

تم تحميل هذا الملف بواسطة:

بوت مكتبي التعليمية

يمكن الوصول لمكتبي عبر النقر على الرابط:

https://t.me/Science_2022bot

بوت مكتبي التعليمية: مكتبة ملفات تعليمية سورية
على تطبيق Telegram



@MLBSupportBot

https://t.me/syr_esu

Telegram



شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

لثالث الثانوي العلمي
الجزء الأول



by:Hisham Labanieh

إعداد المدرس
خالد عامر

0940 916 753



خالد عامر




Syria - Damascus





ألتخبة

ELITE M 

شيفرة الـ 600 في بحث النهايات

نهاية التابع f عندما x تسعى إلى a تساوي b						رمزها
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$						يقرأ
القوى	الجذور	المجموعة الثالثة	القسمة	المجموعة الأولى	الضرب	الجمع
إذا كان n عدد طبيعي موجب تماماً فإن: $(+\infty)^n = +\infty$ $(-\infty)^n = +\infty$ فردي $(-\infty)^n = -\infty$ زوجي	$\sqrt{+\infty} = +\infty$ $\sqrt{-\infty} =$ كفر	صفر صفر لا نهاية لا نهاية حالة عدم تعيين	الإشارات مهمة جداً: لا نهاية = عدد / صفر لا نهاية = لا نهاية / عدد لا نهاية = لا نهاية / صفر	الإشارات غير مهمة: صفر = صفر / عدد صفر = عدد / لا نهاية صفر = صفر / لا نهاية	وهو جداء الإشارات: $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$ $(-\infty)(+\infty) = -\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$ $(-\infty)(+\infty) = -\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ $(0)(\infty) =$ $(\infty)(0) =$ حالة عدم تعيين	$+\infty + 5 = +\infty$ $+\infty - 5 = +\infty$ $-\infty - 5 = -\infty$ $-\infty + 5 = -\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $= +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$ $= -\infty$ حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$ $-\infty + \infty$ حالة عدم تعيين
						العمليات على الرمز ∞

6. $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4)$$

$$= -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4)$$

$$= -2(+\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$$

التابع الكسري:

عند ∞ :

كيفية إيجاد النهاية:

يوجد مبرهنة وتطبق وفق:

* نأخذ الحد المسيطر من البسط

* نأخذ الحد المسيطر من المقام

* نختزل

* نعوض بدلاً من x بـ ∞ عند a :

كيفية إيجاد النهاية:

لا يوجد مبرهنة إنما نستخدم التعويض

أي: نستبدل x بـ a مع الانتباه إلى أن:الرمز: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ يعني النهاية من اليسارالرمز: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ يعني النهاية من اليمين

انتبه:

عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد

إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيم تجريبية

ونعوضها في المقام فقط

تعريف:

احسب نهايات التوابع الآتية عند ∞ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة:

1. $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$; $a = 1$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1$$

2. $f(x) = -3x^4 + 1$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4)$$

$$= -3(-\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4)$$

$$= -3(+\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

3. $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^4)$$

$$= 8(-\infty)^4 = 8(+\infty) = +\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^4)$$

$$= 8(+\infty)^4 = 8(+\infty) = +\infty$$

4. $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3)$$

$$= 5(-\infty)^3 = 5(-\infty) = -\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3)$$

$$= 5(+\infty)^3 = 5(+\infty) = +\infty$$

5. $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3)$$

$$= 7(-\infty)^3 = 7(-\infty) = -\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3)$$

$$= 7(+\infty)^3 = 7(+\infty) = +\infty$$

الطرق الصعبة، دائماً ما تؤدي إلى

أماكن رائعة..

ملاحظات هامة جداً:

- يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة
- الأصل في إيجاد للنهايات هو التعويض إلا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرة أي:
 - يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
 - لا يوجد مبرهنة ← تعويض
- التعويض هو استبدال x بالمسعى
- عند وجود مبرهنة فإننا ن فكر:
 - نوع التابع
 - المسعى
 - كيفية التطبيق
- تحذف كلمة \lim عند التعويض أي عند اختفاء x
- عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها

قواعد إيجاد النهايات:

التابع الصحيح:

عند ∞ :

كيفية إيجاد النهاية:

* يوجد مبرهنة وتطبق وفق:

نأخذ الحد المسيطر مع الأمتال حيث الحد

المسيطر: هو الحد الذي يملك أكبر قوة.

* نعوض بدلاً من x بـ ∞ .

تمرين:

احسب نهايات التوابع الآتية عند

 $+\infty$ والـ $-\infty$:

1. $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)$$

$$= -(-\infty)^3 = -(-\infty) = +\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)$$

$$= -(+\infty)^3 = -(+\infty) = -\infty$$

الحالة الثانية: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ إذا كانفهذا يعني عدم وجود نهاية للتابع f عند a

تمرين:

في كل من الحالات الآتية هل يوجد للتابع f نهاية عند a ؟

1. $f(x) = \frac{2x+7}{3-x}$; $a = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{13}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{13}{0^-} = -\infty$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

فهذا يعني عدم وجود نهاية للتابع f عند a

2. $f(x) = \frac{3+5x}{(x-1)^2}$; $a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

فهذا يعني وجود نهاية للتابع f عند a

الملاحظة الثانية:

نص السؤال:

هل يوجد للتابع f نهاية حقيقية عند a ؟
فكرة الحل:

1. نوجد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

2. نميز:

3. الحالة الأولى:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فهذا يعني:عدم وجود نهاية حقيقية للتابع f عند a الحالة الثانية: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ إذا كانفهذا يعني وجود نهاية حقيقية للتابع f عند a

تمرين:

في كل من الحالات الآتية هل يوجد نهاية حقيقية للتابع f عند a ؟

1. $f(x) = \frac{1200x^2 - 300x - 1}{2x^2 + 1}$; $a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 600$$

ومن هنا يوجد للتابع f نهاية حقيقية عند $a = +\infty$

تذكر يا عزيزي الطالب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{الرياضيات}) = 600$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x} \right) = 5$$

5. $f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$; $a = 2$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$D_f =] - \infty, 2[\cup] 2, +\infty[$$

عند $a = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

عند $a = 2$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

عند $a = 2$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

6. $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}$; $a = -2$

$$D_f =] - \infty, -2[\cup] -2, +\infty[$$

عند $a = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

عند $a = -2$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$= -11 - \infty = -\infty$$

عند $a = -2$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$= -11 + \infty = +\infty$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

ملاحظات هامة جداً:

الملاحظة الأولى:

نص السؤال:

هل يوجد للتابع f نهاية عند a ؟
فكرة الحل:

1. نوجد $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ونوجد $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

2. نميز:

3. الحالة الأولى:

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

فهذا يعني وجود نهاية للتابع f عند a عند $a = 1$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1-3}{1-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

عند $a = 1$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1-3}{1-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1$$

2. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$; $a = 2$

$$D_f =] - \infty, 2[\cup] 2, +\infty[$$

عند $a = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

عند $a = 2$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

عند $a = 2$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; $a = -1$

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] -1, +\infty[$$

عند $a = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2$$

عند $a = -1$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

عند $a = -1$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

عند $a = +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2$$

4. $f(x) = \frac{5x+1}{x+1}$; $a = -1$

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] -1, +\infty[$$

عند $a = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x} \right) = 5$$

عند $a = -1$ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

عند $a = -1$ من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$= \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

$$5. f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}; a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = x-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

$$6. f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}; a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$$

$$(x-2)(x+2)$$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$7. f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}; a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

$$= \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$8. f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}; a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

نحلل البسط باستخدام المعيز Δ :

$$2x^2-x-1$$

$$\Delta = b^2-4(a)(c)$$

$$= 1-4(2)(-1) = 9$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$2. f(x) = \frac{x-2}{2x^2-8}; a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x-2}{2x^2-8}$$

$$= \frac{x-2}{2(x^2-4)} = \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{8}$$

$$3. f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}; a=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{x}+\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2\sqrt{3}$$

الطريقة الثانية:

$$f(x) = \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \sqrt{x}+\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2\sqrt{3}$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}; a=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

الطريقة الثانية:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x^2-9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$2. f(x) = \frac{x^3+2}{(x-1)^2}; a=1$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

فإنه لا يوجد نهاية حقيقية للتابع f عند $a=1$.

حالات عدم التعيين:

الحالات:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, (0)(\infty)$$

الطرق المستخدمة في إزالة حالات عدم التعيين: إن الطرق التي سنعرضها فيما يلي تستخدم فقط في حال وجود توابع كسرية أو جذرية وهي:

١. طريقة التحليل

٢. طريقة المرافق

٣. طريقة العامل المناسب

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ فإننا نستخدم طريقة التحليل:

تستخدم إذا كان البسط أو المقام قابلاً للتحليل

طريقة المرافق:

إذا كان البسط أو المقام غير قابل للتحليل

ويجوي جذر

كيفية استخدام طريقة التحليل:

* نحلل البسط إن أمكن

* نحلل المقام إن أمكن

* نختزل (أهم من حياتي)

* نعوض

ملاحظة:

عند إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لا داعي لليجاد النهاية من اليمين ومن اليسار

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$1. f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

ما زرع الله بقلبك أمراً إلا وهو
كافلاً لحظته تمامه لك... 🌱😊

ومنة:

$$2x^2 - x - 1$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$= (2x + 1)(x - 1)$$

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

كيفية استخدام طريقة المرافق:

* نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق

المقدار الذي يحوي جذر

* نستفيد من المطابقة:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

* نختزل

* نعوض

ملاحظة:

المرافق	المقدار
$\sqrt{x+1}-3$	$\sqrt{x+1}+3$
$3+\sqrt{x+1}$	$3-\sqrt{x+1}$
$-\sqrt{x+1}+3$	$-\sqrt{x+1}-3$
$\sqrt{x+1}+3-2x$	$\sqrt{x+1}-3+2x$
$\sqrt{x+1}$	$\sqrt{x+1}$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}; a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$2. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+90000}-300}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+90000}-300}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x+90000}+300)}{(\sqrt{x+90000}-300)(\sqrt{x+90000}+300)}$$

$$= \frac{x^2 - x}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x}{-x-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}; a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$$

$$= \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x^2-16)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \frac{2x+1-9}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \frac{2x-8}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \frac{2}{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

$$7. f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x+1-1}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{2}$$

إنجازك اليومي = بوسلة مستقبلك

$$= \frac{x(\sqrt{x+90000}+300)}{x+90000-90000}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x+90000}+300)}{x}$$

$$= \sqrt{x+90000}+300$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 300 + 300 = 600$$

$$3. f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}; a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(4-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(4-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}{x+1-5}$$

$$= \frac{(4-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}{x-4}$$

$$= \frac{(4-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})}{-(4-x)}$$

$$= -(\sqrt{x+1}+\sqrt{5})$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2\sqrt{5}$$

$$4. f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}; a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2-1})}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{-2} = 0$$

$$5. f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}; a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{(-x+\sqrt{x})(-x-\sqrt{x})}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{5}{x^2})}}{1-3x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x} = \frac{|x| \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

لما كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $|x| = x$ ومنه:

$$= \frac{x \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-3)} = \frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$$

2. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1}; a = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1}$$

$$= \frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})} = -\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{x}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{x}$$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}})} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

3. $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{x(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{1} = -1$$

العامل المناسب الغير ظاهر "يكون مضمون"

الجذر مختلف عن x ولا يوجد عامل مشترك:① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود

ما تحت الجذر التربيعي:

* نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي* نستفيد من الخاصة: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ * نستفيد من الخاصة: $\sqrt{x^2} = |x|$

* نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$|x| = \begin{cases} +x; & x > 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

② مرحلة إخراج العامل المناسب

③ مرحلة الاختزال

④ مرحلة التعويض

8. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}}{x} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$

$$= \frac{x+2-2x-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$

$$= \frac{-x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

9. $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}; a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{(4-3x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{(-3x+6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{-3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(2+\sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-18-9}{8} = \frac{-9}{4}$$

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ للإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

نستخدم طريقة العامل المناسب وفق:

العامل المناسب ظاهر

"يكون مضمون الجذر x فقط"

الخطوات:

- مرحلة إخراج العامل المناسب وتتم وفق:

* نخرج العامل المشترك

* نفتح قوس

* نقسم كل حد على العامل المشترك

* نغلق القوس

* نختزل (أهم من حياتي)

- نعوض

$$= \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$4. f(x) = \sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5}$$

$$a = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5}}{(\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5})(\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 - 5})}$$

$$= \frac{\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 - 5}}{2x^2 + 3 - 2x^2 + 5}$$

$$= \frac{\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 - 5}}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

$$5. f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 3} - (3x - 1)$$

$$a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 3} - (3x - 1)}{(\sqrt{9x^2 - 6x + 3} - (3x - 1))(\sqrt{9x^2 - 6x + 3} + (3x - 1))}$$

$$= \frac{9x^2 - 6x + 3 - 9x^2 + 6x - 1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 3} + (3x - 1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{9x^2 - 6x + 3} + (3x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

كيفية استخدام طريقة العامل المناسب:

نميز حالتين:

العامل المناسب ظاهر

"يكون مضمون الجذر x فقط"

الخطوات:

- مرحلة إخراج العامل المناسب وتتم وفق:

* نخرج العامل المشترك

* نفتح قوس

* نقسم كلا حد على العامل المشترك

* نغلق القوس

* نختزل (أهم من حياتي)

- نعوض

إن المرء نتاج مسعاه ..

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$:

للإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$

فإننا نستخدم:

طريقة المرافقة:

إذا تحقق أن:

$$\left(\frac{\text{أحد الحدود}}{\text{الموجودة داخل الجذر}} \right)^2 = \frac{\text{أحد الحدود}}{\text{الموجودة خارج الجذر}}$$

طريقة العامل المناسب:

إذا تحقق أن:

$$\left(\frac{\text{أحد الحدود}}{\text{الموجودة داخل الجذر}} \right)^2 \neq \frac{\text{أحد الحدود}}{\text{الموجودة خارج الجذر}}$$

كيفية استخدام طريقة المرافقة:

* نضرب كلا من البسط والمقام

بمرافق المقدار الذي يحوي جذر

* نستفيد من المطابقة:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

* نختزل

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x ; a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x^2 + 1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$2. f(x) = \sqrt{9x^2 + 5} + 3x ; a = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 + 5} + 3x}{(\sqrt{9x^2 + 5} + 3x)(\sqrt{9x^2 + 5} - 3x)}$$

$$= \frac{\sqrt{9x^2 + 5} - 3x}{9x^2 + 5 - 9x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{9x^2 + 5} - 3x}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$3. f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x} ; a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x}}{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})}$$

$$= \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x}}$$

$$= \frac{x \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3x}{x}$$

$$= \frac{x \left(\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$5. f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} ; a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

الطريقة الأولى:

$$= x + \frac{x}{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$$

الطريقة الثانية:

$$= x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1 + 0) = +\infty$$

$$6. f(x) = \frac{2x + \sqrt{1 - x}}{x + 3} ; a = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2x - x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{x + 3}$$

$$= \frac{x \left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right)}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

$$7. f(x) = \frac{-600x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} ; a = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{-600x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{-600x - 1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-x \left(600 + \frac{1}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{600 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{600}{1} = 600$$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \sqrt{x} - x ; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x-2} - x + 2 ; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{x-2} - x + 2 \\ &= \sqrt{x-2} - (x-2) \\ &= \sqrt{x-2}(1 - \sqrt{x-2}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

العامل المناسب الغير ظاهر (يكون مضمون)
الجزء مختلف عن x ولا يوجد عامل مشترك:

① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود ما تحت الجذر التربيعي:

* نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي

* نستخدم من الخاصة: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

* نستخدم من الخاصة: $\sqrt{x^2} = |x|$

* نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$|x| = \begin{cases} +x ; x > 0 \\ -x ; x < 0 \end{cases}$$

② مرحلة إخراج العامل المناسب

③ مرحلة الاختزال

④ مرحلة التعويض

تمرين:

أوجد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - x ; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{x+1} - x \\ &= x \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(-1) = -\infty \end{aligned}$$

2. $f(x) = 3x + \sqrt{1-x} ; a = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= 3x + \sqrt{1-x} \\ &= 3x - x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = x \left(3 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty(3) = -\infty \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{3x+1} - x ; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{3x+1} - x \\ &= x \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = x \left(\sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(-1) = -\infty \end{aligned}$$

4. $f(x) = -3x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= -3x + \sqrt{x^2 + x + 1} \\ &= -3x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= x \left(-3 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(-2) = -\infty \end{aligned}$$

5. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x + 1}$

$$a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x + 1} \\ &= x \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= x \left(\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty(\sqrt{3}) = +\infty \end{aligned}$$

ملاحظة:

بعد تطبيق طريقة المرافق والوصول على وجود ل x في البسط و x في المقام فإننا نكمل بطريقة العامل المناسب.

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x ; a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x} - x \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 \right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

7. $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2x} ; a = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{4x^2 + x + 2x} \\ &= \frac{(\sqrt{4x^2 + x + 2x})(\sqrt{4x^2 + x - 2x})}{\sqrt{4x^2 + x - 2x}} \\ &= \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x - 2x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{4x^2 + x - 2x}} = \frac{1}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} - 2}} \\ &= \frac{x}{x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} - 2} \right)} = \frac{1}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} - 2}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x - 2$

$$a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\begin{aligned} & \infty - \infty \text{ حالة عدم تعيين من الشكل} \\ f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x - 2 \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 5} - (x + 2) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - (x + 2))(\sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x + 2))}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x + 2)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 5 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + (x + 2)} \\ &= \frac{-2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x + 2} \\ &= \frac{x \left(-2 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + x + 2} \\ &= \frac{x \left(-2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x} \right)} \\ &= \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

تحدي ^ _ ^

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}; a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+2}} \cdot \frac{x+2 - x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} \cdot \frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right); a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0 \times \infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right) \\ &= x^2 \left(\frac{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right) \\ &= x^2 \left(\frac{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} \right)^2 - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right) \\ &= x^2 \left(\frac{2 + \frac{1}{x} - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

النهايات المثلثية:

الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض.

بعد التعويض نميز:

* الحصول على ناتج يكون التمرين انتهى.

* الحصول على حالة عدم تعيين يجب إزالتها.

* الحصول على $\sin \infty$ و $\cos \infty$ نستخدم

الإحاطة.

المبرهنات المثلثية:

تعيينها	المبرهنة
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \frac{\text{مقدار}}{\sin(\text{مقدار})} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \frac{\tan(\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \frac{\text{مقدار}}{\tan(\text{مقدار})} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

انتبه:

عند ظهور حالة عدم تعيين

يجب إزالتها ومن أجل ذلك فإننا:

* نصلح البسط أو المقام ليصبح مضمون الـ \sin

* عندما يصبح البسط أو المقام مشابهاً

لمضمون الـ \sin فإننا نميز حالتين:

* الحالة الأولى:

المسعى هو الصفر فإننا نطبق المبرهنة فوراً

* الحالة الثانية:

المسعى مختلف عن الصفر فإننا نستخدم

طريقة تغيير المتحول

والإصلاحات هي:

* النشر

* إخراج العامل المشترك

* توحيد المقامات

* تفريق الكسور

* الضرب والقسمة "شطب قطب"

* التباعد الاجتماعي

* الخواص المثلثية

انتبه:

يمنع الاقتراب من مضمون الـ \sin إلا في حال

وجود دستور مثلثي.

* تجنباً للكفر والإلحاد مجموعة ملاحظات:

* تفريق الكسور:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

* التباد الاجتماعي:

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$

* عند إدخال قيمة إلى داخل الجذر التربيعي

فإننا ندخل هذه القيمة للتربيع.

* عند إدخال قيمة إلى داخل القوة التربيعية

فإننا ندخل هذه القيمة بالجذر التربيعي.

$$\frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$$

$$\frac{\sin x}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \rightarrow \text{لا يمكن الاختصار}$$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$1. f(x) = \frac{\sin x}{x}; a = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$$2. f(x) = \frac{2 \cos x}{x}; a = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \frac{2 \cos \pi}{\pi} = \frac{-2}{\pi}$$

$$3. f(x) = \frac{x}{\cos x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$4. f(x) = \frac{\sin x}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$5. f(x) = \frac{\tan x}{x}; a = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

$$6. f(x) = \frac{x}{\tan x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$7. f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)^2 = 1$$

الطريقة الثانية:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)(1) = 1$$

$$8. f(x) = \frac{x^2}{\sin x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x} = x \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(1)(1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x}{\tan \sqrt{2}x} = 1$$

$$17. f(x) = \frac{\sin 7x}{\tan 2x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 7x}{\tan 2x}$$

$$= \frac{\sin 7x}{1} \cdot \frac{1}{\tan 2x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)(1)(1) = \frac{7}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} = 1$$

$$18. f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - x}$$

$$= \frac{\sin x}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (-1)(1) = -1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$19. f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} = \cos x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)(1) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$20. f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$13. f(x) = \frac{\sin 5x}{4x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{4x}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)(1) = \frac{5}{4}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$$

$$14. f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2} = \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2$$

$$= \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 9 \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 9(1)^2 = 9$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$15. f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin 5x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{\sin \pi x}{1} \cdot \frac{1}{\sin 5x}$$

$$= \frac{\sin \pi x}{x} \cdot \frac{x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{\pi}{5}\right)(1)(1) = \frac{\pi}{5}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1$$

$$16. f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan \sqrt{2}x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{\tan 3x}{1} \cdot \frac{1}{\tan \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\sqrt{2}x}{\tan \sqrt{2}x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$9. f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x} = \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$10. f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} \sin x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$11. f(x) = \frac{\sin x}{5x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{5x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)(1) = \frac{1}{5}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$12. f(x) = \frac{\sin 3x}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (3)(1) = 3$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$26. f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}}{x}$$

$$a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x})(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})}{x(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ &= \frac{(\sqrt{1+\sin 2x})^2 - (\sqrt{1-\sin 2x})^2}{x(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ &= \frac{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x}{x(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ &= \frac{2 \sin 2x}{x(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ &= \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ &= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{(\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x})} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 1$$

دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل إيجاد النهاية:
المجموعة الأولى:

$$\begin{aligned} \sin^2(\text{زاوية}) + \cos^2(\text{زاوية}) &= 1 * \\ 1 - \cos^2(\text{زاوية}) &= \sin^2(\text{زاوية}) * \\ \sin(\text{زاوية}) &= 2 \sin\left(\frac{\text{زاوية}}{2}\right) \cos\left(\frac{\text{زاوية}}{2}\right) * \\ 1 - \cos(\text{زاوية}) &= 2 \sin^2\left(\frac{\text{زاوية}}{2}\right) * \\ 1 + \cos(\text{زاوية}) &= 2 \cos^2\left(\frac{\text{زاوية}}{2}\right) * \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x * \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x * \\ \tan(\text{زاوية}) &= \frac{\sin(\text{زاوية})}{\cos(\text{زاوية})} * \\ \cot(\text{زاوية}) &= \frac{\cos(\text{زاوية})}{\sin(\text{زاوية})} * \end{aligned}$$

المجموعة الثانية:

دساتير التحويل من مجموع إلى جداء

جداء	مجموع
تماثل-تشابه	cos و COS
اختلاف	sin و sin

القوانين:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} * \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} * \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} * \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} * \end{aligned}$$

لكل جهد منظم .. عائد مضاعف

$$\begin{aligned} |x| = x \text{ فإن } x \rightarrow 0^+ \text{ بما أن:} \\ &= \frac{\sin x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$24. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x \sin 3x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x \sin 3x} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x \sin 3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+4})^2 - (2)^2}{x \sin 3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \frac{x^2 + 4 - 4}{x \sin 3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x \sin 3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sin 3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \frac{1}{3x (\sqrt{x^2+4}+2)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right) = 1$$

$$25. f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 2x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sin 2x (\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sin 2x (\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2x+3})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sin 2x (\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{2x+3-3} \\ &= \frac{\sin 2x (\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{2x} \\ &= \frac{\sin 2x}{2x} (\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{1}{2} \right) (1) = \frac{1}{2}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

$$21. f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 + \sin x}{x} \\ &= \frac{2x^2}{x} + \frac{\sin x}{x} \\ &= 2x + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 = 1$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ملاحظة هامة:

للإيجاد نهائية مثلثية تحوي نسبة مثلثية

وجذر فإننا نميز حالتين:

الحالة الأولى:

الجذر فقط "إظهار العامل المشترك"

الحالة الثانية:

جذر وعدد "مرافق"

$$22. f(x) = \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}; a = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sin x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \\ &= \sin x \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sin x}{|x|} \cdot \sqrt{x^2+1} \\ |x| = x \text{ فإن } x \rightarrow 0^+ \text{ بما أن:} \\ &= \frac{\sin x}{x} \sqrt{x^2+1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

علماء أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$23. f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}}; a = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sin x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \frac{2 \sin x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(1) = 2$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$34. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{\sin x} = 2 \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(0) = 0$$

$$35. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^3 + 3x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^3 + 3x^2}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{x^2(x+3)} = \frac{2 \sin^2 x}{x+3} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x+3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} (1)^2 = \frac{2}{3}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$36. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 4x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{1} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{1}{4}\right) (1)^2 (1)^2 = \frac{1}{4}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$$

$$30. f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{-2(1 - \cos^2 x)}{x^2}$$

$$= x - 2 - 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= x - 2 - 2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - 2 - 2(1) = -4$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$31. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{3x} = \frac{2}{3} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} (0)(1) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$32. f(x) = \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$$

$$= \frac{2 \sin^2 4x}{2x^2} = \frac{\sin^2 4x}{x^2}$$

$$= \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2 = \left(4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$= 16 \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 16(1)^2 = 16$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$$

$$33. f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

ملاحظة: طريقة لسهولة الحفظ:
كيفية كتابة القوانين وفق الخطوات:

- * نكتب 2
- * نعين الحد الأخير وفق الإشارة:
- * $\sin \leftarrow - \quad \cos \leftarrow +$
- * نعين الحد الأول وفق:
- * \cos و \cos تشابه مع الحد الأخير
- * \sin و \sin اختلاف مع الحد الأخير
- * نملأ الزوايا وفق:
- * الأولى $\frac{x+y}{2}$
- * الثانية $\frac{x-y}{2}$
- * عندما يكون الجداء \sin و \sin نضع إشارة (-) في الجداء

$$27. f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{3x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{3x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3x} = \frac{\sin x}{3} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$28. f(x) = \frac{x + \cos^2 x - 1}{3x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x + \cos^2 x - 1}{3x}$$

$$= \frac{x}{3x} + \frac{\cos^2 x - 1}{3x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (0)(1) = \frac{1}{3}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$29. f(x) = \frac{1 - \cos^2 4x}{x \sin x}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 4x}{x \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 4x}{x \sin x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 4x}{\sin x}$$

$$= \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2$$

$$= \frac{x}{\sin x} \cdot \left(4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 = 16 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 16(1)(1)^2 = 16$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{(2)(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

42. $f(x) = \frac{2 \cos x - 2}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2 \cos x - 2}{x}$$

$$= \frac{-2(1 - \cos x)}{x} = \frac{-2(2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}{x}$$

$$= -4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$= -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2(0)(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

43. $f(x) = \frac{2 - 2 \cos \sqrt{x}}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2 - 2 \cos \sqrt{x}}{x}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \sqrt{x})}{x} = \frac{2\left(2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)}{x}$$

$$= 4 \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4 \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{4}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

40. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

الطريقة الأولى:

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

الطريقة الثانية:

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$= \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1)(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

41. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$$

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x \sin x} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

37. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

38. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$$= 2 \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{2}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(1)^2 = \frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

39. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= -2 \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -2 \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{2}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1$$

44. $f(x) = \frac{4x^3 + 3 - 3 \cos x}{2x^2}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{4x^3 + 3 - 3 \cos x}{2x^2}$$

$$= \frac{4x^3}{2x^2} + \frac{3(1 - \cos x)}{2x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} + \frac{6 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$= 2x + 3 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 = 2x + \frac{3}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + \left(\frac{3}{4}\right) (1)^2 = \frac{3}{4}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

45. $f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4 \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2} + \frac{4(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{8 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= x + 8 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 = x + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 2(1)^2 = 2$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

46. $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x}$$

$$= \frac{-2x^2 + x - 2(1 - \cos \sqrt{x})}{x}$$

$$= -\frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{4 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$$

$$= -2x + 1 - 4 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1)^2 = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 1$$

47. $f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin x}$$

$$= \frac{-2 \sin 2x \cdot \sin x}{x \sin x}$$

$$= \frac{-2 \sin 2x}{x} = -2 \cdot \frac{2 \sin 2x}{2x}$$

$$= -4 \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4(1) = -4$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$$

48. $f(x) = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{\tan^3 x}$$

$$= \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x - 3 \sin x}{\tan^3 x}$$

$$= \frac{-4 \sin^3 x}{\tan^3 x} = \frac{-4 \sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}$$

$$= -4 \sin^3 x \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = -4 \cos^3 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4(1)^3 = -4$$

49. $f(x) = \frac{4 - 4 \cos x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{4 - 4 \cos x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$= \frac{4(1 - \cos x)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{8 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 + 1 - 1}$$

$$= 8(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= 8(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$$= 8(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{8(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{4} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= 2(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(2)(1)^2 = 4$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

50. $f(x) = \frac{(\sqrt{x+4}-2) \sin x}{\cos x - 1}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+4}-2) \sin x}{\cos x - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2) \sin x}{-(1 - \cos x)(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{(x+4-4) \sin x}{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) (\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{x \sin x}{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) (\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{2x \sin \left(\frac{x}{2}\right) \cos \left(\frac{x}{2}\right)}{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) (\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{-x \cos \left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \left(\frac{x}{2}\right) (\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{-\cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot x}{(\sqrt{x+4}+2) \sin \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2 \cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x}{2}}{(\sqrt{x+4}+2) \sin \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{(-2)(1)}{4} \cdot (1) = -\frac{1}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

إن الذي يرتجى شيئاً، يلقاه بهمة!
لذلك .. همة ف همة

$$56. f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right); a = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $0(\infty)$

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$= x \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

بفرض: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$
لما كان $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin t}{t} \right] = 1$$

$$57. f(x) = \frac{\tan^2(2x-6)}{x^2-6x+9}; a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\tan^2(2x-6)}{x^2-6x+9}$$

$$= \frac{\tan^2(2x-6)}{(x-3)^2}$$

$$= \left(\frac{\tan(2x-6)}{x-3} \right)^2$$

$$= \left(2 \frac{\tan(2x-6)}{2(x-3)} \right)^2$$

$$= \left(2 \frac{\tan(2x-6)}{2x-6} \right)^2$$

بفرض: $t = 2x-6$

فإن: $x = \frac{t}{2} + 3$

$$f(x) = \left(2 \cdot \frac{\tan t}{t} \right)^2$$

$$= 4 \left(\frac{\tan t}{t} \right)^2$$

لما كان $x \rightarrow 3$ فإن $t \rightarrow 0$ ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[4 \left(\frac{\tan t}{t} \right)^2 \right] = 4$$

علمنا أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

إن الذي خلق التعثر .. خلق النهوض

تغيير المتحول:

متى يُستخدم؟

عندما يكون البسط أو المقام مشابهاً لمضروب الـ

sin والمعسى مختلف عن الصفر.

كيف يُستخدم؟

* نغرض متحولاً جديداً حيث:

$$t = (\text{مضروب الـ})$$

* نوجد المعسى الجديد وذلك بتعويض

المعسى القديم في علاقة t

* نكتب x بدلالة t

* نعوض في التابع f أي نكتب f بدلالة t

* نصلح ونوجد النهاية.

$$53. f(x) = \frac{\sin(x-3)}{3-x}; a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(x-3)}{3-x}$$

$$= \frac{\sin(x-3)}{-(x-3)}$$

بفرض: $t = x-3$

فتكون: $x = t+3$

لما كان: $x \rightarrow 3$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = -\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \right) = -1$$

$$54. f(x) = \frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}; a = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi} = \frac{\sin(\pi-x)}{-(\pi-x)}$$

بفرض: $t = \pi-x$ فتكون: $x = -t+\pi$

لما كان: $x \rightarrow \pi$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{\sin t}{-t}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \right) = -1$$

$$55. f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$= \frac{\sin(x-2)}{x(x-2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

بفرض: $t = x-2$ فتكون: $x = t+2$

لما كان: $x \rightarrow 2$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{t+2} \cdot \frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t+2} \cdot \frac{\sin t}{t} \right] = \frac{1}{2}$$

$$51. f(x) = \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$$

$$= \frac{3+\cos x-4}{x^2(\sqrt{3+\cos x}+2)}$$

$$= \frac{-(1-\cos x)}{x^2(\sqrt{3+\cos x}+2)}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$= -2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$= -\frac{2}{4} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(-\frac{1}{2} \right) (1)^2 \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8}$$

علمنا أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

$$52. f(x) = \frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}$$

$$= \frac{2+2\cos x-3-\cos x}{x^2(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x})}$$

$$= \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x})}$$

$$= -2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x})}$$

$$= -\frac{2}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(-\frac{1}{2} \right) (1)^2 \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8}$$

علمنا أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

<p>إذا كان لدينا ثلاثة توابع f و g و h حيث f هو التابع المطلوب والتوابع الثلاثة مع بعضها تحقق ما يلي:</p> <p>الشرط الأول: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$</p> <p>الشرط الثاني: $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$</p> <p>النتيجة: فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$</p>	<p>المبرهنة الأولى</p>
<p>إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:</p> <p>الشرط الأول: $f(x) - l \leq g(x)$</p> <p>الشرط الثاني: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$</p> <p>النتيجة: فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$</p> <p>نكشات:</p> <p>إذا كان لدينا: $f(x) \leq g(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$</p> <p>إذا كان لدينا: $nf(x) - l \leq g(x)$ حيث n و l أعداد حقيقية وكانت $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow a} nf(x) = l$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{l}{n}$</p>	<p>المبرهنة الثانية</p>
<p>المقارنة الثانية</p> <p>② إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:</p> <p>الشرط الأول: $f(x) \geq g(x)$</p> <p>الشرط الثاني: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$</p> <p>النتيجة: فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$</p> <p>أي: إذا كانت نهاية الصغير هي $+\infty$ فإن نهاية الأكبر منه هي $+\infty$ حتماً</p>	<p>المقارنة الأولى</p> <p>① إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:</p> <p>الشرط الأول: $f(x) \leq g(x)$</p> <p>الشرط الثاني: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$</p> <p>النتيجة: فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$</p> <p>أي: إذا كانت نهاية الكبير هي $-\infty$ فإن نهاية الأصغر منه هي $-\infty$ حتماً</p>

تمرين:

أوجد نهاية f في كل من الحالات الآتية:
 1. $\frac{-1}{x+5} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+5}, a = +\infty$
 باعتبار:

$$h(x) = -\frac{1}{x+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

بما أن:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
 استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أن:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

بحقق:

2. $\frac{x-1}{x+3} \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+2x}-x$
 $a = +\infty$
 باعتبار:

$$h(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x}-x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

3. $\frac{1-\cos 2x}{\sin x} \leq f(x) \leq \frac{\cos x-1}{x^2} + \frac{1}{2}$
 $a = 0$

$$h(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$h(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{\sin x} = 2 \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{\cos x-1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{\cos x-1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-(1-\cos x)}{x^2} + \frac{1}{2} = -\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= -2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2} = -2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -2 \left(\frac{1 \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x^2+2x-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{2x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{x^2+2x-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{2x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \frac{x^2+2x-x^2}{2x(\sqrt{x^2+2x}+x)}$$

$$= \frac{2x}{2x(\sqrt{x^2+2x}+x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

بما أن:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
 استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

لا تعلن الخطوات، أعلن الوضوح..

ملاحظة:

بعد التعويض وعند ظهور $\cos \infty$ أو $\sin \infty$ فإننا لإيجاد النهاية نطبق مرحلتين: المرحلة الأولى: مرحلة صنع المتراجحة أي مرحلة حصر التابع وتتم وفق:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(\text{زاوية}) \leq 1 \\ -1 &\leq \cos(\text{زاوية}) \leq 1 \\ 0 &\leq \cos^2(\text{زاوية}) \leq 1 \\ 0 &\leq \sin^2(\text{زاوية}) \leq 1 \end{aligned}$$

المرحلة الثانية: مرحلة إيجاد النهاية ونستخدم إحدى مبرهنات الإحاطة أو مبرهنة المقارنة

ملاحظة:

- دائماً نبدأ بمرحلة حصر التابع ونميز ثلاث حالات:
- ① الحالة الأولى: إذا كانت نهاية الأطراف هي عدد فإننا نكمل بالإحاطة الأولى
 - ② الحالة الثانية: إذا كانت نهاية الأطراف هي $+\infty$ فإننا نحذف الطرف الكبير ونكمل بمرهنة المقارنة
 - ③ الحالة الثالثة: إذا كانت نهاية الأطراف هي $-\infty$ فإننا نحذف الطرف الصغير ونكمل بمرهنة المقارنة

انتبه: نغير جهة التراجع عندما:

- * الضرب أو القسمة بعدد سالب
- * القلب

ملاحظات مهمة:

الملاحظة الأولى:

عند رحلة تأليف التابع وعند الضرب "القسمة" طرفي المتراجحة بمقدار ما يجب تحديد إشارة هذا المقدار ونميز:

الحالة الأولى:

إشارة المقدار يمكن تحديدها فإننا نتابع كما سبق.

الحالة الثانية:

إشارة المقدار لا يمكن تحديدها فإننا ناقش حالتين ثم نتابع كما سبق.

الملاحظة الثانية:

بعد التعويض:

- * $\sin \infty$ فإننا نضع إحاطة.
- * حالة عدم تعيين فإننا نضع مبرهنة.

