12

الثالث الثانوي العلمي

يمكنكم الانضمام إلى دوراتنا الإلكترونية
للحصول على الشروحات المفصله لكافة افكار
المنهاج عبر الفيديو مع النماذج المؤتمته
والتحريريه بعد نهاية كل وحده

رياضيات مع المدرس ماهر بربر 0994 830 381

ورقة عمل
المتتاليات و
نهاية متتاليه

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ والمطلوب:

١. اكتب u_n بالشكل $u_n=\frac{A}{n^2}+\frac{B}{(n+1)^2}$ أياً كانت $n\geq 1$

٢. نعتبر المجموع

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

أثبت أنّ $S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n=e+\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}+\cdots+\frac{e}{n!}$$

والمطلوب:

١. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

٢. استنتج أنّ العدد $3e$ راجح على المتتالية u_n ثم استنتج تقارب المتتالية u_n

التمرين الثالث:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$u_0=-\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n^2+4u_n+2$

والمطلوب:

١. أثبت أنّ $-2\leq u_n\leq -1$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أنّ

$$u_{n+1}-u_n=(u_n+1)(u_n+2)$$

أياً كان العدد الطبيعي n

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$ $u_0=4$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ثم استنتج أنّ العدد 2 حد قاصر على المتتالية u_n

٢. أثبت أنّ المتتالية u_n متناقصة

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ $\begin{cases}x_0=2\\ x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}\end{cases}$

المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث: $y_n=x_n-1$

١. أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم اكتب عبارة y_n بدلالة n.

٢. احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n=y_0+y_1+\cdots+y_n$$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

٣. احسب بدلالة n المجموع:

$$S'_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$

التمرين السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

١. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٢. أثبت أنّ العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

٣. احسب نهاية المتتالية عند الـ $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2.1[$

التمرين السابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{-1+2u_n}{u_n}\\ u_0=2\end{cases}$ والمطلوب:

١. أثبت بالتدريج أنّ $u_n>u_{n+1}>1$ ثم استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة.

○ نعرف المتتالية $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ والمطلوب:

٢. أثبت أنّ v_n حسابية وعيّن أساسها وحدها الأول.

٣. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ $u_n=\frac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

٤. هل المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ؟ هل هي محدودة؟

٥. أثبت أنّ $u_n<v_n$ أياً كان $n>0$

التمرين الثامن:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً.

٢. استنتج أنّ $1 < u_{n+1} < u_n$ أياً كانت n

لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$v_n = \frac{2}{u_n - 1}$ والمطلوب:

٣. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية

٤. عبّر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

التمرين التاسع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$ و $u_0 = \frac{1}{2}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1 - u_n}{u_n}$ متتالية هندسية.

٣. اكتب v_n بدلالة n

٤. عين تابعاً يحقق $u_{n+1} = f(u_n)$ أياً كانت $n \geq 0$ ثم جد نهاية التابع f عند الـ $+\infty$ ثم أعط عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]-1.2, -0.8[$

التمرين العاشر:

لتكن لدينا المتتاليتان: $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ والمطلوب

١. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

٢. أثبت أنّ المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$

٣. احسب $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

٤. ماذا تستنتج مما سبق؟

حل ورقة العمل

*** التمرين الأول:**

$$U_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

(1)

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2}$$

نوحد المقامات ونحذفها.

$$2n+1 = A\cdot(n+1)^2 + B\cdot n^2$$

$$2n+1 = A(n^2+2n+1) + B\cdot n^2$$

$$\underline{2n} + \underline{\underline{1}} = (A+B)\cdot n^2 + \underline{2A\cdot n} + \underline{\underline{1}}$$

بالمطابقة نجد:

- $A+B=0 \Rightarrow A=-B$
- $2A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow B=-1$

ومنه:

$$U_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

(2) $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$$

$$U_3 = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

ومنه:

- $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

*** التمرين الثاني:**

$$U_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!}$$

(1) إثبات $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

. نرمز للخاصية: $E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n=1$

$E(1): \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

$1 \leq 1$ محققة

. نفرض صحة الخاصية من أجل n أي:

$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ محققة ... *

. نثبت صحة الخاصية من أجل n+1 أي:

نريد إثبات أن:

$E(n+1): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

. نضرب طرفي العلاقة * بـ $\frac{1}{(n+1)}$ نجد:

$$\frac{1}{(n+1)\cdot n!} \leq \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$$

