البحث الثاني
النهايات والاستمرار

أساسيات في النهايات:

- نهاية lim
- تابع $f(x)$
- $x \to a$ تعني x تسعى إلى a

$\lim_{x\to a} f(x)$

نهاية $f(x)$ عندما x تسعى إلى a

أولاً: $a \notin D_f$ عدد حقيقي

- نبدل بدل كل x بذلك العدد

الجواب

$$\lim_{x\to a} f(x) = \boxed{b}$$

- b عدد حقيقي: $\Leftarrow$ (a, b) نقطة مقاربة
- $b = \pm\infty$: $\Leftarrow$ $x = a$ مقارب شاقولي

⊗ أوجد نهاية التوابع الآتية:

① $\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

② $\lim_{x\to 1} \sqrt{2x+1} = \sqrt{2(1)+1} = \sqrt{3}$

③ $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ $\quad a = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+2}{1-1} = \frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{0} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

نضيف $1-$ للمقام فيصبح سالب

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{0} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

نضيف 2 للمقام فيصبح موجب

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C

④ $f(x) = \frac{3+x}{9-x}$, $a = 9$

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \frac{12}{0}$$

$$\lim_{x\to 9^-} \frac{12}{0} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

نبدل كل x في المقام بـ 8

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{12}{0} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

نبدل كل x في المقام بـ 10

$x = 9$ مقارب شاقولي للخط C، و C على يمين ويسار المقارب.

شغلات في اللانهايات:

- $\left(\text{عدد سالب}\right) \times (\mp\infty) = \pm\infty$
- $\left(\text{عدد موجب}\right) \times (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \pm \text{عدد} = -\infty$
- $+\infty \pm \text{عدد} = +\infty$
- $\frac{-\infty}{0} = -\infty$, $\frac{+\infty}{0} = +\infty$
- $\frac{-\infty}{\text{عدد سالب}} = +\infty$, $\frac{-\infty}{\text{عدد موجب}} = -\infty$
- $(-\infty)^2 = +\infty$, $(+\infty)^2 = +\infty$
- $\sqrt{+\infty} = +\infty$, $\sqrt{-\infty}$ لا يجوز
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

ثانياً: $a = +\infty, -\infty$

الجواب

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \boxed{b}$$

- $b = \infty$ احتمال وجود مقارب مائل
- $b = \text{عدد}$ $\Leftarrow$ $y = \text{عدد}$ مقارب أفقي

الجـــزء الأول

التابع الصحيح:

نعوض في أكبر أس (الحد المسيطر)

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x-5)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$
$=(-\infty)^2=+\infty$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x^2+x-7)=$
$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=-(-\infty)^3=+\infty$

التابع الجذري داخله صحيح:

نعوض في الحد المسيطر فقط

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\sqrt{+\infty}=+\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\sqrt{+\infty}=+\infty$

التابع الكسري $\frac{\text{صحيح}}{\text{صحيح}}$:

نميز ثلاث حالات:

❶ درجة البسط = درجة المقام:

$\frac{\text{أمثال أكبر أس}}{\text{أمثال أكبر أس}}$ (الأمثال)

مثال: احسب نهاية التابع f عند a

① $f(x)=\frac{x+5}{3x-7}$ $\quad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}$ مقارب أفقي

❷ $f(x)=\frac{3x^2+x}{6x^2-5}$ $\quad ,a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{6x^2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

❷ درجة البسط > درجة المقام:

الجواب $(\pm\infty)$

$\frac{\text{أكبر قوة مع أمثالها}}{\text{أكبر قوة مع أمثالها}}=\pm\infty$

مثال: احسب نهاية التابع f عند a

① $f(x)=\frac{x^2+5x+1}{x-3}$, $a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

② $f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$ $,a=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

❸ درجة البسط < درجة المقام:

الجواب (0)

$\frac{\text{أكبر قوة مع أمثالها}}{\text{أكبر قوة مع أمثالها}}=0$

تكرورية هامة:

إذا طلب إيجاد A عدداً حقيقياً يحقق الشرط $x\gtrless A$ كان $f(x)\in]a,b[$ فإننا نبحث عن:

نصف القطر $r=\frac{b-a}{2}$

مركز المجال $c=\frac{a+b}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

نطبق القانون $|f(x)-c|<r$

الجـــزء الأول

⊛ **تدريب:** ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$$

1) أوجد نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9\,,5.1[$

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5=c$

② $r=\frac{5.1-4.9}{2}=\frac{0.2}{2}=0.1=\frac{1}{10}$

$$c=\frac{4.9+5.1}{2}=\frac{10}{2}=5$$

نطبق القانون:

$$|f(x)-c|<r$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$$

نوحد المقامات

$$\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{|4|}{|x-1|}<\frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{x-1}<\frac{1}{10}\xRightarrow[\text{بـ } 10]{\text{نضرب الطرفين}}\frac{40}{x-1}<1$$

$$40<x-1\Rightarrow 41<x$$

$$A<x\Rightarrow A=41$$

⊛ **تدريب:** أوجد نهاية التابع

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$$

عند $a=1$، ثم عيّن عدداً α يحقق:

$$x\in]1-\alpha\,,1+\alpha[\Rightarrow f(x)>10^3$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{(1-1)^2}=\frac{4}{0}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

لدينا $f(x)>10^3$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$$

نضرب الطرفين بـ $(x-1)^2$

$$5x-1>(x-1)^2 10^3$$

$$5x-5+5-1>(x-1)^2\,10^3$$

$$5(x-1)+4>(x-1)^2\,10^3$$

نفرض $t=x-1$

$$5t+4>10^3t^2$$

$$10t^2-5t+4<0$$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$$10^3t^2-5t+4=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4(10^3)(-4)$$

$$=25+16000=16025$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=126.5$$

$$t_1=\frac{5+126.5}{2(1000)}=\frac{65.75}{1000}=0.06$$

$$t_2=-0.06$$

t		-0.06		0.06	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$$t\in]-0.06\,,0.06[\ ;t=x-1$$

$$-0.06<x-1<0.06$$

نضيف 1

$$1-0.06<x<1+0.06$$

$$\alpha=0.06$$

الجـــزء الأول

تكرورية هامة:

إذا طلب عين مجال I بحيث $x \in I$ كان $f(x) \in$ $]a, b[$ ماذا نفعل؟

$$a < f(x) < b$$

$$\vdots$$

مثلا $< x <$ كذا

⊛ مثال: ليكن لدينا التابع المعرف وفق:

$$f(x) = \sqrt{4x+1}$$

عين مجال I يحقق الشرط: «عندما $x \in I$ $f(x) \in$ $]2, 3[$ »

$$2 < \sqrt{4x+1} < 3$$

$$\xRightarrow{\text{نربع الطرفين}} 4 < 4x+1 < 9$$

$$\xRightarrow{\text{نطرح واحد}} 3 < 4x < 8$$

$$\xRightarrow{\text{نقسم على 4}} \frac{3}{4} < x < 2$$

$$x \in \left]\frac{3}{4}, 2\right[$$

⊛ تدريب: أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$$

ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط $x > A$

$$f(x) \in \left]\overset{a}{-2.05}, \overset{b}{-1.95}\right[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x} = -2 = c$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-1.95+2.05}{2} = 0.05$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3} + 2\right| < 0.05$$

$$\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right| < \frac{5}{100}$$

$$\frac{7}{|x+3|} < \frac{5}{100}$$

نقلب

$$\frac{|x+3|}{7} > \frac{100}{5}$$

$$|x+3| > 140$$

$$x+3 > 140$$

$$x > 137$$

$$A = 137$$

تكرورية هامة:

⊛ $\sqrt{x^2} = |x|$

⊛ $\sqrt{x.y} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$

⊛ $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

⊛ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

⊛ $\sqrt{x}^2 = x$

كيف نخرج x من تحت الجذر إلى خارجه:

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{x^2}.\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$= |x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$-\infty$: $-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

$+\infty$: $x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$

الجزء الأول

حالات عدم التعيين:

❶ $\frac{\infty}{\infty}$

❷ $\infty-\infty$

❸ $\frac{0}{0}$

❹ $0(\infty)$

① الحالة $\frac{\infty}{\infty}$:

تزال بإخراج x أو $\sqrt{x}$ عامل مشترك من البسط والمقام واختصارهما

⊛ تدريب: احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

1) $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$ $\quad a=-\infty$

عدم تعيين $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

تزال بإخراج x عامل مشترك

$$=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}=\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}$$

$|x|=-x$ (لأن في جوار $-\infty$)

$$\frac{-x\sqrt{4+5x^2}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}=-\frac{\sqrt{4+0}}{0-3}$$

$$=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$$

2) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+4}$ $\quad a=+\infty$

عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$

نخرج الحد المسيطر عامل مشترك

$$f(x)=\frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

تكرورية:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{4}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

② الحالة $\infty-\infty$:

⊘ تزال بإخراج الحد المسيطر عامل مشترك.

