# 12

## الثالث الثانوي العلمي

يمكنكم الانضمام إلى دوراتنا الإلكترونية للحصول على الشروحات المفصله لكافة افكار المنهاج عبر الفيديو مع النماذج المؤتمته والتحريريه بعد نهاية كل وحده

رياضيات مع المدرس ماهر بربر 0994 830 381

أفكار الأسئلة الواردة في هذا الملف مهمه جدا فلا تهمل أي سؤال

# ورقة عمل

# متتاليات + نهايات واستمرار

1) قيمة المجموع $S=1+3+5+\cdots+99$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $99\times 99$ | $B$ | $2500$ | $C$ | $5050$ | $D$ | $10000$ |

2) في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$، ليكن $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ و $t_n=u_{2n}-u_n$. عندئذ

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $t_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ | $B$ | $t_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ |
| $C$ | $t_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ | $D$ | $t_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$ |

3) المتتالية المتزايدة أياً كانت $n\geq 0$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=-2u_n\end{cases}$ | $B$ | $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$ | $C$ | $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=-2u_n\end{cases}$ | $D$ | $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$ |

4) لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n=\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ عندئذ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\frac{2}{3}$ | $B$ | $\frac{3}{2}$ | $C$ | $\frac{8}{9}$ | $D$ | $\frac{9}{8}$ |

5) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=\frac{1}{5}$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{1-2u_n}$، عندئذ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $t_n=\frac{1}{u_n}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | حسابية أساسها $2$ | $B$ | حسابية أساسها $-2$ | $C$ | هندسية أساسها $2$ | $D$ | هندسية أساسها $-2$ |

6) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $2$ وفيها $u_1=\frac{3}{2}$. عندئذ قيمة المجموع $u_2+u_4+\cdots+u_{20}$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $4^{19}-1$ | $B$ | $3(4^{19}-1)$ | $C$ | $4^{10}-1$ | $D$ | $2^{19}-1$ |

7) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $2$ وفيها $u_1=-2$. عندئذ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $u_n=-2^{n-1}$ | $B$ | $u_n=-2^n$ | $C$ | $u_n=-2^{n+1}$ | $D$ | $u_n=-2^{n+2}$ |

8) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية معرفة وفق $u_n=2n+4$ عندئذ تعرف بالتدريج وفق

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=u_n+4\end{cases}$ | $B$ | $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=u_n+2\end{cases}$ | $C$ | $\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=u_n+2\end{cases}$ | $D$ | $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=u_n+4\end{cases}$ |

9) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = -2$ . عندئذ قيمة المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_8$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-510$ | $B$ | $-500$ | $C$ | $-256$ | $D$ | $128$ |

10) لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = au_n + 5$ و $u_0 = 2$ . قيمة $a$ التي تجعل $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $2$ | $B$ | $1$ | $C$ | $-1$ | $D$ | $5$ |

11) لنتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = au_n + 4$ و $u_0 = -2$ . قيمة $a$ التي تجعل $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $3$ | $B$ | $-2$ | $C$ | $1$ | $D$ | $4$ |

12) حدود المتتالية $u_n = 3^{2n} - 1$ مضاعفة للعدد:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $2$ | $B$ | $3$ | $C$ | $5$ | $D$ | $7$ |

13) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = 5$ عندئذ قيمة المجموع $S = u_1 + u_4 + u_5 + u_6 + u_9$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $5$ | $B$ | $10$ | $C$ | $15$ | $D$ | $25$ |

14) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ »، عندئذ أصغر عدد طبيعي غير معدوم $n$، تكون $E(n)$ صحيحة هو:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $3$ | $B$ | $4$ | $C$ | $5$ | $D$ | $6$ |

15) ليكن $f$ التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x + 20y, 4x + 9y)$ ، أي $f(M) = M'$ .

