12

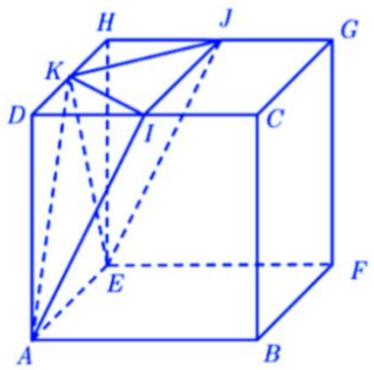
الثالث الثانوي العلمي

رياضيات مع المدرس ماهر بربر 0994 830 381

ورقة عمل

عشـــــرون مســـــأله
في الأشـــــــعة

المسألة الأولى: نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب. نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.



1) أوجد احداثيات النقاط A,I,E .

2) اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

3) احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ و حجم الهرم $KAIJE$.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K .

5) احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

6) أثبت أنّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(I,\beta),(E,\gamma)$ حيث α و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

المسألة الثانية. $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

1)عين احداثيات النقاط D,B,E,G

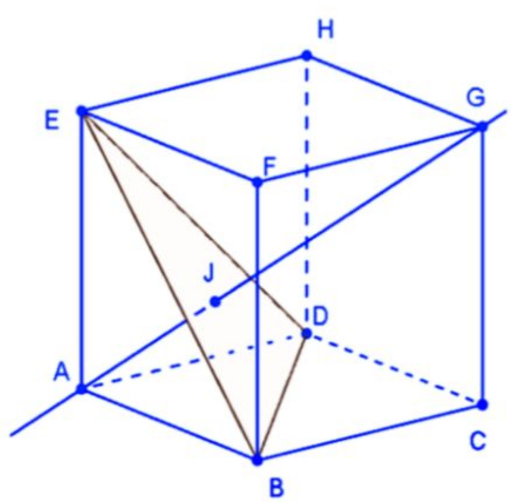
2) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG)

3) أثبت أنّ المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين احداثياتها

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

6)أحسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$



المسألة الثالثة:

نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب الى معلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً، وليكن $\mathcal{Q}$ المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. وأخيراً لتكن S الكرة مركزها A ونصف قطرها AB.

1) أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي $\mathcal{P}$.

2) جِد معادلة الكرة S.

3) أثبت أن المستوي $\mathcal{Q}$ مستوي مماس للكرة S.

4) أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $d:\begin{cases}x=t,\\ y=12-5t, & t\in\mathbb{R}\\ z=4-3t,\end{cases}$.

(a) أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

(b) أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

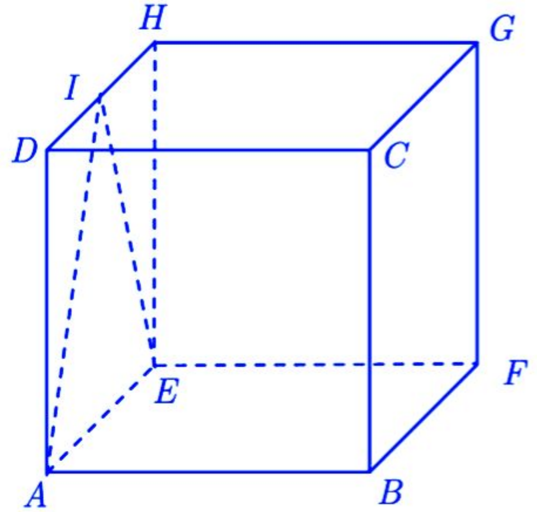
المسألة الرابعة نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1. مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$: حيث I هي منتصف $[DH]$.

1) أعط إحداثيات النقاط I و E و A.

2) جِدْ إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.

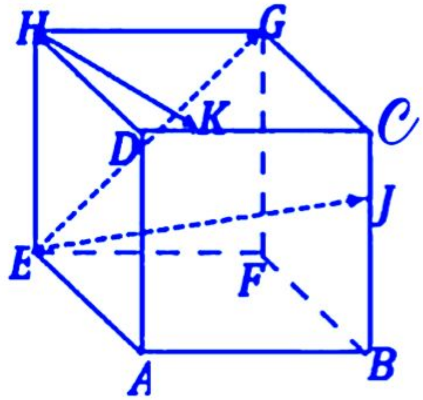
3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$؟

4) احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$.



المسألة الخامسة $ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:



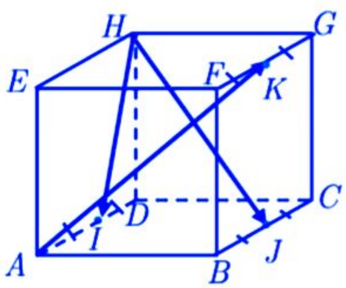
1) جد احداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً

4) أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ)

المسألة السادسة: $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$



1. باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$.

2. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة : $\overrightarrow{AK}=a\,\overrightarrow{HI}+b\,\overrightarrow{HJ}$

ثمّ استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً .

المسألة السابعة: في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

1) أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

2) اكتب معادلةً للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

المسألة الثامنة:

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

المسألة التاسعة: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

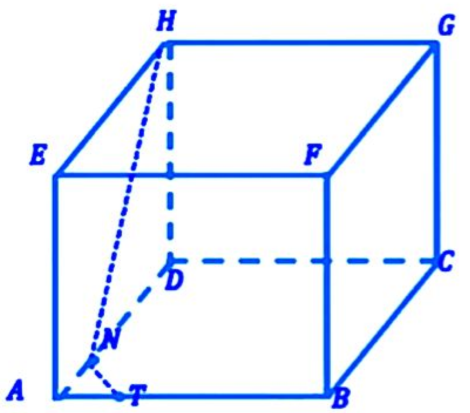
2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC)

المسألة العاشرة:

ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1.

وT نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.



❶ في المعلم المتجانس $\left(A:\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ جد إحداثيات النقاط H,F,N,T.

❷ جد الشعاعين $\overrightarrow{NT},\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي (HNT).

❸ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF).

❹ نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT).