التعريف الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a :

1. $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); a = 0^+$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب بـ (x) بشرط $x > 0$

$$-x \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$-x \leq f(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2x^2} + \frac{2 \cos x - 2}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-2(1 - \cos x)}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

نعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7$$

7. $f(x) \leq \sqrt{x+1} - x; a = +\infty$
باعتبار:

$$g(x) = \sqrt{x+1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$g(x) = \sqrt{x+1} - x$$

$$= \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - x = x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty(-1) = -\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

8. $f(x) \geq \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}; a = 0^+$

باعتبار:

$$g(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin 2x}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{4}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = (1)(1)(1)(+\infty) = +\infty$$

نعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = 1$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

نعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 1$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

f يحقق:

4. $|f(x) + 2| \leq \frac{x-1}{3+x^2}, a = +\infty$
باعتبار:

$$g(x) = \frac{x-1}{3+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

f يحقق:

5. $|f(x) - 5| \leq \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, a = +\infty$
باعتبار:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x} = \frac{|x| \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)}{x}$$

بما أن: $x \rightarrow +\infty$ فإن $|x| = x$ ومنه:

$$= \frac{x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)}{x}$$

$$= \frac{x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

f يحقق:

6. $|f(x) + 7| \leq \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{2x^2}$
 $a = 0$
باعتبار:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{2x^2}$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$2. f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); a = 0$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب بـ (x^2)

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$3. f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); a = 0$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

الحالة الأولى: نضرب بـ x بشرط $x > 0$:

$$-x \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$-x \leq f(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

الحالة الثانية: نضرب بـ x بشرط $x < 0$:

$$-x \geq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$-x \geq f(x) \geq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

إذا تكون:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$4. f(x) = (x-1) \cdot \sin\left(\frac{1}{1-x}\right); a = 1$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1$$

الحالة الأولى: بشرط $x-1 > 0$:

$$-x+1 \leq (x-1) \cdot \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq x-1$$

$$-x+1 \leq f(x) \leq x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

الحالة الثانية: بشرط $x-1 < 0$:

$$-x+1 \geq (x-1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \geq x-1$$

$$-x+1 \geq f(x) \geq x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

إذا تكون:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$5. f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right); a = 0^-$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب بـ (x) بشرط $x < 0$:

$$-x \geq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$-x \geq f(x) \geq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $I =]0 + \infty[$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

الطالب الأول:

$$\text{أثبت أن } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \text{ أي } x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{l_1} = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{l_2}$$

$$l_1 = f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \\ = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = l_2$$

الطالب الثاني:

$$\text{استنتج أن } \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ في حالة } x > 0 \\ \text{يجب إثبات أن:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

جهة أولى جهة ثانية

إصرارك على العظمة سيجلبها



من جهة أولى: بما أن $x > 0$ فإن:

$$x+2 \geq x$$

نحذر الطرفين:

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$$

نضيف $\sqrt{x+2}$ للطرفين:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$$

نقلب الطرفين:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$\frac{2}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \dots (1)$$

من جهة ثانية: بما أن $x > 0$ فإن:

$$x+2 \geq x$$

نحذر الطرفين:

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$$

نضيف للطرفين \sqrt{x} :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$$

نقلب الطرفين:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$\frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \dots (2)$$

بدمج (1) و (2) نجد أن:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

الطالب الثالث:

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

بالاستفادة من الطالب (1):

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الطالب الرابع:

استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \sqrt{2}$$

تعريف	نقول عن التابع f أنه محدود إذا كان يحقق: $m \leq f(x) \leq M$ حيث m و M أعداد حقيقية.
نصر السؤال	أثبت أن التابع f محدود أثبت محدودية التابع f حيث التابع f يحوي " sin أو cos " مرحلة الإصلاح: " عند الزوم "
فكرة الحل	وتعني باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية-إتمام إلى مربع كامل) أي نكتب التابع f بدلالة sin أو cos واحدة. مرحلة الحصر: وهي ذاتها مرحلة تأليف التابع.

التعريف الأول:

أولاً:

ليكن g تابع معرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4}$$

الطالب الأول: أثبت أن g محدود.

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$3 \leq \sin x + 4 \leq 5$$

$$\frac{3}{5} \leq \frac{\sin x + 4}{5} \leq 1$$

$$\frac{5}{5} \geq \frac{5}{5} \geq 1$$

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1$$

$$1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$$

ومنه: $f(x) \in \left[1, \frac{5}{3}\right]$ إذا f تابع محدود.الطالب الثاني: استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4} \right)$ وجدنا من الطالب السابق أن:

$$\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sin x + 4} \geq 1$$

نضرب الطرفين ب x^2 :

$$\frac{5}{3}x^2 \geq \frac{5x^2}{\sin x + 4} \geq x^2$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة المقارنة نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{\sin x + 4} \right) = +\infty$$

ثانياً:

أثبت أن التابع:

$$f(x) = \frac{2 - 3 \cos x}{4 + 3 \cos x}$$

يُكتب بالشكل:

$$f(x) = \frac{6}{4 + 3 \cos x} - 1$$

ثم استنتج أن f محدود.

الحل:

$$f(x) = \frac{6}{4 + 3 \cos x} - 1$$

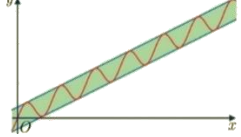
بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$\frac{2 - 3 \cos x}{4 + 3 \cos x} = -1 + \frac{6}{3 \cos x + 4}$$

$$f(x) = \frac{6}{4 + 3 \cos x} - 1$$

* المستقيمات المحددة للخط البياني للتابع f :إن الخط البياني للتابع f محدد بالمستقيمين اللذين

$$y = \frac{x}{2} + 2 \text{ و } y = \frac{x}{2} - 2$$



الطالب الثاني:

احسب $f(1000)$ مبيئاً الخطأ في الحساب

$$\frac{x}{2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{1000}{2} - 2 \leq f(1000) \leq \frac{1000}{2} + 2$$

$$498 \leq f(1000) \leq 502$$

إن $\frac{x}{2}$ قيمة تقريبية ل $f(x)$ بخطأ 2

زيادة أو نقصان

التعريف الثاني:

ليكن التابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = 3x + \sin x$$

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$ ثماحسب قيمة تقديرية للمقدار $f(1000)$

مبيئاً الخطأ في الحساب.

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضيف $3x$ وفق:

$$3x - 1 \leq 3x + \sin x \leq 3x + 1$$

إذاً:

$$3x - 1 \leq f(x) \leq 3x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة يكون:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

وتكون المستقيمات المحددة للخط البياني f هي: $y_1 = 3x - 1$ و $y_2 = 3x + 1$ حساب $f(1000)$:

$$3(1000) - 1 \leq f(1000) \leq 3(1000) + 1$$

$$2999 \leq f(1000) \leq 3001$$

إن $3x$ هي القيمة التقريبية ل f بخطأ واحد

زيادة أو نقصان.

يوماً ما سيتحقق الحلم .. ويكون 😊❤️

استنتاج f محدود:

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-3 \leq 3 \cos x \leq 3$$

$$1 \leq 4 + 3 \cos x \leq 7$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{4 + 3 \cos x}{6} \leq \frac{7}{6}$$

$$6 \geq \frac{4 + 3 \cos x}{6} \geq \frac{7}{6}$$

$$5 \geq \frac{4 + 3 \cos x}{6} - 1 \geq \frac{7}{6} - 1$$

$$-\frac{1}{7} \leq f(x) \leq 5$$

ومنه: $f(x) \in \left[-\frac{1}{7}, 5\right]$ إذا التابع f محدود.

إن المعلومات الإضافية التي تزودنا بها مبرهنة الإحاطة إضافة إلى معرفة نهاية تابع هي:

* معرفة القيم التقريبية لتابع عند

قيم المتحول التي في غاية الكبر

* معرفة سلوك الفرع اللانهائي للخط

البياني للتابع

سلوك تابع:

هو معلومين يجب استنتاجها:

* نهاية التابع

* المستقيمات المحددة للخط البياني للتابع

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 \sin x$$

الطالب الأول:

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$

الحل:

* إيجاد نهاية f في جوار $+\infty$ مهما كانت x من \mathbb{R} كان:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$\frac{x}{2} - 2 \leq \frac{x}{2} + 2 \sin x \leq \frac{x}{2} + 2$$

إذاً:

$$\frac{x}{2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 2$$

ولكن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - 2 \right) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

رقمه	يقراً	القانون	أنماط التمارين
		$f \circ g(x)$ دائرة f أو g يلي f $f \circ g(x) = f(g(x))$	
النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	نص السؤال
أوجد نهاية التابع f بحيث يكون معطى بأحد الأشكال الآتية: * لوغاريتم مضمونه تابع آخر $g(x)$ * جذري مضمونه تابع آخر $g(x)$ * مثلثي مضمونه تابع آخر $g(x)$ * أسّي أسه تابع آخر $g(x)$ * قوة أساسها تابع آخر $g(x)$	أوجد $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$	صيغة أولى: اكتب $f \circ g(x)$ بدلالة x صيغة ثانية: عبر عن $f \circ g(x)$ بدلالة x صيغة ثالثة: أوجد قاعدة ربط التابع $f \circ g(x)$	
فإننا لإيجاد نهاية التابع f نتبع الخطوات: * نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$ * نعوض ناتج النهاية في التابع f * بدلاً من $g(x)$	نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت قاعدة ربط التابع $f(g(x))$ معلومة فإننا نوجد النهاية فوراً كما تعلمنا سابقاً حسب نوع التابع الحالة الثانية: إذا كانت قاعدة ربط التابع $f(g(x))$ غير معلومة فإننا: ١. نوجد b (نهاية الداخلة) وفق: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ٢. نوجد c (نهاية الخارج) وفق: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ ٣. فتكون نهاية $f(g(x))$ هي: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$	نطبق القانون: $f \circ g(x) = f(g(x))$ نكمل بفكرة التصوير يعني اذهب إلى التابع الموافق واستبدل كل x بها في داخل الأقواس	فكرة الحل

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابعان f و g اللذان يحققان:

$$f(x) = x^2 + 1, D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$g(x) = \sqrt{x}, D_g = [0, +\infty[$$

الطالب الأول:

أوجد كلاً مما يلي:

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$g(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$g(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$g(x^2 - 3) = \sqrt{x^2 - 3}$$

الطالب الثاني:

اكتب $f \circ g(x)$ بدلالة x .

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x})$$

$$= (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

الطالب الثالث:

اكتب $g \circ f(x)$ بصيغة تحوي x .

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 1}$$

الطالب الرابع:

أوجد قاعدة ربط $f(f(x))$.

$$f(f(x)) = f(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 1$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{x-3}{x+5} - 3\right)}{\frac{x-3}{x+5} + 5}$$

$$\frac{x-3-3x-15}{x+5}$$

$$= \frac{x-3+5x+25}{x+5}$$

$$= \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

التعريف الثالث:

فيما يأتي نعطي تابعاً f معرفاً على المجموعة D ويطلب حساب نهاية f عند a

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$$

$$a = 5; D =]5, +\infty[$$

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+3}{x-5}\right) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$= x^4 + 2x^2 + 2$$

الطالب الخامس:

أوجد قاعدة ربط $g(g(x))$.

$$g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

التعريف الثاني:

ليكن f التابع المعرف على $] -5, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

١. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

٢. أعد حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

إذاً يكون:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = -\frac{1}{3}$$

٢. كتابة $f(f(x))$ بدلالة x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sin 0 = 0$$

9. $f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2$
 $a = +\infty ; D =]0, +\infty[$
 بفرض:

$$g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$= x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)^2 = +\infty$$

10. $f(x) = \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$
 $a = +\infty, D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
 بفرض:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{1} = 1$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos^2(\pi) = (-1)^2 = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \cos \pi + \infty$$

$$= -1 + \infty = +\infty$$

6. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$
 $a = +\infty ; D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
 بفرض:

$$g(x) = \frac{\pi x + 1}{x + 2}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pi$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos \pi = -1$$

7. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$
 $a = 1 ; D =]-\infty, 1[$
 بفرض:

$$g(x) = \frac{2x^2}{1-x}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

8. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
 $a = +\infty ; D =]0, +\infty[$
 بفرض:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

لذا كان:

2. $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$
 $a = -\infty ; D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$
 بفرض:

$$g(x) = -x^3 + x^2 + x$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$
 $a = -\infty ; D =]-\infty, 1[$
 بفرض:

$$g(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{0} = 0$$

4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $a = 1 ; D =]-1, 1[$
 بفرض:

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +1} g(x) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

5. $f(x) = \cos \pi x + \frac{1}{(x-1)^2}$
 $a = 1 ; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 بفرض:

النهاية باستخدام التعريف:

مخطط النهاية باستخدام التعريف

تعيين مجال

A تعيين

* نطلق من العلاقة المعطاة

* نعزل x

* نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال:

$$C = \frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}$$

* نضع العلاقة: $|f(x) - C| < r$

* نعوض ونعزل

انتبه: التخلص من القيمة المطلقة يكون بالاعتماد على دراسة الإشارة

حل متراجحة

إصلاح التابع ثم عزل x

فوري

التعريف الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a $+\infty$ المعين
بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$ ثم أوجد عدداً A
يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ كان $f(x)$
في المجال $]-2.05, -1.95[$
الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال:

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-2.05 - 1.95}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

نوجد نصف قطر المجال:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-1.95 + 2.05}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

بما أن $f(x)$ من المجال $]-2.05, -1.95[$
فإن:

$$\begin{aligned} |f(x) - c| &< r \\ \left| \frac{-2x+1}{x+3} + 2 \right| &< \frac{1}{20} \\ \left| \frac{-2x+1+2x+6}{x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \left| \frac{7}{x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \frac{7}{x+3} &< \frac{1}{20} \\ \frac{x+3}{7} &> 20 \\ x+3 &> 140 \\ x &> 137 \\ \text{ومنه } A &= 137 \end{aligned}$$

التعريف الثاني:

احسب نهاية التابع f عند a $+\infty$:

$$f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$$

ثم أعط عدداً A يحقق الشرط: إذا كان
 $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9, 5.1[$
الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال:

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{4.9 + 5.1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

نوجد نصف قطر المجال:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{5.1 - 4.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

بما أن $f(x)$ من المجال $]4.9, 5.1[$ فإن:

$$\begin{aligned} |f(x) - c| &< r \\ \left| \frac{5x-1}{x-1} - 5 \right| &< \frac{1}{10} \\ \left| \frac{5x-1-5x+5}{x-1} \right| &< \frac{1}{10} \\ \left| \frac{4}{x-1} \right| &< \frac{1}{10} \\ \frac{4}{x-1} &< \frac{1}{10} \\ \frac{x-1}{4} &> 10 \\ x-1 &> 40 \\ x &> 41 \\ \text{ومنه } A &= 41 \end{aligned}$$

التعريف الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعروف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+3}$$

أوجد نهاية التابع f عند a $-\infty$ ثم عين

$x < A$ ليكون $f(x)$ من المجال

$$]-1.05, -0.95[$$

الحل:

حساب نهاية التابع f عند a $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+3}$$

بما أن: $x \rightarrow -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{x}{-x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال وفق:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-1.05 - 0.95}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-0.95 + 1.05}{2} = \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

بما أن $f(x)$ من المجال $]-1.05, -0.95[$
فإنه يتحقق:

$$\begin{aligned} |f(x) - c| &< r \\ \left| \frac{x}{|x|+3} + 1 \right| &< \frac{1}{20} \\ |x| = -x &: \text{ لدينا في جوار } a: -\infty \\ \left| \frac{x}{-x+3} + 1 \right| &< \frac{1}{20} \\ \left| \frac{x-x+3}{-x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \left| \frac{3}{-x+3} \right| &< \frac{1}{20} \\ \frac{3}{-x+3} &< \frac{1}{20} \\ -x+3 &> 60 \\ -x &> 57 \\ x &< -57 \end{aligned}$$

ومنه: $A = -57$

التعريف الرابع:

1. جد نهاية التابع f عند a 3 :

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

2. جد مجالاً I مركزه 3 يحقق إذا $x \in I$

كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9, 2.1[$.

الحل:

لدينا $f(x)$ من المجال $]1.9, 2.1[$ أي:

$$1.9 < f(x) < 2.1$$

$$1.9 < \sqrt{x+1} < 2.1$$

$$(1.9)^2 < x+1 < (2.1)^2$$

$$3.61 < x+1 < 4.41$$

$$3.61 - 1 < x < 4.41 - 1$$

$$2.61 < x < 3.41$$

إذاً:

$$I =]2.61, 3.41[$$

التعريف الخامس:

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

عند a 5 ثم أوجد مجالاً I

مركزه 5 يحقق الشرط: إذا انتمى x إلى

المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال:

$$J =]3.95, 4.05[$$

الحل:

بما أن التابع $f(x)$ من المجال $]3.95, 4.05[$
فإن:

$$3.95 < f(x) < 4.05$$

$$3.95 < \frac{x+3}{x-3} < 4.05$$

نلاحظ أن التابع $f(x)$ معطى بدلالة x

لذلك نصلح التابع باستخدام القسمة الإقليدية

لكي نحصل على التابع f بدلالة x واحدة.

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$3.95 < 1 + \frac{6}{x-3} < 4.05$$

$$2.95 < \frac{6}{x-3} < 3.05$$

$$\frac{1}{2.95} > \frac{x-3}{6} > \frac{1}{3.05}$$

$$\frac{2.95}{6} > x-3 > \frac{3.05}{6}$$

$$\frac{6}{2.95} + 3 > x > \frac{6}{3.05} + 3$$

إذاً:

$$I =]\frac{6}{3.05} + 3, \frac{6}{2.95} + 3[$$

للابد للأحلام أن تنمو

للابد للأهداف من وصول

التعريف السادس:

جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة

$$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$$

α يحقق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال

$$f(x) > 10^3$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

تعين قيمة α :

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$

المقاربات:

المقارب: هو مستقيم يقترب من الخط البياني في جوار التقارب دون أن يلمسه
 اتبه: الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب (يصطفوا)
 أنواع المقاربات: المقارب الأفقي-المقارب الشاقولي-المقارب المائل

المقارب الشاقولي	المقارب الأفقي	تعريفه
هو مستقيم يوازي محور الترتيب	هو مستقيم يوازي محور القواصلا	شكل معادلته
$x = a$	$y = b$	اكتشاف وجوده
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من (اليمين-اليسار) نحو $(oy^- - oy^+)$	إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار ∞	نص السؤال
		فكرة الحل
		نص السؤال
		فكرة الحل

$$t = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 126}{2000}$$

$$= -\frac{121}{2000} \cong -0.06$$

$$t = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 126}{2000}$$

$$= \frac{131}{2000} \cong 0.06$$

$$t \in] -0.06, 0.06[$$

$$-0.06 < t < 0.06$$

$$-0.06 < x - 1 < 0.06$$

$$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$

$$5x - 1 > (10)^3(x - 1)^2$$

$$(10)^3(x - 1)^2 - 5x + 1 < 0$$

ليكن $t = x - 1$ ومنه: $x = t + 1$
 نعوض في المتراجحة.

$$(10)^3t^2 - 5(t + 1) + 1 < 0$$

$$(10)^3t^2 - 5t - 5 + 1 < 0$$

$$(10)^3t^2 - 5t - 4 < 0$$

$$(10)^3t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$a = 10^3, b = -5, c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 25 + 16000 = 16025$$

$$\sqrt{\Delta} \cong 126$$

تعريف:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{5\}$
 وفق:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 5}$$

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجالات
 مجموعة التعريف المفتوحة واكتب معادلة
 كل مقارب في حال وجوده.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2 \text{ مقارب أفقي في جوار ال-}\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2 \text{ مقارب أفقي في جوار ال+}\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{13}{0^-} = -\infty$$

$$x = 5 \text{ مقارب شاقولي من اليسار نحو } oy^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{13}{0^+} = +\infty$$

$$x = 5 \text{ مقارب شاقولي من اليمين نحو } oy^+$$

المقارب المائل:

تعريف	هو مستقيم مائل معادلته من الشكل $y = ax + b$	نص السؤال	فكرة الحل
الأمثل	هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ؟	هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ؟	ننتحقق من وجود مقارب أفقي للخط البياني في جوار ∞ ونميز: ① وجود مقارب أفقي في جوار ∞ فإنه لا يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ② عدم وجود مقارب أفقي في جوار ∞ إمكانية وجود مقارب مائل في جوار ∞
تعريف	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ وفق: $f(x) = \frac{3x - 1}{5 - x}$ هل يوجد مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار ال- ∞ ؟ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ فإن الخط البياني لا يقبل مقارباً مائلاً في جوار ال- ∞ بسبب وجود مقارب أفقي معادلته $y = -3$		

أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة) مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$

نشكل الفرق $h(x) = f(x) - y_\Delta$

نوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ونميز:

① إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

يكون المستقيم Δ مقارب لـ C_f

② إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \neq 0$

يكون المستقيم Δ ليس مقارب لـ C_f ملاحظة مهمة:

في هذا النمط عند عدم تحديد جوار الدراسة فإننا نحدد جوار الدراسة بالاعتماد على مجموعة التعريف ونميز:

* $+\infty$ جوار الدراسة هو $]a, +\infty[$

* $-\infty$ جوار الدراسة هو $] -\infty, a[$

* $+\infty$ جوار الدراسة هو $] -\infty, a[\cup]a, +\infty[$

* مع الانتباه إلى أنه في حال وجود مقارب أفقي لا تناقش وجود مقارب مائل.

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R}^* وفق:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$$

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.
نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - y_\Delta \\ &= 2x - 1 + \frac{1}{x} - (2x - 1) \\ &= 2x - 1 + \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = x + 4 + \frac{3}{x-1}$$

وليكن لدينا المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 4$.
ادرس الوضع النسبي بين C_f والمستقيم Δ .
الحل:

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - y_\Delta \\ &= x + 4 + \frac{3}{x-1} - x - 4 = \frac{3}{x-1} \end{aligned}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{x-1} = 0$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق $h(x)$ لا ينعدم.
نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$ $	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت c	$ $	Δ فوق c

نشكل الفرق $h(x) = f(x) - y_\Delta$

نعد الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$

نظم جدول الوضع النسبي:

x	
$h(x)$	
الوضع النسبي	

① حقل x نضع فيه:

مجموعة تعريف التابع

قيم x التي تعدم $h(x)$

② حقل الفرق $h(x)$ نضع فيه:

الإشارات حيث الطريقة الأفضل لتحديد هـ استخدامها أسلوب القيم التجريبية وتعويضها في الفرق $h(x)$

العدد صفر تحت القيم التي تعدم الفرق $h(x)$

③ حقل الوضع النسبي ونضع فيه:

خطوط فصل

C فوق Δ (تحت إشارة $+$)

C تحت Δ (تحت إشارة $-$)

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ (معادلته معطاة) مقارب مائل - مقارب أفقي - معاصر - مستقيم عشوائي والخط البياني

التعريف الأول:

ليكن C الخط البياني التابع f المعرفة على \mathbb{R}^* :
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2}$$

الطالب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الصفر الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{2(\cos^2 x - 1)}{x^2}$$

$$= x - 2 - \frac{2(1 - \cos^2 x)}{x^2}$$

$$= x - 2 - \frac{2(\sin^2 x)}{x^2} = x - 2 - 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 - 2(1)^2 = -4$$

الطالب الثاني:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته

$y = x - 2$ مقارب مائل للخط C_f في

جوار $-\infty$.

الحل:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - y_\Delta \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2} - (x - 2) \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2}{x^2} - x + 2 \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 2 \cos^2 x - 2 - x^3 + 2x^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cos^2 x - 2}{x^2}$$

إحاطة $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \rightarrow$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2$$

$$-2 \leq 2 \cos^2 x - 2 \leq 0$$

نقسم على x^2 وفق:

$$-\frac{2}{x^2} \leq \frac{2 \cos^2 x - 2}{x^2} \leq 0$$

$$-\frac{2}{x^2} \leq h(x) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $-\infty$

التعريف الثاني:

ليكن C الخط البياني التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x}$$

الطالب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x} \\
 &= -\frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2(\cos \sqrt{x} - 1)}{x} \\
 &= -2x + 1 - \frac{2(1 - \cos \sqrt{x})}{x} \\
 &= -2x + 1 - \frac{2 \left(2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{x} \\
 &= -2x + 1 - \frac{2 \left(2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{(\sqrt{x})^2} \\
 &= -2x + 1 - 4 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\
 &= -2x + 1 - 4 \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \\
 &= -2x + 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \\
 &= -2x + 1 - \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 - (1)^2 = 0
 \end{aligned}$$

الطالب الثاني:

أثبت أن المستقيم $\Delta: y = -2x + 1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار ال $+\infty$.
الحل:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) - y_{\Delta} \\
 &= \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x} - (-2x + 1) \\
 &= \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2}{x} + 2x - 1 \\
 &= \frac{-2x^2 + x + 2 \cos \sqrt{x} - 2 + 2x^2 - x}{x} \\
 &= \frac{2 \cos \sqrt{x} - 2}{x}
 \end{aligned}$$

إحاطة $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \cos \sqrt{x} \leq 1 \\
 -2 &\leq 2 \cdot \cos \sqrt{x} \leq 2 \\
 -4 &\leq 2 \cos \sqrt{x} - 2 \leq 0 \\
 &\text{نقسم على } x \text{ بشرط } x > 0 \\
 -\frac{4}{x} &\leq \frac{2 \cos \sqrt{x} - 2}{x} \leq 0
 \end{aligned}$$

$$-\frac{4}{x} \leq h(x) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

ومنهُ المستقيم الذي معادلته

$$C_f: y = -2x + 1$$

في جوار ال $+\infty$

التعريف الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

الطالب الأول:

احسب نهاية f عند ال $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$= x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$$

بما أن $x \rightarrow -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$= x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= x \left(1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 2) = +\infty$$

الطالب الثاني:

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = -x$

مقارب مائل للخط البياني في جوار ال $-\infty$

الحل:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= x + \sqrt{4x^2 + 1} + x$$

$$= 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$= \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})(2x - \sqrt{4x^2 + 1})}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2 + 1})^2}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\frac{1}{\infty} = 0$$

إذاً المستقيم Δ مقارب مائل للخط البياني

C_f في جوار ال $-\infty$.

الطالب الثالث:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ

والخط البياني C_f .

الحل:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$2x + \sqrt{4x^2 + 1} = 0$$

$$\sqrt{4x^2 + 1} = -2x$$

بشروط $x < 0$ نربع الطرفين وفق:

$$4x^2 + 1 = 4x^2$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		$+$
الوضع النسبي		Δ فوق C

التعريف الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

الطالب الأول:

جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات

تعريفه ثم استنتج معدلة كل مقارب أفقي

أو شاقولي ل C .

الحل:

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-21}{0^+} = -\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-21}{0^-} = +\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{7x - 7}{x^2 + x - 2}$$

$$= 2x - 3 + \frac{7(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$= 2x - 3 + \frac{7}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

الطالب الثاني:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = 2x - 3$$

وضع C مع Δ

الحل:

إثبات أن Δ مقارب مائلاً:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) - y_{\Delta} \\
 &= \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} - (2x - 3) \\
 &= 2x - 3 + \frac{7}{x + 2} - 2x + 3 \\
 &= \frac{7}{x + 2} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= 0 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= 0
 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = 2x - 3 \text{ في جوار الـ } +\infty \text{ والـ } -\infty$$

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) - y_{\Delta} \\
 &= \frac{7}{x + 2}
 \end{aligned}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$7 \neq 0$$

مستحيية الحل ومنه الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$ $	$+$	$+$
الوضع النسبي	فوق c	تحت c	فوق c	فوق c

التعريف الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

الطالب الأول:

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \\
 &= \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{4}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 4 \\
 \text{استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) &= 4 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 4 \\
 \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= 2
 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 2$$

الطالب الثاني:

اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C

وادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4$

مقارب أفقي لـ C_f في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) - y_{\Delta} \\
 &= \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - 4 \\
 &= \frac{4\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 2} = -\frac{8}{\sqrt{x} + 2} \\
 \text{نعدم الفرق:}
 \end{aligned}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{8}{8} = 0$$

$$-\frac{8}{\sqrt{x} + 2}$$

$$-8 \neq 0$$

مستحيية الحل إذا الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$-$
الوضع النسبي	تحت Δ	تحت Δ

الطالب الثالث:

أعط عدداً حقيقياً A يحقق إذا كان $x > A$

فإن $f(x)$ في المجال $[3.9, 4.1]$

الحل:

نوجد مركز المجال وفق:

$$c = \frac{a + b}{2} = \frac{3.9 + 4.1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b - a}{2} = \frac{4.1 - 3.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

بما أن $f(x)$ من المجال $[3.9, 4.1]$ فإنه

يتحقق:

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left| \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - 4 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{4\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 2} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{-8}{\sqrt{x} + 2} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{8}{\sqrt{x} + 2} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{\sqrt{x} + 2}{8} > 10$$

$$\sqrt{x} + 2 > 80$$

$$\sqrt{x} > 78$$

$$x > 6084$$

ومنه $A = 6084$

التعريف الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R}^*

المعطى بالعلامة وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - \sin x}{x}$$

1. أثبت أن للخط C مقارب مائلاً Δ معادلته

$$y = x \text{ في جوار الـ } +\infty$$

2. ادرس الوضع النسبي للخط C مع

المقارب Δ على $]0, +\infty[$

الحل:

الطالب الأول:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) - x \\
 &= \frac{x^2 + 2 - \sin x}{x} - x \\
 &= \frac{2 - \sin x}{x}
 \end{aligned}$$

نعلم أن:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$1 \geq -\sin x \geq -1$$

$$3 \geq 2 - \sin x \geq 1$$

$$\frac{3}{x} \geq h(x) \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذا $y = x$: Δ مقارب مائلاً في جوار الـ $+\infty$

الطالب الثاني:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \frac{x}{2 - \sin x}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{x}{2 - \sin x} = 0$$

$$2 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 2$$

مستحيية الحل.

ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	$+$
الوضع النسبي	فوق Δ	فوق Δ

التعريف السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{\cos x}{x}$$

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = x$

نقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$ وادرس

على المجال $]0, \pi[$ وضع الخط C بالنسبة

إلى Δ

الحل:

$$f(x) = x + \frac{\cos x}{x}$$

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta} = x + \frac{\cos x}{x} - x = \frac{\cos x}{x}$$

نوجد نهاية الفرق:
نعلم أن:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

في جوار ال $+\infty$ نقسم على $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq h(x) \leq \frac{1}{x}$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى يكون:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$

مقارب مائل للخط C في جوار ال $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta} = \frac{\cos x}{x}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{\cos x}{x} = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

نظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$h(x)$	+	0	-
الوضع النسبي	C فوق Δ		C تحت Δ

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$]-\infty, 0[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$

مقارب مائل لـ C في جوار ال $-\infty$ وادرس

الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

$$f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$$

$$\Delta: y = 2x$$

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x} - 2x$$

$$= \frac{2x^2 + \cos^2 x - 2x^2}{x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$

إحاطة..

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

نقسم على x بشرط $x < 0$:

$$0 \geq \frac{\cos^2 x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$0 \geq h(x) \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = 2x$

مقارب مائل في جوار ال $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{x} < 0$$

$$\Delta \text{ تحت } C_f$$

تنويه:

$\cos^2 x$ موجب

و $x \in]-\infty, 0[$ فهي سالبة

ومنه الكسر سالب.

النقط الرابع: استنتاج معادلة المقارب المائل

أوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار ∞ أو استنتج أن للخط البياني C_f مقارب مائل

نصر السؤال

نعيز

شكل التابع
وفكرة الحل

إذا كان لدينا
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
يكون المستقيم الذي معادلته
 $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل للخط
البياني C_f في جوار ∞

شكل التابع:

$$f(x) = ax + b + g(x)$$

خطوات الحل:

١. نوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

٢. نميز حالتين:

① إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

تكون معادلة المقارب المائل Δ

$$\Delta: y = ax + b \text{ هي}$$

٢. إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$

لا يوجد مقارب مائل

الحالة الثانية

شكل التابع: تابع كسري درجة بسطه
أكبر من درجة مقامه بواحد
خطوات الحل:

نطبق القسمة الإقليدية ونستفيد من القاعدة:

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$$

كي يتحول شكل التابع إلى الحالة الثانية

$$f(x) = ax + b + g(x)$$

نتابع كما في الحالة الثانية

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1))(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1))}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4})^2 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

الطلب الثاني: احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$$

الحل:

$$f(x) - (x + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

نضرب بالمرافق:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعروف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$
الحل:
بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

القليد من التقدم كلاً يوم يؤدي
إلى نتائج كبيرة في النهاية..

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ وفق:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{7}{x - 5}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$
الحل:
بفرض:

$$g(x) = \frac{7}{x - 5}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
إذاً المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $-\infty$
الحل:
بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 4}$$

بفرض:

$$g(x) = \frac{1}{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار الـ $-\infty$

النمط الرابع: استنتاج معادلة المقارب المائل

نص السؤال	أوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار ∞ أو استنتج أن للخط البياني C_f مقارب مائل
نميز	الحالة الرابعة
شكل التابع وفكرة الحل	شكل التابع: خطوات الحل: نكتب المقدار $(ax^2 + bx + c)$ بالصيغة القانونية (الإتعام إلى مربع كامل) نخمن معادلة المقارب المائل.
	وهي الحالة العامة وتستخدم عند تدرج الطلبات خطوات الحل: ١. نشكل $\frac{f(x)}{x}$ ٢. نوجد a حيث: $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $a \in \mathbb{R}^*$ ٣. نشكل $f(x) - ax$ ٤. نوجد b حيث: $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, $a \in \mathbb{R}$ ٥. تكون معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار ∞ هي: $y = ax + b$

ليكن C الخط البياني التابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية "متمماً إلى مربع كامل".

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 &= x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 \\ &= (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار الـ $+\infty$ واكتب معادلته:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

$$f(x) = \sqrt{(x + 2)^2 + 1}$$

نخمن أن معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار الـ $+\infty$ هي: $y = x + 2$ نثبت ذلك وفق:

$$h(x) = f(x) - y_A$$

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 3}$$

$$h(x) = \sqrt{(x + 2)^2 + 1} - (x + 2)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = \frac{(\sqrt{(x + 2)^2 + 1} - (x + 2))(\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2))}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{(x + 2)^2 + 1})^2 - (x + 2)^2}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$= \frac{(x + 2)^2 + 1 - (x + 2)^2}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1} + (x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

وهي المستقيم الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

أوجد a بحيث: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{3x^2 + x + 3}}{x}$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{3x^2 + x + 3}}{x}$$

$$= \frac{|x| \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x}$$

بما أن $x \rightarrow +\infty$ فإن $|x| = x$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{x} = \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{2}{\infty} = 0$$

الطالب الرابع:

استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين
مائلين يُطلب إيجاد معادتيهما.
الحل:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

$$f(x) = \sqrt{(2x - 1)^2 + 2}$$

نحتم أن معادلة المقارب المائل للخط البياني
في جوار الـ $+\infty$ هي: $y = 2x - 1$
الإثبات: تم في الطلب الثالث.

نحتم أن معادلة المقارب المائل للخط البياني
في جوار الـ $-\infty$ هي: $y = -2x + 1$
الإثبات: تم في الطلب الثالث.

الطالب الخامس:

أثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين
الحل:

دراسة الوضع النسبي مع $y = 2x - 1$
 $h(x) = f(x) - (2x - 1)$
 $= \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - (2x - 1)$
نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 3} - (2x - 1) = 0$$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 3} = 2x - 1$$

بشروط الـ $x > \frac{1}{2}$ نربع الطرفين

$$4x^2 - 4x + 3 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$3 \neq 1$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		+
الوضع النسبي		C فوق Δ

دراسة الوضع النسبي مع $y = -2x + 1$
 $h(x) = f(x) - (-2x + 1)$
 $= \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - (-2x + 1)$
نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 3} - (-2x + 1) = 0$$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 3} = -2x + 1$$

بشروط الـ $x < \frac{1}{2}$ نربع الطرفين

$$4x^2 - 4x + 3 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$3 \neq 1$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		+
الوضع النسبي		C فوق Δ

الطلب الأول:

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل:

بفرض:

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 3$$

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني:

اكتب ثلاثي الحدود $4x^2 - 4x + 3$
بالصيغة القانونية " متمماً إلى مربع كامل"
الحل:

$$4x^2 - 4x + 3$$

$$= 4 \left(x^2 - x + \frac{3}{4} \right)$$

$$= 4 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right)$$

$$= 4 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$$= 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 2$$

$$= (2x - 1)^2 + 2$$

الطلب الثالث:

ادرس نهاية التابع h عند الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

المعرف وفق: $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x - 1)^2}$
الحل:

$$h(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

إيجاد النهاية عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 3 - 4x^2 + 4x - 1}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{2}{\infty} = 0$$

إيجاد النهاية عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{(2x - 1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2 - 4x + 3} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 3 - 4x^2 + 4x - 1}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}$$

الطلب الثالث:

أوجد b بحيث: $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

$$f(x) - ax = \sqrt{3x^2 + x + 3} - \sqrt{3}x$$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) - ax = \sqrt{3x^2 + x + 3} - \sqrt{3}x$$

$$= \frac{(\sqrt{3x^2 + x + 3} - \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2 + x + 3} + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2 + x + 3} + \sqrt{3}x}$$

$$= \frac{(\sqrt{3x^2 + x + 3})^2 - (\sqrt{3}x)^2}{\sqrt{3x^2 + x + 3} + \sqrt{3}x}$$

$$= \frac{3x^2 + x + 3 - 3x^2}{\sqrt{3x^2 + x + 3} + \sqrt{3}x}$$

$$= \frac{x + 3}{\sqrt{3x^2 + x + 3} + \sqrt{3}x}$$

$$= \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{3} \right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

الطلب الرابع:

استنتج معادلة المقارب المائل في جوار الـ $+\infty$
ثم ادرس الوضع النسبي بين الخط
البياني والمقارب المائل.
الحل:

معادلة المقارب المائل في جوار الـ $+\infty$ هي

$$y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \sqrt{3x^2 + x + 3} - \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 3} - \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 3} = \sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

بشروط $x > -\frac{1}{6}$ نربع الطرفين

$$3x^2 + x + 3 = 3x^2 + x + \frac{1}{12}$$

$$3 \neq \frac{1}{12}$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		+
الوضع النسبي		C فوق Δ

التعريف الثالث:

ليكن C الخط البياني التابع للمعرف f على \mathbb{R}

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

التعريف الرابع:

ليكن f التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

الطالب الأول:

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - (x + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - (x + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

الطالب الثاني:

استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C التابع

f في جوار $+\infty$.

الحل:

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$$

فإن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل

للخط البياني في جوار $+\infty$.

الطالب الثالث:

ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

الحل:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1) = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x + 1$$

بشرط $x > -1$ نربع الطرفين.

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1$$

$$4 \neq 1$$

مستحيلة الحل إذا الفرق $h(x)$ لا يتعدم.

نظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ	

الطالب الرابع:

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

الطالب الخامس:

أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

وأن نهاية $f(x) - ax$ عند $-\infty$

عدد حقيقي b

الحل:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x}$$

$$= \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$= \frac{x}{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$= -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$= -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$a = -1$$

$$f(x) - ax = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - ax = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$= \frac{2x + 4}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{x}}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = -1$$

$$b = -1$$

الطالب السادس:

استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C

لتابع f في جوار $-\infty$.

الحل:

$$\Delta': y = -x - 1$$

مقارب مائل للخط البياني في جوار $-\infty$

التعريف الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

الطالب الأول:

ادرس نهاية التابع f عند $+\infty$ و $-\infty$

الحل:

تخلص من القيمة المطلقة وفق "ندرس إشارة"

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{أو } x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$
$ 4x^2 - 1 $	$4x^2 - 1$	0	$-4x^2 + 1$	$4x^2 - 1$

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1}; x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\\ x + \sqrt{-4x^2 + 1}; x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$= x + |x| \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}$$

$$|x| = -\infty \text{ فإن } x \rightarrow -\infty$$

$$= x - x \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} = x \left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(1 - 2) = +\infty$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$$

$$f(x) - 3x$$

$$= x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$$

$$= \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) - 3x$$

$$= \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$$

$$\frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0$$

الطالب الثالث:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$$

$$f(x) + x$$

$$= x + \sqrt{4x^2 - 1} + x$$

$$= \sqrt{4x^2 - 1} + 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ_2 :
 $h(x) = f(x) - y_{\Delta_2}$
 $= x + \sqrt{|4x^2 - 1|} + x$
 $= \sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x$
 نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} + 2x = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = -2x$$

بشروط $x < 0$ نربع الطرفين:
 $|4x^2 - 1| = 4x^2$
 إما $4x^2 - 1 = 4x^2$
 $-1 \neq 0$
 مستحيل الحل.
 أو $4x^2 - 1 = -4x^2$
 $8x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{8}$
 $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ مرفوض \rightarrow إما $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 أو $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول \rightarrow أو $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C		Δ_2 فوق C

الحل:

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ_1 :
 $h(x) = f(x) - y_{\Delta_1}$
 $= x + \sqrt{|4x^2 - 1|} - 3x$
 $= \sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x$
 نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} - 2x = 0$$

$$\sqrt{|4x^2 - 1|} = 2x$$

بشروط $x > 0$ نربع الطرفين:
 $|4x^2 - 1| = 4x^2$
 إما $4x^2 - 1 = 4x^2$
 $-1 \neq 0$
 مستحيل الحل.
 أو $4x^2 - 1 = -4x^2$
 $8x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{8}$
 $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول \rightarrow إما $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
 مرفوض \rightarrow أو $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-
الوضع النسبي	Δ_1 فوق C		Δ_1 تحت C

$$f(x) + x$$

$$= \sqrt{4x^2 - 1} + 2x$$

$$= \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$$

الطالب الرابع:

استنتج أن الخط البياني يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادليهما.