لتكن $S_0$ النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$ عندئذ $f(S_0)$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $(9,20)$ | $B$ | $(9,9)$ | $C$ | $(4,9)$ | $D$ | $(9,4)$ |

16) ليكن $P$ تابعاً تآلفياً (من الدرجة الأولى) بحيث تُحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة

التدريجية $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n$ أياً كانت $n$ عندئذ:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $t_n = 2n + 2$ | $B$ | $t_n = 4n - 2$ | $C$ | $t_n = 4n + 2$ | $D$ | $t_n = 2n - 4$ |

17) نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = -5$ و $u_{n+1} = u_n + n$ عندئذ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $u_{50} = 1220$ | $B$ | $u_{50} = 1225$ | $C$ | $u_{50} = 1235$ | $D$ | $u_{50} = 1250$ |

18) عند دراسة نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{|x+1|}}$ عند $-1$ نجد أن نهايته

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-\infty$ | $B$ | $+\infty$ | $C$ | $-1$ | $D$ | غير موجودة |

19) عند دراسة نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{\sin|x|}{x}$ عند $0$ نجد أن نهايته

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-1$ | $B$ | $1$ | $C$ | $0$ | $D$ | غير موجودة |

20) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

معادلة المقارب المائل للخط $C$ في جوار $+\infty$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $y = 3x - 2$ | $B$ | $y = x + 4$ | $C$ | $y = 3x - 3$ | $D$ | $y = x + 1$ |

21) ليكن $f$ التابع المعرف على $I = ]3, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-3}$ عندئذ نهاية $f(f(x))$ عند $3$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-\infty$ | $B$ | $+\infty$ | $C$ | $3$ | $D$ | غير موجودة |

22) ليكن $f$ التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x + \cos x$ عندئذ للمعادلة $f(x) = 0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | حل وحيد | $B$ | حل على الأكثر | $C$ | حل على الأقل | $D$ | حلان |

23) ليكن التابع $f$ المعرف على $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = \tan x$ عندئذ نهاية $f$ عند $\dfrac{\pi}{2}$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-\infty$ | $B$ | $+\infty$ | $C$ | $3$ | $D$ | غير موجودة |

24) نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ عند $1$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $1$ | $B$ | $\dfrac{1}{2}$ | $C$ | $2$ | $D$ | $0$ |

25) نهاية التابع $f : x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ عند الصفر هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-\infty$ | $B$ | $+\infty$ | $C$ | $1$ | $D$ | $0$ |

26) نهاية التابع $f : x \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ عند $+\infty$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $B$ | $+\infty$ | $C$ | $1$ | $D$ | $0$ | $-\infty$ |

27) ليكن $m$ عدداً حقيقياً، وليكن $C_m$ الخط البياني للتابع $f_m$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$

جميع الخطوط البيانية $C_m$ تمر بالنقطتين

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $A(-1,-7)$ و $B(1,7)$ | $B$ | $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$ | $C$ | $A(1,-1)$ و $B(-1,1)$ | $D$ | $A(7,-7)$ و $B(-1,1)$ |

28) ناتج $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}} - 2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $4\sqrt{2}$ | $B$ | $1$ | $C$ | $2\sqrt{2}$ | $D$ | $-2\sqrt{2}$ |

29) التابع $x \mapsto \sqrt{1-\cos(2x)}$ هو تابع يحقق

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | فردي ومحدود ودوره $2\pi$ | $B$ | زوجي ومحدود ودوره $2\pi$ |
| $C$ | فردي ومحدود ودوره $\pi$ | $D$ | زوجي ومحدود ودوره $2\pi$ |

30) إن قيمة $m$ الذي يجعل التابع $f$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}; x > 0 \\ m(x+2); x \leq 0 \end{cases}$ مستمراً على $\mathbb{R}$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-1$ | $B$ | $1$ | $C$ | $0$ | $D$ | $2$ |

31) عند دراسة نهاية التابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{x}, & x \neq 0 \\ 5\ , & x = 0 \end{cases}$ عند $0$ نجد أن نهايته

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $5$ | $B$ | $1$ | $C$ | $0$ | $D$ | غير موجودة |

32) عند دراسة نهاية التابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ عند $0$ نجد أن نهايته

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $5$ | $B$ | $1$ | $C$ | $0$ | $D$ | غير موجودة |

Date : / 1 /

(1) $S_n = 1+3+5+\dots+99$

• طريقة أولى:

مجموع الأعداد الفردية التي تبدأ من 1 وعددها n : يساوي $n^2$

$S_n = \underbrace{1+3+5+\dots+99}_{50 \text{ عدد}} \Rightarrow S_n = 50^2 = 2500$ . الجواب B .