⊘ أو الضرب والتقسيم على المرافق بشرطين وجود جذر + حدين فقط

حيث $a-b$ مرافقه $a+b$ بالعكس.

⊛ تدريب: احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

1) $f(x)=x-\sqrt{x}$ $\quad a=+\infty$

عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

لإزالتها نخرج الحد المسيطر عامل مشترك.

$$f(x)=x\left[\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

$$=x\left[1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$$

2) $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2-x-2}$ $\quad a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

لإزالتها الحد المسيطر أولاً من تحت الجذر ثم من التابع الكلي.

$$=2x-1-\sqrt{x^2\left[1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right]}$$

$$=2x+1-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$|x|=x$ موجب لأن في جوار $+\infty$

الجـزء الأول

$$= 2x + 1 - x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left[2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\left[2 + 0 - \sqrt{1 - 0 - 0}\right]$$
$$= +\infty(2 - 1) = +\infty$$

لا يوجد مقارب أفقي لأن الجواب $+\infty$ حتى يكون مقارب يجب أن يكون الجواب عدد.

3) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $a = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}{x - \sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

4) $f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 5} - x - 1$, $a = +\infty$

نستخدم المرافق

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 5} - (x+1)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{(x+1)^2+5} - (x+1)\right]\left[\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)\right]}{\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)^2 + 5 - (x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2+5} + (x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{\infty} = 0$$

③ الحالة $\frac{0}{0}$

تزال بإحدى ثلاث طرق:

- إذا كان البسط والمقام كثيرات حدود نحلل البسط والمقام ثم نتخلص من القوس المسبب للصفر.
- إذا كان البسط أو المقام يحوي جذر نضرب ونقسم على المرافق ثم قد نحتاج إلى تحليل كثيرات حدود ثم نتخلص من القوس المسبب للصفر.
- إذا كان البسط أو المقام يحوي $\sin$, $\cos$, $\tan$ نستخدم مبرهنة $\tan$ أو $\sin$

$$\boxed{\lim_{g\to 0}\frac{\sin g}{g} = 1 = \lim_{g\to 0}\frac{g}{\sin g}}$$

$$\boxed{\lim_{g\to 0}\frac{\tan g}{g} = 1 = \lim_{g\to 0}\frac{g}{\tan g}}$$

⊛ **تدريب:** احسب نهاية f عند القيم الموافقة:

① $a = -2$, $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{(-2)^2 + 3(-2) + 2}{(-2)^2 - 4} = \frac{4 - 6 + 2}{4 - 4}$$
$$= \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

لإزالتها نحلل البسط والمقام

$$= \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

تكرورية:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+1}{x-2} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

تكرورية هامة:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

نقول أن (a, b) نقطة مقاربة

الجـــزء الأول

② $a=-1$ $\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{-1-1}{3}=-\frac{2}{3}$$

تكرورية:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

③ $a=3$ $\quad f(x)=\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{\sqrt{6+10}-4}{3-3}=\frac{4-4}{3-3}$$

$$=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نضرب ونقسم على مرافق البسط لأنه يحوي جذرين.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{2x+10}-4)(\sqrt{2x+10}+4)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

$$=\frac{2x+10-16}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

$$=\frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

$$=\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x+10}+4}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{1}{4}$$

④ $a=1$ $\quad f(x)=\frac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1-1}{3-3}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

لإزالتها نضرب ونقسم على مرافق البسط ونحلل المقام.

$$=\frac{(\sqrt{2x^3-1}-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2x^3-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$=\frac{2(x^2+x+1)}{(x-2)(\sqrt{2x^3-1}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{2(1+1+1)}{(1-2)(1+1)}=\frac{6}{-2}=-3$$

⑤ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\sin 2x}{2x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\sin 2(0)}{2(0)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

بما أن تحوي sin نحتاج إلى مبرهنة

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin g}{g}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

حسب مبرهنة الـ sin

⑥ $,a=0$ $\quad f(x)=\frac{\sin 6x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نستخدم مبرهنة sin لكن يجب مطابقة أمثال الزاوية في البسط مع المقام

نضرب ونقسم على 6

$$f(x)=\left(\frac{\sin 6x}{6x}\right)\times 6$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=1$$

حسب مبرهنة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin g}{g}=1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=(1)(6)=6$$

⑦ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\sin x}{2x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

تكروريات قبل الحل:

$$1-\cos ax = 2\sin^2\frac{ax}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2}$$

⑧ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نستخدم القانون المثلثي:

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$f(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

⑨ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نعلم أن $x=\sqrt{x}^2$

$$f(x)=\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = (1)^2 = 1$$

⑩ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{x+x.\cos x}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\frac{x}{\sin x}.\cos x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1+1(1) = 2$$

⑪ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{x.\tan 2x}{3x^2+3\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نقسم البسط والمقام على x^2

$$f(x)=\frac{\frac{x.\tan 2x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{3\sin^2 x}{x^2}} = \frac{\frac{2\tan 2x}{2x}}{3+3\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2(1)}{3+3(1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

⑫ $, a=0$ $\quad f(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x.\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

تكرورية هامة:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$f(x)=\frac{-3\cos x+4\cos^3 x-\cos x}{x.\sin x} = \frac{4\cos^3 x-4\cos x}{x.\sin x} = \frac{4\cos x\,(\cos^2 x-1)}{x.\sin x}$$

تكرورية:

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

$$f(x)=\frac{4\cos x\,(-\sin x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} 4\cos x\left(-\frac{\sin x}{x}\right) = 4(1)(-1) = -4$$

⑬ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^3}}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2(1+x)}} = \frac{\sin x}{|x|\sqrt{1+x}}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x}} & ; x\to +\infty\\[2ex] \dfrac{\sin x}{-x\sqrt{1+x}} & ; x\to -\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x\sqrt{x+1}} = 1\times 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x\sqrt{x+1}} = -1(1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

ليس للتابع نهاية عند الصفر.

