}{x}=0$

نضرب (*) بـ $x<0$

$$-x\ge x.\sin\frac{1}{x}\ge x$$

$$\lim_{x\to 0^-}-x=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1): $\lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x}=0$

وبالتالي: $\lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x}=0$

والتابع f اشتقاقي عند الصفر.

$$2)\ f'(x)=2x.\sin\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)x^2$$

$$=2x.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2.\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty(1)=+\infty$$

$$;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

رابعاً:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}\quad \text{و}\quad D_f=\mathbb{R}\backslash\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$$

(1

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\quad \text{و}\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=-\infty\quad \text{و}\quad \lim_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي عند $\pm\infty$

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$ أي أن $x^2-6x+8=0$ ويكافئ $(x-4)(x-2)=0$

إما $x=2$ فيكون $f(2)=-1$

أو $x=4$ فيكون $f(4)=3$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$f(2)=-1$ قيمة حدية كبرى

$f(4)=3$ قيمة حدية صغرى

2) باستخدام القسمة الإقليدية نجد:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x-3 & x^2-5x+7 \\ & -x^2 \pm 3x \\ \hline & -2x+7 \\ & \pm 2x \mp 6 \\ \hline & 1 \end{array}$$

وبالتالي فإن f يكتب بالشكل $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3}$

حيث $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 1$

3) $\lim\limits_{x\to\pm}(f(x) - y_\Delta) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)\right) = \lim\limits_{x\to\pm}\frac{1}{x-3} = 0$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-3}$

عندما $x > 3$: C فوق المقارب Δ

عندما $x < 3$: C تحت المقارب Δ