• طريقة ثانية: مجموع حدود (يحوي قفزة) من متتالية حسابية

أساسها 2 وحدها الأول 1 وحدها الأخير 99 حيث:

عدد الحدود $= \dfrac{99-1}{\underset{\text{طول القفزة}}{2}} + 1 = 50$ حد

ومنه: المجموع $= 50 \times \dfrac{99+1}{2} = 2500$

(2) $U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ ، $t_n = U_{2n} - U_n$

$$U_{2n} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} \Rightarrow$$

$$U_{2n} = U_n + \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} \Rightarrow$$

$$t_n = U_{2n} - U_n = U_n + \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} - U_n \Rightarrow$$

$$t_n = \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$$

. الجواب A .

(3) المتتالية المتزايدة هي D : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases}$

لأنها هندسية أساسها موجب وأحد حدودها موجب فهي تزايدية . $q=2$

SARDAR

Date : / 2 /

(4) هندسي أساسها هو؟؟ $U_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

$$U_{n+1} = \frac{2^{3n+3}}{3^{2n+2}} = \frac{2^3 \cdot 2^{3n}}{3^2 \cdot 3^{2n}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \Rightarrow$$

$$U_{n+1} = \frac{8}{9} U_n$$

ومنه $q = \frac{8}{9}$ الجواب C.

---

(5) $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1-2U_n} \end{cases}$ ولدينا علاقة التعاقبي $t_n = \frac{1}{U_n}$

$$t_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1-2U_n}{U_n}$$

$$= \frac{1}{U_n} - \frac{2U_n}{U_n} \Rightarrow$$

$$t_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{U_n}}_{} - 2 \Rightarrow$$

$$t_{n+1} = t_n - 2 \Rightarrow$$

حسابية أساسها $-2$ $\quad t_{n+1} - t_n = -2$ الجواب B.

---

(6) $(U_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = 2$

وفيها $U_1 = \_\_\_$ عندئذ قيمة المجموع: $U_2 + U_4 + \dots + U_{20}$

مجموع حدود من متتالية هندسية (الحوي قفزة)

الحد الأول $U_2 \leftarrow U_2 = q \cdot U_1 = \frac{3}{2}(2) = 3$

عدد الحدود 10 $\leftarrow$ $\quad$ عدد الحدود $= \frac{20-2}{2} + 1 = 10$

$2 \leftarrow$ طول القفزة.

SARDAR

Date : / 3 /

$q' = q^{\text{طول القفزة}} = 2^2 = 4$

ومنه:

$\text{المجموع} = 3 \times \frac{1-4^{10}}{1-4} = -(1-4^{10}) = -1+4^{10}$

الجواب C

---

7) $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 2 وفيها $U_1=-2$ عندئذ

$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{U_n}{U_1} = q^{n-1} \Rightarrow$

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} = -2\cdot(2)^{n-1} = -(2^n)$ الجواب B

---

8) $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية $U_n = 2n+4$ نريد علاقة تدريجية لهذه المتتالية.

• طريقة أولى:

$U_0 = 2(0)+4 \rightarrow U_0 = 4$ | نحسب $U_1$ ، $U_0$ في كل الخيارات نجد أن

$U_1 = 2(1)+4 \rightarrow U_1 = 6$ | المتتالية C هي التي تحقق $U_0=4$ ، $U_1=6$

الجواب C

• طريقة ثانية: الحد البدء هو $U_0 = 2(0)+4 = 4$

أساس المتتالية الحسابية هو أمثال n أي 2 أو من خلال

$U_{n+1} - U_n = r \Rightarrow U_{n+1} = 2(n+1)+4 = 2n+2+4 = 2n+6$

$U_{n+1} - U_n = 2n+6-2n-4 = 2 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 2 \Rightarrow$

$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2 \\ U_0 = 4 \end{cases}$ الخيار C.

---

فائدة: في العلاقة التدريجية لمتتالية حسابية دائماً أمثال $U_n$ هي 1

لا تنسى دوماً: $U_n$ حسابية $\Leftarrow U_{n+1} = U_n + r$

SARDAR

Date : / 4 /

(9) $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 2 وحدها $U_1=-2$ 	$U_1+U_2+\dots+U_8=??$

مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية.

$$\text{المجموع} = (-2)\cdot\frac{1-2^8}{1-2} = 2(1-2^8)$$

$$= 2(1-256)$$

$$= -510$$ الجواب A.