❺ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT). ما طبيعته

المسألة الحادية عشر:

$ABCD$رباعي وجوه , مركز ثقله G, فيه K مركز ثقل الوجه BCD

اثبت أن النقاط K,A,G تقع على استقامة واحدة وعين موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

المسألة الثانية عشر:

لتكن النقاط $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(2,3,-1)$, $D(0,0,2)$ والمطلوب :

❶ عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$و$(B,2)$و$(C,2)$و$(D,1)$

❷ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=6$

❸ جد معادلة للمجموعة S

المسألة الثالثة عشر:

ادرس وضع المستقيمين d, d' المعرفين كما يأتي :

$$d':\begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} ; s \in \mathbb{R} \text{ و } d:\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

المسألة الرابعة عشر:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d', d :

$$d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s + 3 \\ z = -s + 1 \end{cases} : s \in \mathbb{R} \text{ و } d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

و هل المستقيمين d', d يقعان في مستوٍ واحد ؟ علل إجابتك

المسألة الخامسة عشر:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب :

❶ **أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$**

❷ **أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان**

المسالة السادسة عشر

أوجد مسقط النقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم :

$$d:\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ثم أوجد بعد A عن المستقيم d

المسألة السابعة عشر:

نتأمل في معلم متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ ليكن لدينا المستوي $P : x + y + z - 6 = 0$

و المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $t \in \mathbb{R}$: $d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$

❶ أثبت أن المستقيم d عمودي على المستوي P

❷ جد معادلة للمستوي Q المار من النقط $A(-1,-1,2)$ والموازي للمستوي P

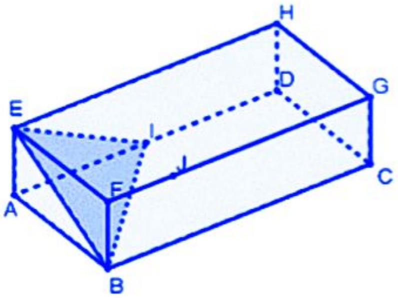
❸ جد معادلة الكرة التي مركزها يقع على المستقيم d وتمس كل من المستويين P و Q

المسألة الثامنة عشر:

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2\ ,\ \ AD = 4\ ,\ \ AE = 1$

ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, والمطلوب :



❶ جد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من I, J.

❷ أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$.

❸ بين نوع المثلث EIB, ثم احسب مساحته.

❹ احسب بعد G عن المستوي (EIB), واستنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$.

❺ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB).

❻ استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

المسألة التاسعة عشر:

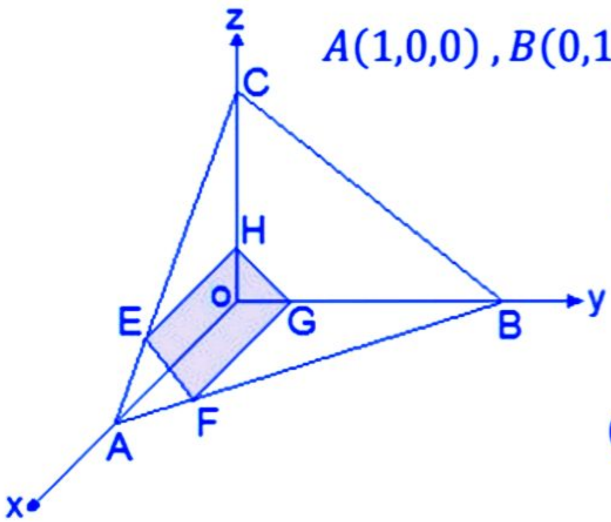
لتكن لدينا النقاط $B(4,0,0), A(0,0,6), O(0,0,0)$

❶ اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها $\left(O, \vec{k}\right)$ و مركزي قاعدتيها A و O ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

❷ اكتب معادلة للمخروط الذي محوره $\left(O, \vec{\imath}\right)$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{6}$

❸ أي من النقطتين $C(10,0,0), D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ تنتمي للمخروط واي منها لا تنتمي مع التعليل

المسألة العشرون:



في معلم متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقاط : $C(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $A(1,0,0)$

و المستوي : $0 < t < 1 \quad ; \quad P;\ y+z=t$.

يقطع المستوي P المستقيمات (OC) , (OB) , (AB) , (AC)

في النقاط H , G , F , E بالترتيب . المطلوب :

❶ أوجد إحداثيات النقطتين H , G .

❷ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين (AB) , (AC)

و استنتج إحداثيات النقطتين F , E .

❸ أثبت أن الرباعي $E\ F\ G\ H$ مستطيل , و احسب مساحته $A(t)$ بدلالة t .

❹ ادرس تغيرات $A(t)$ على المجال $]0,1[$ و استنتج قيمة t التي تجعل المساحة أعظمية .

مسائل شاملة في الأشعة.

*المسألة الأولى:

(1) $A(0,0,0)$ ، $E(0,1,0)$

$I(\frac{1}{2},0,1)$ ،

(2) كتابة معادلة المستوي $(AIJE)$

. نلاحظ أن: $\vec{AI}(\frac{1}{2},0,1)$

$\vec{AE}(0,1,0)$

. شعاعين غير مرتبطين خطيا يعينان مستوي.

. ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي

عندئذ: $\vec{n}\cdot\vec{AI}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$ ...(1)

. $\vec{n}\cdot\vec{AE}=0 \Rightarrow b=0$ ...(2)

من (1) نجد: $a=-2c$

نفرض $c=1$ نجد $a=-2$ ومنه،

. ناظم، $\vec{n}(-2,0,1)$

. نقطة، $A(0,0,0)$

ومنه معادلة المستوي (AIE) ،

$-2(x-0)+0(y-0)+1\cdot(z-0)=0$.

$-2x+z=0$

//. نعوض إحداثيات النقطة J في المعادلة الناتجة حيث:

. J منتصف $[GH]$: $G(1,1,1)$ ، $H(0,1,1)$ $\Rightarrow J(\frac{1}{2},1,1)$

. نعوضها في معادلة المستوي الناتجة:

$-2(\frac{1}{2})+1 \overset{?}{=} 0$

محقق $-1+1=0$

. ومنه $J\in(AIE)$ إذن: //

$(AIJE): -2x+z=0$

(3). حساب بعد K عن المستوي $(AIJE)$.