مبرهنات المقارنة:

مبرهنة (1)

تنص هذه المبرهنة أنه إذا كان لدينا ثلاث توابع h, g, f معرفة على مجال $I =]b, +\infty[$ وتحقق على هذا المجال:

$$\forall x \in I \quad g(x) \le f(x) \le h(x)$$

وكان

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell \ , \lim_{x\to\infty} h(x) = \ell$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell}$$

حيث ℓ عدد

للمسائل:

نستخدم مبرهنة الإحاطة :

❶ إيجاد نهاية تابع يحقق متراجحة

❷ إيجاد نهاية تابع يحقق $\cos\infty$ أو $\sin\infty$ حيث أن:

$$-1 \le \cos g \le 1$$
$$-1 \le \sin g \le 1$$

أو:

$$0 \le \sin^2 g \le 1$$
$$0 \le \cos^2 g \le 1$$

مثال: احسب نهاية f للتابع على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

عند $a = 0 \, , a = +\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نستخدم مبرهنة $\sin$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sin\infty}{\infty}$$ تحتاج إحاطة

<u>عندما نرى $\sin\infty$ أو $\cos\infty$ في الجواب احاطة حصراً.</u>

نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$

نقسم على $x > 0$ في جوار $+\infty$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \ , \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بما أن نهاية الطرفين متساوية فإنه حسب الإحاطة (1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

تدريب: احسب نهاية f المعرف على $]0, +\infty[$ عند $a = +\infty$

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+\cos\infty}{\infty}$$ تحتاج إحاطة

نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$

نضيف للأطراف 1

$$1 - 1 \le 1 + \cos x < 1 + 1$$
$$0 \le 1 + \cos x \le 2$$

نقسم على $x^2 > 0$

$$\frac{0}{x^2} \le \frac{1+\cos x}{x^2} \le \frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 \ , \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

⊛ **تدريب:** f تابع يحقق: $\frac{3x-1}{x+2} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x+3}$

احسب نهاية f عند $+\infty$

باستخدام مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

ومنه حسب الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

مبرهنة(2)

ليكن لدينا g, f تابعين على $I =]b, +\infty[$ ولنفرض أن كل x من I تتحقق المتراجحة

$$|f(x) - \ell| \leq g(x)$$

ولنفرض أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

فإن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$

حيث ℓ عدد

⊛ **تدريب:** ليكن f تابع يحقق:

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x^2}$$

احسب نهاية f عند $+\infty$

لنفرض أن $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة الثانية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

⊛ **تدريب:** ليكن f تابع يحقق:

$$|f(x) + 3| \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

احسب نهاية f عند $+\infty$

نفرض أن $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة الثانية

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$$

مبرهنة(3)

ليكن g, f تابعين معرفين على مجال $I =]b, +\infty[$

لدينا حالتين:

1) إذا كان $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2) إذا كان $f(x) \leq g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

في المسائل:

للتفريق بين المقارنة الأولى والثالثة، إذا كانت نهاية الطرفين ℓ (عدد) يجب استخدام الإحاطة الأولى.

إذا كان نهاية الطرفين $\pm\infty$ نستخدم الإحاطة الثالثة.

⊛ **تدريب:** احسب نهاية f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \cos x + x$$

عند $a = -\infty, +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \cos\infty \pm \infty$$

نحتاج إحاطة

نعلم أن $-1 \leq \cos x \leq 1$

نضيف x

$$x - 1 \leq \cos x + x \leq x + 1$$

$$x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$$

لدينا $x - 1 \leq f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} (x - 1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة (3)

عند $-\infty$:

$$f(x) \le x+1$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة (3)

⊛ تدريب: أثبت أن

$$-\frac{1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

ثم استنتج نهاية $\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته $-\infty$

نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$

نقسم على $x+1>0$ في جوار $+\infty$

$$-\frac{1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1} = 0$$

عند $-\infty$:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نقسم على $x+1<0$

$$-\frac{1}{x+1} \ge \frac{\cos x}{x+1} \ge \frac{1}{x+1}$$

/قلبنا جهة المتراجحة لأن قسمنا على سالب/

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

⊛ تدريب: f تابع يحقق

$$|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x>0$ ، ما نهاية f عند $+\infty$؟

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الثانية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

⊛ تدريب: f تابع يحقق:

$$f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$$

أياً كان $x<0$، احسب نهاية f عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2 = +\infty$$

حسب الإحاطة الثالثة:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

⊛ تدريب: أثبت أن

$$x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$$

استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$

نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$

نضرب بـ-5

$$5 \ge -5\sin x \ge -5$$

نضيف x^2

$$x^2+5 \ge x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$$

عند $\pm\infty$:

$$x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 5 = +\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة (3):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

الجـــزء الأول

⊛ **تدريب:** ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

❶ تحقق أن

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

❷ في حالة $x>0$، استنتج أن:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

❸ ما نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

نضرب ونقسم على مرافق الجداء

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

تكرورية: $\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{x}$$

نقلب الأطراف

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (*)$$

$$\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}$$

نضيف للأطراف $\sqrt{x+1}$

$$2\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

نقلب الأطراف

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le f(x) \qquad (**)$$

من $(**)$ و $(*)$ نستنتج:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

حسب الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

نهاية تابع مركب:

لتكن التوابع التالية f,g,h فإن:

$$f=g\circ h(x)\overset{\text{تكتب بالشكل}}{=}g(h(x))$$

إذا طلب $\lim\limits_{x\to a}g(h(x))$:

1) نوجد $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$

2) نفرض $h(x)=X$

3) فيكون $\lim\limits_{x\to a}g(h(x))=\lim\limits_{x\to b}g(X)$

⊛ **تدريب:** ليكن التابع المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

❷ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))$ ثم اعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))$ كتابة $f(f(x))$ بدلالة x.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

ط1:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1=b$$

نفرض $f(x)=X$

$$f(X)=\frac{X-3}{X+5}$$

$$\lim_{X\to1}f(X)=\frac{1-3}{1+5}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

ط2: نبدل كل x بـ $f(x)$

$$f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$$

$$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x-25}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x+22})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x}{6x}=-\frac{1}{3}$$

تذكرة بالمقاربات:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$ (عدد)

$y=\ell$ مقارب أفقي

a) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ (عدد a)

$x=a$ مقارب شاقولي

i) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

(a,ℓ) نقطة مقاربة

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

لا يوجد مقارب أفقي، احتمال وجود مقارب مائل.

المقارب المائل:

هو مستقيم شريف يتقرب من C ولا يمسه، معادلته:

$$\boxed{y=ax+b}$$

لإثبات أنه مقارب مائل يجب أن نبرهن أن:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

لدراسة الوضع النسبي

يعني هل C فوق أو تحت y ندرس المقدار

$$f(x)-y_\Delta$$

لا يعدم: ندرسه على المجال المعطى في D_f وذلك بأخذ القيم:

إذا كان $f(x)-y<0$ بالتالي C تحت y

إذا كان $f(x)-y>0$ بالتالي C فوق y

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}|\{1\}$ وفق:

$$f(x)=2x+3+\frac{10}{x-1}$$

أثبت أن $y=2x+3$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

ثم ادرس الوضع النسبي.

لإثبات أنه مقارب مائل يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

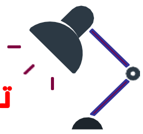
$$\lim_{x\to\infty}\left(2x+3+\frac{10}{x-1}-(2x+3)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x-1}$$
$$=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=2x+3$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{10}{x-1}\neq 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{10}{x-1}$	$-$		$+$
الوضع النسبي	y تحت C		y فوق C



تكرورية:

عندما يكون درجة البسط ≥ درجة المقام نطبق القسمة الاقليدية:

الناتج

المقام | البسط

الباقي

$$f(x)=\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$$

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$$

❶ اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-4}$

❷ أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي لـ y مع C

درجة البسط > درجة المقام ⇐ قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x-4 & 2x^2 \quad -7x-3 \\ & \overset{-}{+}2x^2 \quad \overset{+}{-}8x \\ \hline & +x \quad -3 \\ & \overset{-}{+}x \quad \overset{+}{-}4 \\ \hline & +1 \end{array}$$

$$f(x)=\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

يجب أن نبرهن

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+1+\frac{1}{x-4}-(2x+1)\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$f(x)-y=\frac{1}{x-4}$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$\frac{1}{x-4}$	$-$		$+$
الوضع النسبي	y تحت C		y فوق C