---

(10) $\begin{cases} U_{n+1}=aU_n+5 \\ U_0=2 \end{cases}$ نريد قيمة a التي تجعل $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية.

في العلاقة التراجعية لمتتالية حسابية دائما أمثال $U_n$ هو 1

أي يجب أن تكون $a=1$ الجواب B

---

(11) $\begin{cases} U_{n+1}=aU_n+4 \\ U_0=-2 \end{cases}$ نريد قيمة a التي تجعل $(U_n)_{n\geq 0}$ ثابتة:

$U_{n+1}=U_n=U_0=-2 \Rightarrow$ نعوض $U_{n+1}=aU_n+4$

$-2=a(-2)+4$

$-6=-2a \Rightarrow a=3$ الجواب A

---

(12) حدود المتتالية $U_n=3^{2n}-1$ مضاعفة للعدد.

. طريقة أولى:

$U_0=3^0-1=0$
$U_1=3^2-1=8$
$U_2=3^4-1=80$

. من بين الخيارات المطروحة نجد أن الحدود مضاعفات للعدد 2.

. الجواب A.

. طريقة ثانية: $x^n-a^n=(x-a)(\dots\dots\dots)$

$3^{2n}-1=3^{2n}-1^{2n}=(3-1)(\dots\dots \text{عدد طبيعي})=2(\dots\dots)\rightarrow$ مضاعف لـ 2

Date: / 5 /

(13) $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية فيها $\underline{\underline{U_5=5}}$ نريد قيمة المجموع:

$S = U_1 + U_4 + U_5 + U_6 + U_9$

• مجموع حدود غير متعاقبة (و القفزة غير ثابتة) من متتالية حسابية لذلك

لا نستطيع تطبيق القانون.

• طريقة أولى: نعلم أن: $U_n - U_m = (n-m)\cdot r$

$U_n - U_5 = (n-5)\cdot r \Rightarrow U_n = U_5 + (n-5)\cdot r$

$\cdot\ U_1 = U_5 - 4\cdot r = 5 - 4\cdot r$

$\cdot\ U_4 = U_5 - r = 5 - r$

$\cdot\ U_5 = 5$ فرضاً

$\cdot\ U_6 = U_5 + r = 5 + r$

$\cdot\ U_9 = U_5 + 4\cdot r = 5 + 4\cdot r$

بالجمع نجد:

$S = U_1 + U_4 + U_5 + U_6 + U_9 = 25$ الجواب D

• طريقة ثانية:

بما أن المتتالية حسابية يمكن الاستفادة من علاقة المتوسط الحسابي:

$U_5 = \dfrac{U_1 + U_4 + U_6 + U_9}{4} \Rightarrow 4U_5 = U_1 + U_4 + U_6 + U_9$

ومنه:

$S = 4U_5 + U_5 = 5U_5 = 25$

---

(14) $E(n): 3^n \geq 2^n + 5n^2$

نريد أصغر عدد طبيعي تكون $E(n)$ محققة عنده لذلك نعوض الخيارات:

$\cdot\ E(3): 3^3 \geq 2^3 + 5(3)^2$

$27 \geq 8 + 45$ غير محققة

$\cdot\ E(4): 3^4 \geq 2^4 + 5(4)^2$

$81 \geq 16 + 80$ غير محققة

$\cdot\ E(5): 3^5 \geq 2^5 + 5(5)^2$

$243 \geq 32 + 125$ محققة

$\cdot\ E(6): 3^6 \geq 2^6 + 5(6)^2$

$729 \geq 64 + 180$ محققة

• الخاصة محققة بدءاً من $n=5$ الجواب C

SARDAR

Date : / 6 /

(15) $M(x,y)$ ; $f(M)=M'$ ; $M'(9x+20y, 4x+9y)$

$S_0(1,0)$ ; $f(S_0) = ??$

* فكرة السؤال تتعلق بالتابع النقطي "صورة نقطة أي نقطة"

وقد تحدثنا عنه في المسألة 18/26 *

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = (9x+20y, 4x+9y) \\ S_0(1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