. نحتاج إحداثيات K والتي تظهر مباشرة من الرسم $K(0,\frac{1}{2},1)$

"لأنو: استخدم دستور منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$"

$$dist(K,(AIJE)) = \frac{|-2(0)+0+1|}{\sqrt{4+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

. حساب حجم الهرم $(KAIJE)$.

إذا. $h = dist(K,(AIJE))$

. لنحسب مساحة القاعدة $(AIJE)$

بداية نجد معرفة نوع الرباعي السابق.

(ويتم ذلك بأكثر من طريقة)

نلاحظ أن: $\vec{AE}(0,1,0)$، $\vec{IJ}(0,1,0)$ $\Rightarrow \vec{AE}=\vec{IJ}$

ومنه الرباعي AIJE متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة حيث:

$\vec{AI}\cdot\vec{AE} = \frac{1}{2}(0)+0(1)+1(0)=0$

أي أن $AI \perp AE$ فالرباعي مستطيل

$$S_{AIJE} = [AI]\cdot[AE]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ومنه،

$$V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{6}$$

(4) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) المار من K والعمودي على المستوي $(AIJE)$.

ومنه $d \perp (AIJE)$ ،

موجه: $\vec{U_d} = \vec{n}(-2;0;1)$

نقطة: $K(0;\frac{1}{2};1)$

$$(d): \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{1}{2} \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t+1 \end{cases}$$

(5) لحساب احداثيات N نقطة تقاطع (d) مع المستوي (AIJE)

نعوض التمثيلات الوسيطية لـ (d) في معادلة المستوي (AIJE).

$(AIJE): -2x + z = 0$

$-2(-2t) + (t+1) = 0 \Rightarrow$

$t + 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$

نعوض $t = -\frac{1}{5}$ في معادلات (d):

$N(+\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{4}{5})$

N: اذا طلب احداثيات المسقط القائم للنقطة K على المستوي (AIJE) هي نفسها N.

(6) حتى تكون N مرجح م.أ.م للنقاط: $(A;\alpha);(I;\beta);(E;\gamma)$

يجب أن تحقق: « $\vec{AI}$ ، $\vec{AE}$ غير مرتبطين خطياً ».

$\vec{AN} = x\cdot\vec{AI} + y\cdot\vec{AE}$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه: $\frac{2}{5} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

$\frac{1}{2} = 0\cdot x + y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{5} = x + 0\cdot y \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

بالتالي:

$\vec{AN} = \frac{4}{5}\vec{AI} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ ... *

ومنه: ط1

N مرجح م.أ.م لـ: $(E;y);(I;x);(A;1-x-y)$

$(E;\frac{1}{2});(I;\frac{4}{5});(A;-\frac{3}{10})$

ومنه خاصية التجانس يكون:

$(E;5);(I;8);(A;-3)$

أو: ط2: نضرب طرفي * بـ 10 نجد:

$10\vec{AN} = 8\vec{AI} + 5\vec{AE} \Rightarrow$

$$10\vec{AN} - \underbrace{8\vec{AI}}_{\text{ندرج } N} - \underbrace{5\vec{AE}}_{\text{ندرج } N} = \vec{0}$$

$-10\vec{NA} - 8\vec{AN} - 8\vec{NI} - 5\vec{AN} - 5\vec{NE} = 0$

$3\vec{NA} - 8\vec{NI} - 5\vec{NE} = \vec{0} \Rightarrow$

N مرجح م.أ.م لـ: $(A;3);(I;-8);(E;-5)$

ومنه التجانس: $(A;-3);(I;8);(E;5)$

Date: / 3 /

*المسألة الثانية:

(1) $B(3,0,0)$ ، $D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$ ، $G(3,3,3)$

(2) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AG)

• موجه: $\vec{U}=\vec{AG}(3,3,3)$

• نقطة: $A(0,0,0)$

$$(AG):\begin{cases} x=3t \\ y=3t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$$

(3) إثبات أن (AG) ناظم لـ (EBD)

• حتى يكون (AG) ناظم على (EBD)

يجب أن يكون:

$\vec{AG}\perp\vec{EB}$ ، $\vec{AG}\perp\vec{ED}$

حيث $\vec{ED}$ ، $\vec{EB}$ غير مرتبطين خطياً

$\vec{AG}(3,3,3)$ ، $\vec{ED}(0,3,-3)$ ، $\vec{EB}(3,0,-3)$

$\vec{AG}\cdot\vec{EB}=9+0-9=0 \Rightarrow \vec{AG}\perp\vec{EB}$

$\vec{AG}\cdot\vec{ED}=0+9-9=0 \Rightarrow \vec{AG}\perp\vec{EB}$

ومنه (AG) ناظم على (EBD)

أي: $\vec{n}_{EBD}=\vec{AG}(3,3,3)$

(4) ح. إيجاد إحداثيات J نقطة

نقطة تقاطع المستقيم (AG) مع

المستوي (EBD) نعوض التمثيلات

الوسيطية في معادلة المستوي،

• بداية نوجد معادلة المستوي (EBD)

• نقطة: $D(0,3,0)$

• ناظم: $\vec{n}(3,3,3) \leftarrow$ أو: $(1,1,1)$

$(EBD): 3(x-0)+3(y-3)+3(z-0)=0$

$3x+3y+3z-9=0 \Rightarrow$

$(EBD): x+y+z-3=0$

• نعوض تمثيلات (AG):

$3t+3t+3t-3=0 \Rightarrow$

$3t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

نعوض في (AG) نجد: $J(1,1,1)$

(5) إن المثلث EBD متساوي الأضلاع

لأن أضلاعه $l=EB=BD=DE=3\sqrt{2}$

« لأنها أقطار في مربعات طول ضلعها 3 »

بالتالي نقطة تلاقي الارتفاعات هي

ذاتها مركز ثقل المثلث وليكن M:

$$M\left(\frac{0+0+3}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{3+0+0}{3}\right)$$

ومنه:

$M(1,1,1)$ وهي ذاتها $J(1,1,1)$

أي أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات

المثلث EBD ومركز ثقله.

(6) $AEBD$ هو هرم، رأسه A وقاعدته

المثلث المتساوي الأضلاع EBD ومنه

$S_{EBD}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$; $l=3\sqrt{2}$.