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$$

❶ اكتب f بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

❷ أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

درجة البسط > درجة المقام ⇐ قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x-6 \\ \hline x+3 & +2x^2 \quad +1 \\ & \overset{-}{+}2x^2 \quad \overset{-}{+}6x \\ \hline & -6x+1 \\ & \overset{+}{-}6x \quad \overset{+}{-}18 \\ \hline & +19 \end{array}$$

$$f(x)=2x-6+\frac{19}{x+3}$$

لإثبات أن $y=2x-6$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)\overset{?}{=}0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x-6+\frac{19}{x+3}-(2x-6)\right)=\frac{19}{\infty}=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=2x-6$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{19}{x+3}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$\frac{19}{x+3}$	$-$		$+$
الوضع النسبي	y تحت C		y فوق C

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

❶ أثبت أن $y = x + 1$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

❷ ادرس الوضع النسبي لـ C مع y

لنبرهن أن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 1 = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

الوضع النسبي

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

لا يعدم

$f(x) - y_\Delta < 0$ $\qquad$ y تحت C

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف على وفق:

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$$

أثبت أن $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع مقاربه

$$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{\sin x}{x} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\infty}{\infty}$$

تحتاج إحاطة

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x > 0$ في جوار $+\infty$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

حسب الإحاطة (1)

لنأخذ في جوار $-\infty$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x < 0$

$$-\frac{1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

حسب الإحاطة (1)

دراسة الوضع النسبي:

يجب دراسة إشارة المقدار :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$$

الجـــزء الأول

لدراسة إشارته نعدمه

$$\frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\Rightarrow x = \pi k \,;\, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

بما أن $\frac{\sin x}{x}$ مقدار زوجي إشارته متناظرة بالنسبة للصفر، لذلك تكفي دراسة إشارته على المجال $]0, +\infty[$، ولكن إشارة المقام x ثابتة على المجال، أما $\sin x$ متغيرة، وهو تابع دوري دوره 2π لذلك يكفي دراسة الإشارة على مجال طوله 2π أي ندرس الوضع النسبي على $]0, 2\pi[$

البسط x	0	$+$	π	$+$	2π
المقام $\sin x$	0	$+$	0	$-$	0
$\frac{\sin x}{x}$		$+$	0	$-$	0
الوضع النسبي		y فوق C		y تحت C	

النقاط $(\pi k, \pi k) \,;\, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ نقاط مشتركة بين C والمقارب

عندما يطلب إيجاد معادلة المقارب المائل:

الحالة العامة :

صيغة السؤال: أوجد معادلة المقارب المائل للتابع $f(x)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$ عدد لا يساوي الصفر

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b$$ عدد حصراً

تكون معادلة المقارب المائل هي:

$$\boxed{y = ax + b}$$

⊛ **تدريب:** ليكن التابع المعرف $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

أوجد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $+\infty$

معادلة المقارب المائل هي: $y = ax + b$، نبحث عن a, b من خلال:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

نزيلها بإخراج x^2 عامل مشترك من الجذر

$$= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

في جوار $+\infty$: $|x| = x$

$$= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0} = 1 = a$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

$$= \infty - \infty$$ عدم تعيين

نضرب ونقسم على المرافق

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0 = b$$

نعوض a, b في $y = ax + b$

$$\Rightarrow y = 1(x) + 0 \Rightarrow y = x$$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

إذا طلب اكتب بالصيغة القانونية (يعني الإتمام إلى مربع كامل):

حالة خاصة :(الصيغة القانونية)

نكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية.

$$\sqrt{\text{كذا}^2 + ??} = \pm\text{كذا}\sqrt{1 + \frac{??}{\text{كذا}^2}}$$

إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\text{كذا}} = 1$

بالتالي $y = \text{كذا}$ مقارب مائل

تكرورية:

طريقة الإتمام إلى مربع كامل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a = 1$$

نضيف ونطرح مربع نصف أمثال اكس

$$\underbrace{ax^2}_{\text{جذر}} + \underbrace{bx}_{\text{إشارة}} + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{جذر}} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

❶ اكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية.

❷ استنتج وجود مقارب لـ C في جوار $+\infty$

$$x^2 + 4x + 5$$

نضيف ونطرح $\left(\frac{\text{أمثال } x}{2}\right)^2$

$$\underbrace{x^2}_{\text{جذر}} + \underbrace{4x}_{\text{إشارة}} + \underbrace{4}_{\text{جذر}} - 4 + 5$$

$$(x+2)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x+2)^2 + 1}$$

نخرج ما أتممنا إلى خارج الجذر

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2\left[1 + \frac{1}{(x+2)^2}\right]}$$

في جوار $+\infty$: $\sqrt{(x+2)^2} = x + 2$

$$f(x) = (x+2)\sqrt{1 + \frac{1}{(x+2)^2}}$$

نقسم الأطراف على $x + 2$

$$\frac{f(x)}{x+2} = \sqrt{1 + \frac{1}{(x+2)^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\infty}} = \sqrt{1+0} = 1$$

بالتالي المقارب المائل هو: $y = x + 2$

الاستمرار:

<u>بيانياً:</u> يعني أن يكون C على امتداد واحد دون انقطاع.

<u>تحليلياً:</u> الاستمرار عند a يعني :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

تكروريات هامة:

مجموع تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

جداء تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

قسمة تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 . \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

❶ احسب نهاية f عند الصفر.

❷ هل f مستمر عند الصفر؟

❸ هل f مستمر على $\mathbb{R}$ ولماذا؟

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(3x^2 . \sin\frac{1}{x}\right) = 0 . \sin\infty$$

تحتاج إحاطة

نعلم أن $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

نضرب بـ $3x^2 > 0$

$$-3x^2 \le 3x^2 \sin\frac{1}{x} \le 3x^2$$

$$\lim_{x\to0} -3x^2 = \lim_{x\to0} 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} 3x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى.

يكون f مستمر عند الصفر إذا تحقق:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 \neq 2 = f(0)$$

f ليس مستمراً عند الصفر.

f ليس مستمراً على $\mathbb{R}$ لأنه ليس مستمراً عند الصفر.

⊛ **تدريب:** ليكن التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 . \cos\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

❶ احسب نهاية f عند الصفر.

❷ هل f مستمر عند الصفر؟

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x^2 . \cos\frac{1}{x} = 0 . \cos\infty$$

تحتاج إحاطة

$$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$$

نضرب بـ $x^2 > 0$

$$-x^2 \le x^2 . \cos\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x\to0} -x^2 = \lim_{x\to0} x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} x^2 . \cos\frac{1}{x} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى

حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to0} = f(0)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$$

محقق $\Leftarrow$ f مستمر عند الصفر

تابع الجزء الصحيح: (بدون فواصل)

أياً كان x فإن هناك عدد n يحقق:

$$n < x < n + 1$$

مثال: $x = 2.3$

ندعو n الجزء الصحيح لـ x ونرمز له بـ $E(x)$

تكرورية:

تابع الجزء الصحيح للقسم الصحيح هو نفسه.
$E(3) = 3$

نكتب:

$$E(x) \le x < E(x) + 1 \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{x}$$

$$x - 1 < E(x) \le x \Rightarrow \lim \frac{E(x)}{x}$$

⊛ **تدريب:** يرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد x

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, 2]$ وفق $x \in [0, 2]$:

$$f(x) = x - E(x)$$

❶ اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$، ثم ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$

❷ هل f مستمر عند 1، وهل مستمر على المجال $[0, 2]$؟

❸ احسب نهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1[\\ 1 & ; x \in [1, 2[\\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$$

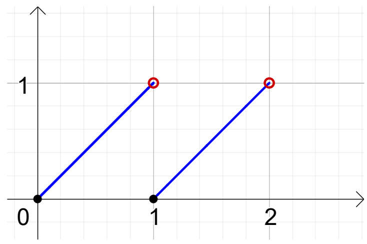
$$f(x) = \begin{cases} x & ; [0, 1[\quad x = 0,\ x \to 1 \\ x - 1 & ; [1, 2[\quad x = 1,\ x \to 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$$