الحل:

من الطالب الثاني لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0$$

ومنه المستقيم $\Delta_1: y = 3x$
 مقارب مائل في جوار ال $+\infty$.

من الطالب الثالث لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$$

ومنه المستقيم $\Delta_2: y = -x$
 مقارب مائل في جوار ال $-\infty$.

الطالب الخامس:

ادرس الوضع النسبي للخط C و Δ_1 و Δ_2 المقاربين Δ_1 و Δ_2 .

الاستمرار:

تعريف	النمط	نص السؤال	فكرة الحل
لدينا تابع f معرف على مجموعة D_f مؤلفة من مجال أو من اجتماع مجالات غير مقتصرة على نقطة واحدة ولكن a نقطة من D_f ، نقول أن التابع f مستمر عند نقطة a إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ وهذا يكافئ: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$	الأول	* هل التابع f مستمر عند a ؟ * ادرس استمرار f عند a * أثبت أن التابع f مستمر عند a	1. نوجد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 2. نوجد $f(a)$ 3. نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا تحقق أن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ يكون التابع f مستمر عند a الحالة الثانية: إذا تحقق أن: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ يكون التابع f غير مستمر عند a
			ملاحظة: يتم حساب النهاية عند رؤية: $<$ أو $>$ أو \neq أو مجال مفتوح يتم حساب الصورة عند رؤية: \leq أو \geq أو $=$ أو مجال مغلق

عين قيمة m حيث:
" m مجهول" التي تجعل التابع
 f مستمر عند $x = a$

1. توجد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
2. توجد $f(a)$
3. نقول بما أن التابع f مستمر عند a فإنه يتحقق:
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
4. نعوض فنحصل على معادلة بالمجهول m وبها نحصل على المطلوب

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & ; x \neq 0 \\ 2m - 5 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول: جد نهاية التابع f عند الصفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{x \cdot \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{x \cdot \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)$$

الطلب الثاني: عين قيمة m ليكون التابع f مستمراً عند الصفر:

الحل:

حتى يكون التابع f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$2 = 2m - 5$$

$$2m = 7 \rightarrow m = \frac{7}{2}$$

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & ; x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن التابع f مستمر عند الصفر.

$$f(0) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{6}$$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{6}$

فإن التابع f مستمر عند الصفر

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند $x = 0$ ؟

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{2x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

التعريف الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

جد نهاية التابع f عند الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$= \frac{x \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{x \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 + 1 - 1}$$

$$= \frac{\sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)(2) = 2$$

الطلب الثاني:

عين قيمة m التي تجعل التابع f مستمراً عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$f(0) = m$$

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$2 = m$$

$$\rightarrow m = 2$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1)(2)(1) = 2$$

علماً أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

إذا التابع f مستمر عند الصفر.

التعريف الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{3-2\alpha} & ; x \neq 0 \\ \alpha & ; x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة α ليكون التابع f مستمراً عند الصفر. حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{3-2\alpha}$$

$$= \frac{(x+2-\sqrt{4+x^2})(x+2+\sqrt{4+x^2})}{(x+2+\sqrt{4+x^2})(3-2\alpha)}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-4-x^2}{(x+2+\sqrt{4+x^2})(3-2\alpha)}$$

$$= \frac{4}{(x+2+\sqrt{4+x^2})(3-2\alpha)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4}{4} = 1$$

حساب الصورة:

$$f(0) = 3 - 2\alpha$$

تعيين قيمة α :

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$1 = 3 - 2\alpha$$

$$-2\alpha = -2$$

$$\alpha = 1$$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + \cos x} - 2 & ; x \neq 0 \\ m + 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل التابع f مستمراً عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2} \\ &= \frac{(\sqrt{3 + \cos x} - 2)(\sqrt{3 + \cos x} + 2)}{x^2(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \\ &= \frac{3 + \cos x - 4}{x^2(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \\ &= \frac{\cos x - 1}{x^2(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \\ &= \frac{-(1 - \cos x)}{x^2(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \\ &= \frac{-2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3 + \cos x} + 2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3 + \cos x} + 2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3 + \cos x} + 2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{4(\sqrt{3 + \cos x} + 2)} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= -\frac{2}{16} (1)^2 = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$f(0) = m + 1$$

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$-\frac{1}{8} = m + 1$$

$$m = -\frac{1}{8} - 1$$

$$\rightarrow m = -\frac{9}{8}$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا التابع f المعطى وفقاً:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2 + 2 \cos x} - \sqrt{3 + \cos x}}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 2m - 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

عينة قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

الحل:

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

حيث:

$$f(0) = 2m - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2 + 2 \cos x} - \sqrt{3 + \cos x}}{x^2} \\ &= \frac{2 + 2 \cos x - 3 - \cos x}{x^2(\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x})} \\ &= \frac{-1 + \cos x}{x^2(\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x})} \\ &= \frac{-(1 - \cos x)}{x^2(\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x})} \\ &= \frac{-2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x})} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x}} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x}} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2 + 2 \cos x} + \sqrt{3 + \cos x}} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= -\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

نعوض قيمة كل من $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

في العلاقة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$-\frac{1}{8} = 2m - 1$$

$$2m = \frac{7}{8} \rightarrow m = \frac{7}{16}$$

أحياناً تكون الخطوة الأولى هي
الأصعب، ولكنها البداية لتحقيق

شيء عظيم 🏆❤️

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفقاً:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^3 + 2x^2} & ; x > 0 \\ \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x^2 - 2x} + A & ; x < 0 \\ B & ; x = 0 \end{cases}$$

عينة قيمة A و B

ليكون التابع f مستمراً عند الصفر.

الحل:

نوجد النهاية من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x^2 - 2x} + A \\ &= \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{(x^2 - 2x)(1 + \sqrt{x + 1})} + A \\ &= \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{-x} + A \\ &= \frac{1}{(x - 2)(1 + \sqrt{x + 1})} + A \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{4} + A$$

نوجد النهاية من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{x^3 + 2x^2} \\ &= \frac{2 \sin^2 x}{x^3 + 2x^2} = \frac{2 \sin^2 x}{x^2(x + 2)} \\ &= \frac{2}{(x + 2)} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{2} (1)^2 = 1$$

حتى يكون التابع f نهاية يجب أن يكون:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$1 = \frac{1}{4} + A \rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

حتى يكون التابع f مستمراً عند الصفر يجب

أن يكون:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$1 = B$$

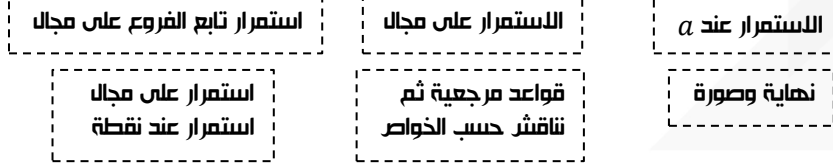
$$\rightarrow B = 1$$

نص السؤال	فكرة الحل	تعريف
<p>هل التابع f مستمر على المجال "معطى"</p>	<p>الخطوة الأولى: نعتمد على قواعد الاستمرار بالتتابع المرعبة "تقبل دون إثبات" وذلك وفق: * التابع الصحيح مستمر على \mathbb{R} * التابع الكسري مستمر على $\mathbb{R} \setminus \left\{ \begin{matrix} \text{القيم التي} \\ \text{التي المقام} \end{matrix} \right\}$ * التابع الجذري مستمر على $[0, +\infty[$ * التابع اللوغاريتمي مستمر على $]0, +\infty[$ * التابع e^x مستمر على \mathbb{R} * التابع $\sin x$ و $\cos x$ مستمران على \mathbb{R}</p> <p>الخطوة الثانية: نناقش وفق الخواص: * إذا كان التابع f مستمر على المجال I يكون مستمر على كلا مجال جزئي منه. * مجموع "طرح" تابعان مستمران على I يكون مستمر على I * جداء تابعان مستمران على I يكون مستمر على I * قسمة تابعان مستمران على I يكون مستمر على I "مع مراعاة أن المقام لا يساوي الصفر" * تركيب تابعان مستمران على I يكون مستمر على I</p>	<p>التمرين الأول: التابع g معرف على $]0, +\infty[\cup]3, +\infty[$ وفق: $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}}$ هل التابع g مستمر على مجموعة تعريفه؟ التابع $x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ مستمر على $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ فهو مستمر على $]0, +\infty[\cup]3, +\infty[$ التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمر على $]0, +\infty[$ فهو مستمر على $]0, +\infty[\cup]3, +\infty[$ مما سبق نستنتج أن التابع $g(x)$ مستمر على $]0, +\infty[\cup]3, +\infty[$ لأنه تركيب تابعان مستمران على $]0, +\infty[\cup]3, +\infty[$.</p> <p>التمرين الثاني: نعتبر التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = (x + 1) \sin x$ أثبت أن التابع f مستمر على \mathbb{R}. التابع $x \mapsto x + 1$ مستمر على \mathbb{R} التابع $x \mapsto \sin x$ مستمر على \mathbb{R} مما سبق نستنتج أن التابع f مستمر على \mathbb{R} لأنه جداء تابعان مستمران على \mathbb{R}</p>

استمر تابع الفروع على \mathbb{R} :

فكرة الحل	التمرين الأول	التمرين الثاني
<p>١. أن يكون مستمر على المجالات الجزئية لمجموعة التعريف المحددة بفواصل الفروع وأن يكون مستمر عند القيم التي يغير التابع عندها تعريفه</p> <p>٢. وأن يكون مستمر عند القيم التي يغير التابع عندها تعريفه</p>	<p>ليكن لدينا التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + x + 1} & ; x \neq 0 \\ m - 1 & ; x = 0 \end{cases}$ عينا قيمة m ليكون التابع f مستمر على \mathbb{R} الحل: التابع f مستمر على \mathbb{R}^* ولكي يكون مستمر على \mathbb{R} يجب أن يكون مستمرا عند الصفر أي يجب أن يتحقق: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \dots (*)$ حساب النهاية: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{1 - x^2 - x - 1}{x(1 + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{-x^2 - x}{x(1 + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{-x(-x - 1)}{x(1 + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{-x - 1}{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ حساب الصورة: $f(0) = m - 1$ بالتعويض في علاقة (*) نجد أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ $-\frac{1}{2} = m - 1$ $m = \frac{1}{2}$</p>	<p>ليكن f التابع المعرف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ الطالب الأول: احسب نهاية التابع f عند الصفر إحاطة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$ $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ نضرب بـ x^2 وفق: $-x^2 \leq x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ الطالب الثاني: هل التابع f مستمر عند الصفر؟ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ $f(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ومنه التابع f مستمر عند الصفر. الطالب الثالث: هل التابع f مستمر على \mathbb{R}، عك إجابتك. أولاً: لدينا $x \mapsto \frac{1}{x}$ مستمر على \mathbb{R}^* ولدينا $x \mapsto \cos x$ مستمر على \mathbb{R} فهو مستمر على \mathbb{R}^* وبالتالي التابع $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر على \mathbb{R}^* لأنه: عبارة عن تركيب تابعان مستمران على \mathbb{R}^* ثانياً: لدينا التابع $x \mapsto x^2$ مستمر على \mathbb{R} فهو مستمر على \mathbb{R}^* وبالتالي التابع f مستمر على \mathbb{R}^* لأنه عبارة عن جداء تابعين مستمرين على \mathbb{R}^*. وحتى يكون التابع f مستمر على \mathbb{R} يجب أن يكون التابع مستمر عند الصفر: ومن الطالب الثاني لدينا التابع f مستمر عند الصفر ومنه التابع f مستمر على \mathbb{R}.</p>

ملخص الاستمرار



تابع الجزء الصحيح:

الرمز	الرمز
معنى الرمز	قيمة $E(x)$ هي القيمة الصحيحة الأصغر (أو تساوي) الـ x ويتحقق: $x - 1 < E(x) \leq x$
التخلص من $E(x)$ على المجال	جزء المجال إلى مجالات طول كل منها واحد بحيث بداية المجال يكون مغلق ونهاية المجال يكون مفتوح
تمرين	<p>التمرين الأول: تخلف من $E(x)$ على المجال $[0,3[$</p> $E(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0,1[\\ 1; & x \in [1,2[\\ 2; & x \in [2,3[\end{cases}$ <p>التمرين الثاني: تخلف من $E(x)$ على المجال $[0,2]$</p> $E(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0,1[\\ 1; & x \in [1,2[\\ 2; & x = 2 \end{cases}$

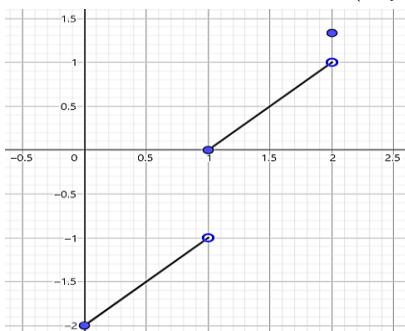
النقط	كتابة التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$	تابع الجزء الصحيح والاستمرار	تابع الجزء الصحيح والرسم	إيجاد نهاية التابع الصحيح
نص السؤال	اكتب التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ أو اكتب التابع $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$	هل التابع f مستمر (عند a أو على مجال)	ارسم التابع $f(x)$ على المجال I "المجال I معطى"	أوجد نهاية التابع $f(x)$
فكرة الحل	<ul style="list-style-type: none"> * تخلف من $E(x)$ على المجال الموافق (كما سبق) * نعوض في التابع $f(x)$ حيث: نعوض قيمة $E(x)$ دوماً ونعوض قيمة x فقط عندما تكون محددة أما إذا كانت غير محددة فإنها تبقى x 	<ul style="list-style-type: none"> * نكتب التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ * نتابع كما ورد معنا في الاستمرار 	<ul style="list-style-type: none"> * نكتب التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ * نرسم كل فرع على حدا حيث نحدد لكل فرع: نقطة بداية ونقطة نهاية بحيث فواصل هذه النقاط من المجال والترتيب نحلص عليها من التعويض في التابع. النتيجة: * النقطة التي تقابل المجال المغلق تكون مطموسة * النقطة التي تقابل المجال المفتوح تكون مفرغة * ثم نصل بين هاتين النقطتين وتميز: ○ إذا كان التابع عدد أو درجة أولى يكون الخط مستقيم ○ إذا كان التابع غير ذلك يكون الخط البياني منحنياً 	<ul style="list-style-type: none"> * المسمى هو عدد: تعويض * المسمى هو ∞: تطبق مرحلتين: <ul style="list-style-type: none"> ○ مرحلة الحصر: حيث نطلق من العلاقة: $x - 1 < E(x) \leq x$ ثم نبدأ رحلة تأليف التابع ○ مرحلة إيجاد النهاية: باستخدام مبرهنات الإبطاء والمقارنة

الفرع الثاني:

x	1	2
y	0	1
النقطة	(1,0)	(2,1)
نوعها	مغلقة	مفرغة

الفرع الثالث:

نقطة مغلقة: $(2, \frac{4}{3})$.
الرسم:



لدينا $x \mapsto x - 1$ معرف على \mathbb{R} فهو مستمر على المجال $[1,2[$

دراسة الاستمرار عند الواحد:

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

فالتابع f غير مستمر عند الواحد ومنه نجد أن التابع f غير مستمر على المجال $[0,2]$

الطالب الثالث:

ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$
رسم الخط البياني C_f :
الفرع الأول:

x	0	1
y	-2	-1
النقطة	(0,-2)	(1,-1)
نوعها	مغلقة	مفرغة

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x) = x - \frac{2}{E(x) + 1}$$

الطالب الأول:

اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$:
الحل:

$$E(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0,1[\\ 1; & x \in [1,2[\\ 2; & x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2; & x \in [0,1[\\ x - 1; & x \in [1,2[\\ \frac{4}{3}; & x = 2 \end{cases}$$

الطالب الثاني:

هل التابع f مستمر على المجال $[0,2]$ ؟
علا ذلك.

الحل:

لدينا $x \mapsto x - 2$ معرف على \mathbb{R} فهو مستمر على المجال $[0,1[$

أوجد نهاية التابع $g(x)$ عند $+\infty$ حيث:

$$g(x) = \frac{2E(x) + x^2}{x^3}$$

الحل:

مرحلة الحصر:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$2x - 2 < 2E(x) \leq 2x$$

$$x^2 + 2x - 2 < x^2 + 2E(x) \leq x^2 + 2x$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3} < \frac{x^2 + 2E(x)}{x^3} \leq \frac{x^2 + 2x}{x^3}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3} < g(x) \leq \frac{x^2 + 2x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x^3} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^3} \right) = 0$$

ومنهُ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

التعريف الثاني:

ليكن f تابع معرف على $[0, 2]$ وفق:

$$f(x) = xE(x) - \frac{1}{2}E(x)(1 + E(x))$$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد

الحقيقي x والمطلوب:

الطالب الأول:

اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$

الحل:

$$E(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0, 1[\\ 1; & x \in [1, 2[\\ 2; & x = 2 \end{cases}$$

ومنهُ:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1[\\ x - 1; & x \in [1, 2[\\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$$

الطالب الثاني:

هل التابع f مستمر عند الواحد؟

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

ومنهُ التابع f مستمر عند الواحد.

الطالب الثالث:

ليكن g تابع يحقق:

$$\frac{\sin x}{x} \leq g(x) \leq \frac{E(x)}{x^2 + 1}$$

جد نهاية التابع $g(x)$ عند $+\infty$.

الحل:

باعتبار:

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نقسم على x بشرط $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq h(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

باعتبار:

$$l(x) = \frac{E(x)}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < \frac{E(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < l(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = 0$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = 0$$

فإنهُ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

التعريف الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x - 2 + E(x)$$

الطالب الأول:

اكتب التابع $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

على المجال $[1, 3]$.

الحل:

$$E(x) = \begin{cases} 1; & x \in [1, 2[\\ 2; & x \in [2, 3[\end{cases}$$

ومنهُ:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1; & x \in [1, 2[\\ x & ; x \in [2, 3[\end{cases}$$

الطالب الثاني:

هل التابع f مستمر عند $x = 2$ ؟

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

ومنهُ التابع $f(x)$ غير مستمر عند $x = 2$

الطالب الثالث:

هل التابع f مستمر على المجال $[1, 3]$ ؟

بما أن التابع f غير مستمر عندما $x = 2$

فإنهُ غير مستمر على المجال $[1, 3]$.

الطالب الرابع:

ارسم التابع f على المجال $[1, 3]$.

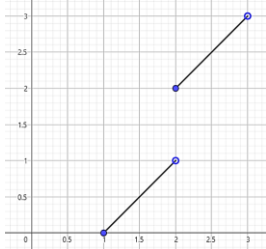
الفرع الأول:

$\Delta_1: y = x - 1$		
x	1	2
y	0	1
النقطة	(1,0)	(2,1)
نوعها	مغلقة	مفردة

الفرع الثاني:

$\Delta_2: y = x$		
x	2	3
y	2	3
النقطة	(2,2)	(3,3)
نوعها	مغلقة	مفردة

الرسم:



الطالب الخامس:

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ نعلم أن:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$x - 3 < -2 + E(x) \leq x - 2$$

$$2x - 3 < x - 2 + E(x) \leq 2x - 2$$

$$2x - 3 < f(x) \leq 2x - 2$$

$$\frac{2x - 3}{x^2} < \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x - 2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 2}{x^2} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

التعريف الرابع:

جد نهاية التابع f عند a في كلا مما يلي:

$$f(x) = \frac{xE(x)}{1 - x^2}; a = +\infty$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نضرب ب x بشرط: $x > 0$ وفق:

$$x^2 - x < xE(x) \leq x^2$$

نقسم على $1 - x^2 < 0$ وفق:

$$\frac{x^2 - x}{1 - x^2} > \frac{xE(x)}{1 - x^2} \geq \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$\frac{x^2 - x}{1 - x^2} > f(x) \geq \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{1 - x^2} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1 - x^2} \right) = -1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$|f(x) + 2| \leq \frac{E(x)}{x^2 - 1}; a = +\infty$$

$$g(x) = \frac{E(x)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نقسم على $x^2 - 1 > 0$

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} < \frac{E(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < g(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

$$h(x) = \frac{E(x)}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < \frac{E(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < h(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \leq f(x) \leq \frac{E(x)}{x^2 + 1}; a = +\infty$$

باعتبار:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نقسم على x بشرط $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

باعتبار:

مقصود تابع:

أثبت أن التابع g مقصور التابع f

نص السؤال

نثبت أن $D_g \subseteq D_f$ أي نثبت أن مجموعة تعريف التابع g محتواة في مجموعة تعريف التابع f

فكرة الحل

نثبت أن $f(x) = g(x)$ أي نثبت أن قاعدة ربط التابع g هي نفسها قاعدة ربط التابع f

تعريفا

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x - 1}$ والتابع g المعرف وفق: $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}}$ والمطلوب:

الطالب الأول: أثبت أن مجموعة تعريف التابع g هي $[1, 3[\cup]3, +\infty[$.

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \geq 0$$

نعدم البسط وفق: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 3)(x - 1) = 0 \rightarrow \text{إما } x = 3, \text{ أو } x = 1$$

نعدم المقام وفق: $x - 3 = 0$

$$x = 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
البسط	+	0	-	0	+
المقام	-	-	-	0	+
الكسر	-	0	+		+
≥ 0		غير محققة	محققة		محققة

$$\rightarrow D_g = [1, 3[\cup]3, +\infty[$$

الطالب الثاني: أثبت أن g مقصور f على $[1, 3[\cup]3, +\infty[$

لدينا $D_g = [1, 3[\cup]3, +\infty[$ ولدينا $D_f = [1, +\infty[$ ونلاحظ أن: $D_g \subseteq D_f$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}} = \sqrt{\frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3}} = \sqrt{x - 1} = f(x)$$

إذا التابع g مقصور f على المجال $[1, 3[\cup]3, +\infty[$

مفهوم	نص السؤال	فكرة الحل	مثال
<p>إذا كان التابع f مستمر ومطرود تماماً على المجال I حيث: $f(I) = J$ عندئذٍ يحقق الشرطين:</p> <p>① أياً كان العدد الحقيقي x من I ينتمي $f(x)$ إلى J</p> <p>② أياً يكن العدد الحقيقي y من J يوجد عدد واحد فقط x من I يحقق $f(x) = y$</p> <p>← عندما يتحقق هذان الشرطان نقول أن: f تقابل من I إلى J</p> <p>أي يا عيني ما فهمنا شي) ، أي تمام وهاد المطلوب هلق بقلك كيف تتعامل مع هاد السؤال بسر أول شي بدي منك تفهم هي الشغلة كثير وكثير وضروري وجدأ أنو:</p> <ul style="list-style-type: none"> * كل x تعطي y وحدة * كل y تعطي x وحدة <p>وهلق السؤال المهم كيف ممكن أنو يجي السؤال بالامتحان:</p>	<p>ممكن يعطيك تابع $f(x)$ ويقلك يا عزيزي الطالب أوجد لي التابع العكسي للتابع f :</p>	<ul style="list-style-type: none"> * منكتب التابع مثلا مو عطينا إياه * منعوّض مكان $f(x)$ الرمز y * منبدل المتغيرات يعني مكان كل x رد نخط y ومكان كل y رد نخط x * منشتغل لحتى نزل ال y بطرف والتابع الناتج بطرف * منعوّض مكان ال y الرمز $f^{-1}(x)$ 	<p>ليكن لدينا التابع $f(x) = x^2$ أوجد التابع الذي يعكس التقابل العكسي للتابع f الحل:</p> <p>منكتب التابع مثلا مو عطينا إياه $f(x) = x^2$ منعوّض مكان $f(x)$ الرمز y وفق: $y = x^2$ منبدل المتغيرات يعني مكان كل x رد نخط y ومكان كل y رد نخط x منشتغل لحتى نزل ال y بطرف والتابع الناتج بطرف وفق:</p> $y^2 = x \rightarrow y = \sqrt{x}$ <p>منعوّض مكان ال y الرمز $f^{-1}(x)$</p> $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ <p>إذاً \sqrt{x} تقابل عكسي للتابع f</p>
	<p>ممكن أنو يعطيك تابعين $f(x)$ و $g(x)$ ويحكلك أثبت أنو التابع g هو التقابل العكسي للتابع f العكسي للتابع f أو العكس.</p>	<p>منحسب $f(g(x))$ وللازم يطلع الناتج x</p>	<p>ليكن لدينا التابعان $f(x) = \ln(x)$ و $g(x) = e^x$ والمطلوب: أثبت أن g هو التقابل العكسي للتابع f : منحسب $f(g(x))$ واتفقنا الناتج لازم يكون x</p> $f(g(x)) = f(e^x)$ $= \ln(e^x) = x \cdot \ln(e) = x$ <p>إذاً التابع g هو التقابل العكسي للتابع f</p>
	<p>ممكن يكون سؤال بمسألة ال 100 ويحكلك استنتج رسم التابع g التقابل العكسي للتابع f</p>	<p>هون لازم التابعين يكونوا متناظرين بالنسبة لمنصف الربع الأول $y = x$ (يعني منرسم المستقيم اللي معادلته $y = x$ ومنرسم نظير التابع f بالنسبة للمستقيم x)</p>	

يا نخبه 🍌

بحب ذكرك إنو من اعتمد على الله لا ملأ قلا ولا ضل ولا ذل 📖
لذلك.. شد حياك

١. رمزها.

٢. العمليات على الرمز ∞

(الجمع - الضرب - القسمة - الجذور - القوى)

٣. قواعد ايجاد النهايات:

* التابع الصحيح

* التابع الكسري

٤. ملاحظات وزارية:

* هلا يوجد للتابع f نهاية عند a

* هلا يوجد للتابع f نهاية حقيقة عند a

٥. حالات عدم التعيين وكيفية إزالتها.

٦. النهايات المثلثية ومبرهنات الإحاطة.

٧. محدودية تابع

٨. سلوك تابع

٩. التابع المركب:

① النمط لأول:

* اكتب $fog(x)$ بدلالة x

* عبر عن $fog(x)$ بدلالة x

* اوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$

② النمط الثاني:

إيجاد: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$

③ النمط الثالث:

ايجاد نهاية تابع معطى بأحد لأشكال:

* لوغاريتم مضمونه تابع اخر

* جذري مضمونه تابع اخر

* مثلثي مضمونه تابع اخر

* أسّي مضمونه تابع اخر

* قوة أساسها تابع اخر

١. النهايات باستخدام التعريف:

* تعيين A

* تعيين مجال

١. المقاربات:

تعريف المقارب

○ المقارب (الأفقي-الشاقولي):

* أوجد النهايات

واكتب معادلة كلا مقارب وجدته

* أوجد النهايات واطرح التأييد الهندسي

○ المقارب المائل:

① النمط الأول:

هلا يوجد مقارب مائل في جوار ∞

② النمط الثاني:

أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة)

مقارب مائل للاخط البياني في جوار ∞

③ النمط الثالث:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ

("معادلته معطاة" مقارب مائل/ مقارب

أفقي/مماس/مستقيم عشوائي)

والخط البياني

④ النمط الرابع:

استنتاج معادلة المقارب المائل.

٢. الاستمرار عند نقطة:

① النمط الأول:

* هلا f مستمر عند a

* ادرس استمرار f عند a

* أثبت أن التابع f مستمر عند a

② النمط الثاني:

عينا قيمة m التي تجعل f مستمر عند

$$x = a$$

٣. الاستمرار على مجال:

٤. تابع الجزء الصحيح:

* التلخص من $E(x)$ على المجال

* أنماط التمارين:

① النمط الأول:

كتابة التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

② النمط الثاني: تابع الجزء الصحيح ولاستمرار

③ النمط الثالث: تابع الجزء الصحيح والرسم

④ النمط الرابع: ايجاد نهاية تابع الجزء الصحيح

٥. مقصور تابع

٦. التقابل العكسي

* إيجاد التقابل العكسي

* إثبات التقابل العكسي

* استنتاج رسم الخط البياني للتقابل العكسي

يُنس الإنسان بالضيقة والسُدّة، لا بالراحة والهناء، لحظات العثرات تبني الخطوات، ومن جدّ بالفرس وجدّ الثمر، يُراهن الإنسان على عمره، يعني نفسه لحم ما، ينصر كله فيه، يأخذ شيئاً من ملامح وجهه، وينظر قلبه، فيرسم لوحةً تشبهه ويشبهها، هكذا هي الأحلام، تصنع صاحبها 🏆

شيفرة الـ 600 في وحدة الاشتقاق

الرمز	* المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$	* المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$	* المشتق من المرتبة n رمزه $f^{(n)}(x)$
قواعد الاشتقاق			
تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f			
التابع	القاعدة		
ثابت "لا يحوي متحول x " $f(x) = \alpha$	مشتق التابع الذي لا يحوي متحول هو الصفر $f'(x) = 0$	1. $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$ 2. $f(x) = \frac{\ln(2)}{e} \rightarrow f'(x) = 0$	
تابع من الدرجة الأولى "تابع تالفي" $f(x) = \alpha x$	مشتق التابع التالفي هو أمثاله x $f'(x) = \alpha$	3. $f(x) = -x \rightarrow f'(x) = -1$ 4. $f(x) = -\frac{2x}{3} \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}$	
مجموع توابع $f(x) = g(x) + h(x)$	مشتق مجموع توابع هو مجموع المشتقات $f'(x) = g'(x) + h'(x)$	5. $f(x) = 3x - 7 \rightarrow f'(x) = 3$ 6. $f(x) = \ln(2) - \frac{7x}{e} \rightarrow f'(x) = -\frac{7}{e}$ 7. $f(x) = \frac{5+3x}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}$	
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة العامة" $f(x) = (g(x))^n$	مشتق تابع مرفوع إلى قوة: "نزلي , نقصني , اشتق المضمون" بشرط $n \neq 1$ $f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$	8. $f(x) = (5x - 3)^7$ $f'(x) = 7(5x - 3)^6(5) = 35(5x - 3)^6$ 9. $f(x) = (3 - 4x)^{-4} + 3x - 2$ $f'(x) = -4(3 - 4x)^{-5}(-4) + 3$ $= 16(3 - 4x)^{-5} + 3$	
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة الخاصة" $f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	10. $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$ 11. $f(x) = x^{-\frac{5}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$	
تابع الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{g(x)}$	مشتق الجذر التربيعي: مشتق المضمون على ضعفي الجذر نفسه $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	12. $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 13. $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 1}$ $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}$	
الجذر من المرتبة n $f(x) = \sqrt[n]{(g(x))^m}$	لا توجد قاعدة تنص على اشتقاق التابع f إنما للاشتقاق نتبع الخطوات الآتية: 1. نحول الجذر إلى قوة وفق: $f(x) = (g(x))^{\frac{m}{n}}$ 2. نشتق كما ورد معنا في الحالة العامة لقاعدة اشتقاق تابع مرفوع إلى قوة ويتم ذلك وفق: $f'(x) = \frac{m}{n} (g(x))^{\frac{m}{n}-1} (g(x))'$	14. $f(x) = x - \sqrt{(x^2 - 7)^3}$ $f'(x) = 1 - \frac{3(x^2 - 7)^2(2x)}{2\sqrt{(x^2 - 7)^3}} = 1 - \frac{6x(x^2 - 7)^2}{\sqrt{(x^2 - 7)^3}}$ 15. $f(x) = \sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}}$ $f'(x) = \frac{7}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ 16. $f(x) = \sqrt[7]{(1-x)^2} = (1-x)^{\frac{2}{7}}$ $f'(x) = \frac{2}{7} \cdot (1-x)^{-\frac{5}{7}}(-1)$ $= -\frac{2}{7} \cdot \sqrt[7]{(1-x)^{-5}}$ 17. $f(x) = \sqrt[3]{7-x^5} = (7-x^5)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3} (7-x^5)^{-\frac{2}{3}}(-5x^4)$ $= -\frac{5}{3}x^4 \cdot \sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}} = -\frac{5}{3}x^4 \cdot \sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}$	
جداء تابعين $f(x) = g(x) \cdot h(x)$	مشتق جداء تابعين: مشتق الأول بالثاني زائد مشتق الثاني بالأول $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$	18. $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ $f'(x) = (1)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x)$ $= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ 19. $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^2-3}$ $f'(x) = 1(\sqrt{x^2-3}) + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}(x-1)$ $= \sqrt{x^2-3} + \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{2x^2-x-3}{\sqrt{x^2-3}}$	

20. $f(x) = 3\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$	مشتق جداء عدد حقيقي بتابع هو: جداء العدد الحقيقي بمشتق التابع $f'(x) = \alpha \cdot g'(x)$	جداء عدد حقيقي بتابع $f(x) = \alpha \cdot g(x)$
21. $f(x) = -5\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 2} + 7x$ $f'(x) = -5 \cdot \left[\frac{-3x^2 + 6x}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 2}} \right] + 7$ $= \frac{15x^2 - 30x}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 2}} + 7$		
22. $f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$	مشتق قسمة تابعين هو: مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام. $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$	قسمة تابعين "كسر" $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
23. $f(x) = \frac{x-3}{5-x}$ $f'(x) = \frac{1(5-x) - (-1)(x-3)}{(5-x)^2} = \frac{2022b2}{(5-x)^2}$		
24. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{7-x^2}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(7-x^2) - (-2x)(\sqrt{x-1})}{(7-x^2)^2}$ $= \frac{\frac{7-x^2}{2\sqrt{x-1}} + \frac{4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{(7-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 7}{2\sqrt{x-1} \cdot (7-x^2)^2}$		

التابع المثلثي

تعميم		قواعد	
المشتق	التابع	المشتق	التابع
$f'(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x))$	$f(x) = \sin(g(x))$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = g'(x)(1 + \tan^2(g(x)))$ أو $f'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$	$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ أو $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = g'(x)(-1 - \cot^2(g(x)))$ أو $f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$	$f(x) = \cot(g(x))$	$f'(x) = -1 - \cot^2 x$ أو $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x) = \cot x$

تعميم: مشتق أي تابع مثلثي هو مشتق الزاوية بمشتق الدالة

تعميم: أوجد التابع المشتق للتابع f :

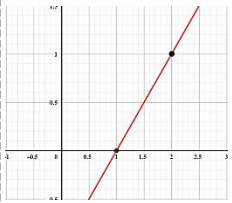
29. $f(x) = x \cdot \sin x$ $f'(x) = (1)(\sin x) + (\cos x)(x) = \sin x + x \cdot \cos x$	25. $f(x) = \cos x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \cdot \sin x^2$
30. $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$ $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(\cos x) - (-\sin x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\cos^2 x}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$	26. $f(x) = \sin \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x} = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
	27. $f(x) = 7 \cdot \tan(x^2 - 3x^3)$ $\rightarrow f'(x) = 7 \cdot (2x - 9x^2) \cdot (1 + \tan^2(x^2 - 3x^3))$
	28. $f(x) = \sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot \cos 3x + \frac{1}{x^2}}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}}}$

معادلة المستقيم:

$ax + by + c = 0$ أو $y = mx + p$	الشكل العام
كتابة معادلة المستقيم تحتاج: * نقطة من المستقيم: $A(x_A, y_A)$ * ميل المستقيم: m * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	كتابة معادلة مستقيم
تحديد النقطة: "معلومة" $A(-3, 1)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 2$ المعادلة: $\Delta: y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2(x + 3) + 1$ $y = 2x + 7$	تعميم: اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-3, 1)$ والذي ميله $m = 2$

حالات إيجاد الميل:

تعريف	فكرة الحل	الحالة
ليكن لدينا المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta: x - 3y = 0$ أوجد ميل المستقيم Δ . الحل:	نزلنا y يكون ميل المستقيم هو أمثال x	ميل مستقيم معادلته معطاة
$\Delta: -3y = -x \rightarrow y = \frac{1}{3}x \rightarrow m_{\Delta} = \frac{1}{3}$ أوجد ميل المستقيم Δ الأفقي في النقطة $A(-2, 3)$ واكتب معادلته: الحل: بما أن المستقيم أفقي فإن ميله معدوم أي أن $m_{\Delta} = 0$ ومعادلته: $y = 3$ اكتب معادلة المستقيم الشاقولي في النقطة $A(-2, 3)$: الحل: بما أن المستقيم شاقولي فإن ميله غير معرف ومعادلته: $x = -2$	المستقيم الأفقي ميله معدوم ومعادلته من الشكل $y = \text{عدد}$ المستقيم الشاقولي ميله غير معروف ومعادلته من الشكل $x = \text{عدد}$	ميل مستقيم أفقي ميل مستقيم شاقولي
اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1, 0)$ و $B(3, -2)$: الحل: تحديد النقطة: $A(-1, 0)$ تحديد الميل: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 + 2}{-1 - 3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ المعادلة: $\Delta: y = m(x - x_A) + y_A$ $= -\frac{1}{2}(x + 1) + 0$ $= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	إذا كان المستقيم Δ مار من $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ فالعلاقة: $m_{\Delta} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \text{ أو } m_{\Delta} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ تعميم: $m = \frac{\text{فرق الـ } y \text{ (الوايات)}}{\text{فرق الـ } x \text{ (الإكسات)}}$ ملاحظة: أثناء كتابة معادلة مستقيم مار من نقطتين A و B ولتحديد النقطة المراد تعويضها في المعادلة يصح اختيار إما A أو B .	ميل مستقيم مار من نقطتين
تأمل الشكل المجاور واكتب معادلة المستقيم Δ الحل: لدينا $A(2, 1)$ و $B(1, 0)$ ومنه: تحديد النقطة: $A(2, 1)$ تحديد الميل: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1$ المعادلة: $\Delta: y = 1(x - 2) + 1 \rightarrow y = x - 1$	بالاعتماد على الشكل: نحدد نقطتان تنتميان إلى المستقيم المراد كتابة معادلته نوجد ميل المستقيم بالاعتماد على: $m = \frac{\text{فرق الـ } y \text{ (الوايات)}}{\text{فرق الـ } x \text{ (الإكسات)}}$	ميل مستقيم Δ مرسوم في شكل
ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x - 2y + 1 = 0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1, 2)$ والموازي للمستقيم d . الحل: تحديد النقطة: $A(-1, 2)$ تحديد الميل: بما أن المستقيمان Δ و d متوازيان فإن: $m_{\Delta} = m_d$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m_d = \frac{3}{2}$ ومنه: $m_{\Delta} = m_d = \frac{3}{2}$ المعادلة:	المستقيمان المتوازيان d و Δ لهما نفس الميل أي أن: $m_{\Delta} = m_d$	ميل مستقيم Δ يوازي مستقيم d
ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x - 2y + 1 = 0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1, 2)$ ويعامد المستقيم d . الحل: تحديد النقطة: $A(-1, 2)$ تحديد الميل: بما أن المستقيمان Δ و d متعامدان فإن: $m_{\Delta} \cdot m_d = -1$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m_d = \frac{3}{2}$ ومنه: $m_{\Delta} \cdot m_d = -1 \rightarrow m_{\Delta} = -\frac{1}{m_d} \rightarrow m_{\Delta} = -\frac{2}{3}$ المعادلة: $\Delta: y = -\frac{2}{3}(x + 1) + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$	إذا كان المستقيمان d و Δ متعامدان فإن: $m_{\Delta} \cdot m_d = -1$	ميل مستقيم Δ يعامد مستقيم d