ارتفاع الهرم هو:

$h=dist(A,(EBD))=AJ=\sqrt{3}$.

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3})=\frac{9}{2}$$

* **المسألة الثالثة:**

$A(3,2,0)$ ، $A(1,1,1)$

P: مار من B حيث: $\vec{n_P} : \vec{AB}(2,1,-1)$

$Q: x-y+2z+4=0$

S: كرة مركزها A ، $R = AB = \sqrt{6}$

(1) معادلة P:

• ناظم: $\vec{n_P}(2,1,-1)$

• نقطة $B(3,2,0)$

$P: 2(x-3)+1.(y-2)-1(z-0)=0$

$2x+y-z-8=0$

(2) معادلة الكرة S:

$S: (x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

(3) نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي Q

$$dist(A,Q) = \frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = R$$

ومنه:

المستوي Q مماس للكرة.

(4) إثبات أن $C(0,2,-1)$ هي المسقط القائم لـ A على Q «نقطة التماس»

• **طريقة أولى:**

• معادلة المستوي المراد الإسقاط عليه

$Q: x-y+2z+4=0$

• نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (d') المار من مركز الكرة A والعمودي على المستوي Q

يكون: $\vec{U_{d'}} = \vec{n_Q}(1,-1,2)$

نقطة: $A(1,1,1)$

$$(d'): \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

النقطة C هي نقطة تقاطع المستوي Q مع المستقيم d' أي نعوض معادلات d' في Q.

$t+1+t-1+4t+2+4=0$

$6t+6=0 \Rightarrow t=-1$ نعوض في d'

نجد $C(0,2,-1)$

وهي المسقط القائم لـ A على Q "نقطة التماس"

• **طريقة ثانية:**

• $\vec{AC}(-1,1,-2)$ ، $\vec{n_Q}(1,-1,2)$

مرتبطان خطيا أي $\vec{AC} \perp Q$

• نعوض $C(0,2,-1)$ في Q:

$0-2-2+4 \overset{?}{=} 0$

$-4+4=0$ محققة

ومنه C نقطة من Q و $\vec{AC} \perp Q$

ومنه C المسقط القائم للنقطة A على Q

ملاحظة: الطريقة الأولى هي للإثبات هنا الإحداثيات C معلومة لذلك نوجه الطريقة الثانية.

(5) إثبات أن: (a)

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = -5t+12 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -3t+4 \end{cases}$$

هو الفصل المشترك للمستويين Q, P.

Date: / 5 /

• طريقة أولى:

١١ معادلات d معلومة نعوض في كلا من P ، Q "

• نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم d

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 12 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 4 \end{cases}$$

في: $P: 2x + y - z - 8 = 0$

نجد: $2t - 5t + 12 + 3t - 4 - 8 \stackrel{?}{=} 0$

$-5t + 5t + 12 - 12 \stackrel{?}{=} 0$

محققة $0 = 0$

ومنه المستقيم (d) محتوى في P .

• وبالمثل نعوض التمثيلات الوسيطية لـ d

في: $Q: x - y + 2z + 4 = 0$

$t + 5t - 12 - 6t + 8 + 4 \stackrel{?}{=} 0$

$5t - 5t - 12 + 12 \stackrel{?}{=} 0$

محققة $0 = 0$

ومنه المستقيم (d) محتوى في Q .

• كما سبقا نجد أن المستقيم (d) محتوى في كلا من P ، Q وهو الفصل المشترك لتقاطع P ، Q .

• طريقة ثانية: نحل P ، Q بالاشتراك

$Q: x - y + 2z + 4 = 0 \quad ...(1)$

$P: 2x + y - z - 8 = 0 \quad ...(2)$

بالجمع نجد: $3x + z - 4 = 0$

$\boxed{z = 4 - 3x} \rightarrow$ نعوض في (2)

$2x + y - 4 + 3x - 8 = 0$

$5x + y - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 12 - 5x}$

نفرض $x = t$ فيكون:

$y = 12 - 5t$ ، $z = 4 - 3t$

ومنه:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 12 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 4 \end{cases}$$

(b)

إثبات أن: المستقيم (d) محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

• نوجد معادلة المستوي المحوري R للقطعة المستقيمة $[BC]$.

• نقطة منه: هي I منتصف $[BC]$:

$I\left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$

• ناظم: هو شعاع القطعة المستقيمة $\overrightarrow{BC}(-3, 0, -1)$

$R: -3\left(x - \frac{3}{2}\right) + 0(y - 2) - \left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$

$-3x - z + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$R: -3x - z + 4 = 0$

• نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي المحوري R . نجد:

$-3t + 3t - 4 + 4 \stackrel{?}{=} 0$

محققة $0 = 0$

إذاً: (d) محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

*المسألة الرابعة:

(1) $A(0,0,0)$ ، $E(0,1,0)$ ، $I(0,\frac{1}{2},1)$

(2) $O\left(\frac{0+0+0}{3},\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)$

$O(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

(3) لدينا:

$3\overrightarrow{FM}=\underbrace{\overrightarrow{BA}}+\overrightarrow{EO} \Rightarrow$

$3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO} \Rightarrow$

$\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

أي النقطة M تقع على $[FO]$

(4) حساب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IA}(0,-\frac{1}{2},-1)\\ \overrightarrow{IE}(0,\frac{1}{2},-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$ «المعلم متجانس»

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}=0-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

• طريقة ثانية

$\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE})$

$=\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{HE}$

$=-\frac{1}{4}+0+0+1=+\frac{3}{4}$

*المسألة الخامسة:

(1) $H(0,1,1)$ ، $E(0,1,0)$ ، $G(1,1,1)$.

$K(\frac{1}{4},0,1)$ ، $J(1,0,\frac{3}{4})$

(2)

$\overrightarrow{EJ}(1,-1,\frac{3}{4})$ ، $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً.