منصف الربع الأول $y_1 = x$

$y_2 = x - 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1, 0)$

$x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (2, 1)$



حتى يكون f مستمر عند 1 يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to1} x=1\neq f(1)=0$$

f ليس مستمراً عند 1 وبالتالي ليس مستمراً على المجال $[0,2]$

من العلاقة: $x-1<E(x)\le x$

نقسم على $x>0$

$$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}1=1$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1$$

من العلاقة : $E(x)\le x<E(x)+1$

نضيف $-E(x)$:

$$0\le \underbrace{x-E(x)}_{f(x)}<1$$

نقسم على $x>0$:

$$0\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى

⊛ تدريب: نرمز بـ $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد x،

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

❶ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

❷ أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$

$$E(x)=\begin{cases}0 & ;x\in[0,1[\\ 1 & ;x\in[1,2[\\ 2 & ;x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\in[0,1[\quad x=0,\ x\to1\\ 1+(x-1)^2 & ;x\in[1,2[\quad x=1,\ x\to2\\ 2 & ;x=2\end{cases}$$

حتى يكون f مستمر على المجال $[0,2]$ يجب أن يكون مستمر على كل قيمة صحيحة منه يعني يجب أن يكون مستمر $x=0$

$$\lim_{x\to0}x^2=0\ ,f(0)=0$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

$\Rightarrow 0=0$ محقق

f مستمر عند الصفر

$$x=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x^2=1$$

$$f(1)=1+(1-1)^2=1$$

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ محقق

f مستمر عند 1

$$x=2$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}1+(x-1)^2=2$$

$$f(2)=2$$

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$ محقق

f مستمر عند 2

$\Leftarrow$ f مستمر على المجال $[0,2]$

تمرينات ومسائل:

1 ادرس نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه :

1) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ $\qquad D_f =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) $f(x) = 2 - \frac{4}{x^2}$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[U]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{0^-} f(x) = 2 - \frac{4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{0^+} f(x) = 2 - \frac{4}{0^+} = -\infty$$

3) $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x+3}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} =]-\infty, -3[U]-3, +\infty[$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

4) $f(x) = x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+2}$

$$D_f = \mathbb{R} \mid \{-2, -1\}$$

$$=]-\infty, -2[U]-2, -1[U]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

5) $f(x) = (2x-3)(5-\sqrt{x})$

$$D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$$

$$f(0) = (-3)(5) = -15$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty)$$

$$= -\infty$$

6) $f(x) = \cos x + \frac{1}{x}$

$$D_F = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[U]0 + \infty[$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$$

$$-1 + \frac{1}{x} \leqslant \cos x + \frac{1}{x} \leqslant +1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(+1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

7) $f(x) = 2x + \sin x$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$$

$$-1 + 2x \leqslant \sin x + 2x \leqslant 1 + 2x$$

$$\lim_{x\to-\infty} (-1 + 2x)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + 2x)$$

$$= -\infty$$

وبحسب مبرهنة الإحاطة فأن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (-1 + 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + 2x) = +\infty$$

وبحسب مبرهنة الإحاطة فأن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

الجـزء الأول

8) $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$

$$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[U]0, +\infty[.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

9) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$

$$D = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$$

$$f(0) = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = x\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x}}\right) = +\infty$$

10) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_{(x)} = +\infty$$

قاوم

2 أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

عند 1 وعند $+\infty, -\infty$ ثم استنتج المقاربات ثم ادرس الوضع النسبي لكل مقارب مع C.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2+1}{1-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C، و C على يمين المقارب

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{2+1}{1-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C، و C على يسار المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

تكرورية:

دراسة الوضع النسبي:

دراسة وضع نسبي لمقارب شاقولي يكفي كتابة

عدد $x =$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين أو يسار المقارب

دراسة وضع نسبي لمقارب أفقي تشكل فرق: $f(x) - y_\Delta$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$\frac{3}{x-1}$	$-$	$+$
الوضع النسبي	تحت المقارب C	فوق المقارب C

3 أوجد نهاية التابع المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$$

عند -1, $+\infty$, $-\infty$ ثم استنتج المقاربات ثم ادرس الوضع النسبي لكل مقارب مع C.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط C ويكون C على يسار المقارب.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط C ويكون C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{2x}{x} = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -\frac{2x}{x} = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي للمقارب الأفقي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-2x}{x+1} - (-2) = \frac{-2x}{x+1} + 2$$
$$= \frac{-2x+2x+2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$ $\quad -1$	$+\infty$
$\frac{2}{x+1}$	$-$	$+$
الوضع النسبي	تحت المقارب C	فوق المقارب C

4 f هو التابع المعرف على $]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$$

1) أثبت أن: $\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$

2) استنتج نهاية f عند $+\infty$

نعلم أن $-1 \le \sin x \le 1$

نضيف $2x$

$$-1 + 2x \le 2x + \sin x \le 1 + 2x$$

نقسم على $x - 1 > 0$

$$\frac{2x-1}{x-1} \le \frac{2x+\sin x}{x-1} \le \frac{2x+1}{x-1}$$
$$\frac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

5 ليكن التابع المعرف ع $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$
2. احسب f' وادرس اشارته ثم نظّم جدولاً بتغييرات f
3. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذراً واحداً فقط وليكن ∝ أثبت أن ∝ ينتمي الى المجال $]1.6 , 1.7[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0$$
$$\Rightarrow 6x(x-1) = 0 < \begin{matrix} x=1 \\ x=0 \end{matrix}$$

الجـزء الأول

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

$f(0) = -1$

$f_{(i)} = -2$

$0 \notin f(]-\infty\,,0[) =]-\infty, -1[$

$0 \notin f(]0,\,1[) =]-2\,,-1[$

$0 \in f(]1+\infty[) =]-2, +\infty[$

كما أنّ f مستمر ومتزايد تماماً على المجال

$]+1, +\infty[$ اذاً للمعادلة f(x)= 0 حل وحيد $\propto$

$f(1.6) = -0.49 < 0$

$f(1.7) = 0.16 > 0$

$\propto \in]1.6\ 1.7[$

$\boxed{7}$ ليكن f التابع المعرف ع $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

أثبت ان الخط c_f يقبل مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= +\infty(\sqrt{2}) = +\infty$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

$$= \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{2}$$

$$f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2x}}$$

$$= \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x}}$$

$$\frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}2} - \sqrt{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - \sqrt{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

المستقيم Δ الذي معادلته

$$\Delta: y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مقارب مائل ل c_f بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \sqrt{2}x$$

$$= \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2x}}$$

$$= \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} - \sqrt{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \sqrt{2}x = \frac{1}{-\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مع المستقيم Δ الذي معادلته

$$\Delta: y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مقارب مائل بجوار $-\infty$

8 من المعلوم أنَّ كثير الحدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ حيث $a_n \neq 0$ نهدف إلى إثبات أنه كان n عدداً فردياً قبل P جذراً حقيقياً على الأقل.

هنا نميز حالتين حيث n عدد فردي فرضاً:

الحالة الأولى: $a_n > 0$

- بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n(-\infty) = -\infty \quad ; \text{ عدد موجب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a \in R$ يحقق $P(a) < 0$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n(+\infty) = +\infty \quad ; \text{ عدد موجب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b \in R$ يحقق $P(b) > 0$

- بما أن P مستمر على المجال $[a, b]$ و $P(a).P(b) < 0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ يحقق $P(c) = 0$

الحالة الثانية: $a_n < 0$

- بما أن P مستمر على R

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n(-\infty) = +\infty \quad ; \text{ عدد سالب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $a \in R$ يحقق $P(a) > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (a_n x^n)$$

$$= a_n(+\infty) = -\infty \quad ; \text{ عدد سالب } a_n$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $b \in R$ يحقق $P(b) < 0$

- بما أن P مستمر على المجال $[a, b]$ و $P(a).P(b) < 0$

إذاً يوجد عدد حقيقي $c \in [a, b]$ يحقق $P(c) = 0$

وبالتالي فإن P يقبل جذراً حقيقياً على الأقل إذا كان n عدداً فردياً.