المماس:

هو مستقيم يشترك مع الخط البياني بنقطة واحدة هي نقطة التماس	تعريف الشكل العام
$y = f'(x)(x - a) + f(a)$ أو $y = m(x - x_A) + y_A$	
كتابة معادلة المماس نحتاج: * نقطة التماس: $A(x_A, y_A)$ حيث نحصل عليها من خلال التصوير في التابع f * ميل المماس: m حيث الميل نحصل عليه من التصوير في التابع $f'(x)$ * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	كتابة معادلة المماس
تحديد النقطة: "معلومة" $A(5, -3)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 1$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \rightarrow y = 1(x - 5) - 3 \rightarrow y = x - 8$	تمرين: اكتب معادلة المماس T المار من $A(5, -3)$ والذي ميله $m = 1$

أنماط التمرين:

النمط الأول	نص السؤال	فكرة الحل	التمرين
الأولى	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f للتابع f (مقطع) في النقطة $A(x_A, y_A)$	تحديد النقطة: $A(x_A, y_A)$ مقطعة. تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق: $f(x) = -x^2 + 2$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة $A(1, 1)$ تحديد النقطة: $A(1, 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = -2x$ $m = f'(1) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x - 1) + 1 \rightarrow y = -2x + 3$
الثانية	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها x_A	تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس x_A ترتيب نقطة التماس $y = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x\sqrt{x}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 1$ تحديد النقطة: الفاصلة: $x_A = 1$ الترتيب: $y_A = f(1) = 1$ النقطة: $A(1, 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $m = f'(1) = \frac{3}{2}$ المعادلة: $T: y = \frac{3}{2}(x - 1) + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
الثالثة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي ترتيبها y_A	نحل المعادلة $f(x) = y_A$ والمعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس: (حل المعادلة $f(x) = y_A$) $x_A = f(x) = y_A$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$ ملاحظة: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات	ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي ترتيبها $y_A = 1$ تحديد النقطة: الترتيب: $y_A = 1$ الفاصلة: نحل المعادلة $f(x) = 1$ ومنه: $\sqrt{4x^2 + 1} - 2x = 1 \rightarrow \sqrt{4x^2 + 1} = 2x + 1$ بشرط $x > -\frac{1}{2}$ نربع الطرفين وفق: $4x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = 0$ النقطة: $A(0, 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}} - 2$ $m = f'(0) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x - 0) + 1 \rightarrow y = -2x + 1$
الرابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.	بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الترتيب فإن $x_A = 0$ تحديد نقطة التماس: فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x-4}{x-1}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب تحديد النقطة: بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الترتيب فإن $x_A = 0$ الفاصلة: $x_A = 0$ الترتيب: $y_A = f(0) = 4$ النقطة: $A(0, 4)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ $m = f'(0) = 3$ المعادلة: $T: y = 3(x - 0) + 4 \rightarrow y = 3x + 4$

<p>ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ وفق: $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 3}$</p> <p>اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل الحل: تحديد النقطة: تحديد الفاصلة: بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل فإننا ليجاد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f(x) = 0$</p> $\frac{3x^2 - 5x}{x - 3} = 0 \rightarrow 3x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(3x - 5) = 0$ <p>إما $x = 0$ أو $x = \frac{5}{3}$</p> <p>نلاحظ أن المعادلة $f(x) = 0$ حلتا ومنه يوجد للخط البياني مماسان</p> <p>فاصلة المماس الأول $x_A = 0$ وفاصلة المماس الثاني $x_B = \frac{5}{3}$</p> <p>الترتيب: النقطتين لهما ذات الترتيب $y = 0$</p> <p>نشتق التابع وفق: $f'(x) = \frac{3x^2 - 18x + 15}{(x - 3)^2}$</p> <p>كتابة معادلة المماس الأول: النقطة: $A(0, 0)$ الميل: $m = f'(0) = \frac{5}{3}$ المعادلة: $T_1: y = \frac{5}{3}(x - 0) + 0 \rightarrow y = \frac{5}{3}x$</p> <p>كتابة معادلة المماس الثاني: النقطة $B\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ الميل: $m = f'\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{15}{4}$ المعادلة: $T_2: y = -\frac{15}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right) + 0 \rightarrow y = -\frac{15}{4}x + \frac{75}{12}$</p>	<p>نحل المعادلة $f(x) = 0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: حل المعادلة $(f(x) = 0)$ تحديد الترتيب: الميل: $y_A = f(x_A)$ نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$</p>	<p><u>صيغة أولى للسؤال:</u> اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل. <u>صيغة ثانية للسؤال:</u> اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f(x)$.</p>	<p>الخامسة</p>
<p>ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$</p> <p>اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$ الحل: تحديد النقطة: بما أن فاصلة نقطة التماس هي النقطة التي تعدم $f''(x) = 0$</p> $f''(x) = 3x^2 - 4x = 0$ $f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightarrow f''(x) = 0$ $6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$ <p>الفاصلة: $x_A = \frac{2}{3}$ الترتيب: $y_A = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{27}$ النقطة: $A\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$</p> <p>تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ $m = f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$</p> <p>المعادلة: $T: y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{11}{27} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$</p>	<p>نحل المعادلة $f''(x) = 0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: حل المعادلة $(f''(x) = 0)$ تحديد الترتيب: الميل: $y_A = f(x_A)$ نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$</p>	<p>اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$</p>	<p>السادسة</p>
<p>ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$</p> <p>اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f إذا علمت أن ميل المماس $m = 0$ الحل: تحديد النقطة: لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f'(x) = m$</p> $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \rightarrow x = 0$ <p>الفاصلة: $x_A = 0$ الترتيب: $y_A = f(0) = 1$ النقطة: $A(0, 1)$ الميل: $m = 0$ المعادلة: $T: y = 0(x - 0) + 1 \rightarrow y = 1$</p>	<p>نحل المعادلة $f'(x) = m$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: حل المعادلة $(f'(x) = m)$ تحديد الترتيب: الميل m: $y_A = f(x_A)$ (مفترض)</p>	<p>اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f علماً أن ميله m.</p>	<p>السابعة</p>

الثامنة	اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f من $A(x_A, y_A)$	نفرض أن نقطة التماس هي $M(a, f(a))$ نوجد $f'(x)$ فتكون: $m = f'(a)$ نكتب معادلة المماس وفق: $T: y = m(x - x_M) + y_M$ بما أن المماس مار من A فهذا يعني أن إحداثيات النقطة A تحقق معادلة المماس ونعوض هذه الإحداثيات بمعادلة المماس فنحصل على قيمة a ثم نعوض قيم a في معادلة T فنحصل على المماسات المطلوبة.
ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق: $f(x) = x^2 + 1$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f المار من المبدأ. الحل: تحديد النقطة: بفرض أن الفاصلة: $x_A = a$ ومنه الترتيب: $y_A = f(a) = a^2 + 1$ النقطة: $A(a, a^2 + 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = 2x$ $m = f'(a) = 2a$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2a(x - a) + a^2 + 1$ $y = 2ax - a^2 + 1 \dots (*)$ بما أن T مماس مار من المبدأ فإن النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس: $0 = 2a(0) - a^2 + 1$ $-a^2 + 1 = 0 \rightarrow a^2 = 1$ إما $a = 1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_1: y = 2x$ أو $a = -1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_2: y = -2x$		

حالات خاصة لمعادلة المماس:

فكرة الحل	نص السؤال
يكون: $m_T = m_d$ وكتابة المعادلة نتابع كما سبق.	اكتب معادلة المماس T الذي يوازي المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)
يكون: $m_T \cdot m_d = -1$ وكتابة المعادلة نتابع كما سبق.	اكتب معادلة المماس T الذي يعامد المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)
يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ وكتابة المعادلة نتابع كما سبق.	اكتب معادلة المماس T المار بالنقطتين A و B
نحدد نقطتين من الشكل ننتهيان إلى المماس يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ وكتابة المعادلة نتابع كما سبق.	اكتب معادلة المماس T المرسوم في شكل
يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$	اكتب معادلة المماس الأفقي
يكون: m_T غير معرف. ومعادلة المماس هي: $x = x_A$	اكتب معادلة المماس الشاقولي
يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$	اكتب معادلة المماس في القيمة الحدية الصغرى أو الكبرى.

اختبار وجود مماس	النقط الثاني
هل يقبل الخط البياني مماساً ميله m "حيث الميل إما معلوم أو يُحسب"	نص السؤال
* نحل المعادلة $f'(x) = m$ * نميز الحالات:	فكرة الحل
الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة مستحيلة الحل فهذا يعني ان الخط البياني لا يقبل مماساً ميله m	
الحالة الثانية: إذا كان للمعادلة حل وحيد فهذا يعني أن: الخط البياني يقبل مماساً ميله m هذا الحل هو فاصلة نقطة التماس "ولكتابة معادلة هذا المماس نتابع كما سبق"	
الحالة الثالثة: إذا كان للمعادلة حلان فهذا يعني أن: الخط البياني يقبل مماسان ميل كل منهما هو m وحلول المعادلة هي فواصل نقاط التماس "ولكتابة معادلة كل مماس نتابع كما سبق"	
الحالة الرابعة: وهكذا ... انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات	

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

ومنه الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 1$
في النقطة التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = f(0) = -3$ ومعادلته:
 $T: y = 1(x - 0) - 3$
 $y = x - 3$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل
ومنه الخط البياني لا يقبل مماساً ميله $m = 0$
الطالب الأثني:
هل يقبل C مماساً ميله $m = 1$
الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 1$
 $3x^2 + 1 = 1$

التدريب الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}
 $f(x) = x^3 + x - 3$
الطالب الأول:
هل يقبل C مماساً ميله $m = 0$
الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 0$
 $f'(x) = 3x^2 + 1$
 $\rightarrow f'(x) = 0$
 $3x^2 + 1 = 0$

الطالب الثالث:

هنا يقبل C مماساً عليه $m = 13$ الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 13$

$$3x^2 + 1 = 13$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ إما}$$

$$x = -2 \text{ أو}$$

نلاحظ أن الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

$$x_A = 2$$

$$y_A = f(2) = 7$$

النقطة: $A(2, 7)$ الميل: $m = 13$

$$T_1: y = 13(x - 2) + 7$$

$$y = 13x - 19$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

$$x_B = -2$$

$$y_B = f(-2) = -13$$

النقطة: $B(-2, -13)$ الميل: $m = 13$

$$T_2: y = 13(x + 2) - 13$$

$$y = 13x + 13$$

التعريف الثاني:

ليكن C الخط البياني التابع f المعروف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

الطالب الأول:

اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي

فاصلتها تساوي 1

الحل:

تحديد النقطة:

$$x_A = 1$$

$$y_A = f(1) = -\frac{1}{2}$$

الميل: نوجد $f'(x)$ وفق:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2}$$

$$m = f'(1) = -\frac{1}{4}$$

المعادلة:

$$T: y = -\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

الطالب الثاني:

هنا يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي

$$3x - 2y = 0$$

الحل:

ميل المستقيم y هو $m = -4$ ومنه:

$$f'(x) = -4$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2} = -4$$

$$\frac{5x^2 + 10x}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0$$

$$5x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ إما}$$

$$x = -2 \text{ أو}$$

نلاحظ أن الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

$$x_A = 0$$

الترتيب: $y_A = f(0) = 1$ النقطة: $A(0, 1)$ الميل: $m = -4$

$$T_1: y = -4(x + 0) + 1$$

$$y = -4x + 1$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

$$x_B = -2$$

$$y_B = f(-2) = -11$$

النقطة: $B(-2, -11)$ الميل: $m = -4$

$$T_2: y = -4(x + 2) - 11$$

$$y = -4x - 19$$

الطالب الثالث:

هنا يقبل C مماساً موازياً للمستقيم

$$3x - 2y = 0$$

الحل:

$$3x - 2y = 0$$

هو $m = \frac{3}{2}$ ومنه نحل المعادلة:

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 + 2x + 11 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = 11$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 4 - 44$$

$$= -40 < 0$$

مستحيلة الحل

ومنه الخط البياني لا يقبل مماس يوازي

$$3x - 2y = 0$$

التقريب التآلفي المحلي:

يستخدم التقريب التآلفي المحلي في حساب صورة عدد عشري وفق القانون: $f(a + h) \cong f(a) + hf'(a)$

الاستخدام

نص السؤال

ليكن لدينا التابع f المعروف على $[0, +\infty)$ وفق: $f(x) = \sqrt{x}$ احسب قيمة تقريبية لـ $f(16.1)$.

$$a = 16, h = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(a + h) \cong f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$f(16.1) \cong f(16) + f'(16) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\cong 4 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{321}{80} \cong 4.0125$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعروف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = \sin x$ احسب قيمة تقريبية للعدد $f(0.1)$.

$$a = 0, h = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(a + h) \cong f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$f(0.1) \cong f(0) + f'(0) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cong 0 + 1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{1}{10} \cong 0.1$$

لدينا $x = a + h$ عدد عشري:نحدد a حيث a عدد صحيح مناسب.نحدد h حيث h عدد عشري صغير جداً $h = x - a$ ويتم ذلك وفق:

$h = x - a$	a	$x = a + h$
0.1	4	4.1
0.3	0	0.3
0.3	15	15.3
-0.3	16	15.7
-0.1	4	3.9
0.3	-6	-5.7
0.1	1	1.1

نشتق التابع f نوجد كلاً من $f(a)$ و $f'(a)$ نطبق القانون: $f(a + h) \cong f(a) + hf'(a)$

نص السؤال

احسب قيمة تقريبية لـ

$$f(a + h)$$

باستخدام التقريب التآلفي

أوجد قيمة لـ $x = a + h$

استنتج القيمة التقريبية التابع

$$x = a + h$$

قابلية الاشتقاق عند نقطة:

أنماط التمارين:

التمط الأول	الاولى	الثانية	الثالثة
نصر السؤال	هل التابع f اشتقاقي عند a ؟ وفسر النتيجة هندسياً. ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليسار وفسر النتيجة هندسياً.
فكرة الحل	نشكل التابع المساعد g "تابع تعريف العدد المشتق" وفق: $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ حيث مجموعة تعريفه تعطى: $D_g = D_f \setminus \{a\}$ نوجد $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ فإن: التابع f غير اشتقاقي عند a التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإن: التابع f اشتقاقي عند a وقيمة مشتقه $f'(a) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة المماس وفق: $y = m(x - a) + f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نوجد $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ فإن: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإن: التابع f اشتقاقي عند a من اليمين وقيمة مشتقه $f'(a^+) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y = m(x - a) + f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نوجد $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty$ فإن: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإن: التابع f اشتقاقي عند a من اليسار وقيمة مشتقه $f'(a^-) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y = m(x - a) + f(a)$

تنويه:

أحياناً يكون نص السؤال ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وكان التابع f يحوي قيمة مطلقة فإننا نتخلص منها ونناقش حالتين من اليمين ومن اليسار أو بالاعتماد على مجموعة تعريف التابع g فإننا ندرس نهايته عند a من اليمين ومن اليسار
فكرة الحل:

* نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
* نجد $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$
* ونميز:

$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ يكون التابع f غير اشتقاقي عند a		$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) =$	
$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) =$	$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) =$	$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) =$	$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) =$
$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty$
التابع f اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل مماساً من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$	التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل مماساً شاقولياً من اليمين معادلته $x = a$	التابع f اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$	التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذا f غير قابل للاشتقاق عند الصفر ويقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = 0$.

الحل:
نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعروف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعروف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x(2-x)} - 0}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$= \frac{x^2(x(2-x))}{x^2(x(2-x))}$$

$$= \frac{(x-2)(x\sqrt{x(2-x)})}{x^2(-x)} = \frac{-x\sqrt{x(2-x)}}{x^2(-x)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x(2-x)}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

إذا التابع f غير اشتقاقي عند 2 والخط البياني يقبل معاصر شاقولي معادلته $x = 2$

التمرين السادس:

ليكن التابع f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بالصيغة:

$$f(x) = 3x^2 - 4$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 5 واحسب $f'(5)$.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

$$= \frac{3x^2 - 4 - 71}{x - 5} = \frac{3x^2 - 75}{x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{3x^2 - 75}{x - 5}$$

$$= \frac{3(x^2 - 25)}{x - 5}$$

$$= \frac{3(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$= 3(x+5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 30$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 5 والخط البياني يقبل معاصر ميله $m = 30$ في النقطة A

التي فاصلتها $x_A = 5$ وترتيبها $y_A = f(5) = 71$

$$T: y = 30x - 79$$

حساب $f'(5)$:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(5) = 30$$

بِقَدْرِ الكِدِّ تكتسبُ المعالي .. 🌟👍😊

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 3 + 2\sqrt{x-1}$$

هل التابع f اشتقاقي عند $a = 1$ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $[1, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \frac{x - 3 + 2\sqrt{x-1} - (-2)}{x - 1}$$

$$= \frac{x - 1 + 2\sqrt{x-1}}{x - 1}$$

$$= \frac{x - 1 + 2\sqrt{x-1}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x - 1 + 2\sqrt{x-1}}{x - 1}$$

$$= \frac{x - 1 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}\right)}{x - 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

إذا التابع f غير اشتقاقي عند 1 والخط البياني يقبل معاصر شاقولي معادلته $x = 1$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, 2]$ وفق:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x(2-x)}$$

الطالب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $[0, 2]$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x(2-x)}}{x} = \sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا f اشتقاقي عند الصفر ويقبل معاصر ميله

$m = 0$ في النقطة A التي فاصلتها

$x_A = f(0) = 0$ وترتيبها $y_A = 0$

نكتب معادلة المعاصر وفق:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 0(x - 0) + 0$$

$$y = 0$$

الطالب الثاني:

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 2 وفسر النتيجة هندسياً.

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $[0, 2]$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} - 0}{x - 0} = x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا f اشتقاقي عند الصفر ويقبل معاصر ميله

$m = 0$ في النقطة A التي فاصلتها

$x_A = f(0) = 0$ وترتيبها $y_A = 0$

نكتب معادلة المعاصر وفق:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 0(x - 0) + 0$$

$$y = 0$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على المجال $]0, 1[$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

الطالب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $]0, 1[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} - 0}{x - 0} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا f اشتقاقي عند الصفر ويقبل معاصر ميله

$m = 0$ في النقطة A التي فاصلتها

$x_A = f(0) = 0$ وترتيبها $y_A = 0$

نكتب معادلة المعاصر وفق:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 0(x - 0) + 0$$

$$y = 0$$

الطالب الثاني:

احسب $f'(x)$ على $]0, 1[$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{1-x} \right)' = \frac{-2x^3 + 3x^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}} = \frac{2x^3 + 3x^2}{2(1-x)^2 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

التعريف السابع:ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة وفق:

$$D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x} = \frac{x+2-2x-2}{x(x+1)} = \frac{-x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{1}{1} = -1$$

إذا التابع f اشتقاقي والخط البياني يقبل معاصر ميله $m = -1$ في النقطة A التيفاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = 2$

ومعادلتها من الشكل:

$$T: y = -x + 2$$

التعريف الثامن:ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = (3x+1) \cdot \sin x$$

هنا التابع f اشتقاقي عند الصفرليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R}^*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(3x+1) \cdot \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{(3x+1) \cdot \sin x}{x}$$

$$= (3x+1) \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = (1)(1) = 1$$

علمنا أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر والخطالبياني يقبل معاصر ميله $m = 1$ فيالنقطة A وفاصلتها $x_A = 0$ وترتيبهاومعادلتها: $y_A = f(0) = 0$

$$T: y = x$$

التعريف التاسع:التابع f معرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), f(0) = 0$$

في حالة $x \neq 0$ والمطلوب:**الطلب الأول:**هنا التابع f اشتقاقي عند الصفر علا إيجابتك.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R}^*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ليجاد النهاية نستخدم الإحاطة.

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

الحالة الأولى: $x < 0$ نضرب بـ x بشرط $x < 0$ وفق:

$$-x \geq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$-x \geq g(x) \geq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

الحالة الثانية: $x > 0$ نضرب بـ x بشرط $x > 0$ وفق:

$$-x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$-x \leq g(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر والخطالبياني يقبل معاصر ميله $m = 0$ فيالنقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبهاومعادلتها: $y_A = 0$ **الطلب الثاني:**احسب $f'(x)$ على \mathbb{R}^* .

الحل:

$$f(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot x^2$$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

التعريف العاشر:ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

$$f(x) = x \cdot |x|$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R}^* :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = |x|$$

الحالة الأولى: إذا كان $x < 0$

$$g(x) = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

الحالة الثانية: إذا كان $x > 0$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

إذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البيانييقبل معاصر ميله $m = 0$ في النقطة $A(0,0)$ ومعادلتها: $T: y = 0$ **التعريف الحادي عشر:**ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R}^*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 + |x|}{x^3 + x}$$

الحالة الأولى: إذا كان $x < 0$

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 + x}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$$

الحالة الثانية: إذا كان $x > 0$

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

التابع f غير اشتقاقي عند الصفر.

عندما $x < 2$:
تكون $|2 - x| = 2 - x$ ويكون التابع g

$$\begin{aligned} &= \frac{x - 2 - 6(2 - x)}{(x - 2)(1 + 2 - x)} \\ &= \frac{x - 2 + 6(x - 2)}{(x - 2)(3 - x)} \\ &= \frac{(x - 2)(3 - x)}{(x - 2)(1 + 6)} \\ &= \frac{7}{3 - x} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= 7 \end{aligned}$$

عندما $x > 2$:
تكون $|2 - x| = x - 2$ ويكون التابع g

$$\begin{aligned} &= \frac{x - 2 - 6(x - 2)}{(x - 2)(1 + x - 2)} \\ &= \frac{(x - 2)(-5)}{(x - 2)(-1)} = \frac{-5}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= -5 \end{aligned}$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$$

إذا التابع f غير اشتقاقي عند a .
التفسير الهندسي:

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 7$$

التابع f اشتقاقي عند a من اليسار والخط
البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار في
النقطة $A(2,6)$ ميله $m = 7$ ومعادلته:

$$T_1: y = 7x - 8$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -5$$

التابع f اشتقاقي عند a من اليمين والخط
البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين في
النقطة $B(2,6)$ ميله $m = -5$ ومعادلته:

$$T_2: y = -5x + 16$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2 + x}{x^3 + x} \\ &= \frac{x(x + 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر من اليمين
والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين

ميله $m = 1$ في النقطة $A(0,0)$

ومعادلته: $T: y = x$

التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x + 4}{1 + |2 - x|}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 2$ وفسر
النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ وفق:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \frac{\frac{x + 4}{1 + |2 - x|} - 6}{x - 2} \\ &= \frac{x + 4 - 6 - 6|2 - x|}{(1 + |2 - x|)(x - 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x - 2 - 6|2 - x|}{(x - 2)(1 + |2 - x|)} \end{aligned}$$

للتخلص من القيمة المطلقة فإننا

ندرس إشارة مضمونها وفق:

$$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$$

تنظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	0	$-$
$ 2 - x $	$2 - x$		$x - 2$

عندما $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$
الخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار
ميله $m = -1$ في النقطة $A(0,0)$
معادلته: $T: y = -x$

عندما $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
الخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين
ميله $m = 1$ في النقطة $A(0,0)$
معادلته: $T: y = x$

التمرين الثاني عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

الطالب الأول:

ما نهاية التابع f عند $-\infty$ ؟
الحل:

نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} & ; x > 0 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

الطالب الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر من
اليمين وفسر النتيجة هندسياً.
الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R}^* :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 + x}{x^3 + x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

النمط الثاني: استنتاج نهاية

أوجد كلاً من:

$f'(x)$	$f(a)$
$f'(a)$	

واستنتج $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

أوجد كلاً من:

$f'(x)$	$f(a)$
$f'(a)$	

قانون يدلنا على استنتاج النهاية: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

النمط الثالث: إزالة حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

عند ظهور حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وكان المقام عبارة عن:
"المسعى - x " فإننا نستخدم طريقة العدد المشتق.
أوجد نهاية التابع f عند a

١. تأخذ تابع g وفق: $g(x)$ هو المقدم من البسط الذي يحوي x
٢. نوجد

$g'(x)$	$g(a)$
$g'(a)$	

٣. تكون $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

نص السؤال

فكرة الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$$

2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \tan x$$

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g'(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1$$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}; a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g(1) = \sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}; a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+2}$$

$$g(1) = 2$$

$$2x+1$$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$g'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{3}{4}$$

التعريف الرابع:

ليكن f تابع معرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

الطالب الأول:

أوجد $f'(-\frac{\pi}{4})$ و $f'(x)$ و $f(-\frac{\pi}{4})$

الحل:

$$f(-\frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{4})$$

$$= -\sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f'(-\frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) - \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x - (-\frac{\pi}{4})} = f'(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

التعريف الخامس:

في كل من الحالات الآتية، احسب في حال

وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

1. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$	$a = 0$
2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$	$a = 0$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$	$a = 1$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$	$a = 1$
5. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$	$a = \frac{\pi}{4}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$	$a = 1$
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$	$a = \pi$
8. $f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x+1}$	$a = -1$
9. $f(x) = \frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}}$	$x = -\frac{\pi}{8}$
10. $f(x) = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}x)}{1-x}$	$a = 1$
11. $f(x) = \frac{\sin(\pi(\sqrt{1-x}))}{x}$	$a = 0$

الحل:

1. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}; a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

$$g(x) = \cos x$$

$$g(0) = 1$$

$$g'(x) = -\sin x$$

$$g'(0) = 0$$

ليكن:

التعريف الأول:

ليكن التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sin x$$

الطالب الأول:

أوجد $f'(\pi)$ و $f'(x)$ و $f(\pi)$

الحل:

$$f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(\pi) = -1$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = -1$$

التعريف الثاني:

ليكن التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x+10}$$

الطالب الأول:

أوجد $f'(3)$ و $f'(x)$ و $f(3)$

الحل:

$$f(3) = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+10}}$$

$$f'(3) = \frac{1}{4}$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{4}$$

التعريف الثالث:

ليكن التابع $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

الطالب الأول:

أوجد $g'(\frac{\pi}{4})$ و $g'(x)$ و $g(\frac{\pi}{4})$

الحل:

$$g(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \tan^2(\frac{\pi}{4}) = 2$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = g'(\frac{\pi}{4}) = 2$$

اليوم هو فرصتك لتبني الغد الذي تريده.. 🏆❤️

ليكن:

$$g(x) = \sin(\pi\sqrt{1-x})$$
$$g(0) = 0$$
$$g'(x) = \frac{-\pi}{2\sqrt{1-x}} \cos(\pi\sqrt{1-x})$$
$$g'(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{\pi}{2}$$

التعريف السادس:

ليكن f التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2A + 2 ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

الطالب الأول:

احسب نهاية التابع f عند $\frac{\pi}{2}$
الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

ليكن لدينا: التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x) = \cos x$$
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$g'(x) = -\sin x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

ومن:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right]$$
$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right] = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

الطالب الثاني:

احسب قيمة A التي تجعل f مستمر على \mathbb{R}
الحل:

لدينا $x \mapsto \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ مستمر على $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ وحتى يكون مستمر على \mathbb{R} يجب أن يكون مستمر عند $\frac{\pi}{2}$ وبذلك يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \dots (*)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2A + 2$$

نعوض في علاقة (*) فنجد:

$$-1 = 2A + 2$$
$$2A = -3$$
$$A = -\frac{3}{2}$$

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g(-1) = 0$$

$$g'(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g'(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = g'(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$9. f(x) = \frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}} ; a = -\frac{\pi}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{8}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sin 2x$$

$$g\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g'(x) = 2 \cos 2x$$

$$g'\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{8}} \frac{g(x) - g\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{x + \frac{\pi}{8}} = g'\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$$

$$10. f(x) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1-x} ; a = 1$$

$$f(x) = -\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{3\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

$$g'(1) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x-1} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$11. f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x} ; a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$5. f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} ; a = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \tan x$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} ; a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$g(1) = \sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$7. f(x) = \frac{\sin x}{x-\pi} ; a = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sin x$$

$$g(\pi) = 0$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$g'(\pi) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x-\pi} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x-\pi} = g'(\pi) = -1$$

$$8. f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} ; a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

الثاني	الأول	النمط
هناك التابع f اشتقافي على المجال	أوجد المجموعة التي تنجز عليها المشتق	نص السؤال
مجموع أو جداء أو قسمة تابعين اشتقابين على I يكون اشتقافي على I أي: ليكن u و v تابعين اشتقابين على I وليكن $k \in \mathbb{R}$ عندئذ يكون: $u \cdot v$ اشتقافي على I $u + v$ اشتقافي على I $k \cdot u$ اشتقافي على I $\frac{u}{v}$ اشتقافي على I بشرط $v \neq 0$ $\frac{1}{v}$ اشتقافي على I بشرط $v \neq 0$	جميع التوابيع ما عدا (تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع) تكون اشتقافية على مجموعة تعريفها نفسها. تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع تكون اشتقافية على مجموعة تعريفها بعد فتح المجالات	فكرة الحل
ليكن g تابعاً اشتقافياً على مجال J وليكن u تابعاً اشتقافياً على مجال I ولننظر أنه أياً كان x من I تنتمي $u(x)$ إلى J عندئذ يكون التابع f المعروف وفق: $f(x) = g(u(x))$ اشتقافياً على I إذا كان u تابعاً موجباً واشتقافياً على مجال I كان التابع f المعروف بالصيغة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ اشتقافياً على I ليكن n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر وليكن u تابعاً اشتقافياً على مجال I ولا ينعدم على I في حالة $n > 0$ عندئذ يكون التابع f المعروف وفق $f(x) = (u(x))^n$ اشتقافياً على I كل تابع اشتقافي على I يكون اشتقافي على أي مجال جزئي منه.		
تنويه: في التابع الجزري لدراسة قابلية الاشتقاق في حال كان المجال مغلق فإننا ندرس قابلية الاشتقاق على مرحلتين: المرحلة الأولى: ندرس قابلية الاشتقاق على المجال المفتوح (بالاعتماد على المناقشات والقواعد السابقة) المرحلة الثانية: ندرس قابلية الاشتقاق عند الأطراف المغلقة (باستخدام قابلية الاشتقاق عند a)		

التعريف الأول:

فيما يأتي احسب التابع المشتق التابع f مبيناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها:

1. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3}$
2. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{4}$
3. $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{2}{x+1} - x$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$
6. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
7. $f(x) = x \cos x$
8. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
9. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
10. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
11. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$
12. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$
13. $f(x) = \cos^2 3x$
14. $f(x) = \sin^3 2x$
15. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$
16. $f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x}$

الحل:

1. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3}$
 التابع f اشتقافي على \mathbb{R}
 $f'(x) = 2x^2 - x + 1$

8. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

التابع f اشتقافي على \mathbb{R}^*
 $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}$

9. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
 نعدم المقام:

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z}$

التابع f اشتقافي على
 $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z}\}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

10. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

التابع f اشتقافي على \mathbb{R}

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

11. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$
 نعدم المقام:

$\sin x - 1 = 0$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$

التابع f اشتقافي على
 $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}\}$

$f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2}$

2. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{4}$

التابع f اشتقافي على \mathbb{R}
 $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

3. $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$

التابع f اشتقافي على $]0, +\infty[$

$f'(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x}$

4. $f(x) = \frac{2}{x+1} - x$

التابع f اشتقافي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$

5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

التابع f اشتقافي على $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$

6. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

التابع f اشتقافي على \mathbb{R}^*

$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

7. $f(x) = x \cos x$

التابع f اشتقافي على \mathbb{R}

$f'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$

٩

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

إذا التابع f اشتقاقي على I

١٠

موجب واشتقاقي على \mathbb{R}
 $x \mapsto x^2 + 2x + 3$

١١

موجب واشتقاقي على $I =]1, +\infty[$, إذا التابع f اشتقاقي على I
 $x \mapsto x - 1$

١٢

موجب واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ ومنه f اشتقاقي على I
 $x \mapsto x$

١٣

موجب واشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I =]0, 2[$
 $x \mapsto x(2 - x)$ موجب واشتقاقي على $I =]0, 2[$ إذا التابع f اشتقاقي على I

١٤

المرحلة الأولى:
 دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $I =]0, +\infty[$
 $x \mapsto x^2$ اشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I =]0, +\infty[$
 $x \mapsto x$ موجب واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$ لأنه
 جداء تابعان اشتقاقيان على $I =]0, +\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الصفر:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعروف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر.

مما سبق نستنتج أن التابع f اشتقاقي على

$$I =]0, +\infty[\text{ المجال}$$

١٥

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال

$$I =]1, +\infty[$$

موجب واشتقاقي على $I =]1, +\infty[$ إذا f اشتقاقي على $I =]1, +\infty[$

9. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$	$I = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \sqrt{x - 1}$	$I =]1, +\infty[$
12. $f(x) = \sqrt{x}$	$I =]0, +\infty[$
13. $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$	$I =]0, 2[$
14. $f(x) = x^2\sqrt{x}$	$I =]0, +\infty[$
15. $f(x) = \sqrt{x - 1}$	$I =]1, +\infty[$

١

التابع f اشتقاقي على $I =]1, +\infty[$ فهو اشتقاقي على $I =]1, +\infty[$

٢

التابع f اشتقاقي على $I =]3, +\infty[$ فهو اشتقاقي على $I =]3, +\infty[$

٣

التابع f اشتقاقي على $I =]0, 1[$ فهو اشتقاقي على $I =]0, 1[$

٤

التابع f اشتقاقي على $I =]\frac{5}{4}, +\infty[$ فهو اشتقاقي على $I =]\frac{5}{4}, +\infty[$

٥

موجب واشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I = \mathbb{R}^*$
 $x \mapsto (2x^2 - 3)$ اشتقاقي على \mathbb{R}^*
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على \mathbb{R}^*

ومنه التابع f اشتقاقي على \mathbb{R}^* لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على \mathbb{R}^*

٦

موجب واشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I = \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ اشتقاقي على \mathbb{R}
 $x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على \mathbb{R}
 ومنه التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على \mathbb{R}

٧

موجب واشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I = \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على \mathbb{R}
 $x \mapsto 3x$ اشتقاقي على \mathbb{R}
 ومنه التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} لأنه عبارة عن مجموع تابعين اشتقاقيين على \mathbb{R}

٨

التابع f اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ فهو اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 $x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 $x \mapsto 3x$ اشتقاقي على \mathbb{R} فهو اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ومنه التابع f اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$12. f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$$

نعدم المقام:

$$2 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -2$$

مستحيلة الحل.

إذا التابع f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$13. f(x) = \cos^2 3x$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = -6 \sin(3x) \cos(3x)$$

$$14. f(x) = \sin^3 2x$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R}

$$f'(x) = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$$

$$15. f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$$

نعدم المقام:

$$\sin^2 3x = 0$$

$$\sin 3x = 0$$

$$3x = \pi k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} k ; k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6 \sin 3x \cdot \cos 3x}{\sin^4 3x}$$

$$16. f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x}$$

نعدم المقام:

$$\cos^3 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k ; k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6 \sin 2x}{\cos^4 2x}$$

التعريف الثاني:

في كل من الحالات الآتية تحقق هلا f

اشتقاقي على المجال I :

1. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$	$I =]1, +\infty[$
2. $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 3}$	$I =]3, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$	$I =]0, 1[$
4. $f(x) = \frac{-4x^2 + 2x - 9}{10 - 8x}$	$I =]\frac{5}{4}, +\infty[$
5. $f(x) = (2x^2 - 3) \left(\frac{1}{x}\right)$	$I = \mathbb{R}^*$
6. $f(x) = x^2 \cdot \cos x$	$I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \cos x + 3x$	$I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \tan x - x$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذ التابع f غير اشتقاقي عند الواحد ومما سبق نجد أن f غير اشتقاقي على المجال $[1, +\infty[$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

تذكرة: المعادلات المثلثية:

$\sin x = \sin \theta$ حلها: إما $x = \theta + 2\pi k$ أو $x = \pi - \theta + 2\pi k$	$\cos x = \cos \theta$ حلها: إما $x = \theta + 2\pi k$ أو $x = -\theta + 2\pi k$	الحالة العامة
* $\sin x = 0 \rightarrow x = \pi k$ * $\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ * $\sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$	* $\cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$ * $\cos \theta = 1 \rightarrow \theta = 2\pi k$ * $\cos \theta = -1 \rightarrow \theta = \pi + 2\pi k$	الحالة الخاصة
حل المعادلة الآتية: $2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \rightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{3}\right)$ $3x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$ $3x = \frac{2\pi}{15} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{2\pi}{45} + \frac{2\pi k}{3}$ $3x + \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$ $3x = \frac{7\pi}{15} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{7\pi}{45} + \frac{2\pi k}{3}$	حل المعادلة الآتية: $\cos \left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ إما: $3x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2\pi k$ $3x - 2x = 2\pi k - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$ أو: $3x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2\pi k \rightarrow 3x + 2x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$ $5x = 2\pi k - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi k}{5} - \frac{\pi}{15}$	مثال
حل $\sin \theta$ و $\cos \theta$ قيمتها محصورة بين الـ 1 والـ -1 تمرين: $\sin \left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$ مستحيلة الحل.		انتباه

استنتاج مشتق:

نص السؤال * نكتب التابع $h(x)$ بدلالة $f(x)$ * نستنتج المشتق حسب قواعد الاشتقاق * وتذكر: إذا كان لدينا تابع $h(x)$ من الشكل: $h(x) = f(g(x))$ فإن مشتقه هو: $h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$	فكرة الحل
---	-----------

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

الطالب الأول:

عين التابع المشتق f' للتابع f

الحل:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (1)(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2}$$

الطالب الثاني:

نرمز بالرمز g إلى التابع المعرفة على

$$g(x) = f(\sin x) \text{ وفق: } I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

أثبت أن g اشتقاقي على I ثم احسب

$$g'(x) \text{ على } I$$

الحل:

نعدم المقام

$$\sin x = 1$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2-\cos x}}{2+\cos x}$$

$$g(x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = (\cos x)' \cdot f'(\cos x)$$

$$g'(x) = \frac{6 \sin x - \sin x \cdot \cos x}{2\sqrt{2-\cos x} (2+\cos x)^2}$$

$$l(x) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}}$$

$$l(x) = f(\sqrt{x})$$

$$l'(x) = (\sqrt{x})' \cdot f'(\sqrt{x})$$

$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{-6+\sqrt{x}}{2\sqrt{2-\sqrt{x}} \cdot (2+\sqrt{x})^2}$$

$$k(x) = \frac{\sqrt{2-\tan x}}{2+\tan x}$$

$$k(x) = f(\tan x)$$

$$k'(x) = (\tan x)' \cdot f'(\tan x)$$

$$k'(x) = (1+\tan^2 x) \cdot \frac{-6+\tan x}{2\sqrt{2+\tan x} \cdot (2+\tan x)^2}$$

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{2+x}$$

الطالب الأول:

احسب $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{2-x})'(2+x) - (1)(\sqrt{2-x})}{(2+x)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}(2+x) - \sqrt{2-x}}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6+x}{2\sqrt{2-x}(2+x)^2}$$

الطالب الثاني:

استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2+\sin x}}{2-\sin x}$$

$$h(x) = f(-\sin x)$$

$$h'(x) = (-\sin x)' \cdot f'(-\sin x) = -\cos x \cdot \frac{-6-\sin x}{2\sqrt{2+\sin x} (2-\sin x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{6 \cos x + \cos x \cdot \sin x}{2\sqrt{2+\sin x} (2-\sin x)^2}$$

الطالب الثاني:

اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

الحل:

هي ذاتها التفسير الهندسي للطلب الأول: بما أن التابع f اشتقاقي عند الصفر فإن الخط البياني يقبل مماساً في النقطة $A(0,0)$ ميله $m = 0$ ومعادلته:

$$T: y = 0$$

الطالب الثالث:

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

الطالب الرابع:

أوجد $f'(x)$ على \mathbb{R}^* :

الحل:

$$f'(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \cdot (x^2)$$

$$= 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

الطالب الخامس:

استنتج مشتق التابع:

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right)$$

الحل:

نلاحظ أن:

$$g(x) = f(x^2 + 1)$$

$$g'(x) = (x^2 + 1)' \cdot f'(x^2 + 1)$$

$$= (4x^3 + 4x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right) + 2\pi x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right)$$

الطالب الأول:

أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$ الحل:

ليكن لدينا التابع h المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$h(x) = \frac{x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$h(x) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

إحاطة $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \rightarrow$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$$

عندما $x > 0$

$$-x \leq x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x$$

$$-x \leq h(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$$

عندما $x < 0$

$$-x \geq x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \geq x$$

$$-x \geq h(x) \geq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

وأفوضُ أُمري إلى الله

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

التابع g اشتقاقي على D_g فهو اشتقاقي على I .

$$g'(x) = (\sin x)' \cdot f'(\sin x)$$

$$g'(x) = \cos x \cdot \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-5 \cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

الطالب الثالث:

نرمز بالرمز h إلى التابع المعرفة على

$$h(x) = f(\sqrt{x}) \text{ وفق: } j =]1, +\infty[$$

أثبت أن h اشتقاقي على j ثم احسب

$h'(x)$ على j

الحل:

$$h(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$$

التابع h معرف على:

$$D_h =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

التابع h اشتقاقي على D_h فهو اشتقاقي على I .

$$h'(x) = (\sqrt{x})' \cdot f'(\sqrt{x})$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{-5}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

التعريف الثالث:

ليكن f التابع المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

المشتقات من مراتب عليا:

تمهيد:

- * المشتق الأول التابع f رمزه $f'(x)$
- * المشتق الثاني التابع f رمزه $f''(x)$
- * المشتق من المرتبة n التابع f رمزه $f^n(x)$
- * قاعدة:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x) \right)'$$

انتبه: كل حرف مختلف عن x هو ثابت مشتقه هو الصفر.