(3) $\overrightarrow{HK}(\frac{1}{4},-1,0)$

هل تكون الأشعة الثلاثة:

$\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ ، $\overrightarrow{EG}$ مرتبطة خطياً

نبحث عن عددين α,β تحققان:

$\overrightarrow{HK}=\alpha\overrightarrow{EG}+\beta\overrightarrow{EJ}$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{1}{4} & \dots(1)\\ -\beta=-1 & \dots(2)\\ \alpha+\frac{3}{4}\beta=0 & \dots(3)\end{cases}$$

من (2) نجد $\beta=1$ نعوض في (1) نجد $\alpha=-\frac{3}{4}$

نتحقق بالتعويض بـ (3):

$-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}(1)\overset{?}{=}0 \Rightarrow 0=0$ محقق

ومنه

$\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$

فالأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

(4) وجدنا سابقاً: $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$

غير مرتبطين خطياً فهما يعينان مستوي (EGJ)

والأشعة الثلاثة: $\overrightarrow{HK}$ ، $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$

مرتبطة خطياً وحسب العلاقة التالية:

$\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$

فالمستقيم (HK) يوازي المستوي المولد بالشعاعين $\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{EJ}$ أي (EGJ).

Date: / 7 /

*المسألة السادسة:

(1) $A(1,0,0)$ ، $H(0,0,1)$ ، $K(\frac{1}{2},1,1)$

$I(\frac{1}{2},0,0)$ ، $J(\frac{1}{2},1,0)$

$\overrightarrow{HJ}(\frac{1}{2},1,-1)$ ، $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{2},0,-1)$

$\overrightarrow{AK}(-\frac{1}{2},1,1)$

(2) $\overrightarrow{AK} = a\cdot\overrightarrow{HI} + b\cdot\overrightarrow{HJ}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = -\frac{1}{2} & \ldots(1) \\ b = 1 & \ldots(2) \\ -a-b = 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

من (2) نجد $b=1$ نعوض في (3) نجد $a=-2$

نتحقق بالتعويض في (1) $-\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2}$

محققة $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ومنه:

$\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HJ}$

وبما أن الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ ، $\overrightarrow{HJ}$ غير مرتبطين خطياً (المركبات غير متناسبة)

نجد مما سبق أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ ، $\overrightarrow{HI}$ ، $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً والمستقيم (AK) يوازي المستوي (HIJ).

*المسألة السابعة:

$A(2,-1,0)$ ، $B(-1,3,5)$

$P: 2x-3y+z-5=0$

(1) شعاع توجيه المستقيم (AB) هو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \overrightarrow{AB}(-3,4,5) \\ \overrightarrow{n_P}(2,-3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_P} = -6-12+5 = -13 \neq 0$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{n_P}$ غير متعامدين أي أن المستقيم (AB) قاطع للمستوي في نقطة.

• نوجد إحداثيات نقطة التقاطع

نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم (AB) في معادلة المستوي $P: 2x-3y+z-5=0$

• نقطة $A(2,-1,0)$ موجه $\vec{u}(-3,4,5)$

$$(AB): \begin{cases} x = -3t+2 \\ y = 4t-1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

ومنه:

$-6t+4-12t+3+5t-5=0$

$-13t+2=0 \Rightarrow t = \frac{2}{13}$

نعوض في معادلات (AB) نجد:

• $x = -3(\frac{2}{13})+2 = \frac{20}{13}$

• $y = 4(\frac{2}{13})-1 = -\frac{5}{13}$

• $z = 5(\frac{2}{13}) = \frac{10}{13}$

ومنه إحداثيات نقطة التقاطع:

$C(\frac{20}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{10}{13})$

(2) كتابة معادلة المستوي Q العمودي على P والمار من A ، B.

. نقطة $A(2,-1,0)$

. ناظم $\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_Q\cdot\vec{n}_P=0 \Rightarrow$

$2a-3b+c=0 \dots (1)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_Q\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow$

$-3a+4b+5c=0 \dots (2)$

ومنه وبضرب طرفي العلاقة الأولى بـ (3)

وبضرب طرفي العلاقة الثانية بـ (2)

نجد: $6a-9b+3c=0$

$-6a+8b+10c=0$

بالجمع يكون:

$-b+13c=0 \Rightarrow \boxed{b=13c}$

نعوض في (1): $2a-39c+c=0$

$2a-38c=0 \Rightarrow \boxed{a=19c}$

نفرض $c=1$ نجد: $a=19$ ، $b=13$

إذن: $\vec{n}_Q(19,13,1)$

$Q: 19(x-2)+13(y+1)+(z-0)=0 \Rightarrow$

$Q: 19x+13y+z-25=0$

*المسألة الثامنة:

. G مركز ثقل المثلث DBC.

$L_1=\|\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC}\|$

. G م.أ.م للنقاط $(D,1),(B,1),(C,1)$

ومنه وحسب خاصة الاختزال:

$L_1=\|(1+1+1)\vec{MG}\|=\|3\vec{MG}\|$

$L_2=\|3\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MD}-\vec{MC}\|$

$L_2=\|3\vec{MA}-(\vec{MB}+\vec{MD}+\vec{MC})\|$

$=\|3\vec{MA}-3\vec{MG}\|=\|3(\vec{MA}-\vec{MG})\|$

$=\|3\vec{GA}\|$

ومنه:

$\|3\vec{MG}\|=\|3\vec{GA}\| \Rightarrow$

$3MG=3GA \Rightarrow \underbrace{MG=GA}$

مجموعة النقاط M هي كرة مركزها G

ونصف قطرها $R=GA$

*المسألة التاسعة:

$A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$ ، $C(3,1,-2)$

$D(-4,2,1)$

(1): إثبات أن المثلث ABC قائم:

$\vec{AB}(1,2,4)$ ، $\vec{AC}(2,1,-1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2+2-4=0 \Rightarrow AB\perp AC$

ومنه المثلث قائم في A.

أو نعتمد على حساب طويلة كل شعاع ومن ثم نطبق عكس فيثاغورث ...

. حساب مساحته: $\|\vec{AB}\|=\sqrt{21}$ ، $\|\vec{AC}\|=\sqrt{6}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}(\sqrt{21})(\sqrt{6})=\frac{\sqrt{126}}{2}$

(2): نلاحظ أن $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً

فهما يعينان مستوي (ABC)

إذا كان $\vec{n}\perp\vec{AC}$ ، $\vec{n}\perp\vec{AB}$ عندئذٍ

$\vec{n}$ عمودي على (ABC).