"لحساب $f(S_0)$ نعوض مكان $x=1$ ومكان $y=0$"

$f(S_0) = f(1,0) = (9, 4)$ الجواب D

---

(16) P تابع تآلفي من الدرجة الأولى

$\underline{\underline{t_n = P(n) = an+b}}$

$t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n + n$

* فكرة وضعية من المسألة 8/23 *

$$\left.\begin{array}{l} t_{n+1} = P(n+1) = a(n+1)+b \\ t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n + n = \frac{1}{2}(an+b)+n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a(n+1)+b = \frac{1}{2}(an+b)+n$

$\underline{an} + \underline{\underline{a+b}} = \underline{(\frac{1}{2}a+1)n} + \underline{\underline{\frac{b}{2}}}$

بالمطابقة نجد ←

• $a = \frac{1}{2}a+1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a=2}$

• $a+b = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = -a \Rightarrow b = -2a$

$b = -2(2) = -4$

عوضنا: $\boxed{b=-4}$

$$\left\{\begin{array}{l} t_n = P(n) = an+b \\ t_n = \underbrace{2n-4} \end{array}\right.$$

الجواب D

Date : / 7 /

(17) $U_{50} = ??$

$$\begin{cases} U_0 = -5 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$$

اليس من المنطق أن نحسب جميع الحدود من $U_1$ وحتى $U_{50}$ !!!؟؟

. نحسب الحدود الأولى:

$n=0 \rightarrow U_1 = U_0 + 0 \Rightarrow U_1 = -5 + \underline{0}$

$n=1 \rightarrow U_2 = U_1 + 1 \Rightarrow U_2 = -5 + \underline{1}$

$n=2 \rightarrow U_3 = U_2 + 2 \Rightarrow U_3 = -5 + 1 + \underline{2}$

$n=3 \rightarrow U_4 = U_3 + 3 \Rightarrow U_4 = -5 + 1 + 2 + \underline{3}$

$n=4 \rightarrow U_5 = U_4 + 4 \Rightarrow U_5 = -5 + 1 + 2 + 3 + \underline{4}$

$\vdots$

$n=49 \rightarrow U_{50} = U_{49} + 49 \Rightarrow U_{50} = -5 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 49$

$U_n = -5 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n-1)$

ومنه :

$U_{50} = -5 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + 49)}$ → مجموع حدود متتالية حسابية تبدأ من 1 $\dfrac{n(n+1)}{2}$

$= -5 + \dfrac{(49)(50)}{2}$

$= -5 + (49)(25) = -5 + 1225 \Rightarrow U_{50} = 1220$ الجواب A.

---

(18) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{|x+1|}}$

$\cdot \lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ الجواب A

---

(19) ح ع ت $f(x) = \dfrac{\sin|x|}{x}$ , $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$

$$\sin|x| = \begin{cases} \sin x & ; x > 0 \\ \sin(-x) = -\sin x & ; x < 0 \end{cases}$$

SARDAR

Date: / 8 /

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\sin x}{x} = -1$

عوض:

النهايتين غير متساويتين

فدي عدم نهاية.

الجواب D

---

(20). $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

نحتاج معادلة المقارب المائل بجوار $+\infty$.

• الطريقة التقليدية: نقوم بإتمام $x^2-6x+10$ إلى مربع كامل.

$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1$

$= (x-3)^2 + 1 \rightarrow$ نُهمل عند $\infty$

$y_\Delta = 2x + 1 + \underbrace{|x-3|}_{\text{موجب في جوار } +\infty} \Rightarrow y_\Delta = 2x + 1 + x - 3$ : عوض

$y_\Delta = 3x - 2$ . الجواب A

• الطريقة السريعة التي تعلمناها:

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \underbrace{g(x)}_{\text{درجة أولى}}$

$\Delta : y = \left| \sqrt{a}\, x \mp \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \right| + g(x) \Rightarrow y = \left| x - \dfrac{6}{2} \right| + 2x + 1$

$y = |x - 3| + 2x + 1$

$y = x + 4$ في جوار $-\infty$ $\qquad$ $y = 3x - 2$ في جوار $+\infty$.