التعريف الأول:

في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرفة بالعللاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتقة:

$$1. f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 1$$

$$f'''(x) = 6$$

$$2. f(x) = x\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{16x\sqrt{x}}$$

الطالب الثاني:

أثبت مستخدماً البرهان بالتدرج أنه مهما تكن $n \geq 1$ يعطى المشتق

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \text{ بالصيغة: } n \text{ المرتبة}$$

وذلك في حالة $x \neq 0$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$l_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1!}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

محقة $l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(-1)^{n+2} \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}}_{l_2}$$

الإثبات:

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) \cdot \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)} \right)' = \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \right)'$$

$$= \left((-1)^{n+1} \right)' \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} + \left(\frac{n!}{x^{n+1}} \right)' \cdot (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{-0}{(x^{n+1})^2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot n! + \left(\frac{n!}{x^{n+1}} \right)' \cdot (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{(-1)(n+1)x^n \cdot n!}{(x^{n+1})^2} \cdot (-1)^{n+1} = (-1)(-1)^{n+1} \frac{(n+1)n!}{x^{2n+2} \cdot x^n}$$

$$= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)!}{x^{2n+2} \cdot x^{-n}} = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} = l_2$$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة تحوي $f^{(n)}(x)$ فإننا نستخدم الإثبات بالتدرج نمط المساواة مع الانتباه إلى أن القيمة الابتدائية تكون

$n = 1$ وذلك في حال عدم وجود شرط البدء

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = x \cos x$

احسب عند كل x من \mathbb{R} المشتقات: $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$ ثم

أثبت مستخدماً البرهان بالتدرج أنه مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا:

$$f^{(n)}(x) = x \cos \left[x + \frac{n\pi}{2} \right] + n \cos \left[x + (n-1) \times \frac{\pi}{2} \right]$$

أيما يكن x من \mathbb{R} .

الحل:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$$

$$= -2 \sin x - x \cos x$$

$$f'''(x) = -2 \cos x - \cos x + x \sin x$$

$$= -3 \cos x + x \sin x$$

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{x \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + n \cos \left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2} \right)}_{l_2}$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$4. f(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos 2x$$

$$f''(x) = -4 \cos 2x - 4 \sin 2x$$

$$f'''(x) = 8 \sin 2x - 8 \cos 2x$$

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

تحقق أن $f'(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot f(x) = f(x)$ من \mathbb{R}

استنتج أنه أيما يكن x من \mathbb{R} كان:

$$(1+x^2) \cdot f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$$

الحل:

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x)}_{l_1} = \underbrace{f(x)}_{l_2}$$

$$l_1 = \sqrt{1+x^2} \cdot f'(x)$$

$$= \sqrt{1+x^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\sqrt{1+x^2} + x = f(x) = l_2$$

من الطالب السابق نعلم أن:

$$\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$$

نشق الطرفين

$$\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)' \cdot f'(x) + f''(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = f'(x)$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + f''(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = f'(x)$$

ننقل إلى الطرف الأيسر:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + f''(x) \cdot \sqrt{1+x^2} - f'(x) = 0$$

نرتب:

$$f''(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) - f'(x) = 0$$

نضرب ب $\sqrt{1+x^2}$:

$$f''(x) \cdot (1+x^2) + x \cdot f'(x) - \underbrace{f'(x) \cdot \sqrt{1+x^2}}_{=f(x)} = 0$$

$$(1+x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) = 0$$

وهو المطلوب.

أنماط التعريف:

النمط الأول: إثبات صحة علاقة.

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وفق: $f(x) = -\frac{1}{x}$

الطالب الأول: احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

$$f'(x) = -\left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -\left(\frac{-2x}{x^4} \right) = \frac{-2}{x^3}$$

ثبت صحة (1) E:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

$$l_2 = x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x = -x \cdot \sin x + \cos x$$

$$= \cos x - x \cdot \sin x$$

محقة $l_1 = l_2$

نفرض صحة (n) E:

$$f^{(n)} = x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right) \dots (*)$$

أثبت صحة العلاقة (n+1) E: أي يجب إثبات أن:

$$f^{(n+1)} = x \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

الإثبات

$$l_1 = f^{(n+1)} = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)} \right)'$$

$$= \left(x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1) \frac{\pi}{2}\right) \right)'$$

$$= x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n \sin\left(x + (n-1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= x \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) + (n+1) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = l_2$$

الخط الثاني: استنتاج علاقة ثم إثباتها:

تمرين:

ليكن f التابع المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

الطالب الأول:

أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

الحل:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{ax + a + bx - b}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + a-b}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$a + b = 2 \dots (1)$$

اطراد تابع:

ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I ، تابعه المشتق f'

- إذا كان f' موجياً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I
- إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I
- إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I

مبرهنة

نقصد بدراسة اطراد تابع هو تعزف المجالات التي يكون f متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً عليها أو ثابتة عليها ويمكن أن نجزئ هذه الدراسة بالاستفادة من المقدمة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتق الأول وتنظيم جدول بهذه الدراسة (يسمى جدول اطراد تابع) ويتم تنظيمه وفق:

الخلاصة

x	مجموعة تعريف التابع f + القيم التي تعدم $f'(x)$
$f'(x)$	المشتق + إشارات + أصفار

$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أن:

$$2a = 2 \rightarrow a = 1$$

نعوض في (2) وفق:

$$1 - b = 0 \rightarrow b = 1$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

الطالب الثاني:

بالاستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x ومن $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} + \frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

يجب إثباتها:

لتكن الخاصة (n) E

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

ثبت صحة (1) E

$$l_1 = f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$l_2 = \frac{(-1)' \times 1}{(x-1)^2} + \frac{(-1)' \times 1}{(x+1)^2}$$

$$l_1 = l_2$$

نفرض صحة الخاصة (n) E:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}} \dots (*)$$

ثبت صحة (n+1) E: أي يجب إثبات أن:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)} \right)'$$

$$= \frac{-n(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^{n+1}}{((x-1)^{n+1})^2} + \frac{-n(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^{n+1}}{((x+1)^{n+1})^2}$$

$$= \frac{(n+1)n!(-1)^{n+1}}{(x-1)^{2n+2} \cdot (x-1)^{-n}} + \frac{(n+1)n!(-1)^{n+1}}{(x+1)^{2n+2} \cdot (x-1)^{-n}}$$

$$= \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} = l_2$$

التعريف الأول:

ادرس اطراد التوابع الآتية المعرفة على R وفق:

$f(x) = x^3 + 3x - 2$
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$
$f(x) = x^4 - 4x + 3$

الحل:

الطالب الأول:

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

الطريقة الأولى:

$$3x^2 + 3 > 0$$

التابع متزايد

الطريقة ثانية:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -3$$

$$x^2 = -1$$

مستحيلة الحل:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

التابع f متزايد

الطالب الثاني:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$a = -3, b = 4, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 16 - 36 = -20$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	

التابع f متناقص

الطالب الثالث:

$$f(x) = x^4 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 4 = 0$$

$$x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

التعريف الثاني:

تأمل التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - \sin x$$

الطالب الأول: احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$1 \geq -\sin x \geq -1$$

$$x + 1 \geq x - \sin x \geq x - 1$$

$$f(x) \geq x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

الطالب الثاني: أثبت أن f متزايد

$$f(x) = x - \sin x$$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$f'(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

إذاً التابع f متزايد على المجال $[0, +\infty[$

دراسة تغيرات تابع:

ادرس تغيرات التابع f

نص السؤال
فكرة الحل

1. نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على هيئة مجالات
2. نوجد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة ونوجد الصورة عند الأطراف المغلقة
3. نوجد $f'(x)$
4. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$
5. ننظم جدول التغيرات وفق:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

حيث:

○ حقل x : نضع فيه:

مجموعة تعريف التابع وقيم x التي تعدم $f'(x)$ "انتبه القيم توضع بالترتيب"

○ حقل $f'(x)$: نضع فيه:

نضع العدد صفر تحت قيم x التي تعدم $f'(x)$ والإشارات والرمز (||) قصيرة عندما يكون التابع f غير اشتقائي

انتبه: الرمز (||) قصيرة فقط في حقل $f'(x)$

○ حقل $f(x)$: نضع فيه:

النهايات والصور والأسهم والرمز (||) طويلة عندما يكون التابع f غير معرف

انتبه: الرمز (||) طويلة تأتي في حقل $f'(x)$ و $f(x)$ معا

ملاحظة: " نضع الشلمونة الطويلة عندما يكون المجال مفتوح عند عدد حقيقي فقط "

انتبه: قيمة x التي تعدم $f'(x)$ نميز:

* إذا كانت تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع (نصورها في التابع f)

* أما إذا كانت لا تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع (لا نصورها ولا نضعها في جدول)

الحالة الثانية:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] - 1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$6x(x + 1) = 0$$

$$\text{إما } 6x = 0$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 1$$

$$\text{أو } x + 1 = 0$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2$$

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$

تمرين: ادرس تغيرات التابع f في كل من

الحالات الآتية.

الحالة الأولى:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

نعدم المشتق: $f'(x) = 0$

$$6x^2 + 6x = 0$$

نشئة التابع:

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1) - (2x^2+x+7)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2} = 0$$

$$2x^2+4x-6 = 0$$

$$2(x^2+2x-3) = 0$$

$$x^2+2x-3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\text{إما } x = -3 \rightarrow f(-3) = -11$$

$$\text{أو } x = 1 \rightarrow f(1) = 5$$

تنظم جدول التغيرات وفق:

x	-∞	-1	-3	1	+∞
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	-∞	-	-11	5	+∞

الطالب الثالث:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 8}{x + \sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{x + \sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نشئة التابع:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}} = 0$$

$$\sqrt{x^2+8} - x = 0$$

$$\sqrt{x^2+8} = x$$

بشرط $x > 0$ نربع الطرفين.

$$x^2+8 = x^2 \rightarrow 8 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

تنظم جدول التغيرات وفق:

x	-∞	+∞
f'(x)	+	+
f(x)	-∞	0

نحن نحاول..

نتسابق في المهم، ونتحدى في الأفكار.

ونتقن في الإنجاز، ونحسن في العمل 🤝❤️

نخبة!! 🏆

قراءة جدول التغيرات:

إيجاد مجموعة التعريف D_f :

تحدد من حقل x وتكتب وفق:

قيم x التي تقابل الرمز $\left\{ \begin{array}{l} \text{اخر قيمة} \\ \text{اول قيمة} \end{array} \right\}$ في نهاية، في بداية $D_f =$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{شلمونة طويلة} \\ \text{الجدول} \\ \text{الجدول} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{مجال} \\ \text{مجال} \end{array} \right\}$

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد D_f

مجموعة تعريف التابع f :

x	-∞	-2	+∞
f'(x)		- 0 +	
f(x)	+∞	↘ 3 ↗	+∞

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

x	-∞	0	1	+∞
f'(x)		+ 0 -		-
f(x)	-∞	↗ 1 ↘	-∞	+∞ ↘ 0

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

x	0	1	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	-∞ ↗ +∞	-∞ ↗ 0	

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

x	-2	0	2
f'(x)		+ 0 -	
f(x)	0	↗ 2 ↘	0

$$D_f = [-2, 2]$$

إيجاد النهايات والصور:

نظر نظرة مزدوجة إلى حقلي x و $f(x)$

معاً وتحدد وفق:

$$\lim_{x \rightarrow (x \text{ القيمة الموجودة في حقل } x)} f(x) = f(x) \text{ القيمة المقابلة لها في حقل } f(x)$$

تمرين: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-∞	1	+∞
f'(x)		+ 0 -	
f(x)	0	↗ 3 ↘	-∞

١. أوجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

٢. أوجد $f(1)$

$$f(1) = 3$$

٣. أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

x	-∞	0	1	+∞
f'(x)		+ 0 -		-
f(x)	-∞	↗ 2 ↘	-∞	+∞ ↘ 0

١. أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

٢. أوجد $f(0)$

$$f(0) = 2$$

٢. أوجد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

المقاربات:

نظر نظرة مزدوجة على حقلي x و $f(x)$

المقارب الشاقولي:

إذا كان لدينا في حقل x عدد وليكن a

يقابله ∞ في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن

المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب

شاقولي في جوار ∞

المقارب الأفقي:

إذا كان لدينا في حقل x ∞ يقابلها عدد

وليكن b في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن

المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب

افقي في جوار ∞

ملخص:

x	a	∞
f'(x)		
f(x)	∞	b

* المستقيم الذي معادلته $x = a$

مقارب شاقولي في جوار ∞

* المستقيم الذي معادلته $y = b$

مقارب أفقي في جوار ∞

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد معادلة كلا

مقارب موجود.

x	0	1	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	-∞ ↗ +∞	-∞ ↗ 0	

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

ومن اليمين نحو oy^+

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار ∞

x	0	1	+∞
f'(x)	+		+
f(x)	0 ↗ +∞	-∞ ↗ 0	

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

ومن اليمين نحو oy^-

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار ∞

المقارب المائل:

نص السؤال:

هنا يوجد مقارب مائل للخط البياني في

جوار ∞ علا إجابتك، مكرر دورات..

تعميد:

المقارب الافقي والمائل مثل الضارير لا

يجتمعان معاً في نفس الجوار أي:

* وجود مقارب افقي في جوار $-\infty$ يعني

استحالة وجود مقارب مائل في جوار $-\infty$

* وجود مقارب أفقي في جوار $+\infty$ يعني استحالة وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$

فكرة الحل:

1. نتحقق من وجود مقارب أفقي في جوار ∞ .
2. نميز حالتين:
الحالة الأولى: وجود مقارب أفقي:
يعني استحالة وجود مقارب مائل

الحالة الثانية: عدم وجود مقارب أفقي:
يعني إمكانية وجود مقارب مائل

التعريف الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	5 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘ 5

1. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي وجدته
 $y = 5$ مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$ وال $+\infty$
 $x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+
2. هك يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$ لا، بسبب وجود مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

التعريف الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0 ↘	-1 ↗	$+\infty$

1. اكتب معادلة كل مقارب في حال وجوده
 $y = 0$ مقارب شاقولي في جوار ال $-\infty$
2. هك يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$ لا، بسبب وجود مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

ملاحظة: تذكر للرسم: إذا كان لدينا عدد

في حقل x يقابله عدد في حقل $f(x)$

فهذا يعني وجود نقطة حيث تكون:

- * نقطة عادية عند المجال المغلق
- * نقطة مفرغة عند المجال المفتوح

المماسات:

ننظر إلى الحقول الثلاثة:
المماس يحتاج:

1. نقطة التماس A
وتحدد من حقل x و $f(x)$ وفق:
* x_A فاصلة نقطة التماس تحدد من حقل x
* y_A ترتيب نقطة التماس يُحدد من حقل $f(x)$
2. ميل المماس m
ويُحدد من حقل $f'(x)$ وتميز:

الحالة الأولى:

إذا كان في حقل $f'(x)$ العدد صفر فهذا يعني أن الميل معدوم وبالتالي لدينا مماس أفقي معادلته:

$$y = y_A$$

أي: (العدد الموجود تحت الصفر) $y =$

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2	0	2
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0 ↗	2 ↘	0

1. اكتب معادلة المماس الأفقي.
 $y = 2$ مماس أفقي.
2. اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 0:

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 2$

ومنه النقطة $A(0,2)$

تحديد الميل: $m = 0$

نكتب المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$= 0(x - 0) + 2 = 2$$

الحالة الثانية:

إذا كان في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة (||) فهذا يعني وجود مماس شاقولي معادلته:

$$x = x_A$$

أي: (العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة) $x =$

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2	0	2
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0 ↗	2 ↘	0

- اكتب معادلة كل مماس شاقولي في حال وجوده
 $x = -2$ مماس شاقولي
 $x = 2$ مماس شاقولي

الحالة الثالثة:

إذا كان في حقل $f'(x)$ يوجد عدد مختلف عن الصفر فهذا يعني وجود مماس ميله هذا العدد وكتابه معادلته نحتاج:

* نقطة التماس A :

1. فاصلة نقطة التماس x_A هي العدد الموجود فوق m في حقل x
2. ترتيب نقطة التماس y_A هي العدد الموجود تحت m في حقل x
- * ميل المماس: من حقل $f'(x)$
- * وتكون المعادلة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	3 +
$f(x)$	0 ↘	-1 ↗	5 ↘	$+\infty$

اكتب معادلة كل مماس في حال وجوده.

$y = -1$ مماس أفقي

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنه النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$= 3(x + 1) + 5$$

$$= 3x + 3 + 5$$

$$= 3x + 8$$

الحالة الرابعة:

إذا كان لدينا في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة على يمينها وعلى يسارها أعداد مختلفة فهذا يعني وجود:

نصف مماس من اليسار ميله العدد الموجود يسار الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود

فوق الشلمونة القصيرة في حقل x

* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت

الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

نصف مماس من اليمين ميله العدد الموجود يمين الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود

فوق الشلمونة القصيرة في حقل x

* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت

الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	3 -2 -
$f(x)$	0 ↘	-1 ↗	5 ↘	0 ↘

اكتب معادلة كل مماس وجدته

$y = -1$ مماس أفقي

كتابة معادلة نصف المماس من اليسار:

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنه النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$= 3(x + 1) + 5$$

$$= 3x + 3 + 5$$

$$= 3x + 8$$

كتابة معادلة نصف المماس من اليمين:
 تحديد نقطة التماس:
 تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_B = -1$
 تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_B = 5$
 ومنه النقطة $B(-1, 5)$
 تحديد الميل: $m = -2$
 كتابة المعادلة:

$$\begin{aligned} T_1: y &= m(x - x_A) + y_A \\ &= -2(x + 1) + 5 \\ &= -2x - 2 + 5 \\ &= -2x + 3 \end{aligned}$$

ملاحظة:

ظهور الرمز شلمونة طويلة يعني عدم وجود مماس.

القيم الحدية:

تعريف:

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I فإن:
 نقول أن القيمة $M = f(c)$ قيمة كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة c ويحقق الشرط:
 $\forall x \in J \cap I; f(x) \leq f(c)$

نقول أن القيمة $m = f(d)$ قيمة صغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة d إذا وجد مجال مفتوح J يضم النقطة d ويحقق الشرط:
 $\forall x \in J \cap I; f(x) \geq f(d)$

الفاخص:

* إذا انعدم f' وغير إشارته من الموجب إلى السالب كانت $f(c)$ قيمة كبرى محلياً للتابع f
 * إذا انعدم f' وغير إشارته من السالب إلى الموجب كانت $f(d)$ قيمة صغرى محلياً للتابع f

القيم الحدية الكبرى:

x	a
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ $f(a)$ ↘

$f(a) =$ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a
$f'(x)$	+ -
$f(x)$	↗ $f(a)$ ↘

$f(a) =$ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗ $f(a)$

$f(a) =$ قيمة حدية كبرى محلياً

x	a
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘ $f(a)$ ↗

$f(a) =$ قيمة حدية كبرى محلياً

القيم الحدية الصغرى:

x	a
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ $f(a)$ ↗

$f(a) =$ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a
$f'(x)$	- +
$f(x)$	↘ $f(a)$ ↗

$f(a) =$ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘ $f(a)$

$f(a) =$ قيمة حدية صغرى محلياً

x	a
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗ $f(a)$

$f(a) =$ قيمة حدية صغرى محلياً

أنماط التمارين:

النمط الأول:

تعيين القيم الحدية:

نص السؤال:

عين القيم الحدية المحلياً مبيئاً نوعها.

التعمير الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم

الحدية محلياً:

x	-2	0	2
$f'(x)$	+ 0 -		
$f(x)$	0 ↗ 2 ↘ 0		

$f(-2) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

$f(0) = 2$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(2) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التعمير الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	- -		
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$ $+\infty$ ↘ $-\infty$		

هل توجد قيمة حدية؟

نعم، $f(0) = 0$ قيمة حدية كبرى محلياً.

النمط الثاني:

إثبات القيم الحدية:

نص السؤال:

أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية محلياً:

فكرة الحل:

1. ثبت أن f اشتقاقي على مجال I يحوي a

2. ثبت أن $f'(a) = 0$ ويغير إشارته.

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+ 0 - 0 +			
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 4 ↘ 0 ↗ $+\infty$			

1. أثبت أن $f(-1) = 4$ قيمة حدية كبرى محلياً

قيمة حدية كبرى محلياً

2. أثبت أن $f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً

قيمة حدية صغرى محلياً

ملاحظة:

عدم الرمز شلمونة طويلة لا يوجد قيم حدية.

قابلية الاشتقاق:

* وجود شلمونة قصيرة أو طويلة ضمن

الجدول يعني أن التابع غير اشتقاقي

* وجود العدد صفر أو عدد مغاير للصفر

في حقله $f'(x)$ يعني أن التابع

اشتقاقي

* تلخيص:

x			
$f'(x)$			عدد
$f(x)$			
		غير اشتقاقي	اشتقاقي

تعريف:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	- 0 + 0 -			
$f(x)$	0 ↘ -1 ↗ 5 ↘ 0			

1. هل التابع f اشتقاقي عند -3 ؟

نعم

2. هل التابع f اشتقاقي عند 1 ؟

نعم

صورة مجال:

الرمز: $f(I)$

حيث:

* I هو مجال يؤخذ من حقله x

* $f(I)$ هي صورة المجال I وتؤخذ من

حقله $f(x)$

لإيجاد صورة مجال، نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى:

التابع f متزايد على المجال I فإننا:

نصور الأطراف نحافظ على الترتيب.

التابع f متناقص على المجال I فإننا:
نصور الأطراف ونعكس الترتيب.

إذا كان التابع f متزايد ومتناقص معاً على المجال I فإننا: نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار وذلك بإغلاق المجال مرة وقتحه مرة أخرى.

- * في حال فتحنا المجالات يعني أننا حذفنا القيمة.
- * في حال أغلقنا المجالات يعني أننا كررنا قيمة.
- * ولتجنب الحذف أو التكرار فإننا مرة نغلق المجال ومرة نفتحه.
- * تكون صورة المجال I
- * هي اجتماع صور المجالات السابقة.
- * القيمة وصورتها يكون لها نفس نوع المجال

العملية تقاطع (\cap) :

هي العناصر المشتركة فقط.

العملية اجتماع (\cup) :

هي العناصر المشتركة وغير المشتركة.

التقاء مجال مفتوح مع مجال مغلق عند نفس القيمة:

- * في العملية تقاطع نأخذ المجال المفتوح
- * في العملية اجتماع نأخذ المجال المغلق

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	3	\nearrow	4	\searrow
				$+\infty$

١. أوجد $f(]-\infty, -2])$

$$f(]-\infty, -2]) =]3, 4]$$

٢. أوجد $f(]-2, 2])$

$$f(]-2, 2]) = [-1, 4[$$

٣. أوجد $f(]2, +\infty[)$

$$f(]2, +\infty[) =]-1, +\infty[$$

٤. أوجد $f(]-\infty, 2])$

$$f(]-\infty, 2]) = f(]-\infty, -2]) \cup f(]-2, 2])$$

$$=]3, 4] \cup [-1, 4[$$

$$= [-1, 4]$$

٥. أوجد $f(]-\infty, +\infty[)$

$$f(]-\infty, +\infty[) = f(]-\infty, -2]) \cup f(]-2, 2]) \cup f(]2, +\infty[)$$

$$=]3, 4] \cup [-1, 4] \cup [-1, +\infty[$$

$$= [-1, +\infty[$$

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$+$	0
			$-$
$f(x)$	$ $	$-\infty$	3
			\searrow
			0

١. أوجد $f(]0, 1])$

$$f(]0, 1]) =]-\infty, 3]$$

٢. أوجد $f(]1, +\infty[)$

$$f(]1, +\infty[) =]0, 3[$$

٣. أوجد $f(][1, +\infty[)$

$$f(][1, +\infty[) =]0, 3]$$

٤. أوجد $f(]0, +\infty[)$

$$f(]0, +\infty[) = f(]0, 1]) \cup f(]1, +\infty[)$$

$$=]-\infty, 3] \cup]0, 3[$$

$$=]-\infty, 3]$$

الرمز: (D_f)

حيث:

* تعيين D_f من حقل x كما تعلمنا سابقاً.

* وتعيين الصورة $f(D_f)$ من حقل $f(x)$

أيضاً كما تعلمنا سابقاً.

* يعني المستقر الفعلي هو تحصيل حاصل.

تأمل جداول التغيرات الآتية وعين المستقر

الفعلي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	3
			\searrow
			0

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$f(]-\infty, +\infty[)$$

$$= f(]-\infty, 1]) \cup f(]1, +\infty[)$$

$$=]-\infty, 3[\cup]0, 3]$$

x	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$-$	$ $	$-$
				0
$f(x)$	$ $	0	\searrow	$-\infty$
				$ $
				$+\infty$

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f(]0, 1[) \cup f(]1, 3]) \cup f(]3, +\infty[)$$

$$=]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[\cup]3, +\infty[$$

$$=]-\infty, +\infty[$$

x	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$+$	$ $
			$+$
$f(x)$	$ $	2	\nearrow
			$+\infty$
			$ $
			$-\infty$
			\nearrow
			0

$$D_f =]2, 5[\cup]5, +\infty[$$

$$f(]2, 5[\cup]5, +\infty[)$$

$$= f(]2, 5[) \cup f(]5, +\infty[)$$

$$=]2, +\infty[\cup]-\infty, 0[$$

$$=]-\infty, +\infty[$$

النمط الأول:

نصر السؤال:

أثبت (يعني تحتاج كتابة) أو تحقق أن

للمعادلة $f(x) = m$ عدداً (معلوم) من

الحلول على المجال I .

فكرة الحل:

* بالاعتماد على الجدول:

* نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص

كلاً على حدا دون حذف أو تكرار.

* نحدد صور المجالات السابقة.

* نتحقق من انتماء m إلى الصور السابقة.

* عدد الانتماءات هو عدد الحلول

النمط الثاني:

نصر السؤال:

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

فكرة الحل:

* ننظر إلى حقل $f(x)$ عدد انتماءات m للحقل

هو عدد الحلول لكن انتبه دون حذف أو تكرار.

* عند وجود عدد في بداية الجدول ضمن حقل

$f(x)$ أو نهايته يقابلها ∞ في حقل x يكون

هذا العدد لا ينتمي إلى الحقل.

التعريف الأول: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$ $
				$-\infty$
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	3	\searrow
				$-\infty$

أثبت أن المعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال

$$]-\infty, 0]$$

$$f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 3]$$

$$\rightarrow 1 \in]-\infty, 3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0, 1[$

$$f(]0, 1[) =]-\infty, 3[$$

$$\rightarrow 1 \in]-\infty, 3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال

$$]1, +\infty[$$

$$f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$\rightarrow 1 \in]-\infty, +\infty[$$

ومنه نجد أن المعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول.

أثبت أن المعادلة $f(x) = 3$ حلان:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال

$$]-\infty, 0]$$

$$f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 3]$$

$$\rightarrow 3 \in]-\infty, 3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0, 1[$

$$f(]0, 1[) =]-\infty, 3[$$

$$\rightarrow 3 \notin]-\infty, 3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال

$$]1, +\infty[$$

$$f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$\rightarrow 3 \in]-\infty, +\infty[$$

ومنه نجد أن المعادلة $f(x) = 3$ حلان.

التعريف الثاني:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 -	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 2 \searrow	$-\infty$

- أوجد حلول المتراجحة $f(x) > 2$
 $S =]-\infty, 1[$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 2$
 $S =]-\infty, 1[$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) < 2$
 $S =]1, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \leq 2$
 $S = [1, +\infty[$

إيجاد $\lim_{x \rightarrow a} f(f(x))$

فكرة الحل:

بالاعتماد على جدول التغيرات نوجد كلا من:

- * $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
- * $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$
- * $\lim_{x \rightarrow a} f(f(x)) = c$

تعريف: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 2 \searrow	0

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = -\infty$$

إيجاد مجموعة تعريف تابع:

أولاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x) \geq 0$

ثانياً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x) > 0$

ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

تكون مجموعة تعريف التابع g هي:

$$D_g = D_f \setminus \{f(x)\}$$

حقيقة الوصول ..

تكمّن في قوة السعي

انتبه:

عند وجود الرمز شلمونة فحصر المجالت تكون مفتوحة مهما كانت المتراجحة

التعريف الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$
 $S =]2, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$
 $S = [2, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$
 $S =]-\infty, 2[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
 $S =]-\infty, 2[$

التعريف الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		-
$f(x)$	0	\searrow -2 \nearrow	$-\infty$	$+\infty$

- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$
 $S =]-3, 1[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$
 $S = [-3, 1[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$
 $S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
 $S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

النقط الثاني: حلول المتراجحة من النمط:

b إشارة تراجم $f(x)$

فكرة الحل:

- * ننظر إلى حقل $f(x)$ ونضيف حقل وهمي (المتراجحة)
- * نحدد متى تكون محققة أو غير محققة
- * حلول المتراجحة هي المجالت من حقل x التي تقابل كلمة محققة

التعريف الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 2 \nearrow	$+\infty$

- أوجد حلول المتراجحة $f(x) > 0$
 $S =]0, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$
 $S =]0, +\infty[$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) < 0$
 $S = \emptyset$
- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$
 $S = \emptyset$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول:
التابع f مستمر ومتزايد على المجال $] -\infty, 0]$ ولدنيا:

$$f(] -\infty, 0]) =] -\infty, 3]$$

$$\rightarrow 0 \in] -\infty, 3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0, 1[$

$$f(]0, 1[) =] -\infty, 3[$$

$$\rightarrow 0 \in] -\infty, 3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1, +\infty[$ ولدنيا:

$$f(]1, +\infty[) =] -\infty, +\infty[$$

$$\rightarrow 0 \in] -\infty, +\infty[$$

ومنه نجد أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول.

التعريف الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	- 0 +	
$f(x)$	0	\searrow $-\infty$	$+\infty$	\searrow 3 \nearrow $+\infty$

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد.

التعريف الثالث:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -		-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 5 \searrow $-\infty$	$+\infty$	\searrow 2

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ثلاثة حلول.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ حلان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 7$ حل وحيد.

حلول متراجحة (قيم x):

النقط الأول: حلول المتراجحة من النمط:

0 إشارة تراجم $f'(x)$

- الحالة الأولى: $f'(x) > 0$ الحلول هي مجالت التزايد (المجالت مفتوحة)
- الحالة الثانية: $f'(x) \geq 0$ الحلول هي مجالت التزايد (المجالت مغلقة)
- الحالة الثالثة: $f'(x) < 0$ الحلول هي مجالت التناقص (المجالت مفتوحة)
- الحالة الرابعة: $f'(x) \leq 0$ الحلول هي مجالت التناقص (المجالت مغلقة)

الدورات:

التمرين الأول: دورة 2017 فصل نصفي:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرفة والمستمر على \mathbb{R} وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		3	-2	4

1. جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

2. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط

البياني C

3. $y = 3$ مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

3. هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً؟ لا ليست قيمة حدية محلياً.

4. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في \mathbb{R} حلان.

التمرين الثاني: دورة 2018 الثانية:

نجد فيما يلي جدولاً لتغيرات التابع f المعرفة على \mathbb{R}

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		2	-4	-1

1. جد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

2. اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع.

3. $y = 2$ مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حلان.

4. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f . $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التمرين الثالث: دورة 2019 الأول:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرفة على \mathbb{R} وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		3	-2	4

جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

3. $y = 3$ مقارب أفقي في جوار ال $+\infty$

دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

2. $f(-1) = -2$ قيمة حدية صغرى محلياً

احسب $f(] - 1, 2[)$

$f(] - 1, 2[) =] - 2, 4[$

التمرين الرابع: دورة 2020 الثانية:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرفة على \mathbb{R} خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		2	6	-

1. جد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. دل على القيم الحدية للتابع f مبيئاً أنواعها.

2. $f(0) = 2$ قيمة حدية صغرى محلياً.

3. $f(4) = 6$ قيمة حدية كبرى محلياً.

3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حل واحد.

4. جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$$S =]0, 4[$$

التمرين الخامس: دورة 2021 الثانية:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	0

1. جد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

واكتب معادلة المقارب الأفقي

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. $y = 0$ مقارب أفقي في جوار ال $+\infty$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حل واحد

3. دل على القيمة العلية وبيئ نوعها $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى محلياً.

4. جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$$S =]0, 1[$$

التمرين السادس: دورة 2022 الأول:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرفة على $\{1\} \cup \mathbb{R}$ خطه البياني C وفق:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		2	0	2

1. جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

2. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو

شاقولي للخط C

1. $x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

ومن اليمين نحو oy^+

2. $y = 2$ مقارب أفقي في جوار ال $+\infty$

3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حلان.

4. ما هي حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$$S =]-\infty, 1[\cup]1, 2[$$

التمرين السابع: دورة 2023 الثانية:

ليكن لدينا جدول تغيرات التابع f المعرفة على $]-\infty, 3[$ والمطلوب:

x	$-\infty$	0	1	3
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		5	0	2

1. جد $f(3)$ و $f(]-\infty, 3])$

$$f(]-\infty, 3]) = [-1, 5[$$

$$f(3) = -1$$

2. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول.

3. حدّد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$$S =]0, 1[$$

4. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C_f

5. $y = -\infty$ مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

5. اكتب القيم الحدية للتابع f مبيئاً نوع كل منها

1. $f(0) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

2. $f(1) = 2$ قيمة حدية كبرى محلياً.

3. $f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

نجد جانباً جدول

تغيرات التابع f .

والمطلوب:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	1

1. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حل واحد.

2. ما عدد القيم الحدية محلياً للتابع f

1. $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

3. اكتب معادلة مماس منحنى التابع عند

نقطة فاصلتها $x = 1$

$y = 1$ مماس أفقي.

وَيُدهشك الله بما تملئته ..

بعد أن حسبتة فُستحيلاً



التعريف الثاني:

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	3	$+$	$+$	3

- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C
- $y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$
 $x = -1$ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو oy^+
- $x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+
- هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C لا
- هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟ لا
- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]-1,1[$
- التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]-1,1[$
 $f(]-1,1[) =]-\infty, +\infty[$
 $\rightarrow 0 \in]-\infty, +\infty[$
- ومنهُ يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]-1,1[$.

مبرهنة القيمة الوسطى:

التعريف الثالث:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2	\searrow	0	\nearrow

1. جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$$

2. اذكر قيمة جدية للتابع f ، وبيّن نوعها.

$$f(2) = 0 \text{ قيمة جدية صغرى محلياً.}$$

3. هل $f(5) = 4$ قيمة جدية للتابع؟ لا

4. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

$$y = 2 \text{ مقارب أفقي في جوار الـ } -\infty$$

$$y = 6 \text{ مقارب أفقي في جوار الـ } +\infty$$

5. اكتب مجموعة تعريف التابع g

$$g(x) = \ln(f(x))$$

$$D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

طلب إضافي:

اكتب مجموعة تعريف التابع $h(x) = \sqrt{f(x)}$

$$D_h = \mathbb{R}$$

التعريف الرابع:

نجد فيما يأتي جدولاً لتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	1	\searrow	0	\searrow

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

أفقي للخط البياني C

$$y = 1 \text{ مقارب أفقي في جوار الـ } -\infty$$

$$y = -3 \text{ مقارب أفقي في جوار الـ } +\infty$$

$$x = -2 \text{ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو } oy^-$$

$$oy^- \text{ نحو}$$

2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط C لا

3. هل يمكنك رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه؟ لا

4. هل f اشتقاقي عند الـ 3 ؟ لا

5. عين القيم الحدية للتابع f

$$f(3) = 0 \text{ قيمة جدية كبرى محلياً.}$$

نص السؤال

أثبت أن للمعادلة

$$f(x) = 0 \text{ حلاً وحيداً على المجال }]a, b[\text{ حيث } I \text{ مجال جزئي من مجموعة التعريف.}$$

شروط التطبيق

1. أن تكون قاعدة الربط $f(x)$ معلومة.