. لدينا $\vec{n}(2,-3,1)$

Date : / 9 /

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=2-6+4=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$.

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=4-3-1=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$.

ومنه: $\vec{n}$ عمودي على شعاعي توجيه المستوي (ABC) فهو ناظم عليه.

• نقطة $A(1,0,-1)$

• ناظم $\vec{n}(2,-3,1)$

$(ABC): 2(x-1)-3(y-0)+(z+1)=0$

$2x-3y+z-1=0$

(3).

$$dist(D,(ABC))=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{14}{\sqrt{14}}$$

$$=\sqrt{14}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot \underbrace{h}_{dist(D,(ABC))}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{126}}{2}\times\sqrt{14}=\frac{\sqrt{1764}}{6}$$

$$=\frac{42}{6}=7$$

* طريقة المعلم المتعامد

*الطريقة المباشرة:

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$

• إحداثيات $T(x,y,z)$

$\vec{AT}=\frac{2}{5}\vec{AB} \Rightarrow T(\frac{2}{5},0,0)$

أو:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow T(\frac{2}{5},0,0)$$

• إحداثيات $N(x,y,z)$

$\vec{AN}=\frac{2}{5}\vec{AD} \Rightarrow N(0,\frac{2}{5},0)$

«أو: الأسلوب السابق»

$\vec{NT}(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},0) \rightarrow \vec{NT}(-2,2,0)$ (2)

$\vec{NH}(0,\frac{3}{5},1) \rightarrow \vec{NH}(0,3,5)$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا لعدم تناسب المركبات فهما يعينان المستوي (HNT).

• نقطة $H(0,1,1)$

• ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\perp\vec{NT} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{NT}=0$

$-2a+2b=0$ ... (1)

$\vec{n}\perp\vec{NH} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{NH}=0$

$3b+5c=0$ ... (2)

• من (1) نجد: $\boxed{b=a}$ نعوض في (2)

$3a+5c=0 \Rightarrow \boxed{c=-\frac{3}{5}a}$

نفرض $a=5$، يكون $b=5$، $c=-3$

ومنه $\vec{n}(5,5,-3)$

$(HNT): 5(x-0)+5(y-1)-3(z-1)=0$

$5x+5y-3z-2=0$

(3) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF)

• نقطة $E(0,0,1)$

• موجه: $\vec{U}=\vec{EF}(1,0,0)$

$$(EF): \begin{cases} x=t \\ y=0 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$

Date: / 20 /

(4) - إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

. نعوض من التمثيلات الوسيطية للمستقيم (EF) في معادلة المستوي (HNT):

$$(HNT): 5x+5y-3z-2=0$$

$$(EF): \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نجد: $5t+0-3-2=0 \Rightarrow t=1$

نعوض في معادلات (EF) نجد إحداثيات

. نقطة التقاطع $(1,0,1)$

. وهي نفسها F

(5) وجدنا: F نقطة تقاطع

. المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

أي المستوي القاطع هو $(HNTF)$

. هذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين

$(ABCD), (EFGH)$ بالفصلين المشتركين

. $(NT), (HF)$ وهما متوازيان

. فالمقطع هو شبه منحرف متساوي

الساقين حيث:

$$HN=\sqrt{0+\frac{9}{25}+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$FT=\sqrt{\frac{9}{25}+0+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

---

* المسألة الحادية عشر:

- لدينا: G م.أ.م للنقاط:

$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

"لأن G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$"

- لدينا: K م.أ.م للنقاط:

$(B,1),(C,1),(D,1) \rightarrow (K,3)$

"لأن K مركز ثقل الوجه (BCD)"

ومن الخاصة التجميعية يكون: G م.أ.م لـ:

$(A,1),(K,3)$

$$G\left[\begin{array}{l}(A,1)\\ \left.\begin{array}{l}(B,1)\\(C,1)\\(D,1)\end{array}\right\}(K,3)\end{array}\right]$$

أي: النقاط G, K, A تقع على استقامة واحدة.

---

* المسألة الثانية عشر:

$A(1,-1,2), B(2,1,0), C(2,3,-1)$

$D(0,0,2)$

(1) G م.أ.م للنقاط:

$(D,1),(C,2),(B,2),(A,1)$

$$x_G=\frac{1+4+4+0}{1+2+2+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$y_G=\frac{-1+2+6+0}{1+2+2+1}=\frac{7}{6}$$

$$z_G=\frac{2+0-2+2}{1+2+2+1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$$

Date: / 11 /

$\|\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}+\vec{MD}\|=6$ (2)

$L_1=\|(1+2+2+1)\cdot\vec{MG}\|=\|6\vec{MG}\|$

بالتعويض في الشرط (2) نجد:

$\|6\vec{MG}\|=6 \Rightarrow MG=1$

S مجموعة النقاط M تمثل كرة G و $R=1$

$S:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=1$ (3)

* المسألة الثالثة عشر:

$d:\begin{cases} x=2t-5 \\ y=t-2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-\frac{1}{2}t+3 \end{cases}$ $\vec{u}\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$

$d':\begin{cases} x=s+5 \\ y=2 \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=2s+5 \end{cases}$ $\vec{u'}(1,0,2)$

نلاحظ أن $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات.

ومنه المستقيمان (d) ، (d') متقاطعان أو متخالفان.

1. اختبار الاشتراك بنقطة:

$\begin{cases} 2t-5=s+5 & \dots(1) \\ t-2=2 & \dots(2) \\ -\frac{1}{2}t+3=2s+5 & \dots(3) \end{cases}$

من (2) نجد: $\boxed{t=4}$

نعوض في (3) نجد:

$-2+3=2s+5 \Rightarrow \boxed{s=\frac{-4}{2}=-2}$

نعوض ونتأكد في (1)

$2(4)-5=-2+5$

$3=3$ محققة

أي يوجد حل لهذه الجملة فالمستقيمان متقاطعان: ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض $t=4$ في (d) نجد $(3,2,1)$

* المسألة الرابعة عشر:

$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-3t+3 \end{cases}$ $\vec{u}(1,-3,-3)$

$d':\begin{cases} x=s \\ y=-3s+3 \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=-s+1 \end{cases}$ $\vec{u'}(1,-3,-1)$

نلاحظ أن $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات.