تذكر: $(n+1).n! = (n+1)!$

ومنه:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2}{(n+1)}$$

$$\frac{2}{(n+1)} \leq 1$$

ومنه:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \cdot 1$$

أي أن:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

محققة أيا كان $n \geq 1$

2) استنتاج أن $3e$ حد أ.ع

$$U_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!}$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة:

نجد: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$U_n \leq e\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$U_n \leq e\left(2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}\right)$$

هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$

وعدد الحدود $n-1$.

$$U_n \leq e\left(2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$U_n \leq e\left(2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$U_n \leq e\left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$U_n \leq 3e - \underbrace{e\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

إهمال مقدار سالب من الطرف الأكبر

$$U_n \leq 3.e$$

ومنه $3e$ حد أ.ع للمتتالية.

استنتاج تقارب المتتالية:

ندرس اطراد المتتالية (معيار الفرق)

$$U_{n+1} = \underbrace{e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!}} + \frac{e}{(n+1)!}$$

$$U_{n+1} - U_n = U_n + \frac{e}{(n+1)!} - U_n$$

$$U_{n+1} = \frac{e}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد $3e$ فهي متقاربة

Date: / 3 /

* التمرين الثالث:

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n^2 + 4U_n + 2 \\ U_0 = \frac{-3}{2} \end{cases} \quad ; (U_n)_{n \geq 0}$$

(1) إثبات أن المتتالية محدودة

$-2 \leq U_n \leq -1$.

. نضع الخاصية: $E(n): -2 \leq U_n \leq -1$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n=0$.

$E(0): -2 \leq U_0 = -\frac{3}{2} \leq -1$ محققة

. نفرض صحة الخاصية من أجل n

$E(n): -2 \leq U_n \leq -1$ ...* محققة

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي:

$E(n+1): -2 \leq U_{n+1} \leq -1$

. لدينا: (نكتب U_{n+1} بدلالة U_n واحدة):

$$U_{n+1} = U_n^2 + 4U_n + 2$$
$$= U_n^2 + 4n + 4 - 4 + 2$$
$$= (U_n+2)^2 - 2$$

. لدينا من علاقة الفرض *:

$$-2 \leq U_n \leq -1$$
$$0 \leq U_n + 2 \leq +1 \quad \leftarrow +2$$
$$0 \leq (U_n+2)^2 \leq 1 \quad \leftarrow \text{نربع}$$
$$-2 \leq \underbrace{(U_n+2)^2 - 2}_{} \leq -1 \quad \leftarrow -2$$
$$-2 \leq U_{n+1} \leq -1$$

الخاصية محققة أياً كان $n \geq 0$.

(2) إثبات أن:

$$U_{n+1} - U_n = (U_n+1)(U_n+2)$$

$$U_{n+1} - U_n = U_n^2 + 4U_n + 2 - U_n$$
$$= U_n^2 + 3U_n + 2$$
$$= (U_n+2)(U_n+1)$$

ومنه:

$$U_{n+1} - U_n = (U_n+1)(U_n+2)$$

(3) استنتاج أن U_n متقاربة.

تذكير:

- يمكن استخدام طريقة الفرق لدراسة اطراد متتالية معطاة بالشكل التراجعي إذا سبق وطلب المحدودية.

$$U_{n+1} - U_n = (U_n+2)(U_n+1)$$

ولدينا: $-2 \leq U_n \leq -1$

وبالتالي: $U_n + 1 \leq 0$ و $U_n + 2 \geq 0$ $\Rightarrow (U_n+2)(U_n+1) \leq 0$

أي أن: $U_{n+1} - U_n \leq 0$

المتتالية متناقصة ومتقاربة لأنها محدودة من الأدنى

ولحساب نهاية متتالية معطاة بالشكل التراجعي نحل المعادلة $f(x) = x$

$$x^2 + 4x + 2 = x \Rightarrow$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$(x+2)(x+1) = 0$$

إما $x = -1$ مرفوض

لأن المتتالية متناقصة وحدها البدء $\frac{-3}{2}$

أو $x = -2$ مقبول

ومنه وبما أن f مستمر عند -2 نجد:

$\lim_{n \to +\infty} U_n = -2$ متقاربة.