9 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a عند الضرورة وادرس ، النهاية من اليمين ومن اليسار:

1) $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}$. $\quad a = -\infty, 1, 5, +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2) $f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $\quad a = -\infty, -2, 2, +\infty$

$$f(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{0}{0} \quad \text{ح.ع.ت}$$

$$f(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-6)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{-8}{-4} = +2$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

3) $f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}.$ $\quad a = -\infty, -3, 3, +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \frac{2(-27)-(9)-1}{(-3)^2+(-3)-2}$$
$$= \frac{-64}{4}$$
$$= -16$$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{2(27)-(9)-1}{(3)^2+3-2} = \frac{44}{10}$$
$$= 4.4$$

4) $f(x) = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{2}{x^2-9}$ $\quad a = -\infty, -3, 3, +\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \frac{-x}{0^+} = \mp\infty$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

5) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ $\quad a = -\infty, 1, +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{4}{3}$$

6) $f(x) = 2x + \sin^2 x$ $\quad a = -\infty, +\infty$

$$-1 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$$

$$2x - 1 \leqslant 2x + \sin^2 x \leqslant 2x + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 = -\infty$$

وحسب مبرهنة الإحاطة فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$$

وحسب مبرهنة الإحاطة فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

---

7) $f(x) = x^3(2 + \cos x)$ $\quad a = -, +\infty$

$$-1 \leqslant Cosx \leqslant +1$$

$$1 \leqslant 2 + \cos x \leqslant 3$$

$$x^3 \geqslant x^3(2 + \cos\ x) \geqslant 3x^3$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} (3x^3) = -\infty$$

وحسب مبرهنة الإحاطة فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (3x^3) = +\infty$$

وحسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

فإن

8) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\quad a = 1, +\infty$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$
$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

---

10 ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$$

(1 أثبت محدودية $g(x)$

(2 استنتج نهاية كلاً من

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3+2\sin x}=\lim_{x\to+\infty}x^2g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}=(x+\sin x)g(x)$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

نضرب بـ 2 $\quad -2\le 2\sin x\le 2$

نضيف 3 $\quad 1\le 3+2\sin x\le 5$

نقلب $\quad 1\ge \frac{1}{3+2\sin x}\ge \frac{1}{5}$

$$1\ge g(x)\ge \frac{1}{5}$$

انطلاقاً من $\quad 1\ge g(x)\ge \frac{1}{5}$

نضرب بـ $x^2>0$

$$x^2\ge x^2.g(x)\ge \frac{x^2}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{5}=+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}x^2.g(x)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة الثالثة

نعلم أن $-1\le \sin x\le 1$

نضيف x

$$x-1\le x+\sin x\le x+1$$

نضرب بـ $g(x)$

$$g(x)(x-1)\le (x+\sin x)g(x)\le (x+1)g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)g(x)=+\infty$$

حسب الإحاطة الثالثة:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)g(x)=+\infty$$

11 ليكن f التابع ال معين بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

(1 عين D_f مجموعة تعريف f

(2 أوجد a,b,c التي تحقق:

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

(3 أوجد نهاية f عند أطراف D_f

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{(x-2)(x+1)}$$

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$$

$$\begin{array}{l|l} & 3\\ x^2-x-2 & +3x^2+6x\\ & \overset{-}{+}3x^2\ \overset{+}{-}3x\ \overset{+}{-}6\\ & \qquad +9x\ +6\end{array}$$

$$f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}$$

$$a=3$$

$$\frac{9x+6}{(x-2)(x+1)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

نضرب المعادلة بـ $(x+1)(x-2)$

$$9x+6=b(x-2)+c(x+1)$$

$$9x+6=bx-2b+cx+c$$

$$9x+6=(b+c)x-2b+c$$

بالمطابقة:

$$b+c=9$$

$$-2b+c=6$$

بالطرح

$$3b=3\Rightarrow b=1\Rightarrow c=8$$

$$f(x)=3+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

الجـــزء الأول

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3 + \frac{1}{0^-} + \frac{8}{-3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3 + \frac{1}{0^+} + \frac{8}{-3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 + \frac{1}{3} + \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 + \frac{1}{3} + \frac{8}{0^+} = +\infty$$

12 ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

1) ادرس نهاية f في جوار +1

2) أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x) > 10^6$

أياً تكن x من $I \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) > 10^6 \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > 10^6$$

$$x > 10^6(x-1)^2$$

$$(x-1) + 1 > 10^6(x-1)^2$$

$$0 > 10^6(x-1)^2 - (x-1) - 1$$

$$\Delta = 1 + 4\times 10^6 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \simeq 2\times 10^3$$

$$x - 1 = \frac{1 - 2\times 10^3}{2\times 10^6} = -10^{-3} \Rightarrow x_1 = 0.999$$

$$x - 1 = \frac{1 + 2\times 10^3}{2\times 10^6} = 10^{-3} \Rightarrow x = 1{,}001$$

$$I =]0.999, 1.001[\setminus \{1\}$$

13 ادرس في كل حالة نهاية التابع ، عند .

❶ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \qquad a = +\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ $\quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = ?$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{2x}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \frac{2x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x} = \frac{2x}{x\left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right]}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{2}{1+1} = 1$$

❷ $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x \qquad a = -\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$ $\quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = ?$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4x^2+x} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2+x} - 2x}$$

$$= \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2+x} - 2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{x}{x^2}\right)} - 2x}$$

$$= \frac{x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2x}$$

$$f(x) = \frac{x}{-x\left[\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2\right]} = -\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $\quad a = 3$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

4 $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $\quad a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

$$f(x) = 2(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(1+1) = 4$$

5 $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad a = 1, +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{(-x+\sqrt{x})(-x-\sqrt{x})}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x^2-x}{(x-1)(-x-\sqrt{x})} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$$

$$f(x) = \frac{x}{-x-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x\left(-1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{-1+0}{1-0} = -1$$

6 $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad a = -1, +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2-1})}$$

$$= (\frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{0}{-2} = 0$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

15 ليكن g التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$

3) أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=3=b$$

نفرض $g(x)=X$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim_{X\to+3} g(X)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

$$g(g(x))=\frac{3g(x)-1}{g(x)-3}=\frac{3\frac{3x-1}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}$$

$$=\frac{\frac{9x-3}{x-3}-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}$$

$$=\frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}}=\frac{8x}{8}=x$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=+\infty$$

16 ليكن C_f الخط البياني لتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية d,c,b,a علماً أن الخواص الآتية محققة :

- $x=3$ مقارب شاقولي
- $y=2x-5$ مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$
- $A(1,2)$ تنتمي الى C_f

ليكن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل ل C_f

$$f(x)-y\Delta=\frac{c}{x-d}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)-y\Delta=0$$

ولدينا $y=2x-5$ مقارب مائل

ومنه a=2 , b=-5

- $x=3$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to d} f(x)=\frac{c}{0}=\mp\infty$$

$x=d$ مقارب شاقولي

d=3

- $\Delta: y=2x-5$ مقارب مائل

بأخذ $\Delta: y=2x-5$

$$f(x)-y=\frac{c}{x-d}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

Δ مقارب

وبالمقارنة *a=2 , b=-5*

$$f(1)=2\Rightarrow a+b+\frac{c}{1-d}=2$$

$$2-5+\frac{c}{-2}=2\Rightarrow c=-10$$

17 فيما يأتي c هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f بيّن , في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط c