ومنه المستقيمان (d) ، (d') متقاطعان أو متخالفان:

1. اختبار الاشتراك بنقطة.

$\begin{cases} t+1=s & \dots(1) \\ -3t+2=-3s+3 & \dots(2) \\ -3t+3=-s+1 & \dots(3) \end{cases}$

نحل جملة المعادلتين:

$t+1=s \sim \boxed{t-s=-1 \dots(1)}$

$-3t+2=-3s+3 \sim$

$-3t+3s=3-2 \sim$

$\boxed{t-s=\frac{5}{3} \dots(2)}$

نلاحظ تناقض بين المعادلة (1) و (2)
أي جملة المعادلات مستحيلة الحل
أي d' ، d متخالفان ولا يقعان في
مستوي واحد.

*** المسألة الثامنة كش:**

. المستقيم (d) مار من $A(2,1,3)$
ويوازي: $P: x+y+z+1=0$
حيث d يقطع المستوي (yoz) في النقطة
B التي ترتيبها (-1).

. بما أن B في المستوي yoz فإن $x_B=0$
ولدينا فرضاً $y_B=-1$ ومنه:
إحداثيات B من الشكل: $B(0,-1,z)$

. (d) يوازي المستوي P ومنه:

$$\vec{U}\cdot\vec{n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \ ; \ \overrightarrow{AB}(-2,-2,z-3) \\ \vec{n}(1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow -2-2+z-3=0$$
$$\Rightarrow z=7$$

ومنه: $B(0,-1,7)$ أي $\overrightarrow{AB}(-2,-2,4)$

وبالتالي:

. نقطة $A(2,1,3)$
. موجه $\vec{U}=\overrightarrow{AB}(-2,-2,4)$

$$d: \begin{cases} x=-2t+2 \\ y=-2t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=4t+3 \end{cases}$$

*** المسألة السادسة كش:**

$$A(3,-1,2)$$

$$d: \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases} \qquad \vec{U}(-1,-1,1)$$

. $A'(x,y,z)$ هي النقطة من المستقيم (d)
وهي من الشكل $A'(-t+3,-t+2,t)$
. تكون A' هي المسقط العمودي للنقطة A
على المستقيم (d) إذا تحقق:

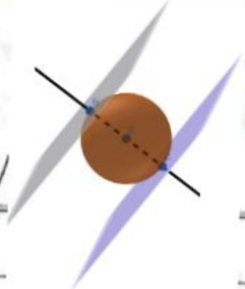
$$\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{U}=0 \Rightarrow$$
$$t-3+t-2+t=0 \Rightarrow$$
$$3t-5=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3}$$

نعوض في A' نجد:

$$\left.\begin{array}{l} x_{A'}=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3} \\ y_{A'}=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3} \\ z_{A'}=\frac{5}{3}\end{array}\right\} A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

ومنه: بعد A عن d يمثل:

$$\|\overrightarrow{AA'}\|=\frac{\sqrt{42}}{3}$$



* المسألة السابعة عشر:

P: $x+y+z-6=0 \rightarrow \vec{n}_P(1,1,1)$

$$d: \begin{cases} x = t-1 \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t+1 \end{cases} \rightarrow \vec{v}(1,1,1)$$

(1) نلاحظ أن $\vec{n}_P = \vec{v}$ أي أن

المستقيم (d) يعامد المستوي P.

(2) Q مار من $A(-1,-1,2)$

ويوازي P أي أن: $\vec{n}_Q = \vec{n}_P(1,1,1)$

ومنه: $Q: (x+1)+(y+1)+(z-2)=0$

$Q: x+y+z=0$

(3) الكرة تمس كلاً من P ، Q

(d) يعامد P ويعامد Q $(Q \parallel P)$

مركز الكرة يقع على (d)

بالتالي المسافة بين نقطتي تقاطع (d)

مع P و Q هي قطر الكرة.

B تقاطع (d) مع P:

$t-1+t+t+1-6=0 \Rightarrow$

$3t-6=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow B(1,2,3)$

C تقاطع (d) مع Q:

$t-1+t+t+1=0$

$3t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow C(-1,0,1)$

ومنه: $2R = \|\overrightarrow{BC}\|$

$2R = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow R=\sqrt{3}$

D مركز الكرة هو منتصف [BC] أي:

$D(0,1,2)$

ومنه:

$S: (x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3 \Rightarrow$

$S: x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$

لا يوجد أكثر من طريقة لحل الطلب الثالث

ولكن هذه أقصرها "

* المسألة الثامنة عشر:

$(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

(1)

$A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,4,0)$

$D(0,4,0), E(0,0,1), F(2,0,1)$

$G(2,4,1), H(0,4,1)$

I منتصف [AD] ومنه: $I(0,2,0)$

لدينا $J(x,y,z)$ تحقق: $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J(2,1,1)$$

(2) إثبات أن معادلة المستوي (EIB)

هي: $(EIB): x+y+2z-2=0$

"المعادلة جاهزة عوض نقاط"

نعوض $E(0,0,1)$ في معادلة المستوي:

$0+0+2-2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0=0$ محققة

نعوض $I(0,2,0)$ في معادلة المستوي

$0+2+0-2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0=0$ محققة

نعوض $B(2,0,0)$ في معادلة المستوي:

$2+0+0-2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0=0$ محققة

طريقة ثانية :

النقاط $E(0,0,1)$ ، $I(0,2,0)$ ، $B(2,0,0)$ واقعة على المحاور، الاحداثية

$\Rightarrow (EIB): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1 \Rightarrow$ (×2)

$x+y+z-2=0$

Date : / 14 /

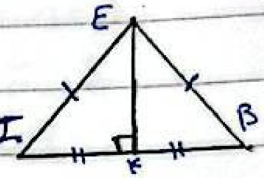
بالتالي $(EIB): x+y+2z-2=0$

(3). نوع المثلث EIB .

$\vec{EI}(0,2,-1) \Rightarrow [EI]=\sqrt{5}$

$\vec{EB}(2,0,-1) \Rightarrow [EB]=\sqrt{5}$

$\vec{BI}(-2,2,0) \Rightarrow [BI]=2\sqrt{2}$



. المثلث EIB متساوي الساقين في E

وليس قائم لأن $(2\sqrt{2})^2 \neq (\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2$

. مساحة المثلث EIB .