2. أن تكون المعادلة $f(x)$ تساوي الصفر حصراً.

3. أن يكون عدد الحلول وحيداً.

4. أن يوجد في نص السؤال: حلاً وحيداً على المجال $]-a, b[$ حيث: I معطى، ولا يهم إن كانت المجالات مغلقة أو مفتوحة

فكرة الحل

1. نثبت أن f مستمر على المجال $]-a, b[$

2. نثبت أن f مُطرِد على المجال I

3. نوجد $f(a)$

4. نوجد $f(b)$

5. نوجد $f(a) \cdot f(b)$ ونميز:

☞ إذا كان: $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن: للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]-a, b[$

ملاحظة: في حال اختلال أحد الشروط السابقة فإننا ندرس تغيرات التابع f ونتابع كما ورد معنا في فكرة إثبات حلول المعادلة

$f(x) = m$ في قراءة جدول التغيرات

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد على المجال $]-2,3[$.

الحل:

التابع f مستمر ومطرِد على المجال $]-2,3[$ ولدنيا:

$$f(2) = -1$$

$$f(3) = 8$$

$$f(2) \times f(3) = -8 < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-2,3[$

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$$

أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد على المجال $]-1,2[$.

الحل:

التابع f مستمر ومطرِد على المجال $]-1,2[$ ولدنيا:

$$f(1) = -1$$

$$f(2) = 4$$

$$f(1) \times f(2) = -4 < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-1,2[$

التعريف الثالث:

أثبت أن للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً a في

$$\mathbb{R} \text{ ثم بين أن } a \in]-1, 0[$$

الحل:

يجب دراسة التغيرات للاختلال أحد شروط مبرهنة القيمة الوسطى.

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل.

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow $+\infty$

لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty, +\infty[$ ومنه:

$$f(]-\infty, +\infty[)$$

$$=]-\infty, +\infty[$$

$$0 \in]-\infty, +\infty[$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في \mathbb{R} .

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال

$]-1, 0[$ حيث:

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) \cdot f(0) < 0$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق:

$$\alpha \in]-1, 0[$$

التعريف الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على المجال

$I = [2, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{x-2} - 4$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

حصر حلول معادلة:

أحياناً يكون المطلوب أثبت أن للمعادلة

$$f(x) = 0 \text{ عدداً من الحلول ثم احصر كلاً منها في مجال لا يزيد طوله على } 10^{-1}$$

1. القسم الأول من السؤال تم سابقاً.

2. القسم الثاني من السؤال: الحصر:

الخطوات:

* نبدأ بتقسيم المجال وفق $[a, a + 10^{-1}]$ ثم نصور الأطراف ونميز:

- جداء الصور سالب فإننا نتوقف ويكون المجال المطلوب.

- جداء الصور ليس سالب فإننا نتنقل إلى المجال $[a + 10^{-1}, a + 10^{-1} + 10^{-1}]$ ثم نصور الأطراف ونتابع كما سبق.

التعريف الأول:

ليكن f التابع المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

الحل:

$$Df =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} :

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\text{إما } x = 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$\text{أو } x = -1 \Rightarrow f(-1) = 7$$

2. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً على I ثم جد هذا الحل جبرياً.

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على I ولدينا:

$$f(2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على المجال $]2, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}}$$

نعلم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}} = 0$$

$$2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{x-2} = -1$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة الحل والمشتق $f'(x)$ لا يتعدى

ننظم جدول تغيرات التابع f :

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	$+\infty$

الطلب الثاني:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال I ولدينا

$$f(I) =]-2, +\infty[$$

$$0 \in]-2, +\infty[$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً على I

الحل الجبري للمعادلة $f(x) = 0$:

لدينا:

$$f(x) = 0$$

$$x + \sqrt{x-2} - 4 = 0$$

$$\sqrt{x-2} = 4 - x$$

$$x < 4 \Leftrightarrow 4 - x > 0$$

نربع الطرفين:

$$x - 2 = (4 - x)^2$$

$$x - 2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 8x - x + 16 + 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x - 6)(x - 3) = 0$$

$$\text{إما } x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x < 4 \text{ مرفوض لأن: } x < 4$$

$$\text{أو } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x < 4 \text{ مقبول لأن: } x < 4$$

الحصر:

x	$f(x)$
-3	-13
-2,9	-10,689
-2,8	-8,552
-2,7	-6,582
-2,6	-4,776
-2,5	-3,125
-2,4	-1,624
-2,3	-0,267
-2,2	0,952
-2,1	
-2	

نلاحظ أن: $f(-2,3) \times f(-2,2) < 0$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على

المجال: $]-2,3, -2,2[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	7	\searrow $+\infty$

الطلب الثاني:

تحقق أن للمعادلة $f(x)$ جذراً وحيداً يقع بين

-3 و -2 احصر هذا الجذر في مجال لا

يزيد طوله على 10^{-1}

الحل

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال

$]-3, -2[$ ولدينا:

$$f(-3) = -13$$

$$f(-2) = 3$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على

المجال $]-3, -2[$

التابع الحوري	التابع الفردي	مركز التناظر	التابع الزوجي	محور التناظر	الفكرة الصفة التناظرية
	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى المبدأ	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى نقطة $I(a, b)$	الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.	الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور شاقولي معادلته $x = a$	
أثبت أن التابع f دوري	* أثبت أن التابع f فردي * أثبت أن لخط C مركز تناظر * ادرس فردية التابع	الصيغة الأولى: أثبت أن النقطة $I(a, b)$ هي مركز تناظر للخط البياني الصيغة الثانية: أثبت أن الخط البياني متناظر بالنسبة إلى النقطة $I(a, b)$	* ادرس زوجية التابع f * أثبت أن التابع f زوجي * أثبت أن لخط C محور تناظر	الصيغة الأولى: أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو محور تناظر الصيغة الثانية: أثبت أن الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = a$	نص السؤال
يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيما كان $x \in D_f$ فإن: $x + T \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(x + T) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيما كان $x \in D_f$ فإن: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = -f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيما كان $x \in D_f$ فإن: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a - x) + f(x) = 2b$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيما كانت $x \in D_f$ فإن: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيما كان $x \in D_f$ فإن: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a - x) = f(x)$	طريقة الإجابة

التعريف الخامس:

ليكن التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

أثبت أن النقطة $I(1, 4)$

هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = 1 \Rightarrow 2a = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow 2b = 8$$

الشرط الأول:

أيما كان $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ فإن: $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ الإثبات..

$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
 $-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
 $-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(2a - x) + f(x)$$

$$= \frac{(2-x)^2 + 2(2-x) + 1}{2-x-1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$$

$$= \frac{8x + 8}{-x + 1} + \frac{8(-x + 1)}{-x + 1} = 8 + 8 = 16 = 2b$$

إذا $I(1, 4)$ مركز التناظر البياني.

التعريف السادس:

ليكن التابع f المعرفة على \mathbb{R} :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

أثبت أن التابع f فردي

ما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الشرط الأول:

$x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 1}}$$

$$= -x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = -f(x) = l_2$$

ومنه التابع f فردي.

الصفة التناظرية:

الخط البياني متناظر بنسبة إلى المبدأ.

التعريف الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$$

أثبت أن لخط البياني C محور تناظر.

الشرط الأول:

أيما كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \sqrt{3 + (-x)^2}$$

$$= \sqrt{3 + x^2} = f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا لخط البياني C محور تناظر.

التعريف الرابع:

ليكن التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

أثبت أن النقطة $I(-1, 2)$

هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = -1 \Rightarrow 2a = -2$$

$$b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

الشرط الأول:

أيما كان $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ فإن: $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ الإثبات..

$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
 $-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$
الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(-2 - x) + f(x)$$

$$= \frac{2(-2-x) - 1}{-2-x+1} + \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{-4 - 2x - 1}{-1 - x} + \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{-5 - 2x - 2x + 1}{-1 - x} = \frac{-4(-x - 1)}{-x - 1} = 4 = 2b = l_2$$

إذا $I(-1, 2)$ هي مركز تناظر للخط البياني.

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 1$$

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$

هو محور تناظر للخط البياني C_f

$$a = \frac{5}{6} \Rightarrow 2a = \frac{5}{3}$$

الشرط الأول:

أيما كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $3 - x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) = f(x)$$

$$l_1 = f(2a - x) = f\left(\frac{5}{3} - x\right)$$

$$= -3\left(\frac{5}{3} - x\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3} - x\right) - 1$$

$$= -3\left(\frac{25}{9} - \frac{10}{3}x + x^2\right) + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -\frac{25}{3} + 10x - 3x^2 + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -3x^2 + 5x - 1 = f(x) = l_2$$

ومنه الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$.

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5x^2 + 3}}$$

أثبت أن التابع f زوجي.

وما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الحل:

الشرط الأول:

أيما كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{5(-x)^2 + 3}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{5x^2 + 3}} = f(x) = l_2$$

ومنه التابع f زوجي.

الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

التعريف السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

أثبت أن الخط C مركز تناظر.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

محققاً وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1}$$

$$= \frac{-x}{x^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

$$= -f(x) = l_2$$

ومنهً للخط البياني مركز تناظر.

التعريف الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$$

تحقق أن f دوري و دورته 2π دور له.

$$T = 2\pi$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + T \in \mathbb{R}$

محققاً وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$l_1 = f(x + T) = f(x + 2\pi)$$

$$= 2 \sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi))$$

$$= 2 \sin(x) + \sin(2x)$$

$$= f(x) = l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو 2π

التعريف التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x) = \tan x$$

أثبت أن التابع f دوري ودوره π

$$T = \pi$$

الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$

$$x + T \in D_f$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x + \pi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k + \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x + \pi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + (k + 1)\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x + \pi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$l_1 = f(x + T) = f(x + \pi)$$

$$= \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)}$$

$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = f(x) = l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو π .

تحديد الثوابت:

الخط	الأول	الثاني
المعطى	يكون المعطى هو علاقيتين متكافئتين إحداها تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد هذه الثوابت	يكون المعطى هو تابع f علاقة واحدة تحوي ثوابت مع بعض المعطيات يساوي عدد الثوابت والمطلوب إيجاد الثوابت
فكرة الحل	- نحول إحدى العلاقتين إلى شكل العلاقة الثانية وفق استخدام (القسمية الإقليدية النشر - توحيد المقامات) - نقارن بين العلاقتين ونحدد الثوابت	- ترجمة المعطيات. - التعويض في الترجمة للحصول على معادلات. - حل المعادلات للحصول على ثوابت

المعطيات وترجمتها:

الخط	المعطى	ترجمته
الأول	الخط البياني يمر من النقطة $A(x_A, y_A)$	$f(x_A) = y_A$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m (حيث الميل إما معلوم أو يحسب) في النقطة التي فاصلتها x_A	$f'(x_A) = m$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m في النقطة $A(x_A, y_A)$	$f(x_A) = y_A, f'(x_A) = m$
	التابع قيمة حدية عند: x_A	$f'(x_A) = 0$
الثاني	التابع قيمة حدية في النقطة $A(x_A, y_A)$	$f(x_A) = y_A$ $f'(x_A) = 0$
	أو التابع قيمة حدية قيمتها y_A يبلغها عند x_A أو التابع قيمة حدية عند x_A هي y_A	
	المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب شاقولي للخط C	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
	المستقيم الذي معادلته $y = b$ مقارب أفقي للخط C	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
	المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل في جوار ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - y_\Delta = 0$

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = x^4 - 19x^2 + 52x - 40$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + 4x + 2a)$$

الحل:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + 4x + 2a)$$

$$= x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + ax^3 + 4ax^2$$

$$+ 2a^2x + bx^2 + 4bx^2 + 2ab$$

$$= x^4 + (4+a)x^3 + (6a+b)x^2 + (2a^2+4b)x + 2ab$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = x^4 - 19x^2 + 52x - 40$$

الطريقة الثانية: "النشر"

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + ax + b)$$

$$= x^3 + ax^2 + bx - 2x^2 - 2ax - 2b$$

$$= x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 16 \quad \text{بالمقارنة مع:}$$

$$a - 2 = 2 \dots (1)$$

$$b - 2a = 0 \dots (2)$$

$$-2b = -16 \dots (3)$$

$$\text{من (1) نجد: } a = 4$$

$$\text{من (3) نجد: } b = 8$$

$$\text{نتحقق في (2):}$$

$$8 - 2(4) = 0$$

محققة

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 16$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + ax + b)$$

الطريقة الأولى: "القسمية الإقليدية"

بالقسمية الإقليدية نجد أن:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 8)$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + ax + b)$$

$$\text{نجد أن: } a = 4, b = 8$$

نجد:

$$4 + a = 0 \dots (1)$$

$$6a + b = -19 \dots (2)$$

$$2a^2 + 4b = 52 \dots (3)$$

$$2ab = -40 \dots (4)$$

من (1) نجد:

$$a = -4$$

نعوض في (2):

$$b = 5 \leftarrow -24 + b = -19$$

نتحقق في (3):

$$2(-4)^2 + 4(5) = 52$$

$$32 + 20 = 52$$

محقة

نتحقق في (4):

$$2(-4)(5) = -40$$

$$-40 = -40$$

محقة

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التعريف الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$$

عين a و b و $g(x)$ التي تحقق العلاقة:

$$f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{x^2 + 2x}$$

بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4x + 1}{x^2 + 2x}$$

بالمقارنة نجد أن:

$$a = 1, \quad b = 2$$

$$g(x) = 4x + 1$$

التعريف الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

أوجد العددين a و b التي تحقق:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{(a+b)x + a-b}{x^2 - 1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

نجد:

$$a + b = 2 \dots (1)$$

$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 2 \rightarrow a = 1$$

نعوض في (2): $b = 1$

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التعريف الخامس:

ليكن لدينا التابع المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

الطلب الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f

نعدم المقام:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\text{إما } x = 2, \text{ أو } x = -1$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

الطلب الثاني:

أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

أياً يكن x من D_f

الحل:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - ax - 2a + bx - 2b + cx + c}{x^2 - x - 2}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

نجد:

$$a = 3 \dots (1)$$

$$-a + b + c = 6 \dots (2)$$

$$-2a - 2b + c = 0 \dots (3)$$

من (1) نجد: $a = 3$

نعوض في (2) و (3):

$$b + c = 9 \dots (2)'$$

$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نضرب (2)' بالعدد (2):

$$2b + 2c = 18 \dots (2)''$$

$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نجمع (2)'' و (3)':

$$3c = 24 \Rightarrow c = 8$$

نعوض في (3):

$$-2b + 8 = 6$$

$$-2b = -2$$

$$\Rightarrow b = -1$$

الطلب الثالث:

ادرس نهاية f عند حلول المجالات الثلاثة

التي تؤلف D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{24}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{24}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

التعريف السادس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - x^2 + ax$$

الطلب الأول:

عين العدد الحقيقي a ليمر الخط البياني من

النقطة $A(2,1)$

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(2,1)$

فإن:

$$f(2) = 1$$

$$8 - 4 + 2a = 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow 2a = -3$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

الطلب الثاني:

عين العدد الحقيقي a ليقتل الخط البياني

مماساً ميله $m = 3$ في النقطة التي

فاصلتها $x = -1$

الحل:

بما أن الخط البياني يقتل مماساً ميله $m =$

3 في النقطة التي فاصلتها $x = -1$ فإن:

$$f'(-1) = 3$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$

$$f'(-1) = 3$$

عدنا..

$$3 + 2 + a = 3$$

$$5 + a = 3$$

$$a = -2$$

الطلب الثالث:

عين العدد الحقيقي a ليكون التابع f قيمة

حدية محلياً عند $x = 1$

الحل:

بما أن التابع f قيمة حدية عند $x = 1$ فإن:

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$

$$3 - 2 + a = 0$$

$$1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

التعريف السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R}^* وفق:

$$f(x) = ax + b - \frac{6}{x}$$

عين الأعداد a و b ليمر الخط البياني من

النقطة $A(2,0)$ ويقتل مماساً في A

معادلته: $\Delta: y - x + 2 = 0$

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(2,0)$ فإن:

$$f(2) = 0$$

$$2a + b - 3 = 0 \dots (1)$$

وبما أن الخط البياني يقتل مماساً يوازي Δ

في النقطة $A(2,0)$ فإن:

$$f'(2) = 1$$

سنعود بعد قليلا..

$$f'(x) = a + \frac{6}{x^2}$$

عدنا..

$$f'(2) = 1$$

$$a + \frac{6}{4} = 1$$

$$a = -\frac{1}{2} \dots (2)$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ نجد : (2) من}$$

نعوض في (1) :

$$2\left(-\frac{1}{2}\right) + b - 3 = 0$$

$$-1 + b - 3 = 0 \Rightarrow b = 4$$

التمرين الثامن:

a و b عددان حقيقيان و C هو الخط

البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

هنا يمكن تعيين a و b لكي يقبل C مماساً

أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منة:

الحل:

بما أن التابع f يمر من $A(1,2)$ فإن:

$$f(1) = 2$$

$$a + b + 1 = 2$$

$$a + b = 1 \dots (1)$$

وبما أن الخط البياني يقبل مماساً أفقياً فإن:

$$f'(1) = 0$$

سنعود بعد قليلا..

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

عدنا..

$$f'(1) = 0$$

$$3a + 2b = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة 1 ب (-2):

$$-2a - 2b = -2 \dots (1)'$$

بجمع (1) و 2 نجد:

$$a = -2$$

نعوض في (1) :

$$-2 + b = 1$$

$$\Rightarrow b = 3$$

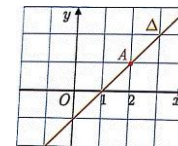
التمرين التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع

f المعرفة على $[-2,4]$

$$\text{وفق: } f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$$

الطالب الأول:



عين a و b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم

في الشكل المجاور مماس للخط C في

النقطة A .

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من A فإن:

$$f(2) = 1$$

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإن:

$$f'(-1) = 0$$

سنعود بعد قليلا...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$$

عدنا...

$$f'(-1) = 0$$

$$3a - b - 1 = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -1

$$-a + b - 1 = 0 \dots (1)'$$

$$3a - b - 1 = 0 \dots (2)$$

بجمع (1)' و (2) نجد:

$$a = 1$$

نعوض في (2) :

$$3 - b - 1 = 0$$

$$2 - b = 0$$

$$b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

التمرين الحادي عشر:

ليكن لدينا التابع f المعطى وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$$

عين a و b عددان حقيقيان إذا علمت أن

التابع f يقبل قيمة حدية قيمتها -1

ويبلغها عند -2

الحل:

بما أن التابع f قيمة حدية قيمتها -1

ويبلغها عند -2 فإن:

$$f(-2) = -1$$

$$\frac{4 - 2a + b}{-2 + 1} = -1$$

$$2a - b = 3 \dots (1)$$

$$f'(-2) = 0$$

سنعود بعد قليلا...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)((x+1) - (x^2+ax+b))}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - a - b}{(x+1)^2}$$

عدنا...

$$f'(-2) = 0$$

$$a - b = 0 \dots (2)$$

نضرب (1) بالعدد (-1):

$$-2a + b = -3 \dots (1)'$$

$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1)' و (2) نجد أن:

$$a = 3$$

نعوض في (2) :

$$3 - b = 0$$

$$b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

$$\frac{2a + b}{5} = 1$$

$$2a + b = 5 \dots (1)$$

وبما أن للخط البياني مماس Δ في A فإن:

$$f'(2) = m_{\Delta}$$

سنعود بعد قليلا...

نوجد m_{Δ} :

إن $A(2,1)$ و $B(1,0)$ من Δ فإن:

$$m_{\Delta} = \frac{1-0}{2-1} = 1$$

$$\Rightarrow m_{\Delta} = 1$$

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2 + 1)^2}$$

عدنا...

$$f'(2) = 1$$

$$-3a - 4b = 25 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد 4 :

$$8a + 4b = 2 \dots (1)'$$

$$-3a - 4b = 25 \dots (2)$$

بجمع (1)' و (2) :

$$5a = 45$$

$$\Rightarrow a = 9$$

الطالب الثاني:

تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع

مضمون النص.

نعوض في (1) :

$$18 + b = 5 \Rightarrow b = -13$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9x - 13}{x^2 + 1}$$

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان نهدف إلى البحث

عن قيم a و b بحيث يتحقق الشرطان

الآتيان:

* $f(-1)$ قيمة حدية للتابع

* هذه القيمة الحدية محلياً معدومة

الطالب الأول:

لماذا $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$

الحل:

* بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإن:

$$f'(-1) = 0$$

* بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معدومة

$$f(-1) = 0$$

الطالب الثاني:

عين قيمة كل من a و b .

الحل:

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معلومة فإن:

$$f(-1) = 0$$

$$a - b + 1 = 0 \dots (1)$$

التعريف الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني التابع f المعروف بالعلامة:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخصائص الآتية محققة.

* المستقيم الشاقولي الذي معادلته:

$$x = 3 \text{ مقارب للخط } C$$

* المستقيم المائل الذي معادلته

$$y = 2x - 5 \text{ مقارب للخط } C$$

جوار $+\infty$ و $-\infty$

* تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C

الحل:

بما أن $x = 3$ مقارب للخط C فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3x + b + \frac{c}{3-d}$$

تكون $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ هي ∞ إذا تحقق:

$$3-d=0 \Rightarrow d=3$$

بما أن: $y = 2x - 5$ مقارب مائل للخط C فإن:

جوار ∞ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0$$

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(ax + b + \frac{c}{x-3} - (2x-5) \right)$$

تكون:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0 \text{ هي إذا تحقق:}$$

$$ax + b = 2x - 5$$

وهذا يكافئ أن:

$$a = 2$$

$$b = -5$$

بما أن النقطة A تنتمي الخط البياني فإن:

$$f(1) = 2$$

$$2(1) - 5 + \frac{c}{1-3} = 2$$

$$-3 + \frac{c}{-2} = 2$$

$$\frac{c}{-2} = 5$$

رسم الخطوط البيانية:

نرسم المقاربات في حال وجودها "حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك" ونرسم المماسات "عند الطلب" وفق: أفقي أو شاقولي "فوراً", مائل "يحتاج نقطتين" نحدد القيم الحديثة

نحدد نقطة التقاطع مع محور الترتيب ونميز:

$$0 \in D_f \text{ إذا يوجد نقطة تقاطع مع محور الترتيب وفق } (0, f(0))$$

$0 \notin D_f$ إذا لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الترتيب.

نحدد نقطة التقاطع مع محور الفواصل ونميز:

حقل $0 \in f(x)$ يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل ولتحديد هذه النقاط نحل المعادلة $f(x) = 0$ وتكون النقاط $(0, \text{حل المعادلة})$

حقل $0 \notin f(x)$ لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل.

$$c = -10$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}$$

رسم المستقيمات والخطوط البيانية:

أولاً: رسم المستقيمات:

نميز ثلاث حالات حسب معادلة المستقيم:

المستقيم معادلته من الشكل $x = a$:

هذا مستقيم شاقولي ولرسمه نذهب إلى

النقطة التي فاصلتها a ونرسم مستقيم

شاقولي يوازي محور الترتيب.

المستقيم معادلته من الشكل $y = b$:

هذا مستقيم أفقي ولرسمه نذهب إلى

النقطة التي ترتيبيها b ونرسم مستقيم

أفقي يوازي محور الفواصل.

المستقيم الذي معادلته تحوي x و y :

هذا مستقيم مائل ولرسمه فإننا نأخذ

نقطتان اختياريتان وذلك بفرض قيم x

وتعويضها في المعادلة فنحصل على قيم y

ومنهن نصل على النقاط المطلوبة وفق:

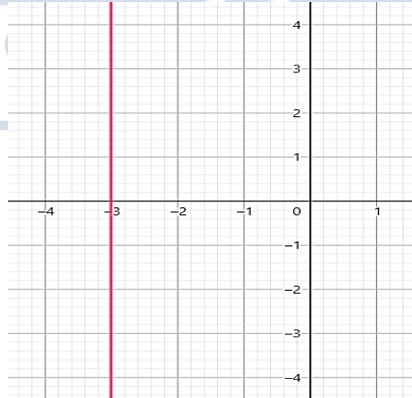
المستقيم المراد كتابة معادلته	
قيم كيفية	x
تعويض القيم بالمعادلة	y
النقطة	(,)

ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم.

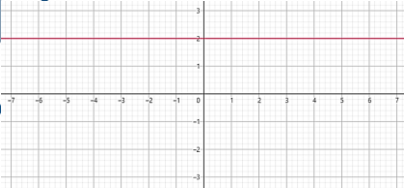
تمرين:

ارسم كلاً من المستقيمات الآتية:

$$\Delta_1 \text{ الذي معادلته } x = -3$$

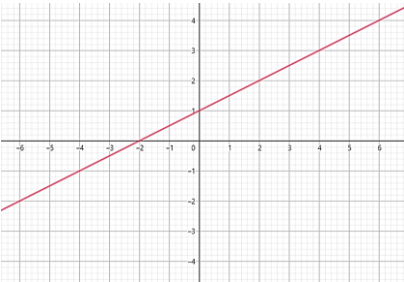


$$\Delta_2 \text{ الذي معادلته } y = 2$$



$$\Delta_3 \text{ الذي معادلته } y = \frac{1}{2}x + 1$$

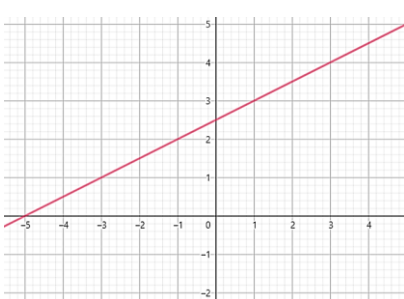
$y = \frac{1}{2}x + 1$		
x	0	2
y	1	2
النقطة	(0,1)	(2,2)



$$\Delta_4 \text{ الذي معادلته } x - 2y + 5 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$		
x	0	1
y	$\frac{5}{2}$	3
النقطة	$(0, \frac{5}{2})$	(1,3)



نرسم المقاربات في حال وجودها "حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك" ونرسم المماسات "عند الطلب" وفق: أفقي أو شاقولي "فوراً", مائل "يحتاج نقطتين" نحدد القيم الحديثة

نحدد نقطة التقاطع مع محور الترتيب ونميز:

$$0 \in D_f \text{ إذا يوجد نقطة تقاطع مع محور الترتيب وفق } (0, f(0))$$

$0 \notin D_f$ إذا لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الترتيب.

نحدد نقطة التقاطع مع محور الفواصل ونميز:

حقل $0 \in f(x)$ يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل ولتحديد هذه النقاط نحل المعادلة $f(x) = 0$ وتكون النقاط $(0, \text{حل المعادلة})$

حقل $0 \notin f(x)$ لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل.

x	عدد	∞	∞	عدد
$f(x)$	∞	عدد	∞	عدد
المعنى الهندسي	الخط البياني عند المقارب الشاقولي	الخط البياني عند المقارب الأفقي	الخط البياني يكون في أحد الأرباع أو عند المقارب المائل	الخط البياني يكون عند نقطة "مفرغة أو مظلومة"

ملاحظة:

أثناء الرسم اتبه ل حركة المماس - حركة المقارب - الصفات التناظرية - التزايد والتناقص. الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب ف يصطفوا.

عند وجود طلب أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $[a, b]$ قبل طلب الرسم فإن الخط البياني يقطع محور الفواصل بين a و b

تمرين:

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم خطه البياني:

$f(x) = x^2 - 4$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

الحل:

$$f(x) = x^2 - 4$$

التابع f معرف ومستمر على \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ومشتقه:

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \in D_f \Rightarrow f(0) = -4$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-4	$+\infty$

التحضير للرسم...

لا يوجد مقاربات؟

بطريقة ما ستدرك وتيقن أن كلًا اختيارات الله صالحة لك حتى وإن كنت لا تفهم كل أسبابه



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x = 3$ مقارب شاقولي من اليمين

نحو oy^+ ومن اليسار نحو oy^-

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-3)^3}$$

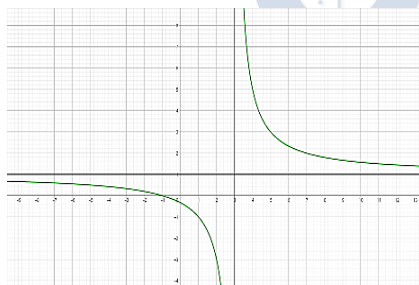
مستحيلة الحل

$$f'(x) = 0$$

$$-4 \neq 0$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	1	$-\infty$	$+\infty$

الرسم:



نقاط التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: نلاحظ أن:

$$0 \in D_f$$

$$\Rightarrow (0, f(0)) \Rightarrow (0, -4)$$

مع محور الفواصل:

نحل المعادلة:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

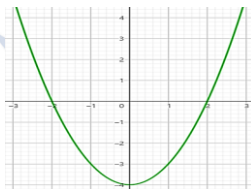
$$x^2 = 4$$

$$\text{إما } x = 2 \Rightarrow (2, 0)$$

$$\text{أو } x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

$$f(0) = -4 \text{ قيمة حدية صغرى.}$$

الرسم:



$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

التابع f معرف مستمر على $\mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty, -\infty$

استنتاج رسم الخطوط البيانية:

نص السؤال	فكرة الحل
يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتاج رسم الخط البياني C_g التابع g حيث: $g(x) = \square$	نكتب التابع $g(x)$ بدلالة التابع $f(x)$ ونميز الحالات:
	تعليها
	الحالة
$g(x) = f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى محور الترتيب
$g(x) = -f(x)$	C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = -f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى المبدأ
$g(x) = f(x) + \alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الترتيب نحو الأعلى بمقدار α
$g(x) = f(x) - \alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الترتيب نحو الأسفل بمقدار α
$g(x) = f(x + \alpha)$	C_g ينتج عن C_f انسحابه على محور الفواصل نحو اليسار بمقدار α
$g(x) = f(x - \alpha)$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الفواصل نحو اليمين بمقدار α
$g(x) = f(x) $	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات الترتيب الموجبة وبأخذ الناطر ذات الترتيب السالبة إلى محور الفواصل
$g(x) = f x $	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات الفواصل الموجبة. وبأخذ الناطر ذات الفواصل السالبة بالنسبة إلى محور الترتيب
$g(x) = \alpha f(x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على فواصل النقاط وضرب ترتيب النقاط بالعدد α
$g(x) = f(\alpha \cdot x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على ترتيب النقاط وضرب فواصل النقاط بالعدد α

نص السؤال

يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتاج رسم الخط البياني C_g التابع g حيث g هو التقابل العكسي للتابع f

C_g نظير C_f بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$ (العصف للربعين الأول والثالث)

فكرة الحل

* التعليق يكفي أو الرسم.

* ملاحظة: أولوية التفكير:

- الحالات التي تأتي كما هي

- الحالات التي تحتاج إلى إصلاح

- الحالات التي تحتاج إلى تجريب

* عند انتهاء حلول الأرض فالأمر متروك لتجريب أول ثلاث حالات وعلى مسؤولية أ. خالد

تحذير: في طلب استنتاج رسم الخط البياني أترك الطالب دون حل ولا تفكر في دراسة تغيراته ثم رسمه

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

الطالب الأول:

استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع:

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

الحل:

الطريقة أولى:

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

$$= -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

 C_g نظيرة C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

الطريقة الثانية:

نلاحظ أن:

$$g(x) = f(-x)$$

 C_g نظيرة C_f بالنسبة لمحور الترتيب

الطالب الثاني:

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع:

$$k(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$k(x) = f(x) + 2$$

 C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور الترتيب

نحو الأعلى بمقدار 2

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f معرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع

حيث:

$$k(x) = x^3 - 3x - 4$$

$$k(x) = x^3 - 3x + 1 - 4 - 1$$

$$k(x) = f(x) - 5$$

 C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور الترتيب

نحو الأسفل بمقدار 5

هذا الوقت سيمضي، لا تدعه يمر دون علامة نجاح أو بصمة كفاج والمزيد من



المناقشة البيانية:

نص السؤال:

* ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$ * ناقش بيانياً قابلية المعادلة $f(x) = m$

للحل.

فكرة الحل:

* نضع المسطرة أسفل المعلم بالتوازي

مع محور الفواصل xx' "يعني من y' "

وبشكل أفقي نمشي "

* نحرك المسطرة نحو الأعلى ونبحث عن عدد

نقاط تقاطع المسطرة مع C_f في كل مرة.

* كلما تغيرت عدد نقاط التقاطع نتوقف لنناقش

* وهكذا تتم المناقشة.

ملاحظة:

قد تكون المعادلة غير معزولة فيها الوسيط

(الوسيط بطرف والتابع f بطرف آخر) لهيك:

أول الشيء نغزل الوسيط ونكمل بالمناقشة.

تنويه:

في حال ما عرفت تعزل الوسيط m

فاستخدم أسلوب اجدها واكتب المعادلة

فوراً $f(x) = m$ ثم ابدأ بالمناقشة.

التعريف الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بهاثم حدد القيم الحدية للتابع f ٢. عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي

تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

٣. أثبت أن C يقبل مقارباً مائلاً اكتب

معادلته وادرس وضعه النسبي مع

الخط البياني C ٤. ارسم ما وجدته من مقاربات لـ C ثمارسم C ٥. ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m عدد

حلول المعادلة:

$$x^2 - (m + 5)x + 3m + 7 = 0$$

الحل:

الطالب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال

$$D_f =] - \infty, 3[\cup] 3, +\infty [$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مقارب شاقوليللخط البياني C من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مقارب شاقوليللخط البياني C من اليمين نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على

$$] - \infty, 1[\cup] 3, +\infty [\text{ ومشتقه:}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 3) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 5x + 15 - x^2 + 5x - 7}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$

$$\text{إما } x - 4 = 0$$

$$x = 4 \in D_f$$

$$f(4) = 3$$

$$\text{أو } x - 2 = 0$$

$$x = 2 \in D_f$$

$$f(2) = -1$$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$+$	$+\infty$

الطالب الثاني:

لدينا:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

بالقسمة الاقليدية نجد أن:

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} = x - 2 + \frac{1}{x - 3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4(x-1) - 8x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4x - 4 - 8x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x - 4}{(x-1)^3}$$

ندعم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-4x - 4}{(x-1)^2} = 0$$

$$-4x - 4 = 0$$

$$4x = -4$$

$$x = -1 \in D_f$$

$$f(-1) = -1$$

رسم الجدول:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	0	\searrow	\nearrow	0

القيمة الحدية ونوعها:

لدينا $f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى محلياً

الطالب الثاني:

المقارب الأفقي Δ :

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$ و $-\infty$ الوضع النسبي بين Δ و C :
نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 0$$

$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

ندعم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{4x}{(x-1)^2} = 0$$

$$4x = 0$$

$$x = 0 \in D_f$$

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	$ $	Δ فوق C	$ $

يشترك الخط البياني C مع المقارب الأفقي $y = 0$ بالنقطة $(0,0)$.

الطالب الثالث:

الوضع النسبي بين C ومنصف الربع الأول: منصف الربع الأول:

هو المستقيم d الذي معادلته $y = x$ شكل الفرق:

$$\ell(x) = f(x) - y_d$$

$$\ell(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - x$$

$$\ell(x) = \frac{4x - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

الناقشة:

عندما $m \in]-\infty, -1[$

فإن للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

عندما $m = -1$

فإن للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.

عندما $m \in]-1, 3[$

فإن للمعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.

عندما $m = 3$

فإن للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.

عندما $m \in]3, +\infty[$

فإن للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

التعريف الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

والمطلوب:

- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. ثم دل على القيمة الحدية وبين نوعها.
- حدد معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس وضعه النسبي.
- ادرس وضع C بالنسبة لمنصف الربع الأول.
- ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .
- استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

- ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

الحل:

الطالب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال:

$$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب

أفقي للخط البياني C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي

للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي

للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب

أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$

التابع f اشتقاقي على:

$]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)(4x)}{((x-1)^2)^2}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3} \dots (*)$$

ولدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} \dots (**)$$

بالمطابقة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$a = 1, b = -2, c = 1$$

الطالب الثالث:

لدينا:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3}$$

بفرض:

$$g(x) = \frac{1}{x-3}$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

فإن المستقيم الذي معادلته

$\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط البياني

C_f في جوار $-\infty$ و $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين Δ و C :

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)$$

$$= \frac{1}{x-3}$$

ندعم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{1}{x-3} = 0$$

$$1 \neq 0$$

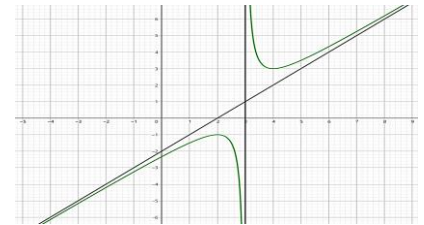
مستحيلة الحل إذا الفرق $h(x)$ لا يتعدم

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$ $	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	$ $	Δ فوق C

الطالب الرابع:

الرسم:



الطالب الخامس:

نزل m :

$$x^2 - (m+5)x + 3m + 7 = 0$$

$$x^2 - mx - 5x + 3m + 7 = 0$$

$$x^2 - 5x + 7 = mx - 3m$$

$$x^2 - 5x + 7 = m(x-3)$$

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x-3} = m$$

$$f(x) = m$$

$$f'(0) = m$$

حيث m يمثل ميل المستقيم Δ أي:
ومنه $m = 2$

$$f'(0) = 2 \dots (**)$$

بالتعويض في (*) نجد:

$$f(0) = -1$$

$$a(0) - \sqrt{(0)^2 + b} = -1$$

$$-\sqrt{b} = -1$$

$$\sqrt{b} = 1$$

$$b = 1$$

لدينا:

$$f'(x) = a - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + b}}$$

$$f'(x) = a - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

بالتعويض في (**): نجد:

$$f'(0) = 2$$

$$a - \frac{0}{\sqrt{(0)^2 + b}} = 2$$

$$a = 2$$

ومنه:

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

الطالب الثاني:

نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$:

نهاية f عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ نعلم أن}$$

$$f(x) = 2x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

بما أن $x \rightarrow +\infty$ فإن: $|x| = x$

$$f(x) = 2x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

الطالب السادس:

ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

نعزل m :

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

$$mx^2 - 2mx - 4x + m = 0$$

$$mx^2 - 2mx + m = 4x$$

$$m(x^2 - 2x + 1) = 4x$$

$$m(x - 1)^2 = 4x$$

$$m = \frac{4x}{(x - 1)^2}$$

المناقشة:

أياً كان $m \in]-\infty, -1[$ فإن:

المعادلة $f(x) = m$ مستحيحة الحد

عندما $m = -1$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.

أياً كان $m \in]-1, 0[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

عندما $m = 0$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.

أياً كان $m \in]0, +\infty[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

مسائل:

المسألة الأولى:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = ax - \sqrt{x^2 + b}$$

حيث a و b عددين حقيقيين

1. عين a و b كي يقبل الخط البياني

للتابع f مماساً في النقطة $A(0, -1)$

يوازي المستقيم $\Delta: y = 2x$

إذا علمت أن $a = 2$ و $b = 1$ والمطلوب:

2. أوجد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. أوجد $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات التابع f .

4. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y =$

$3x$ مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$.

5. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C_f والمستقيم d

6. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل واحد

على المجال $]0, 1[$

7. اكتب معادلة المماس T في النقطة

التي فاصلتها $1 = x_B$.

8. ارسم كلاً من المستقيم d والخط

البياني C

الحل:

الطالب الأول:

تعيين a و b :

بما أن الخط البياني للتابع f يقبل مماساً في

النقطة $A(0, -1)$ يوازي المستقيم

$\Delta: y = 2x$ فإنه يتحقق:

$$f(0) = -1 \dots (*)$$

$$\ell(x) = \frac{x(4 - (x^2 - 2x + 1))}{(x - 1)^2}$$

$$\ell(x) = \frac{x(4 - x^2 + 2x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$\ell(x) = \frac{x(-x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)^2}$$

نعدم الفرق:

$$\ell(x) = 0$$

$$\frac{x(-x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)^2} = 0$$

$$x(-x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$x = 0 \in D_f \text{ إما}$$

$$\text{أو } -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$-(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$-(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\text{إما } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in D_f$$

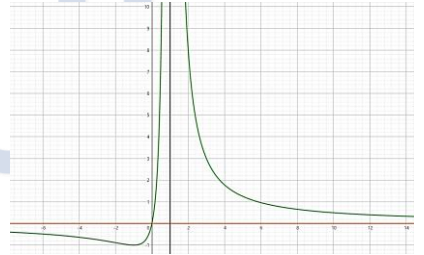
$$\text{أو } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in D_f$$

يشارك الخط البياني مع منتصف الربع الأول

بالنقاط: $(3, 3)$ و $(0, 0)$ و $(-1, -1)$.

الطالب الرابع:

الرسم:



الطالب الخامس:

استنتاج رسم:

$$g(x) = \frac{4x}{(x + 1)^2}$$

لدينا:

$$f(x) = \frac{4x}{(x - 1)^2}$$

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x - 1)^2}$$

$$f(-x) = \frac{-4x}{(-(x + 1))^2}$$

$$f(-x) = \frac{-4x}{(x + 1)^2}$$

$$-f(-x) = \left(\frac{-4x}{(x + 1)^2}\right)$$

$$-f(-x) = \frac{4x}{(x + 1)^2}$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$\rightarrow g(x) = -f(-x)$$

ومنه C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

تغيرات f :

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$2\sqrt{x^2+1} - x = 0$$

$$2\sqrt{x^2+1} = x$$

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{بشرط } x > 0 \leftarrow \frac{1}{2}x > 0$$

نربع الطرفين:

$$x^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2$$

$$4x^2 + 4 = x^2$$

$$4x^2 - x^2 = -4$$

$$3x^2 = -4$$

$$x^2 = \frac{-4}{3}$$

مستحيية الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

إثبات أن $y = 3x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$h(x) = f(x) - y_d$$

$$= 2x - \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$= -\sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty + \infty)$

$$h(x) = -\sqrt{x^2+1} - x$$

$$h(x) = \frac{(-\sqrt{x^2+1}-x)(-\sqrt{x^2+1}+x)}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x) = \frac{(-\sqrt{x^2+1})^2 - (x)^2}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x) = \frac{-\sqrt{x^2+1}+x}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x) = \frac{1}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x) = \frac{1}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم $d: y = 3x$ مقارب مائلللخط البياني في جوار $-\infty$.

$$h(x) = f(x) - y_d$$

$$= -\sqrt{x^2+1} - x$$

نعلم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$-\sqrt{x^2+1} - x = 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = -x$$

بشرط $x < 0$ نربع الطرفين:

$$x^2 + 1 = x^2$$

$$1 = 0$$

مستحيية الحل ومنه الفرق لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		-
الوضع النسبي		C تحت Δ

إثبات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيدعلى المجال $]0,1[$:التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$ ولدينا:

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 2 - \sqrt{2}$$

ومنه نجد أن:

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد علىالمجال $]0,1[$ معادلة المماس T للخط البياني في النقطةالتي فاصلتها $1 = x_B$ تحديد النقطة B :

$$x_B = 1$$

$$y_B = f(x_B) = f(1) = 2 - \sqrt{2}$$

$$B(1, 2 - \sqrt{2})$$

تحديد الميل m :

$$m = f'(x_B) = f'(1) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

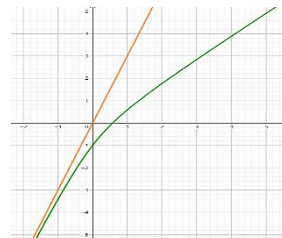
المعادلة:

$$T: y = m(x - x_B) + y_B$$

$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}(x - 1) + 2 - \sqrt{2}$$

$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}x - \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2}$$

$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$



الرسم

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3}$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بهاثم حدد القيم الحدية للتابع f .2. أثبت أن النقطة $A(0, -2)$ مركز تناظرللخط C .3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ و $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.4. هل يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ على إيجابتك.5. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

ثم احصر هذا الحل بعجال طوله الواحد.

6. ارسم Δ ثم ارسم C .

الحل:

الطالب الأول:

تغيرات التابع f :التابع f معرف ومستمر على:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقى على \mathbb{R} ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2}$$

نعلم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2} = 0$$

$$x^4 + 14x^2 - 15 = 0$$

$$(x^2 + 15)(x^2 - 1) = 0$$

مستحيية الحل

$$x^2 + 15 = 0 \rightarrow x^2 = -15 \text{ إما}$$

مستحيية الحل

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$\text{إما } x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = -3$$

$$\text{أو } x = -1 \in D_f \rightarrow f(-1) = -1$$

وننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-1	\searrow	-3	\nearrow	$+\infty$

القيم الحدية للتابع f :

$$f(-1) = -1 \text{ قيمة حدية كبرى محلياً.}$$

$$f(1) = -3 \text{ قيمة حدية صغرى محلياً.}$$

الطالب الثاني:

إثبات أن $A(0, -2)$ مركز تناظر لـ C :

$$\text{لدينا: } a = 0 \rightarrow 2a - x = -x$$

$$b = -2 \rightarrow 2b = -4$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$ الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} f(2a - x) + f(x) &= 2b \\ l_1 &= f(2a - x) + f(x) \\ &= f(-x) + f(x) \\ &= \frac{(-x)^3 - 2(-x)^2 - 5(-x) - 6}{(-x)^2 + 3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3} \\ &= \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x - 6}{x^2 + 3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3} \\ &= \frac{-4x^2 - 12}{x^2 + 3} = \frac{-4(x^2 + 3)}{x^2 + 3} \\ &= -4 = 2b = l_2 \end{aligned}$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق. ومنه: النقطة $A(0, -2)$ مركز تناظر للخط البياني.

الطالب الثالث:

إثبات أن Δ مقارب لـ c :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - y_\Delta \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3} - (x - 2) \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x - 2)(x^2 + 3)}{x^2 + 3} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x^3 + 3x - 2x^2 - 6)}{x^2 + 3} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - x^3 - 3x + 2x^2 + 6}{x^2 + 3} \\ &= \frac{-8x}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ و $-\infty$ الوضع النسبي بين c و Δ :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - y_\Delta \\ &= \frac{-8x}{x^2 + 3} \\ h(x) &= 0 \\ \frac{-8x}{x^2 + 3} &= 0 \\ -8x &= 0 \\ x &= 0 \in D_f \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C		Δ تحت C

الطالب الرابع:

يقبل C معاساً يوازي المستقيم Δ إذا كان للمعادلة $f'(x) = m$ حلول:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2} = 1$$

$$\begin{aligned} x^4 + 14x^2 - 15 &= (x^2 + 3)^2 \\ x^4 + 14x^2 - 15 &= x^4 + 6x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$8x^2 - 24 = 0$$

$$8x^2 = 24$$

$$x^2 = 3$$

$$\text{إما } x = \sqrt{3}$$

$$\text{أو } x = -\sqrt{3}$$

وبالتالي C يقبل معاسين موازيين للمستقيم Δ

الأول في النقطة التي فاصلتها $x_B = \sqrt{3}$

الثاني في النقطة التي فاصلتها $x_C = -\sqrt{3}$ معادتهما:

المعاسر الأول T_1 :

تحديد النقطة:

$$x_B = \sqrt{3}$$

$$y_B = f(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$B\left(\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل:

$$m = 1$$

المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_B) + y_B$$

$$T_1: y = 1(x - \sqrt{3}) + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x - \sqrt{3} + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x - \frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$$

المعاسر الثاني T_2 :

تحديد النقطة:

$$x_C = -\sqrt{3}$$

$$y_C = f(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$C\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل:

المعادلة:

$$T_2: y = m(x - x_C) + y_C$$

$$T_2: y = 1(x + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$$

الطالب الخامس:

إثبات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1[$ ولدنيا:

$$f(]-\infty, -1[) =]-\infty, -1[$$

$$0 \notin]-\infty, -1[$$

التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1, +\infty[$ ولدنيا:

$$f(]1, +\infty[) =]-3, -1[$$

$$0 \in]-3, -1[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد. حصر الحل بمجال طول واحد:

بما أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1, +\infty[$ فإن:

x	$f(x)$
1	-3
2	$-\frac{16}{7}$
3	-1
4	$\frac{2}{19}$

وبما أن:

$$f(3) = -1$$

$$f(4) = \frac{2}{19}$$

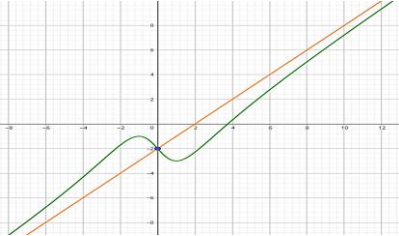
ومنه:

$$f(3) \cdot f(4) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد محصور في المجال $]3, 4[$

الطالب السادس:

الرسم:



المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{6x - 3x^2}$$

الطالب الأول:

أثبت أن التابع f معرف على المجال $[0, 2]$ الحل:

التابع f معرف بشرط:

$$6x - 3x^2 \geq 0$$

$$6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(2 - x) = 0$$

$$\text{إما } 3x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{أو } 2 - x = 0 \rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$6x - 3x^2$	$-$	0	$+$	0
≥ 0	م.غ		م	م.غ

$$\rightarrow D_f = [0, 2]$$

جد النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ وما طبيعة المماس في المبدأ؟

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$= \sqrt{6x-3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماس أفقي في المبدأ معادلته $y = 0$

الطالب الثالث:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وما التاويد الهندسي لهذه النتيجة؟

الحل:

ليكن لدينا التابع المساعد g المعروف على $[0, 2]$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$= \frac{x\sqrt{3x(2-x)}}{x-2}$$

$$= \frac{x\sqrt{3x}\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{x\sqrt{3x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{2\sqrt{6}}{0^-} = -\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2 ويقبل مماس شاقولي في النقطة $(2, 0)$ معادلته $x = 2$

الطالب الرابع:

احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(1.01)$.

الحل:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = (1)\sqrt{6x-3x^2} + \frac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}} \cdot x$$

$$= 6x - 3x^2 + \frac{3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x - 1$$

والمستقيم Δ المعين بالعلاقة:

$$y = x - 1$$

الطالب الأول:

أثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الحل:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x - 1) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذ Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الطالب الثاني:

ادرس الوضع النسبي لـ C و Δ :

الحل:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 2 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذ الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

نظم جدول الوضع النسبي:

x	0	$+\infty$
$h(x)$		+
الوضع النسبي		Δ فوق C

الطالب الثالث:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجال تعريفه واستنتج معادلة المقارب الشاقولي لـ C .

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

الطالب الرابع:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وحد على القيمة الحدية الصغرى.

الحل:

$$f'(x) = \frac{(0)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2)}{(\sqrt{x})^2} + 1$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} + 1 = \frac{-1}{x\sqrt{x}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{-1 + x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{6x - 3x^2 + 3x - 3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$= \frac{9x - 6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}} = \frac{x(9-6x)}{\sqrt{x(6-3x)}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}(9-6x)}{\sqrt{x}\sqrt{x}(9-6x)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{6-3x}}{\sqrt{6-3x}}$$

حساب قيمة تقريبية لـ $f(1.01)$:

$$a = 1, h = 0.01$$

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$\cong f(1) + f'(1)(0.01)$$

$$\cong \sqrt{3} + (\sqrt{3})(0.01)$$

$$\cong 1.01 \times \sqrt{3}$$

الطالب الخامس:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية الكبرى وارسم C .

الحل:

دراسة التغيرات التابع f :

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{9x - 6x^2}{\sqrt{6x - 3x^2}}$$

$$\rightarrow f'(x) = 0$$

$$\frac{9x - 6x^2}{\sqrt{6x - 3x^2}} = 0$$

$$9x - 6x^2 = 0$$

$$3x(3 - 2x) = 0$$

$$\text{إما } 3x = 0 \rightarrow x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = 0$$

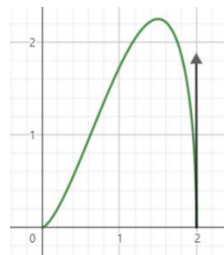
$$\text{أو } 3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \in D_f \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

نظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	0	$\frac{3}{2}$	2		
$f'(x)$ <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td> </td>	0	+	0	-	
$f(x)$ <td>0</td> <td>↗</td> <td>$\frac{9}{4}$</td> <td>↘</td> <td>0</td>	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0

القيمة الحدية الكبرى: $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

الرسم:



انظر للغيب بقلبي يؤمن أن رب

الخير لن يأتي إلا بالخير ..



نعدم المشتقة:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ -1 + x\sqrt{x} &= 0 \\ x\sqrt{x} &= 1 \\ \sqrt{x} &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

بشرط $x > 0$ نربع الطرفين:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{x^2} \\ x^3 &= 1 \\ \rightarrow x = 1 \in D_f &\rightarrow f(1) = 2\end{aligned}$$

بسم الله على الغايات .. حتى نصلا

نظم جدول تغيرات التابع f وفق:

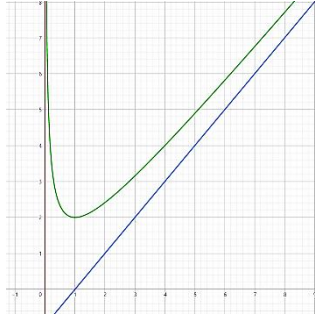
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		\searrow 2 \nearrow	∞

القيمة الحدية الصغرى للتابع: $f(1) = 2$

الطالب الخامس:

ارسم كل مقارب وجدته لـ C ثم ارسم C في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الرسم:



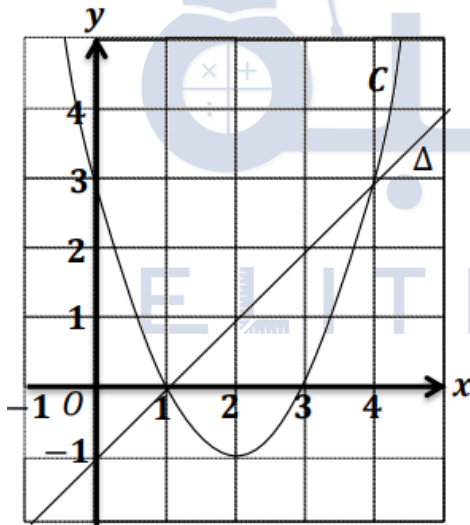
الطالب السادس:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$ الحل:

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 (f(x) - y_{\Delta}) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x - 1) \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2(x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = [4\sqrt{x}]_1^2 = 4\sqrt{2} - 4\end{aligned}$$

الشكل الثاني:

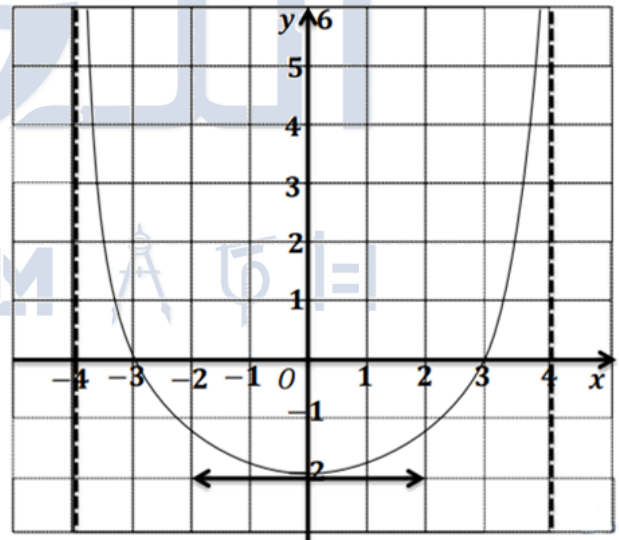
تأمل الشكل الآتي , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:



قراءة الخطوط البيانية:

الشكل الأول:

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $[-4, 4]$ وفق:



انت رح تحزرس بالوقت الصّح، ورح تشتغل بالوقت الصّح..

واللي راح منك ما كان بنفع يضل إلك، واللي اخترته ما كان ينفع تتركه، ولو رجع فيك الزمن رح تختار نفس اختيارك..
وصدقني أنت بالمكان والهيئة اللي المفروض تكون فيها بالزبط، والتدم على اللي راح ما إله فائدة، وكثر التفكير فيه تضيع وقت.
صدقني إنك تتخيل سيناريوهات بديلة والحكم عليها بإنها كانت رح تحسن أحوالك عن وضعك الآن هو تضيع طاقة وصبر ع الفاضي..

" ما أصابك لم يكن ليخطئك، وما أخطأك لم يكن يُصيبك "

الفكرة	الخطوات	تأمل الشكل الأول	تأمل الشكل الثاني
تعيين إيجاد $f(a)$	<ul style="list-style-type: none"> * نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = a$ * نحدد نقطة تقاطع الخط البياني والمستقيم السابق * يكون $f(a)$ هو ترتيب نقطة التقاطع 	$f(0) = -2$ $f(3) = 0$ $f(-3) = 0$	$f(0) = 3, f(1) = 0$ $f(2) = -1, f(3) = 0$ $f(4) = 3$
حلول معادلة $f(x) = b$	<ul style="list-style-type: none"> النقط الأول: عدد حلول معادلة: $f(x) = b$ نصر السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x) = b$ فكرة الحل: * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = b$ * عدد تقاطعات المستقيم السابق مع الخط البياني هو عدد الحلول 	<ul style="list-style-type: none"> ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ حلان ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -4$ مستحيلة الحل 	<ul style="list-style-type: none"> ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ حلان ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ مستحيلة الحل
نص السؤال: حل المعادلة $f(x) = b$ فكرة الحل:	<ul style="list-style-type: none"> * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = b$ * نحدد نقاط تقاطع المستقيم مع الخط البياني * تكون حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع السابقة انتبه: حل المعادلة هو قيم x حصرا ويكون "إما حل صريح أو ينتمي إلى مجال" النقط الثالث: 	<ul style="list-style-type: none"> ما هي حلول المعادلة $f(x) = 1$ حلان هما: $x_1 \in]-4, -3[$ $x_2 \in]3, 4[$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد: $x = 0$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -4$ مستحيلة الحل. 	<ul style="list-style-type: none"> ما هي حلول المعادلة $f(x) = 3$ حلان هما: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد: $x = 2$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -2$ مستحيلة الحل.
نص السؤال: ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$ فكرة الحل: بالاعتماد على الشكل نحدد مجالات قيم m ونحدد عدد حلول المعادلة الموافقة لكل مجال	<ul style="list-style-type: none"> النقط الأول: عدد حلول معادلة: $f(x) = y_\Delta$ نصر السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد عدد مرات تقاطع الخط البياني مع المستقيم * عدد تقاطعات الخط البياني هو عدد الحلول 	<ul style="list-style-type: none"> أيما كان $m \in]-\infty, -2[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ ولا حل "أي مستحيلة الحل. أيما كان $m = -2$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد أيما كان $m \in]-2, +\infty[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان 	<ul style="list-style-type: none"> أيما كان $m \in]-\infty, -1[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ ولا حل "أي مستحيلة الحل. أيما كان $m = -1$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد أيما كان $m \in]-1, +\infty[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان
حلول معادلة $f(x) = y_\Delta$	<ul style="list-style-type: none"> النقط الثاني: حلول المعادلة: $f(x) = y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد نقاط تقاطع الخط البياني مع المستقيم Δ * نحدد فواصل نقاط التقاطع السابقة * فواصل نقاط التقاطع هي حلول المعادلة 	<ul style="list-style-type: none"> حدد ميل المعاصر المرسوم في الشكل: بما أن المعاصر أفقي فإن: $m = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ما هي حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ حلان هما: $x_1 = 1$ $x_2 = 4$
إيجاد ميل مستقيم مرسوم في شكل	<ul style="list-style-type: none"> نص السؤال: أوجد ميل المستقيم Δ فكرة الحل: * إذا كان المستقيم أفقي فالميل $m = 0$ * إذا كان المستقيم شاقولي فالميل غير معرف * إذا كان المستقيم مائل بالاعتماد على الشكل نحدد نقطتين تنتميان إلى المستقيم ونوجد ميل المستقيم وفق: 	<ul style="list-style-type: none"> حدد ميل المعاصر المرسوم في الشكل: بما أن المعاصر أفقي فإن: $m = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> حدد ميل المستقيم Δ لتكن لدينا النقطتان: $A(0, -1), B(-1, -1)$ ومنه ميل المستقيم Δ: $m_\Delta = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 + 2}{0 + 1} = 1$
كتابة معادلة مستقيم مرسوم في شكل	<ul style="list-style-type: none"> كتابة معادلة مستقيم فإننا: * نحدد ميل المستقيم m * نحدد نقطة A * تنتمي إلى المستقيم بالاعتماد على الشكل * نكتب معادلة المستقيم وفق: $y = m(x - x_A) + y_A$ 	<ul style="list-style-type: none"> اكتب معادلة المعاصر المرسوم في الشكل: تحديد نقطة المعاصر: $A(0, -2)$ تحديد الميل: بما أن المعاصر أفقي فإن $m = 0$ المعادلة: $T: y = -2$ 	<ul style="list-style-type: none"> اكتب معادلة المستقيم Δ لتكن لدينا النقطتان: $A(0, -1), B(-1, -1)$ ومنه ميل المستقيم Δ: $m_\Delta = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 + 2}{0 + 1} = 1$ النقطة: $A(0, -1)$ المعادلة: $\Delta: y = x - 1$

<p>احسب $f'(2)$: $f'(2) = 0$</p>	<p>احسب $f'(0)$: $f'(0) = 0$</p>	<p>الخطوات: * نحدد المعامس المار من النقطة التي فاصلتها a * نوجد ميل هذا المعامس * يكون $f'(a) = m$ انتبه: عند القيمة الحدية في الغالب يكون المعامس الأفقي ننظر إلى الخط البياني ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب يكون التابع زوجي الحالة الثانية: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ يكون التابع فردي</p>	<p>إيجاد $f'(a)$</p>
<p>هل التابع f فردي؟ لا</p>	<p>هل التابع f زوجي؟ نعم</p>	<p>الخطوات: * نحدد المقارب المائل للخط البياني في جوار ∞ * نوجد ميل المقارب المائل * يكون:</p>	<p>إيجاد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$</p>
<p>أوجد كلاهما يلي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$</p>	<p>أوجد كلاهما يلي: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$</p>	<p>القاعدة الأولى: عند وجود مقارب أفقي هو معادلة المقارب الأفقي \rightarrow عدد $\lim_{x \rightarrow \infty} =$ عدد القاعدة الثانية: عند وجود مقارب شاقولي جوار التقارب في الأعلى $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} = \infty$ جوار التقارب في الأسفل $-\infty$ القاعدة الثالثة: وجود مقارب مائل جوار التقارب في الأعلى $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ جوار التقارب في الأسفل $-\infty$ $+\infty$ يمين يسار القاعدة الرابعة: وجود نقطة $f(a) = b$ غير مفرغة (a, b) $\lim_{x \rightarrow a} = b$ مفرغة (a, b) القاعدة الخامسة: وجود مواقع (أربع) الربع الأول: تكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثاني: تكون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثالث: تكون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ الربع الرابع: تكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$</p>	<p>أيجاد النهايات</p>

هو شوف...
الدراسة صعبة، الشغل صعب، وإك تجيب شهادة جامعة صعب، وإك تفلك امتحان صعب، وإك تحقّق حلم من أحلامك صعب...
بسر سيّدنا عمر بن عبد العزيز قال: " لو أنّ الناس كلّما استصعبوا أمراً تركوه، ما قام للناس ذنب ولا دين ".
لذلك وجّه قلبك نحو السماء، وقل: «لَا أُزِدُّكَ حَتَّى أُبَلِّغُ» ♥

<p>أوجد كلاهما يلي:</p> $f(]-\infty, 2]) = [-1, +\infty[$ $f(]2, +\infty[) =]-1, +\infty[$ $f(]-\infty, +\infty[) = f(]-\infty, 2]) \cup f(]2, +\infty[)$ $= [-1, +\infty[\cup]-1, +\infty[$ $= [-1, +\infty[$	<p>أوجد كلاهما يلي:</p> $f(]-4, 0]) = [-2, +\infty[$ $f(]0, 4[) =]-2, +\infty[$ $f(]-4, 4[) = f(]-4, 0]) \cup f(]0, 4[)$ $= [-2, +\infty[\cup]-2, +\infty[$ $= [-2, +\infty[$	<p>تمهيد:</p> <ul style="list-style-type: none"> * المجال هو قيم x * بينما صورة المجال هي قيم $f(x)$ * لإيجاد صورة مجال: نميز ثلاث حالات: الحالة الأولى: <p>إذا كان التابع f متزايداً تماماً على المجال I فإننا:</p> <ul style="list-style-type: none"> * نصور المجال I أي نصور الأطراف * نحافظ على الترتيب <p>الحالة الثانية:</p> <p>إذا كان التابع f متناقصاً تماماً على المجال I فإننا:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. نصور الأطراف 2. لكن نعكس الترتيب <p>الحالة الثالثة:</p> <p>إذا كان التابع f متزايداً ومنتاقصاً على المجال I فإننا:</p> <ul style="list-style-type: none"> * نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار * نصور الأجزاء السابقة * تكون صورة المجال هي اجتماع صور الأجزاء السابقة <p>انتبه:</p> <ul style="list-style-type: none"> - دائماً القيمة وصورتها نفس نوع المجال - طلب إيجاد صورة مجال هو ذاته طلب إيجاد النهايات والصور 	<p>إيجاد صورة مجال</p>
<p>أوجد $f(D_f)$:</p> $f(D_f) = f(]-\infty, +\infty[)$ $= f(]-\infty, 2]) \cup f(]2, +\infty[)$ $= [-1, +\infty[\cup]-1, +\infty[$ $= [-1, +\infty[$	<p>أوجد $f(D_f)$:</p> $f(D_f) = f(]-4, 4[)$ $= f(]-4, 0]) \cup f(]0, 4[)$ $= [-2, +\infty[\cup]-2, +\infty[$ $= [-2, +\infty[$	<p>هو صورة مجموعة التعريف الخطوات:</p> <ul style="list-style-type: none"> * نضع مجموعة التعريف * نوجد صورة مجموعة التعريف * نتويع: - عملية الاجتماع: - هي العناصر المشتركة والغير المشتركة - في حالة الخط البياني فرع واحد يكون المستقر الفعلي وفق: <p>أكبر قيمة لـ $f(x)$ ، أصغر قيمة لـ $f(x)$</p> <p>مجال</p> <p>مغلق</p> <p>مفتوح</p>	<p>المستقر الفعلي</p>
<p>تنظر إلى الخط البياني وتميز:</p>			<p>قابلية الاشتقاق</p>
<ul style="list-style-type: none"> * التابع f غير مستمر عند a (أي يوجد انقطاع) فيكون التابع f غير اشتقاقي عند a لأنه غير مستمر عند a * وجود مماس شاقولي عند a فيكون التابع f غير اشتقاقي * وجود نصفي مماسين لخط البياني عند a من اليسار ومن اليمين فيكون التابع f غير اشتقاقي 			<p>قابلية الاشتقاق</p>
<p>أوجد حلول المتراجحة:</p> $f'(x) < 0$ $S =]-\infty, 2[$ $f'(x) \leq 0$ $S =]-\infty, 2]$ $f'(x) > 0$ $S =]2, +\infty[$ $f'(x) \geq 0$ $S = [2, +\infty[$	<p>أوجد حلول المتراجحة:</p> $f'(x) < 0$ $S =]-4, 0[$ $f'(x) \leq 0$ $S =]-4, 0]$ $f'(x) > 0$ $S =]0, 4[$ $f'(x) \geq 0$ $S = [0, 4[$	<p>تمهيد:</p> <p>حلول المتراجحة هي قيم x</p> <p>نص السؤال:</p> <p>حل المتراجحة $f'(x) > 0$ أو $f'(x) \geq 0$</p> <p>الخطوات:</p> <ul style="list-style-type: none"> * ننظر إلى الخط البياني وتحديد عند تزايد التابع f (الخط البياني طالع) * تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متزايد (مع مراعاة المجالات) <p>نص السؤال:</p> <p>حل المتراجحة $f'(x) < 0$ أو $f'(x) \leq 0$</p> <p>الخطوات:</p> <ul style="list-style-type: none"> * ننظر إلى الخط البياني وتحديد عند تناقص التابع f (الخط البياني نازل) * تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متناقص (مع مراعاة المجالات) 	<p>حلول متراجحة من النمط:</p> <p>إشارة $f'(x)$ تراجع</p>

حلول المتراجحة
من النمط:
 $f(x)$ إشارة تراجم b

نص السؤال:
حل المتراجحة $f(x) > b$ أو $f(x) \geq b$
الخطوات:
* نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$
* حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني فوق المستقيم (مع مراعاة المجالات)
نص السؤال:
حل المتراجحة $f(x) < b$ أو $f(x) \leq b$
الخطوات:
* نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$
* حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني تحت المستقيم (مع مراعاة المجالات)

أوجد حلول المتراجحة:
 $f(x) < 0$
 $S =] - 3, 3[$
 $f(x) \leq 0$
 $S = [-3, 3]$
 $f(x) > 0$
 $S =] - 4, -3[\cup] 3, 4[$
 $f(x) \geq 0$
 $S =] - 4, -3[\cup] 3, 4[$

أوجد حلول المتراجحة:
 $f(x) < 3$
 $S =] 0, 4[$
 $f(x) \geq 3$
 $S =] - \infty, 0] \cup [4, +\infty[$

القيم الحدية

النمط الأول: تحديد القيمة الحدية:
نص السؤال: حدد القيمة الحدية
فكرة الحل:
نحدد نوعها وفقاً للشكل المرسوم
النمط الثاني: إثبات وجود قيمة حدية:
نص السؤال:
أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية كبرى للتابع f
فكرة الحل:
* نأخذ المجال I بحيث $a \in I$
* نوجد $D_1 = D_f \cap I$
* نكتب أيضاً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق:
 $f(a) \geq f(x)$

حدد القيم الحدية في حالة وجودها:
 $f(0) = -2$
قيمة حدية صفري
أثبت أن $f(0)$ قيمة حدية صفري للتابع:
ليكن لدينا:
 $I =] - 1, 1[$
ولتكن:
 $D_1 = D_f \cap I$
أياً كان:
 $x \in D_1$
فإن:
 $f(0) \leq f(x)$

حدد القيم الحدية في حالة وجودها:
 $f(2) = -1$
قيمة حدية صفري
أثبت أن $f(2)$ قيمة حدية صفري للتابع:
ليكن لدينا:
 $I =] 1, 3[$
ولتكن:
 $D_1 = D_f \cap I$
أياً كان:
 $x \in D_1$
فإن:
 $f(2) \leq f(x)$

نوجد $f'(a)$ فتكون $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

إيجاد
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

الخطوات: بالاعتماد على الشكل نوجد كلا من:

- * $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
- * $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$
- * $\lim_{x \rightarrow a} f(f(x)) = c$

إيجاد
 $\lim_{x \rightarrow a} f(f(x))$

أوجد مجموعة تعريف التابع:
 $g(x) = \sqrt{f(x)}$
أي يقصد حل المتراجحة $f(x) \geq 0$
أوجد مجموعة تعريف التابع:
 $g(x) = \ln(f(x))$
أي يقصد حل المتراجحة $f(x) > 0$
أوجد مجموعة تعريف التابع:
 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
تكون مجموعة تعريف التابع g هي:
{القيم التي تعدهم $f(x)$ }
 $D_g = D_f \setminus \{f(x)\}$

إيجاد مجموعة التعريف

أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق:
 e^x
 $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$
 $D_g = D_f \setminus \{-3, 3\}$
 $=] - 4, 4[\setminus \{-3, 3\}$

أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق:
 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
 $D_g = D_f \setminus \{1, 3\}$
 $D_g =] - \infty, +\infty[\setminus \{1, 3\}$

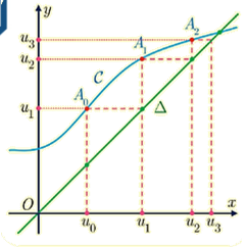
يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب تحديد جهة اطراف المتتالية u_n المعرفة بالشكل الصريح
فكرة الحل:
* بالاعتماد على الخط البياني نحدد جهة اطراف التابع $f(x)$
* تكون جهة اطراف المتتالية توافق جهة اطراف التابع f

إطراجه متتالية معرفة وفق
 $u_n = f(n)$

التعميد الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي:

يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب أعد رسم الخط البياني على دفترك ثم مثل الحدود اللولبية للمتتالية u_n المعرفة بالشكل التدريجي ثم خمن جهة تغييرها ونهايتها المحتملة.

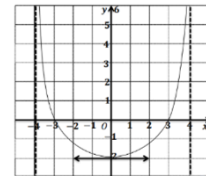
فكرة الحل:



- ① نرسم الخط البياني C_f للتابع f (الموافق)
 - ② نرسم المستقيم الذي معادلته $y = x$ (Δ : المنصف للربيع الأول والثالث)
 - ③ نحدد u_0 (مُعطاة) على محور الفواصل
 - ④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني
 - ⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته ($y = A$ ترتيب) ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ
 - ⑥ فاصلة B هي u_1
- نكرر ما سبق

التعميد الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي

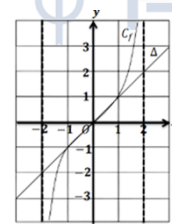
تمرين دورة 2017 الأولى:



في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f المعرفة على المجال $I =]-4, 4[$ والمطلوب:

1. أوجد نهايات الآتية:
 - $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$
2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$
 - $f(0) = -2$
 - $f'(0) = 0$
3. جد حلول المعادلة $f(x) = 0$
 - حلول المعادلة: $x_1 = -3, x_2 = 3$

تمرين دورة 2017 الثانية:

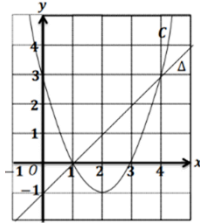


تأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C_f هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ والمطلوب:

1. أوجد النهايات الآتية:
 - $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$
 - $f(0) = 0$
 - $f'(0) = 1$
3. هل التابع فردي أو زوجي؟
 - التابع فردي.
4. اكتب معادلة المماس Δ

من الرسم نلاحظ أن المماس يمر من Δ يمر بالمبدأ والنقطة $(1, 1)$ وهو منصف الربع الأول والثالث ومعادلته: $y = x$

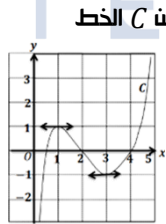
تمرين دورة 2018 الأولى:



تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} والمطلوب:

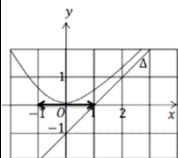
1. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f
 - $f(2) = -1$
2. أوجد نهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$
 - حلان هما: $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$
4. اكتب معادلة المستقيم Δ
 - المستقيم Δ مار من $(1, 0)$ وميله $m = 1$ وبالتالي $y = x - 1$

تمرين دورة 2019 الأولى:



تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ والمطلوب:

1. أوجد النهايات:
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = *$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
2. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f
 - $f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى محلية.
3. جد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
 - $S = [1, 3]$
4. جد $f(1, 3[$
 - $f(1, 3[) =] - 1, 1[$



تمرين دورة 2020 الأولى:

تأمل الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

1. أوجد النهايات عند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. اكتب معادلة المستقيم Δ

المستقيم Δ مار من $A(1, 0)$ و $B(0, -1)$ وميله $m = 1$ ومعادلته:

$$\Delta: y = x + 1$$

3. جد $f(0)$ و $f'(0)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

4. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

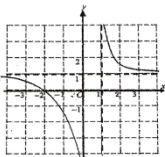
$$S =] - \infty, 0[$$

تمرين دورة 2021 الأولى:

تأمل الخط البياني C للتابع f المعرفة على

$$I =] - \infty, 0[\cup] 1, +\infty [$$

1. أوجد النهايات



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

2. اكتب معادلة كل مقارب أفقي

وكل مقارب شاقولي لـ C

$$x = 1 \text{ مقارب شاقولي نحو } oy^+$$

$$x = 0 \text{ مقارب شاقولي نحو } oy^-$$

$$y = 1 \text{ مقارب أفقي في جوار }] - \infty, +\infty [$$

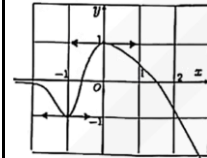
3. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$$S =] - \infty, 0[\cup] 1, +\infty [$$

4. حل المعادلة $f(x) = 0$

$$x = -2$$

تأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} والمطلوب:



١. جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f

$$y = 0 \text{ مقارب أفقي في جوار }]-\infty, -\infty[$$

٣. اكتب مجموعة حلول المترابطة

$$f'(x) > 0$$

$$S =]-1, 0[$$

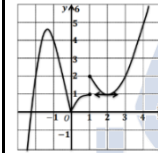
٤. عين القيم الحدية للتابع f مبيئاً نوع كل منها.

$$f(-1) = -1 \text{ قيمة حدية صغرى.}$$

$$f(1) = 0 \text{ قيمة حدية كبرى.}$$

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} والمطلوب:

١. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

حل وحيد

٢. ما مجموعة حلول المترابطة $f(x) \geq 5$

$$S = [4, +\infty[$$

٣. هل $f(1)$ قيمة محلية

كبرى أو صغرى للتابع f ؟ علا ذلك..

$f(1)$ قيمة حدية كبرى محلياً لأنه:

ليكن لدينا: $I =]0, 2[$ ولتكن $D_1 = D_f \cap I$

أيضاً كان: $x \in D_1$ فإن: $f(0) \leq f(x)$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

أربعة قيم حدية.

٥. ما قيمة المشتق في النقطة التي

$$x = 2 \text{ فاصلتها}$$

$$f'(2) = 0$$

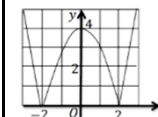
٦. أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$

التابع f غير مستمر عند $x = 1$ فهو

غير اشتقاقى.

التمرين الثاني:

نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R} والمطلوب:



١. كم حل للمعادلة

$$f(x) = 2$$

أربعة حلول.