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$Lim_{x\to 3}f(x)=\dfrac{4}{0^+}=\pm\infty$

$x=3$ مقارب شاقولي

$y=1$ مقارب أفقي

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-3 & x+1 \\ & -x+3 \\ \hline & +4 \end{array}$$

$1-\dfrac{4}{x-3}$

لا يوجد مقاربات مائلة

2) $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x^2+1}$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

لا يوجد مقاربات أفقية

$\Delta: y=x+3$ مقارب مائل

3) $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

وليكن مقارب مائل $\Delta\cdot y=\dfrac{x}{2}+1$

$lim_{x\to\pm\infty}f(x)y_0=\dfrac{-2}{\infty}=0$

4) $f(x)=1-x+\dfrac{3x}{x^2+2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

لا يوجد مقاربات أفقية ولا شاقولية

ليكن $\Delta: y=1-x$ مقارب مائل

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)-y_\Delta=lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2+2}=0$

5) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-4}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لا يوجد مقاربات أفقية

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mp\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي

$f(x)=2x+5-\dfrac{4}{x}$

$2x+5$ ليكن مقارب مائل

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)-y_0=0$

6) $f(x)=\dfrac{x^2+2+\sin x}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$1\leqslant\sin x\leqslant -1$

$1\leqslant 2+\sin x\leqslant 3$

$x^2+1\leqslant x^2+2+\sin x\leqslant 3+x^2$

$x+\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{x^2+2+\sin x}{x}\leqslant\dfrac{3}{x}+x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x+\dfrac{1}{x}=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}x+\dfrac{3}{x}=\mp\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

7) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+1}{x^2-1}$

$$Df = \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

مقارب شاقولي $x = 1$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

شاقولي مقارب $x = 1$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$ $\quad Df =| R\setminus\{+1\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

لا يوجد مقارب أفقي

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$$

ليكن مقارب أفقي $\Delta: y = x - 2$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

9) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$ $\quad Df = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

لا يوجد مقاربات أفقية ولا شاقولية

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2+2 & x^3+1 \\ & -x^3-2x \\ \hline & 0-2x+1 \end{array}$$

$$f(x) = x - \frac{2x+1}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

10) $f(x) = \dfrac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

لا يوجد مقاربات أفقية ولا شاقولية

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x^2+1 & 3x^2+2x-1 \\ & -3x^2-3x \\ \hline & 0-x-1 \end{array}$$

$$f(x) = 3x - \frac{x-1}{x^2+1}$$

ليكن $y = 3x$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

18 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

1) a. أحسب

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$

b. استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني c للتابع f بجوار $+\infty$

c. الوضع النسبي.

2) a. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b. أثبت وجود عدد حقيقي a يحقّق $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وأنّ نهاية $f(x)-ax$ عند $x\to-\infty$ عدد حقيقي b

c. استنتج وجود مقارب مائل `Δ ل C_f بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\sqrt{(x+1)^2+3}$$

$$f(x)-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+3}-(x+1)$$

$$=\frac{(x+1)^2+3-(x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2+3}+(x+1)}=\frac{3}{\sqrt{(x+1)^2+3}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0$$

b. $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل لC_f بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ y\Delta=0$$

x	-∞ +∞
$f(x)-y\Delta$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

a. ح.ع.ت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$$f(x)=x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(-1)=+\infty$$

b. $$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}{x}$$

$$=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1 \qquad a=-1$$

$$f(x)-ax=f(x)+x$$

$$=\sqrt{x^2+2x+4}+x=\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}$$

$$f(x)-ax=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2+0}{-1-1}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$b=-1$$

نستنتج أنّ $\Delta: y=\ -x-1$ مقارب ل C_f بجوار $-\infty$

19 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2.a اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

b. استنتج وجود مقارب مائل ل c_f في جوار $+\infty$. اكتب معادلته

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5$$

$$=(x+2)^2+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

$\Delta: y=x+2$ مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$Lim_{x\to+\infty} f(x)-y_0=0$$

Δ مقارب مائل ل C_f بجوار $+\infty$

$$\Delta: y=x+2$$

20 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

1. ادرس $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. اشرح التأويل الهندسي

2. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y=2x$ مقارب ل C_f بجوار $+\infty$

3. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط c

$lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\infty$ ح.ع.ت

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{-\infty-\infty}=\frac{-1}{-\infty}=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f(x)-y_0=x+\sqrt{x^2+1}-2x$$

$$=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_0=0$$

Δ مقارب مائل ل C_f بجوار $+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y\Delta$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

مفيش وقت للأنهيار

ذاكر وأنت بتعيط 🥹

21 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{|4x^2 - 1|} + x$$

1) ادرس نهاية التابع عند $-\infty$ وعند $+\infty$

2) a. احسب $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x)$

b. احسب $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x)$

3) a. استنتج أنّ c يقبل مقاربين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتهما

b. ادرس الوضع النسبي ل c وكل من المقاربين Δ_1, Δ_2

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$ ح.ع.ت

$$\Rightarrow f(x) = x\left(1 - \sqrt{\left|4 - \frac{1}{x^2}\right|}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$2.a.\ f(x) - 3x = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} - 3x$$

$$= \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x = \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = 0$$

$$b.\ f(x) + x = x + \sqrt{|4x^2 - 1|} + x$$

$$= \sqrt{|4x^2 + 1|} + 2x = \frac{4x^2 + 1 - 4x^2}{\sqrt{|4x^2 + 1|} - 2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$3.\ a.\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = 0$$

$\Leftarrow \Delta: y = 3x$ مقارب ل C_f بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$$

$\Leftarrow \Delta: y = -x$ مقارب ل C_f بجوار $-\infty$

x	$-\infty$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $+\infty$
$f(x) - 3x$	+ 0 -
الوضع النسبي	C فوق Δ C تحت Δ

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = 2x$$

شرط الحل $x \geq 0$

$$|4x^2 - 1| = 4x^2$$

إما $4x^2 - 1 = 4x^2$ ← مستحيلة

أو $4x^2 - 1 = +4x^2 \Leftarrow 8x^2 = 1 \Leftarrow x^2 = \frac{1}{8}$

$$x^2 = \frac{1}{8}\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \text{إما} \\ x = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{مرفوض} \end{cases}$$

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $+\infty$
$f(x) + x$	- 0 +
الوضع النسبي	C تحت Δ C فوق Δ

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = -2x$$

شرط الحل $x \leq 0$

$$|4x^2 - 1| = 4x^2$$

إما $4x^2 - 1 = 4x^2$ ← مستحيلة

أو $4x^2 - 1 = +4x^2 \Leftarrow 8x^2 = 1 \Leftarrow x^2 = \frac{1}{8}$

$$x^2 = \frac{1}{8}\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \text{مرفوض} \\ x = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & \end{cases}$$

22 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

1) ادرس نهاية f عند $\pm\infty$

2) a. اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني

b. ادرس نهاية $h(x)$ المعرّف وفق :

$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $\pm\infty$

c. استنتج أنّ c يقبل مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتهما

3) أثبت أن c يقع فوق كل من هذين المقاربين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = x\left(\sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}\right)$$
$$= +\infty(2) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

.2

$$4x^2 - 4x + 3 = 4x^2 - 4x + 1 - 1 + 3$$
$$= (2x-1)^2 + 2$$
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{(2x-1)^2 + 2}$$

b. $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$

$$= \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{(2x-1)^2 + 2 - (2x-1)^2}{\sqrt{(2x^2-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2 + 2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{3}{+\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \frac{3}{+\infty} = 0$$