Date : / 4 /

*** التمرين الرابع :** $(U_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} U_0=4 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n}{2}+\dfrac{2}{U_n} \end{cases}$$

(1) إثبات أن الدالة $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4}{2x^2}>0 \; ; x\in]2,+\infty[$$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]2,+\infty[$

استنتاج أن 2 عنصر قاصر.

يجب إثبات أن $U_n\geq 2$

نرمز الخاصية $E(n): U_n\geq 2$.

نثبت صحة الخاصية من أجل $n=0$.

$E(0)$ $U_0=4\geq 2$ محققة.

نفرض صحة الخاصية من أجل n:

$E(n): U_n\geq 2 \dots *$ محققة

نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$.

$E(n+1): U_{n+1}\geq 2$

لدينا من علاقة الفرض *

$U_n\geq 2$

نصور الأطراف (f متزايد)

$$\underbrace{f(U_n)}_{U_{n+1}}\geq f(2)$$

$$U_{n+1}\geq 2$$

محققة ومنه العدد 2 عنصر قاصر على U_n.

(2) إثبات أن U_n متناقصة

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n}{2}+\frac{2}{U_n}-U_n$$

$$=\frac{U_n^2+4-2U_n^2}{2U_n}\Rightarrow$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{4-U_n^2}{2U_n}=\frac{(2-U_n)(2+U_n)}{2U_n}$$

لدينا: $2\leq U_n$ ومنه:

$$\left.\begin{matrix} 2-U_n\leq 0 \\ 2+U_n>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow U_{n+1}-U_n\leq 0$$

فالمتتالية متناقصة.

(3) استنتاج أن U_n متقاربة.

وجدنا: U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

ولحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x)=x$$

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x\Rightarrow$$

$$\frac{x^2+4}{2x}=x\Rightarrow x^2+4=2x^2$$

$$\Rightarrow x^2-4=0$$

مقبول $x=+2$ أما

مرفوض $x=-2$ أو

ومنه، $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n=+2$

"حيث f مستمرة عند 2 (f معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) ولكنه متزايد على $]2,+\infty[$".

*** التمرين الخامس :** $(x_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$y_n = x_n - 1$

(1) اثبات أن y_n هندسية.

$y_{n+1} = x_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} - 1$

ومنه:

$y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\underbrace{x_n - 1}_{y_n})$

$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n$

بالتالي:

y_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

حدها الأول: $y_0 = x_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ومنه: $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2) $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

مجموع حدود متتالية من متتالية هندسية

$S_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow$

$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \Rightarrow$

$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

حساب النهاية: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$

(3) $S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

مجموع نوعه غير معلوم:

من علاقة التقابل لدينا: $y_n = x_n - 1$

$\Rightarrow x_n = \underbrace{y_n}_{\text{هندسية}} + 1$

$S'_n = y_0 + 1 + y_1 + 1 + \dots + y_n + 1$

$= \underbrace{y_0 + y_1 + \dots + y_n}_{S_n} + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1}$

$S'_n = S_n + n + 1$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n + 1$

$S'_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n$

وبنفس طريقة حساب نهاية S_n نجد:

$\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \frac{5}{2} - 0 + \infty = +\infty$

*** التمرين السادس :** $(U_n)_{n\geq 0}$

$U_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$

(1) دراسة اطراد المتتالية

(المعرفة بالشكل الصريح) ←

$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$

$f'(x) = \frac{2x + 2 - 2x - 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

المتتالية متزايدة تماما.

(2) إثبات أن العدد 2 راجح.

- يجب إثبات $U_n \le 2$

أي $U_n - 2 \le 0$

$$\frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$= \frac{-3}{n+1} \le 0$$

ومنه:

$U_n - 2 \le 0 \Rightarrow U_n \le 2$

بالتالي 2 راجح على المتتالية.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$

. $|U_n - c| < r$

. $c_{\text{النهاية}} = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

. $r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1$

ومنه:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\left|-\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{|-3|}{|n+1|} < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

موجب

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{3} > 10 \Rightarrow$$

$n+1 > 30 \Rightarrow n > 29$

ومنه $n_0 = 29$

التمرين السابع. $(U_n)_{n \ge 0}$

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{-1+2U_n}{U_n} \end{cases}$$

(1) إثبات أن: $1 < U_{n+1} < U_n$

. نعرف الخاصية: $E(n): 1 < U_{n+1} < U_n$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n=0$.

محققة: $E(0): 1 < U_1 = \frac{3}{2} < U_0 = 2$

.. نفرض صحة الخاصية من أجل n.