$S=\frac{[BI]\cdot[EK]}{2}$

. القاعدة $[BI]=2\sqrt{2}$

. الارتفاع: هو $[EK]$ حيث K منتصف $[BI]$

(المتوسط نازل من الرأس هو ارتفاع) [EIB] .

$K(1,1,0)$ ومنه $[EK]=\sqrt{3}$

ومنه: $S=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

(4). $dist(G,(EIB))=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}$

$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

. رباعي الوجوه G-EIB هو هرم

رأسه G وقاعدته المثلث EIB ومنه:

$V=\frac{1}{3}S_{EIB}\cdot h \rightarrow$ " $dist(G,(EIB))$

$V=\frac{1}{3}(\sqrt{6})(\sqrt{6})=2$

(5). المستقيم (d) المار من J يعامد (EIB)

. نقطة $J(2,1,1)$

. موجه $\vec{U}=\vec{n}(1,1,2)$

$$(d):\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=2t+1 \end{cases}$$

(6) المقصود من الطلب:

استنتاج أن النقاط B, I, J'

الحيث J' هي المسقط القائم لـ J على

المستوي (EIB) " تقع على استقامة واحدة.

. المستوي المراد الاسقاط عليه

$(EIB): x+y+2z-2=0$

. التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) المار من

النقطة J والعمودي على (EIB).

$$(d):\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=2t+1 \end{cases}$$

~~نعوض~~ تكون احداثيات J'

المسقط القائم لـ J على المستوي (EIB)

هي نقطة تقاطع (d) مع (EIB)

نعوض التمثيلات الوسيطية للمستقيم d في المستوي:

$t+2+t+1+4t+2-2=0$

$6t+3=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

نعوض في (d) نجد: $J'(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$

. حتى تقع B, I, J' على

استقامة واحدة يجب أن يكون:

$\vec{BI}, \vec{BJ'}$ مرتبطان خطيًا.

Date : / 15 /

$\overrightarrow{BI}(-2,2,0)$ ، $\overrightarrow{BJ'}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BI} = 4\overrightarrow{BJ'}$

أي الشعاعين مرتبطين خطياً و النقاط

B ، I ، J' تقع على استقامة واحدة

إذن : J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

*المسألة التاسعة عشر:

$O(0,0,0)$ ، $A(0,0,6)$ ، $B(4,0,0)$

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_O \le z \le z_A \end{cases} \Rightarrow$

معادلة الاسطوانة :

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 0\le z\le 6 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_B)^2}x^2 \\ 0\le x\le x_B \end{cases} \Rightarrow$

معادلة المخروط :

$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{6}{16}x^2 \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$

(3) $D(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ ، $C(10,0,0)$

من أجل النقطة C

نلاحظ $x_C = 10 \le 4$ غير محقق

أي النقطة C لا تنتمي إلى المخروط.

من أجل النقطة D :

$1+\frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{6}{16}(4) \Rightarrow$

$\frac{3}{2} \overset{?}{=} \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ محقق

$x_D = 2 \le 4$ محقق

ومنه D تنتمي إلى المخروط.

*المسألة العشرون:

$A(1,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(0,0,1)$

$P: y+z=t \; ; \; 0<t<1$

(1) :

H نقطة تقاطع المستوي P مع (OZ)

أي : $H(0,0,z)$ نعوض في P.

نجد $z=t$ ومنه : $H(0,0,t)$

G نقطة تقاطع المستوي P مع (OY)

أي : $G(0,y,0)$ نعوض في P.

نجد $y=t$ ومنه : $G(0,t,0)$

(2) : المستقيم (AB) :

موجه $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ ، نقطة $A(1,0,0)$

$(AB): \begin{cases} x=-s+1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \; ; \; s\in\mathbb{R}$

المستقيم (AC) :

موجه $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ ، نقطة $A(1,0,0)$

$(AC): \begin{cases} x=-\alpha+1 \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases} \; ; \; \alpha\in\mathbb{R}$

E نقطة تقاطع P مع (AC) ومنه :

1) نعوض معادلات (AC) في P

$0+\alpha=t \Rightarrow \alpha=t \Rightarrow E(1-t, 0, t)$

F نقطة تقاطع المستوي P مع (AB).

نعوض معادلات (AB) في المستوي P

$0+S+0=t \Rightarrow S=t \Rightarrow F(1-t, t, 0)$

(3)

$\overrightarrow{EF}(0, t, -t)$ ، $\overrightarrow{HG}(0, t, -t)$

ومنه: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ أي

الرباعي EFGH متوازي أضلاع

نثبت أن فيه زاوية قائمة

$\overrightarrow{EH}(t-1, 0, 0)$ ، $\overrightarrow{EF}(0, t, -t)$

$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EF}=0+0+0=0 \Rightarrow (EF)\perp(EH)$

ومنه الرباعي EFGH متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل مساحته A(t)

$A(t)=[EF]\cdot[EH]$

$=(\sqrt{2}\,t)\cdot(1-t)=-\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{2}\,t$

$\|\overrightarrow{EH}\|=[EH]=\sqrt{(t-1)^2+0+0}$

$=\sqrt{(t-1)^2}=|t-1|$

$=1-t \quad ; \; 0<t<1$

(4) $A(t)=-\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{2}\,t$

ندرس وتغيرات الدالة على $]0;1[$

$\lim_{t\to 0} A(t)=0$ ، $\lim_{t\to 1} A(t)=0$

$A'(t)=-2\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}$

$A'(t)=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ ، $A(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$A'(t)$		$+$	0	$-$	
$A(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0

نلاحظ أن $A(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$ قيمة كبرى له محليا بالتالي:

توافق أعظم مساحة ممكنة للمستطيل $t=\frac{1}{2}$ وهي $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

-يجب حل جميع هذه المسائل باليد وعدم الاكتفاء بالقراءة، وذلك قبل الانتقال إلى نماذج الاختبارات الموضوعة والمقالية ضمن مجموعتك: "الباكالوريا مدرسة + دورة الكترونية" أ. ماهر