عند $-\infty$ يأخذ $\Delta: y = -2x + 1$

عند $+\infty$ يأخذ $\Delta: y = +2x - 1$

واضح أنّ $h(x) \geqslant 0$ مهما تكن x

كان c ← فوق Δ و c فوق Δ`

23 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

1) a. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x + 1$ مقارب للخط c في جوار $+\infty$

b. ادرس الوضع النسبي

2) أصحيح أن المستقيم Δ` الذي معادلته $\Delta: y = x - 1$ مقارب للخط c في جوار $-\infty$ ؟

$$f(x) - y_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$
$$= \frac{x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_0 = 0$$

$\Leftarrow$ Δ مقارب ل c_f بجوار $+\infty$

x	-∞ +∞
$f(x) - y\Delta$	-
الوضع النسبي	C تحت Δ

2) $f(x) - y\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + 1$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}\right)}{x\left(-\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y\Delta = 0$$

← Δ` مقارب ل c في جوار $-\infty$

x	-∞ +∞
$f(x) - y\Delta$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

24 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

احسب $f(-1)$ و $f(0)$ ثم اثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقق $f(c) = 0$

$f_{(1)} = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$

$f(0) = 0 + 0 + 1 = +1 > 0$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{3}$ مستحيلة

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$0 \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

f مستمر ومتزايد على $]-1,0[$

25 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$$

1) أثبت أن f متزايد تماماً على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

2) نظّم جدولاً بتغييرات f على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

3) أوجد $f(]-\frac{3}{2},-1[)$ وأثبتْ أنّ للمعادلة $f(x) = 10$ حلاً وحيداً في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

f اشتقاقي على I واشتقاقه :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\frac{3}{2},-1[$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 = 0$

$x^2(2x+3) = 0 \qquad$ اما $x = 0$

أو $\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} \qquad f(0) = 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	+	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f متزايد تماماً على $]-\frac{3}{2},-1[$

26 ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $I = [0,3]$ وفق :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2. استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$

3. عيّن $f([0,3])$

$f(0) = -3, \qquad f(3) = 0$

$f'(x) = 2x - 2 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

واضح كم الجدول أنه عند $x = 3 \iff f(x) = 0$

$f([0,3]) = [-4,0[$

27 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$f(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$ أثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$ وعيّن $f(\mathbb{R})$

وهو قسمة تابعين مرجعيين كل منهما معرّف

ومستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+1$	↘	0	↗	$+1$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=1$$

من الجدول

$f(0)=0$ $\qquad f(\mathbb{R})=[0,1[$

* يلي بالنص مغلق اكيد أمّا عند الأطراف إذا كان واحد منهم مغلق نأخذ مغلق ,إذا كان تنين مفتوح مناخد مفتوح

29 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$$

عين m ليكون f مستمراً عند الصفر

حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق الشرط:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{0}{0}$$

عدم تعيين

نضرب ونقسم على المرافق

$$f(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{2}=0=m$$

33 ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$ أياً يكن x من I

نرمز بالرمز k الى التابع المعرف على I وفق

$k(x)=f(x)-x$

بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k

أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$

$f(x)\in I \qquad I-[0,\ 1]$

$k(x)=f(x)-x$

$k(0)=f(0)\geqslant 0$

$k(1)=f(1)-1\leqslant 0$

كما أن f مستمر على I للمعادلة k(x)=0 حل واحد على الأقل

إذ يوجد على الأقل $a\in I$ تحقق :

$K(a)=0$

$f(a)-a=0$

$f(a)=a$

مبرهنة القيمة الوسطى :

مبرهنة الإستمرار وحل المعادلات

34 ليكن m عدداً حقيقياً وليكن c_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$$

1) a. أثبت ان الخطين البيانيين c_0 و c_1 يتقاطعان في A,B أوجد احداثيات هذه النقطتين

b. استنتج أن جميع الخطوط البيانية c_m تمر بالنقطتين A و B

2) أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ وعند $-\infty$

3) استنتج مما سبق أن للمعادلة السابقة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متمايزة في $\mathbb{R}$ أيا يكن العدد m

1. a. $f_0 = x^3 - 8x$

$f_1 = x^3 + x^2 - 8x - 1$

$0 = 0 - x^2 + 0 + 1$

$x^2 = 1 \rightarrow x = 1$

$x = -1$

$y_1 = f_0(x_1) = -7 \Rightarrow A(1,-7)$

$y_2 = f_0(x_2) = 7 \Rightarrow$
$B(-1,+7)$

.b

نعوّض $A(1,-7)$ في f_m

$-7 = 1 + m - 8 - m$

محققة $-7 = -7 \Rightarrow A \in C_m$

نعوّض $B(-1,+7)$ في f_m

$7 = -1 + m + 8 - m$

محققة $7 = 7 \Rightarrow B \in Cm$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f_m = -\infty$

3. .

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0$ ، f مستمر على $]-\infty,-1[$ ، $f(-1) = 7 > 0$ $\longrightarrow$ حل واحد على الأقل

$f(-1) = 7 > 0$ ، f مستمر على $]-1,1[$ ، $f(1) = -7 < 0$ $\longrightarrow$ حل واحد على الأقل

$f(1) = -7 < 0$ ، f مستمر على $]1,+\infty[$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$ حل واحد على الأقل

ومنه نستنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث حلول على الأقل

ولا يمكن معادلة من الدرجة الثالثة أن تعطي أكثر من ثلاث حلول

$\Leftarrow$ للمعادلة f(x)=0 ثلاث حلول فقط في $\mathbb{R}$

35 ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق الشرطين :

- أيا كان x من I كان $f(x)$ من I
- أياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x)<1$

أثبت للمعادلة $f(x)=x$ حلاً وحيداً في I

$$f(x)=x \rightarrow f(x)-x=0$$

بأخذ $g(x)=f(x)-x$

$$g(0)=f(0)\geqslant 0$$
$$g(1)=f(1)-1\leqslant 0$$
$$g'(x)=f'_{(x)}-1<0$$

g مستمر ومتناقص تماماً على]0,1[

إذاً للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في I

ومنه للمعادلة $f(x)$ حل وحيد في I

ابدأ الآن،

فالمستقبل لا ينتظر❄

36 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

1. أثبت أن للخط c محور تناظر
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=+\infty$
3. أثبتّ أنّ $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

مهما تكن $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

$\Leftarrow f(x)$ تابع زوجي $\Leftarrow$ متناظر بالنسبة لل yy'

$$\sqrt{1+x^2}-x=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=0$$

$\Delta: y=x$ مقارب ل c في جوار $+\infty$ (d فوق c)

$$f(x)=-\sqrt{1+x^2} \qquad H: y=\mp\sqrt{1+x^2}$$

نربّع الطرفين $y^2=1+x^2$

$$y^2-x^2=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & x=0\\ k & x=0\end{cases}$$

*عيّن قيمة k ليكون f مستمر عند /0/

الحل : عند $x\neq 0$

$$f(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\frac{1}{4}x^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=(1)(1)(0)=0$$

$$f(0)=k$$

ليكون f مستمر عند /0/ $\leftarrow k=0$

الإهداء

إلى روح أخي الحبيب المرحوم محمد نور تكروري

أهدي هذا العمل بكل ما يحمل من جهدٍ وفكر، عرفاناً لمكانتك السامية في قلبي، ووفاءً لذكراك التي بقيت نبراساً يضيء الدرب، رغم غيابك عن هذه الدنيا.

لقد تركت أثراً لا يزول، وحضوراً يستمدّ منه القلب قوة وصبراً، وكأنك روحك ما تزال تحفّ خطواتنا بلطفها.

أسأل الله العظيم، ربّ العرش الكريم، أن يجعل هذا العمل نوراً يصل إليك، ورحمةً تُرفع في ميزان حسناتك، وأن يشرّف مقامك في جنات النعيم، حيث لا وجع ولا فراق.

سلامٌ عليك ما بقيت الذكرى، وما دام الدعاء يصل إلى السماء.