محققة. $E(n): 1 < U_{n+1} < U_n \cdots *$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$:

$E(n+1): 1 < U_{n+2} < U_{n+1}$

لدينا:

(نكتب U_{n+1} بدلالة U_n واحدة)

$$U_{n+1} = \frac{-1+2U_n}{U_n} = -\frac{1}{U_n} + \frac{2U_n}{U_n}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -\frac{1}{U_n} + 2$$

من علاقة الفرض *:

$$1 < U_{n+1} < U_n$$

نقلب $\rightarrow$ $1 > \frac{1}{U_{n+1}} > \frac{1}{U_n}$

$\times(-1) \rightarrow$

$$-1 < -\frac{1}{U_{n+1}} < -\frac{1}{U_n}$$

نضيف 2 ←

$$1 < \underbrace{-\frac{1}{U_{n+1}} + 2} < -\frac{1}{U_n} + 2$$

$$1 < U_{n+2} < U_n$$

الخاصية صحيحة أياً كانت n.

• استنتاج أن U_n متقاربة.

وجدنا: $1 < U_{n+1} < U_n$

أي أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

(2): $v_n = \frac{1}{U_n - 1}$

إثبات أن v_n حسابية.

$$v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{-1+2U_n}{U_n} - 1} = \frac{U_n}{U_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{U_n}{U_n - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = 1$$

أي أن: v_n حسابية أساسها $r = 1$

حدها الأول v_0: $v_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$

ومنه: (3): $v_n = v_0 + n \cdot r$

$$v_n = 1 + n \Rightarrow v_n = n + 1$$

- استنتاج أن: $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

- لدينا: $v_n = \frac{1}{U_n - 1} \Rightarrow$

$$U_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$= \frac{1 + v_n}{v_n}$$

$$U_n = \frac{1 + n + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

- حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

(4) متى تكون U_n محدودة من الأعلى بالعدد 2 يجب أن يتحقق $U_n - 2 \le 0$

$$U_n - 2 = \frac{n+2}{n+1} - 2 = \frac{n+2-2n-2}{n+1}$$

$$U_n - 2 = \frac{-n}{n+1} \le 0 \Rightarrow U_n \le 2$$

فهي محدودة من الأعلى بالعدد 2.

- ومن الطلب الأول وجدنا بأنها محدودة من الأدنى بالعدد 1 ومنه $1 < U_n \le 2$

فهي محدودة

Date: / 8 /

(5) إثبات أن $U_n < v_n$

$$U_n - v_n = \frac{n+2}{n+1} - (n+1)$$

$$= \frac{(n+2) - (n+1)^2}{n+1}$$

$$= \frac{n+2-n^2-2n-1}{n+1}$$

$$= \frac{-n^2-n+1}{n+1} < 0$$

أي أن:

$$U_n - v_n < 0 \Rightarrow U_n < v_n$$

* التمرين الثامن:

$(U_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases}$$

(1)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x-2x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

أي f متزايدة تماما.

(2) نرمز للخاصية: $E(n): 1 < U_{n+1} < U_n$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n=0$

$E(0): 1 < U_1 = \frac{3}{2} < U_0 = 2$ محققة

. نفرض صحة الخاصية من أجل n:

$E(n): 1 < U_{n+1} < U_n$ ... * محققة

. نثبت صحة الخاصية من أجل n+1:

$E(n+1): 1 < U_{n+2} < U_{n+1}$

. بالاستفادة من علاقة الفرض * ومن تزايد الدالة f نجد:

$$1 < U_{n+1} < U_n \Rightarrow$$

$$f(1) < f(U_{n+1}) < f(U_n) \Rightarrow$$

$$1 < U_{n+2} < U_{n+1}$$

محققة أيا كانت n.

(3) الإثبات أن المتتالية $v_n = \frac{2}{U_n - 1}$ ... * حسابية.

$$v_{n+1} = \frac{2}{U_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{2}{\frac{2U_n - 1}{U_n} - 1}$$

$$= \frac{2U_n}{U_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2U_n}{U_n - 1} - \frac{2}{U_n - 1}$$

$$= \frac{2U_n - 2}{U_n - 1} = \frac{2(U_n - 1)}{U_n - 1}$$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = 2$ حسابية أساسها 2،

وحدها الأول $v_0 = 2$ بالتعويض

(4) $. \; v_n = v_0 + n \cdot r$

$v_n = 2 + 2n \Rightarrow v_n = 2n + 2$

$. \; U_n - 1 = \frac{2}{v_n} \Rightarrow U_n = \frac{2}{v_n} + 1$

$U_n = \frac{n+2}{n+1}$ نعوض فنجد

SARDAR

Date: / 9 /

* التمرين التاسع : $(U_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \end{cases}$$

(1)

. نرمز الخاصية : $E(n): 0<U_n<1$

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n=0$:

$E(0): 0<U_0=\frac{1}{2}<1$ محققة

. نفرض صحة الخاصية من أجل n.