---

(21) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$ ; $x \in ]3 ; +\infty[$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3} f(f(x)) = ??$

• $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to 3} f(f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +3$ $\qquad$ الجواب C

Date: / 9 /

(22) $f(x)=3x+\cos x\ ; x\in\mathbb{R}$

نريد عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ . $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $f'(x)=3-\sin x>0$ .

$f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

و $0\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$

الجواب A.

---

(23) $f(x)=\tan x\ ; x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\leftarrow$ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ الجواب B.

cos موجب في الربع الأول.

---

(24)

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

. طريقة أولى: نضرب بمرافق البسط والمقام معا:

$$f(x)=\frac{(x+3-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}\Rightarrow\lim_{x\to1} f(x)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ الجواب B.

. طريقة ثانية (لوبيتال).

Date: / 10 /

(25) $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ ، $x \to 0$

مثال علاوي ص 45

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

نضرب ب $x > 0$ :

$-x \leq x \cdot \sin\frac{1}{x} \leq x$

$-x \leq f(x) \leq x$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ حسب مبرهنة الاحاطة الأولى

نضرب ب $x < 0$ .

$-x \geq x\sin\frac{1}{x} \geq x$

$-x \geq f(x) \geq x$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ حسب مبرهنة الاحاطة الأولى

النهايتين متساويتين ومنه $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ الجواب D

• نستطيع الحل اعتماداً على الاحاطة 2.

• ملاحظة: هنا وكون السؤال اختيار من متعدد نستطيع مباشرة وضع الجواب D

لأن: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \times (-1 \leq \text{عدد} \leq 1) = 0$

---

(26) $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ ، $x \to +\infty$

ص 48 من الكتاب

$f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

نفرض $t = \frac{1}{x}$

$x \to +\infty$ ، $t \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ . الجواب C

---

(27) $f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$

ص 34 تمرين 7 من الكتاب

$m = 0 \Rightarrow f_0(x) = x^3 - 8x$

$m = 1 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$

$f_0(x) = f_1(x) \Rightarrow$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ، } x = +1$

$x = 1 \Rightarrow f_0(1) = -7 \Rightarrow A(1,-7)$ ، $x = -1 \Rightarrow f_0(-1) = +7 \Rightarrow B(-1,7)$ الجواب B

SARDAR

Date: / 11 /

(28)

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}} - 2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ??$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot (2)^{\frac{3}{2}}$

$= 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} = 0$ الجواب B

---

(29) $f(x) = \sqrt{1 - \cos(2x)}$ معرف على $R$ لأن $1 - \cos(2x) \geq 0$ محققة دوماً

. $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

. $f(-x) = \sqrt{1 - \cos(-2x)} = \sqrt{1 - \cos(2x)} = f(x) \longrightarrow$ .التابع زوجي

.أ صغر دور للتابع:

← إن لوطلم يذكر ذلك

$T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

وعليه: $f$ زوجي و محدود دوره $\pi$ الجواب D.

أو

. $\forall x \in R \Rightarrow x + \pi \in R$

. $f(x+\pi) = \sqrt{1 - \cos(2x + 2\pi)} = \sqrt{1 - \cos(2x)} = f(x) \Rightarrow$ دوره $\pi$.

.كذلك $2\pi$ دور له ولكن نختار أصغر دور للتابع.

---

(30) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} \; ; x > 0 \\ m(x+2) \; ; x \leq 0 \end{cases}$

نحتاج إلى قيمة $m$ التي تجعل التابع $f$ مستمراً على $R$.

. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x} = \frac{x \cdot \sqrt{x+1}}{x} \; ; x > 0$

$= \sqrt{x+1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2m$

Date: / 12 /

"حتى يكون f مستمر عنده يجب أن يتحقق الصورة = النهاية"

$1 = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ الجواب D.

---

(31)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{x} & ; x \neq 0 \\ 5 & ; x = 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 5 \dfrac{\sin 5x}{5x} = 5(1) = 5$

- $f(0) = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 5$

الجواب A.

ملاحظة مفيدة: في تابع الفروع (الصعب)

طالبما يسألك عن النهاية كأنو عم يسألك عن الاستمرار

---

(32)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

وجدنا في السؤال (31) أن:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5$

ولدينا:

- $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5 \neq f(0) = 1$

النهاية غير موجودة الجواب D.

---

مبارك مسبقة + دعوة بالخير

أ. ماهر

SARDAR