$E(n): 0<U_n<1$ ...* محققة

. نثبت صحة الخاصية من أجل $n+1$:

$E(n+1): 0<U_{n+1}<1$

. نكتب U_{n+1} بدلالة U_n والواحد

بإجراء قسمة إقليدية بسيطة على U_{n+1} نجد:

$$U_{n+1} = -1 + \frac{2}{2-U_n}$$

. لدينا من علاقة الفرض *:

$0<U_n<1$

$0>-U_n>-1$ ← $(-1)\times$

$2>2-U_n>+1$ ← $+2$

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2-U_n}<1$ نقلب

$1<\frac{2}{2-U_n}<2$ ← $+2$

$0<\underbrace{-1+\frac{2}{2-U_n}}_{U_{n+1}}<1$ ← (-1) نضيف

ومنه: $0<U_{n+1}<1$

محققة أياً كانت n.

(2) : إثبات أن المتتالية $V_n = \frac{1-U_n}{U_n}$ ...* هندسية.

$$V_{n+1} = \frac{1-U_{n+1}}{U_{n+1}}$$

$$= \frac{1-\frac{U_n}{2-U_n}}{\frac{U_n}{2-U_n}} = \frac{\frac{2-2U_n}{2-U_n}}{\frac{U_n}{2-U_n}}$$

$$= \frac{2-2U_n}{U_n} = \frac{2(1-U_n)}{U_n} \Rightarrow$$

$$V_{n+1} = 2V_n$$

هندسية أساسها $q=2$ ، $V_0=1$ *و ح

(3) $V_n = V_0 \cdot q^n = 2^n$

- اكتب U_n بدلالة n.

من علاقة التعريف:

$$V_n = \frac{1-U_n}{U_n} = \frac{1}{U_n}-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U_n} = V_n+1 \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n+1}$$

$$U_n = \frac{1}{2^n+1}$$

(4) $U_{n+1} = f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{2-x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

Date : / 10 /

لتعيين A بحيث $x > A$ ويتحقق

$$f(x) \in \left]-1.2 \,,\, -0.8\right[$$

$$\Leftrightarrow \quad |f(x) - c| < r$$

$$c = \frac{-0.8 - 1.2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

النظرية

$$r = \frac{-0.8 + 1.2}{2} = \frac{0.4}{2} = 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{2-x} + 1 \right| < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2}{2-x} \right| < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|2-x|} < \frac{1}{5}$$

$x \longrightarrow +\infty \rightarrow |2-x| = -2 + x$

أو من خلال دراسة إشارة $|2-x|$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

ومنه:
$$\frac{2}{-2+x} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-2+x}{2} > 5$$

$$\Rightarrow -2 + x > 10$$

$$\Rightarrow x > 12 \Rightarrow A = 12$$

* التمرين العاشر:

$$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$v_n = U_n + \frac{1}{n}$$

1) إثبات أن U_n متزايدة على N^*

$$U_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= U_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$U_{n+1} - U_n = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} - U_n$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

U_n متزايدة على N^*

. إثبات أن v_n متناقصة على N^*

$$v_{n+1} - v_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n}$$

$$= \underbrace{U_{n+1} - U_n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

v_n متناقصة على N^*

Date: / 11 /

3) حساب $\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n)$

$$U_n - v_n = U_n - U_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

4) وجدنا:

U_n متزايدة، v_n متناقصة

$\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n) = 0$

ومنه:

المتتاليتين U_n، v_n متجاورتين

* إضافي:

إذا علمت أن $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi^2}{6}$

استنتج نهاية v_n

- بما أن $\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n) = 0$ فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6}$$

تدرب على حل هذه المسائل

بشكل جيد قبل الانتقال

إلى الملفات المؤقتة والنماذج

ضمن مجموعتك

ضبابية: قدرة + دورة الكترونية

أمام