٢. عين صورة المجال $I = [-2, 2]$ وفق f

$$f([-2, 2]) = [0, 4]$$

٣. كم قيمة صغرى أو كبرى محلياً للتابع f

$$f(2) = 0 \text{ و } f(-2) = 0$$

قيم حدية صغرى محلياً.

$$f(0) = 4 \text{ قيمة حدية كبرى محلياً}$$

التمرين الثالث:

إذا كان الخط البياني

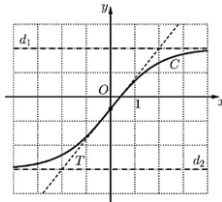
للتابع f والمستقيمين

d_2 و d_1 مقاربي

للخط C والمستقيم

T مماس للخط

والمطلوب:



١. أوجد النهاية عند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

٢. اكتب معادلة كل من المقاربي d_2 و d_1

$$d_1: y = 2$$

$$d_2: y = -3$$

٣. إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم

في الشكل يمسر المنحني في النقطة

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right) \text{ احسب } f'\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ ثم اكتب}$$

معادلته.

المستقيم يمر من النقطتين $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ و

$$(2, 2) \text{ وبالتالي } f'(0) = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{5}{4}$$

ومعادلته:

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني

للتابع f المرسوم جانباً

أوجد النهاية عند

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = *$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 2$$

٢. هل التابع f اشتقاقى عند 2

غير اشتقاقى لأنه غير مستمر

٣. جد $f'(3)$ و $f(3)$ وجد معادلة

المماس عند 3

$$f(3) = 3$$

$$f'(3) = 0$$

ومعادلة المماس:

$$y = 3$$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

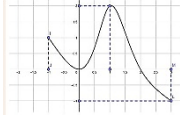
$$f(2) = 1 \text{ و } f(-2) = 2$$

قيم حدية صغرى محلياً

$$f(3) = 3 \text{ و } f(-1) = 3$$

قيم حدية كبرى محلياً

التمرين الخامس:



لدينا التابع f المعرف

على المجال $[1, -3]$

واشتقاقى عليه وخطه

البياني C , الشكل المرسوم جانباً يعكس الخط

البياني للتابع f المشتق f' :

١. ما هو ميل المماس للخط C في

النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

$$m = f'(1) = 2$$

٢. هل $f(2)$ قيمة حدية للتابع f , علا إجابتك

نعم قيمة حدية لأن مشتق التابع

ينعدم عندها ويغير إشارته.

٣. هل $f(0)$ قيمة حدية للتابع f , علا إجابتك

لا ليست قيمة حدية لأن مشتق التابع

ينعدم عندها دون أن يغير إشارته

٤. ما عدد المماسات الأفقية للخط C :

اثنان

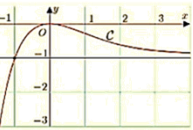
التمرين السادس:

في الشكل المجاور

خط بياني C لدالة f

ومن خلال قراءة بيانية

للشكل أجب عما يلي:



١. ما معادلة المستقيم المقارب للخط C

وما الوضع النسبي للخط C مع هذا

المقارب؟

$$y = -1$$

٢. يقبل f قيماً حدية محلياً عينها وبين نوعها

$$f(0) = 0 \text{ قيمة حدية كبرى محلياً}$$

٣. في حالة عدد حقيقي k عين بدلالة k

عدد حلول المعادلة k

$$k \in]-\infty, -1] \cup \{0\} \text{ عندما}$$

للمعادلة حل وحيد.

$$\text{عندما } k \in]-1, 0[$$

$$\text{عندما } k \in]0, +\infty[\text{ ليس للمعادلة حلول.}$$

بسم الله على الأهل .. حتى نراها

١. الرمز

٢. قواعد للاشتقاق

٣. المماس

* كتابة معادلة المماس.

* هل يقبل الخط البياني مماس ميله m ؟

٤. التقريب التآلفي

٥. قابلية الاشتقاق عند نقطة

٦. قابلية الاشتقاق على مجال

٧. استنتاج مشتق

٨. مشتقات من مراتب عليا

٩. اطراد تابع

١٠. دراسة تغيرات تابع

١١. قراءة جدول التغيرات

١٢. مبرهنة القيمة الوسطى

١٣. حصر حل معادلة

٤. الصفات التناظرية

(زوجي - فردي - مركز تناظر - محور تناظر - دوري)

٥. تحديد الثوابت

٦. رسم الخطوط البيانية

٧. استنتاج رسم الخطوط البيانية

٨. المناقشة البيانية

٩. قراءة الخط البياني

فقدت الفتى لذة جهده لكثرة ما طلب الكمال..

أحيانا نقتل أجمل أفكارنا لكثرة ارتجافنا من خطوة البداية، لخوفنا من الصورة التي يراها الآخر منا! نؤمن التفكير دون تسليم للتدبير، نتقن الكتابة على الورق، ونقف دون الجهد والعرق! وما زلنا أسرى الخجل مما سيقوله الناس!

خطوتك الأولى، بدايتك الخجولة، كلها تصنعك، ما من مجتهد تراه إلا وجهك خطاه، وما من مُحاولٍ إلا ويغلب هواه، وما من مُخلصٍ إلا مُرغ قلبه من العجز، وما من نجاحٍ إلا تُسج بحيوب الألم، يا لكثرة أحلامنا ويا لقلّة التعب.

اثق الله تجد مُرجا، زد صبورا ترى مُرجا، شدك خطاك وأو عرجا، ثم استقم، إياك أن تستصغر دمعتك، أو تقصر سجدتك، أو تكسر خطوتك، أو أن تسدّ التوافد لأن الأبواب مغلقة! دع نورا يتسلك إليك، وهواء يعشُر رثيتك، أنت لله! أتفهم؟ لن تجد قدما تأخذ خطوتك، ولا قلبا يحمل نبضك، ولا عقلا يحمّن فكرتك، ولا بابا يُفتح دون طرق! تكفل مسؤوليّة نفسك.

من صدق اخترق، ومن جاهد برق

ومن أدمع الأحلام اخترق...❤

ELITE M    

شيفرة الـ 600 في التابع اللوغاريتمي

تعريف:

التابع اللوغاريتمي		
النظري "الطبيعي"	العشري	تعريف
هو التابع اللوغاريتمي الذي أساسه العدد النظري e	هو التابع اللوغاريتمي الذي أساسه العدد 10	رمزه
$\ln(x)$ مضمون	$\log(x)$ مضمون	قاعدة
$\ln(e) = 1$	$\log(10) = 1$	

التابع اللوغاريتمي النظري:

الشرط	كيفية إيجاده	ملاحظة
التابع اللوغاريتمي معرف بشرط ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر	نحل المترابحة: > 0 (مضمون اللوغاريتم) ، فيكون شرط الحلا هو مجموعة حلول المترابحة.	مضمون اللوغاريتم هو أول حد موجود بعد الرمز \ln

تعرين:

في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرّفاً:

1. $\ln(1-x)$

$\ln(1-x)$ معرّف بشرط:

$1-x > 0 \Rightarrow x < 1$

$E =]-\infty, 1[$

2. $\ln(x^2)$

$\ln(x^2)$ معرّف بشرط:

$x^2 > 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$E =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

4. $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

$\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرّف بشرط:

$\frac{x-3}{2-x} > 0$

نعدم البسط: $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

نعدم المقام: $2-x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$2-x$	+	0	-	-
$\frac{x-3}{2-x}$	-		+	-
> 0	م.ع	م	م.ع	

$E =]2, 3[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	+	0	+
> 0	م	م	م

$E =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

3. $\ln(x^2 - 3x + 2)$

$\ln(x^2 - 3x + 2)$ معرّف بشرط:

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

إما $x = 2$

أو $x = 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
المقار	+	0	-	+
> 0	م	م.ع	م	

خواص التابع اللوغاريتمي:

الخاصة	القانون	شرط التطبيق
لوغاريتم جداء	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ يكن: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ لولو جداء يساوي لولو زائد لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$ لولو زائد لولو يساوي لولو جداء	أن تكون أمثال اللوغاريتمات هي الواحد حصراً
لوغاريتم قسمة	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ يكن: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ لولو قسمة يساوي لولو ناقص لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ لولو ناقص لولو يساوي لولو قسمة	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال 1 ← بسط الأمثال -1 ← مقام
لم لوغاريتمات	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$ و $d > 0$ يكن: $\ln(a) + \ln(b) + \ln(c) + \ln(d) = \ln(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ $\ln(a) - \ln(b) + \ln(c) - \ln(d) = \ln\left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)$	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال 1 ← بسط الأمثال -1 ← مقام
لوغاريتم قوة	أياً يكن $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$ يكن: $\ln(a)^n = n \ln(a)$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $n \ln(a) = \ln(a)^n$ حطني على راسك وشنكاني	الأسر للمضمون فقط

الأسر للمضمون فقط	<p>أيًا يكن $a > 0$ يكن:</p> $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(a)$ <p>وتطبق بشكل عكسي وفق:</p> $\frac{1}{2} \ln(a) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{a})$	لوغاريتم الجذر التربيعي
	<p>$\ln(e) = 1$ ليتنى \ln وليتها e ونصير 1 $\ln(1) = 0$ ليتنى \ln وليتها 1 ونعوت سوا</p>	قيم مباشرة
	<p>* $\ln(2) \cong 0.7$ * $\ln(3) \cong 1.1$ * $\ln(5) \cong 1.6$ * $e \cong 2.7$ * $e^2 \cong 7.3$ * $\frac{1}{e} = 0.4$ * $\sqrt{e} = 1.6$</p>	قيم تقريبية
إذا بنكون طبقت خواص من عندك بتكون كفرت يا صديقي	<p>* $\ln(a + b)$ * $\ln(a - b)$ * $(\ln(a))^n$</p> <p>لا يوجد قانون</p>	الكفر والإلحاد

أنماط التمارين:

المقارنة	إثبات صحة علاقة	الاختزال (التبسيط)	نص السؤال
<p>قارن بين المقدارين</p> <p>- نطبق ما يلزم من خواص وحسابات - نميز وفقاً للقاعدة:</p> <p>$\ln(a) = \ln(b) \leftrightarrow a = b$ * $\ln(a) > \ln(b) \leftrightarrow a > b$ * $\ln(a) \geq \ln(b) \leftrightarrow a \geq b$ * $\ln(a) < \ln(b) \leftrightarrow a < b$ * $\ln(a) \leq \ln(b) \leftrightarrow a \leq b$ *</p>	<p>أثبت صحة العلاقة (المساواة)</p> <p>لدينا أسلوبان:</p> <p>① الأسلوب الأول: نتطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة</p> <p>② الأسلوب الثاني: نتطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني</p>	<p>بسط (اختزل) المقادير</p> <p>نعميد: اللوغاريتم المختزل هو لوغاريتم مضمونه هو عدد أولي حيث: العدد الأولي: هو كل عدد يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد في آن معاً مثلاً: .. 2,3,5,7,11,...</p> <p>* خطوات الحل: نطبق ما يلزم من عمليات وحسابات وصولاً ل لوغاريتم مختزل</p>	فكرة الحل

التعريف الثالث:

فيما يأتي بسط كتابة كل من a و b

$$a = \ln(567) - \ln(72) - \ln\left(\frac{7}{8}\right) + \ln\left(\frac{1}{27}\right)$$

$$= \ln 567 - \ln 72 - (\ln 7 - \ln 8) + (\ln 1 - \ln 27)$$

$$= \ln(567) - \ln(72) - \ln 7 + \ln 8 - \ln(27)$$

$$= \ln(567) + \ln 8 - \ln(72) - \ln 7 - \ln(27)$$

$$= \ln((567)(8)) - (\ln(72) + \ln 7 + \ln(27))$$

$$= \ln(567 \times 8) - \ln(72 \times 7 \times 27)$$

$$= \ln\left(\frac{567 \times 8}{72 \times 7 \times 27}\right) = \ln\left(\frac{21}{9 \times 7}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$$

$$b = \ln(\sqrt{216}) + \ln(\sqrt{75}) - \ln(15) - \ln(\sqrt{27})$$

$$= \ln(216)^{\frac{1}{2}} + \ln(75)^{\frac{1}{2}} - \ln(15) - \ln(27)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(216) + \frac{1}{2} \ln(75) - \ln(15) - \frac{1}{2} \ln(27)$$

نضرب الطرفين ب 2

$$2b = \ln(216) + \ln(75) - \ln(15)^2 - \ln(27)$$

$$2b = \ln(216 \times 75) - (\ln(225) + \ln(27))$$

$$2b = \ln(216 \times 75) - \ln(225 \times 27)$$

$$2b = \ln\left(\frac{216 \times 75}{225 \times 27}\right)$$

$$2b = \ln\left(\frac{8}{3}\right) \Rightarrow 2b = \ln(8) - \ln(3)$$

$$2b = \ln(2)^3 - \ln(3)$$

$$2b = 3 \ln(2) - \ln(3)$$

التعريف الثاني:

اكتب كلا من الأعداد الآتية بدلالة $\ln(2)$ و $\ln(5)$

$$a = \ln(50)$$

$$= \ln(5 \times 10)$$

$$= \ln(5) + \ln(10)$$

$$= \ln(5) + \ln(5 \times 2)$$

$$= \ln(5) + \ln(5) + \ln(2)$$

$$= 2 \ln(5) + \ln(2)$$

$$b = \ln\left(\frac{16}{25}\right)$$

$$= \ln(16) - \ln(25)$$

$$= \ln(2)^4 - \ln(5)^2$$

$$= 4 \ln(2) - 2 \ln(5)$$

$$c = \ln(250)$$

$$= \ln(50 \times 5)$$

$$= \ln(50) + \ln(5)$$

$$= \ln(10 \times 5) + \ln(5)$$

$$= \ln(10) + \ln(5) + \ln(5)$$

$$= \ln(2 \times 5) + 2 \ln(5)$$

$$= \ln(2) + \ln(5) + 2 \ln(5)$$

$$c = 3 \ln(5) + \ln(2)$$

التعريف الأول:

بسط كتابة الأعداد الآتية:

$$a = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \ln(3) + \ln(1) - \ln(3)$$

$$= 0$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(16)$$

$$= -\ln(2)^4 = -4 \ln(2)$$

$$c = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$= \frac{1}{4} \ln(2)$$

على قدر الغرر يكون الحصاد ..

$$y = 3 \ln(2) \Rightarrow y = \ln(8)$$

ومنه: $x > y$

$$x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3; y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$

الحل:

$$x = 3 \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 3(\ln(1) - \ln(e))$$

$$= 3(-\ln e) = 3(-1) \Rightarrow x = -3$$

$$y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$

$$= (\ln(1) - \ln(e))^2$$

$$= (-\ln e)^2 = (-1)^2 = 1$$

ومنه: $x < y$

$$x = \ln(e)^3 - 2; y = \ln(e\sqrt{e})$$

الحل:

$$x = \ln(e)^3 - 2 = 3 \ln e - 2$$

$$= 3(1) - 2 = 3 - 2 \Rightarrow x = 1$$

$$y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln \sqrt{e}$$

$$= 1 + \ln(e)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \ln e$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ومنه:

 $y > x$

$$l_2 = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \ln(x+1) = l_1 \rightarrow \text{محققة}$$

$$\ln(1+x^2) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$l_2 = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln(x)^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \ln(x^2 + 1) = l_1 \rightarrow \text{محققة}$$

التعريف السادس:

في كل مما يأتي قارن بين العددين x و y

$$x = \ln(5); y = \ln(2) + \ln(3)$$

$$x = \ln(5)$$

$$y = \ln(2 \times 3) = \ln(6)$$

ومنه: $x < y$

$$x = 2 \ln(3); y = 3 \ln(2)$$

الحل:

$$x = 2 \ln(3) \Rightarrow x = \ln(9)$$

$$b = \frac{3 \ln(2) - \ln(3)}{2}$$

$$c = \ln(15) + \ln \sqrt[3]{27} - \ln\left(\frac{1}{125}\right)$$

$$= \ln(5 \cdot 3) + \ln(3^3)^{\frac{1}{3}} - (\ln(1) - \ln(125))$$

$$= \ln(5) + \ln(3) + \ln(3) + \ln(125)$$

$$= 2 \ln(3) + \ln(5) + \ln(5^3)$$

$$= 2 \ln(3) + \ln(5) + 3 \ln(5)$$

$$= 2 \ln(3) + 4 \ln(5)$$

التعريف الرابع:

أثبت أن:

$$\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$$

$$l_1 = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$= \ln\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)$$

$$= \ln(4 - 3) = \ln(1)$$

$$= 0 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

التعريف الخامس:

أثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين مهما

يكن $x > 0$

$$\ln(1+x) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

المعادلات اللوغاريتمية:

النمط الرابع	النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	النمط
جملة معادلتين تحوي لوغاريتمات	معادلة تحوي $(\ln(x))^2$ و $(\ln(x))^3$	عدد لوغاريتمات	لوغاريتمات = لوغاريتمات	شكل المعادلة
جد الحل المشترك لجملة المعادلتين		حل المعادلة الآتية		نص السؤال
نحدد E شرط الحل	بشرط $x > 0$ نفرض $t = \ln(x)$	نحدد E شرط الحل	نحدد E شرط الحل	فكرة الحل
نصلح باستخدام إصلاحات وخواص	نعوض في المعادلة فنحصل على	نطبق إصلاحات وخواص	نطبق إصلاحات وخواص مناسبة	
مناسبة للحصول على معادلتين	معادلة من الدرجة الثانية أو الثالثة	مناسبة للوصول إلى الشكل:	للاوصول إلى الشكل:	
بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع	بطلالة t	عدد $1 \ln(a) =$	$1 \ln(a) = 1 \ln(b)$	
أو الحذف بالتعويض	نحل هذه المعادلة بطلالة t	حصرًا	حصرًا	
	نوجد قيم x	أي نعزل اللوغاريتم	وهي معادلة تكافؤ:	
		أخذ e للطرفين فنحصل	$a = b$	
		على معادلة	نحل هذه المعادلة	
		نحل هذه المعادلة	نحدد الحلول المقبولة	
		نحدد الحلول المقبولة	والمرفوضة	
		والمرفوضة		

توبيخات هامة:

حل جملة المعادلات	حل المعادلة	الحل المرفوض	الحل المقبول
تعني إيجاد قيم المجهولين x و y	يعني إيجاد قيمة المجهول x	هو الحل الذي لا ينتمي إلى شرط الحل	هو الحل الذي ينتمي إلى شرط الحل

الحل:

$$1. \ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

معرف بشرط: $\ln(3x - 4)$

$$3x - 4 > 0$$

$$3x > 4 \rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$E_1 =]\frac{4}{3}, +\infty[$$

معرف بشرط: $\ln(x^2 - 4)$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$$

$$10. \ln(x+1) = 1$$

$$11. \ln(1-x) = -2$$

$$12. \ln(3x^2 + 1) = 2$$

$$13. (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$$

$$14. (\ln(x))^2 = 16$$

$$15. (\ln(x))^2 - 5 \ln(x) = 6$$

$$16. (\ln(x))^2 = 3 \ln(x)$$

$$17. (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0$$

التعريف الأول: حل المعادلات الآتية:

$$1. \ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

$$2. \ln(x - 2) = \ln(2)$$

$$3. \ln(x + 11) = \ln(x + 3)(x + 2)$$

$$4. \frac{1}{2} \ln(2x) = \ln(3 - x) - \ln(\sqrt{x + 1})$$

$$5. \ln(\sqrt{2x - 3}) = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$6. \ln|x + 2| + \ln|x - 2| = 0$$

$$7. \ln|x - 2| + \ln(x + 4) = 3 \ln(2)$$

$$8. \ln|2x + 3| + \ln|x - 1| = 2 \ln|x|$$

$$9. \ln(3 - x) = 0$$

6. $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

معرّف بشرط: $\ln|x+2|$

$$E_1 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

معرّف بشرط: $\ln|x-2|$

$$E_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

إذا شرط الحل:

$$E = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$

$$\ln(|x+2| \cdot |x-2|) = 0$$

$$\ln|(x+2)(x-2)| = 0$$

$$\ln|x^2 - 4| = 0$$

تكافئ:

$$|x^2 - 4| = 1$$

$$\text{إما } x^2 - 4 = 1$$

$$x^2 = 5$$

$$\text{مقبول } x = \sqrt{5} \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = -\sqrt{5} \rightarrow \text{أو}$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = -1$$

$$x^2 = 3$$

$$\text{مقبول } x = \sqrt{3} \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = -\sqrt{3} \rightarrow \text{أو}$$

7. $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln(2)$

معرّف بشرط $\ln|x-2|$

$$E_1 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

معرّف بشرط $\ln(x+4)$

$$x+4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$E_2 =]-4, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]-4, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln(2)$$

$$\ln(|x-2|(x+4)) = \ln(2)^3$$

$$\ln(|x-2|(x+4)) = \ln(8)$$

تكافئ:

$$|x-2|(x+4) = 8$$

عندما $x > 2$

$$\text{إما } (x-2)(x+4) = 8$$

$$x^2 + 4x - 2x - 8 = 8$$

$$x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 64 = 68 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{17}}{2}$$

$$= -1 - \sqrt{17} \rightarrow \text{مرفوض}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{17}}{2}$$

$$= -1 + \sqrt{17} \rightarrow \text{مقبول}$$

من أراد استطاع .. 

$$x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow E_3 =]-1, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]0, 3[$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x+1})$$

نضرب الطرفين ب (2)

$$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - 2\ln\sqrt{x+1}$$

$$\ln(2x) = \ln(3-x)^2 - \ln(\sqrt{x+1})^2$$

$$\ln(2x) = \ln\left(\frac{(3-x)^2}{x+1}\right)$$

تكافئ:

$$2x = \frac{(3-x)^2}{x+1}$$

$$2x(x+1) = (3-x)^2$$

$$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x+9)(x-1) = 0$$

$$\text{مرفوض } x = -9 \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = 1 \rightarrow \text{أو}$$

5. $\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$

معرّف بشرط $\ln(x)$

$$x > 0$$

$$\Rightarrow E_1 =]0, +\infty[$$

معرّف بشرط $\ln(6-x)$

$$6-x > 0 \rightarrow x < 6$$

$$\Rightarrow E_2 =]-\infty, 6[$$

معرّف بشرط $\ln(\sqrt{2x-3})$

$$\sqrt{2x-3} > 0$$

$$2x-3 > 0$$

$$2x > 3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow E_3 =]\frac{3}{2}, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]\frac{3}{2}, 6[$$

$$\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$$

نضرب ب (2)

$$2\ln\sqrt{2x-3} = 2\ln(6-x) - \ln(x)$$

$$\ln(\sqrt{2x-3})^2 = \ln(6-x)^2 - \ln(x)$$

$$\ln(2x-3) = \ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$

تكافئ:

$$2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$

$$2x^2 - 3x = (6-x)^2$$

$$2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$(x+12)(x-3) = 0$$

$$\text{مرفوض } x = -12 \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = 3 \rightarrow \text{أو}$$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$+$
> 0	μ	μ	μ	μ

$$E_2 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]2, +\infty[$$

$$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$$

يكافئ:

$$3x-4 = x^2-4$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\text{مرفوض } x = 0 \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = 3 \rightarrow \text{أو}$$

2. $\ln(x-2) = \ln(2)$

معرّف بشرط $\ln(x-2)$

$$x-2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$E =]2, +\infty[$$

$$\ln(x-2) = \ln(2)$$

تكافئ:

$$x-2 = 2$$

$$x = 4 \rightarrow \text{مقبول}$$

3. $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

معرّف بشرط $\ln(x+11)$

$$x+11 > 0 \rightarrow x > -11$$

$$E_1 =]-11, +\infty[$$

معرّف بشرط $\ln(x+3)(x+2)$

$$(x+3)(x+2) > 0$$

$$(x+3)(x+2) = 0$$

$$\text{إما } x = -3$$

$$\text{أو } x = -2$$

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
المضرب	$+$	$-$	$+$	$+$
> 0	μ	μ	μ	μ

$$E_2 =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]-11, -3[\cup]-2, +\infty[$$

$$\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$$

تكافئ:

$$x+11 = (x+3)(x+2)$$

$$x^2 + 5x + 6 - x - 11 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$\text{مقبول } x = -5 \rightarrow \text{إما}$$

$$\text{مقبول } x = 1 \rightarrow \text{أو}$$

4. $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x+1})$

معرّف بشرط $\ln(2x)$

$$2x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow E_1 =]0, +\infty[$$

معرّف بشرط $\ln(3-x)$

$$3-x > 0 \rightarrow x < 3$$

$$\Rightarrow E_2 =]-\infty, 3[$$

معرّف بشرط $\ln\sqrt{x+1}$

$$\sqrt{x+1} > 0$$

13. $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$
 معرف بشرط: $\ln(x)$

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$$

$$\text{إما } \ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } \ln(x) + 2 = 0$$

$$\ln(x) = -2$$

$$x = e^{-2}$$

$$x = \frac{1}{e^2} \rightarrow \text{مقبول}$$

14. $(\ln(x))^2 = 16$

معرف بشرط: $\ln(x)$

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 = 16 \dots (*)$$

$$t^2 = (\ln(x))^2 \text{ فتكون } t = \ln(x) \text{ بفرض}$$

نعوض في (*):

$$t^2 = 16$$

$$\text{إما } t = 4$$

$$\ln(x) = 4$$

$$x = e^4 \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } t = -4$$

$$\ln(x) = -4$$

$$x = e^{-4} \rightarrow \text{مقبول}$$

15. $(\ln(x))^2 - 5 \ln(x) = 6$

معرف بشرط: $\ln(x)$

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 - 5 \ln(x) = 6 \dots (*)$$

$$t^2 = (\ln(x))^2 \text{ فتكون } t = \ln(x) \text{ بفرض}$$

نعوض في (*):

$$t^2 - 5t = 6$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$(t - 6)(t + 1) = 0$$

$$\text{إما } t = 6$$

$$\ln(x) = 6$$

$$x = e^6 \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } t = -1$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} \rightarrow \text{مقبول}$$

16. $(\ln(x))^2 = 3 \ln(x)$

معرف بشرط: $\ln(x)$

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 = 3 \ln(x) \dots (*)$$

$$t^2 = (\ln(x))^2 \text{ فتكون } t = \ln(x) \text{ بفرض}$$

نعوض في (*):

$$t^2 = 3t$$

$$t^2 - 3t = 0$$

9. $\ln(3 - x) = 0$

معرف بشرط: $\ln(3 - x)$

$$3 - x > 0 \rightarrow x < 3$$

$$E =]-\infty, 3[$$

$$\ln(3 - x) = 0$$

تكافئ:

$$3 - x = e^0$$

$$3 - x = 1$$

$$x = 2 \rightarrow \text{مقبول}$$

10. $\ln(x + 1) = 1$

معرف بشرط: $\ln(x + 1)$

$$x + 1 > 0$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$E =]-1, +\infty[$$

$$\ln(x + 1) = 1$$

تكافئ:

$$x + 1 = e$$

$$x = e - 1 \rightarrow \text{مقبول}$$

11. $\ln(1 - x) = -2$

معرف بشرط: $\ln(1 - x)$

$$1 - x > 0 \rightarrow x < 1$$

$$E =]-\infty, 1[$$

$$\ln(1 - x) = -2$$

تكافئ:

$$1 - x = e^{-2}$$

$$x = 1 - e^{-2}$$

$$x = 1 - \frac{1}{e^2}$$

$$x = \frac{e^2 - 1}{e^2} \rightarrow \text{مقبول}$$

12. $\ln(3x^2 + 1) = 2$

معرف بشرط: $\ln(3x^2 + 1)$

$$3x^2 + 1 > 0$$

$$3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2 + 1$		+
> 0		مقبول

$$E =]-\infty, +\infty[$$

$$\ln(3x^2 + 1) = 2$$

تكافئ:

$$3x^2 + 1 = e^2$$

$$3x^2 = e^2 - 1$$

$$x^2 = \frac{e^2 - 1}{3}$$

$$\text{إما } x = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{3}} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } x = -\sqrt{\frac{e^2 - 1}{3}} \rightarrow \text{مقبول}$$

عندما $x < 2$

$$\text{أو } (-x + 2)(x + 4) = 8$$

$$-x^2 - 4x + 2x + 8 = 8$$

$$-x^2 - 2x = 0$$

$$x(-x - 2) = 0$$

$$\text{مقبول } x = 0$$

$$\text{مقبول } x = -2$$

8. $\ln|2x + 3| + \ln|x - 1| = 2 \ln|x|$

معرف بشرط: $\ln|2x + 3|$

$$2x + 3 = 0$$

$$E_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

معرف بشرط: $\ln|x - 1|$

$$E_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

معرف بشرط: $\ln|x|$

$$E_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

إذا شرط الحد:

$$E = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, 0, 1 \right\}$$

$$\ln|2x + 3| + \ln|x - 1| = 2 \ln|x|$$

$$\ln|2x + 3| + \ln|x - 1| = \ln|x|^2$$

$$\ln|(2x + 3)(x - 1)| = \ln x^2$$

$$\ln|2x^2 + x - 3| = \ln x^2$$

تكافئ:

$$|2x^2 + x - 3| = x^2$$

$$\text{إما } 2x^2 + x - 3 = x^2$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 + 12 = 13 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } 2x^2 + x - 3 = -x^2$$

$$3x^2 + x - 3 = 0$$

$$a = 3, b = 1, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 + 36 = 37 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2(3)}$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{37}}{6} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2(3)}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} \rightarrow \text{مقبول}$$

مش مهم تسبق غيرك ..

الأهم إنك تعشي طريقك ..

مش طريقهم  

$$\begin{cases} \ln(x-y) = 2 \ln(2) \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$$

شرط الحلا:

$$x > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(x)$$

$$y > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(y)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x-y) = 2 \ln(2) \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} \ln(x-y) = \ln(4) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} x-y = 4 \dots (1) \\ \frac{x}{y} = 3 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أن:

$$x = 3y \dots (*)$$

نعوض في (1):

$$3y - y = 4$$

$$2y = 4 \rightarrow y = 2$$

نعوض في علاقة (*):

$$x = 3(2) \rightarrow x = 6$$

وبالتالي حل الجملة:

$$(x, y) \in \{(6, 2)\}$$

التمرين الثالث: a عدد حقيقي موجب تماماًحل في \mathbb{R}^2 جملة معادلتين

$$\begin{cases} x \cdot y = a^2 \\ (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}$$

شرط الحلا: $x > 0, y > 0$

لدينا:

$$xy = a^2$$

نأخذ \ln للطرفين:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(a^2)$$

$$\ln(x \cdot y) = 2 \ln(a)$$

$$\ln(x) + \ln(y) = 2 \ln(a)$$

إذا حصلنا على جملة المعادلتين:

$$\ln(x) + \ln(y) = 2 \ln(a) \dots (1)$$

$$(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2 \dots (2)$$

من (1) نجد أن:

$$\ln(y) = 2 \ln(a) - \ln(x) \dots (*)$$

نعوض في (2):

$$(\ln(x))^2 + (2 \ln(a) - \ln(x))^2 = \frac{5}{2}(\ln(a))^2$$

$$(\ln(x))^2 + 4(\ln(a))^2 - 4(\ln(a)\ln(x)) + (\ln(x))^2 - \frac{5}{2}(\ln(a))^2 = 0$$

$$2(\ln(x))^2 + \frac{3}{2}(\ln(a))^2 - 4(\ln(a)\ln(x)) = 0$$

وهذه معادلة لوغاريتمية من النمط الثالث

بفرض: $t = \ln(x)$ فتكون: $t^2 = (\ln(x))^2$

نعوض:

$$2t^2 - 4(\ln(a))t + \frac{3}{2}(\ln(a))^2 = 0$$

باستخدام دلتا Δ :

$$a = 2, b = -4 \ln(a), c = \frac{3}{2}(\ln(a))^2$$

$$\begin{cases} \ln(x, y) = 2 \\ 2 \ln x - 3 \ln y = -1 \end{cases}$$

شرط الحلا:

$$x > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(x)$$

$$y > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(y)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x, y) = 2 \\ 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = -1 \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 2 \dots (1) \\ 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = -1 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد 3:

$$\begin{cases} 3 \ln(x) + 3 \ln(y) = 6 \dots (1)' \\ 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = -1 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1)' و (2) نجد:

$$5 \ln(x) = 5$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

نعوض في (2) نجد أن:

$$2 \ln(e) - 3 \ln(y) = -1$$

$$2 - 3 \ln(y) = -1$$

$$3 \ln(y) = 3$$

$$\ln(y) = 1$$

$$y = e$$

وبالتالي حلول الجملة هي:

$$(x, y) \in \{(e, e)\}$$

$$\begin{cases} (\ln(x) \ln(y)) = -2 \\ \ln(x) - \ln(y) = 3 \end{cases}$$

شرط الحلا:

$$x > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(x)$$

$$y > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(y)$$

من (2) نجد:

$$\ln(x) = 3 + \ln(y) \dots (*)$$

نعوض في (1):

$$(3 + \ln(y)) \ln(y) = -2$$

$$(\ln(y))^2 + 3 \ln(y) = -2$$

$$(\ln(y))^2 + 3 \ln(y) + 2 = 0$$

$$(\ln(y) + 2)(\ln(y) + 1) = 0$$

$$\ln(y) = -2 \rightarrow y = e^{-2}$$

نعوض في (*):

$$\ln(x) = 3 + \ln(e^{-2})$$

$$\ln(x) = 3 - 2 \ln(e)$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$\ln(y) = -1 \rightarrow y = e^{-1}$$

نعوض في (*):

$$\ln(x) = 3 + \ln(e^{-1})$$

$$\ln(x) = 3 - 1$$

$$\ln(x) = 2$$

$$x = e^2$$

وبالتالي حل الجملة:

$$(x, y) \in \left\{ \left(e, \frac{1}{e^2} \right), \left(e^2, \frac{1}{e} \right) \right\}$$

فما نحن إلا أيام، وما أعمارنا إلا الأثر .. 🤔💔

$$t(t-3) = 0$$

$$\text{إما } t = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } t = 3$$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3 \rightarrow \text{مقبول}$$

$$17. (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0$$

معرف بشرط:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0 \dots (*)$$

بفرض $t = \ln(x)$ فتكون $t^2 = (\ln(x))^2$

نعوض في (*):

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t-3)(t+1) = 0$$

$$\text{إما } t = 3$$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3 \rightarrow \text{مقبول}$$

$$\text{أو } t = -1$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1} \rightarrow \text{مقبول}$$

التعريف الثاني:حل في \mathbb{R}^2 جملة المعادلات اللاتية:

$$\begin{cases} \ln(x+y) = 2 \ln(2) \\ \ln x + \ln y = \ln(3) \end{cases}$$

شرط الحلا:

شرط الحلا:

$$x > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(x)$$

$$y > 0 \text{ معرف بشرط } \ln(y)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x+y) = \ln(2)^2 \\ \ln(x \cdot y) = \ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} x+y = 4 \dots (1) \\ x \cdot y = 3 \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد أن:

$$x = 4 - y \dots (*)$$

نعوض في (2) نجد:

$$(4-y)y = 3$$

$$4y - y^2 = 3$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-3)(y-1) = 0$$

$$y-3 = 0 \rightarrow y = 3$$

نعوض في (*):

$$x = 4 - 3 \rightarrow x = 1$$

$$y-1 = 0 \rightarrow y = 1$$

نعوض في (*):

$$x = 4 - 1 \rightarrow x = 3$$

وبالتالي حل الجملة:

$$(x, y) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$$

حل المعادلة:

$$A(x) = 0$$

$$(x-2)(4x^2-1) = 0$$

$$\text{إما } x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$\text{أو } 4x^2-1=0$$

$$4x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{4}$$

$$\text{إما } x=\frac{1}{2} \text{ أو } x=-\frac{1}{2}$$

استنتج حلول المعادلة:

$$4(\ln(x))^3 - 8(\ln(x))^2 - \ln(x) + 2 = 0$$

$$\text{بشرط } x > 0 \text{ نغرض: } \ln(x) = t$$

$$4t^3 - 8t^2 - t + 2 = 0$$

بالاستفادة من الطالب السابق نجد أن:

$$\text{إما } t=2 \text{ أو } t=\frac{1}{2} \text{ أو } t=-\frac{1}{2}$$

$$\ln(x)=2 \quad \ln(x)=\frac{1}{2} \quad \ln(x)=-\frac{1}{2}$$

$$x=e^2 \quad x=e^{\frac{1}{2}} \quad x=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$t=2 \rightarrow \ln(x)=2 \rightarrow x=e^2$$

$$t=\frac{1}{2} \rightarrow \ln(x)=\frac{1}{2} \rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$

$$t=-\frac{1}{2} \rightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

- ما رأيك أن نحاول مرة أخرى اليوم ؟

لسنا هنا إلا لنحاول، وفي إحدى المحاولات حتماً سنجد..

لا يزال في الوقت متسع لبعض المحاولات الجديدة، الفرص مستمرة، ما دمنا هنا الآن لم يوارنا التراب..

جهدك في تكرار المحاولة لا تذهب سدى بل تمهد لك طريق الوصول فلا تجزع ولا تيأس ولا تتوقف عن المسير..



$$\ln y = 2 \ln a - \frac{3}{2} \ln a$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln y = \ln \sqrt{a} \rightarrow y = \sqrt{a}$$

التعريف الرابع

ليكن لدينا كثير الحدود:

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$$

احسب $A(2)$ ثم بين أن:

$$A(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها

$$\star A(x) = 0 \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة}$$

استنتج حلول المعادلة:

$$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

الحل:

الطالب الأول:

حساب $A(2)$:

$$A(2) = 4(2)^3 - 8(2)^2 - 2 + 2$$

$$A(2) = 4(8) - 8(4) - 2 + 2$$

$$A(2) = 32 - 32 - 2 + 2$$

$$A(2) = 0$$

الطالب الثاني:

إثبات أن:

$$A(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

وحساب a و b و c

باستخدام القسمة الإقليدية نقسم المقدم

 $A(x)$ على المقدم $(x-2)$ فنجد أن:

$$\frac{4x^3 - 8x^2 - x + 2}{x-2} = 4x^2 - 1$$

$$4x^3 - 8x^2 - x + 2 = (x-2)(4x^2 - 1)$$

وهنا نجد أن:

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$$

$$A(x) = (x-2)(4x^2 - 1)$$

بالمقارنة نجد أن:

$$a = 4, \quad b = 0, \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4 \ln a)^2 - 4(2) \left(\frac{3}{2} (\ln a)^2\right)$$

$$= 16(\ln a)^2 - 12(\ln a)^2$$

$$= 4(\ln a)^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(\ln a)^2} = 2 \ln a$$

$$\text{إما } t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \ln a - 2 \ln a}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \ln a}{4} = \frac{\ln a}{2} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$= \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{a})$$

$$t_1 = \ln(\sqrt{a})$$

$$\ln x = \ln(\sqrt{a})$$

$$x = \sqrt{a}$$

نعوض في (*):

$$\ln y = 2 \ln a - \ln \sqrt{a}$$

$$\ln y = 2 \ln a - \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln y = \frac{3}{2} \ln a$$

$$\ln y = \ln(a)^{\frac{3}{2}}$$

$$y = (a)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{a^3}$$

$$\text{أو } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \ln a + 2 \ln a}{2(2)}$$

$$= \frac{6 \ln a}{4} = \frac{3}{2} \ln a = \ln(a)^{\frac{3}{2}}$$

$$t_2 = \ln(a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\ln x = \ln(a)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = (a)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \sqrt{a^3}$$

نعوض في (*):

$$\ln y = 2 \ln a - \ln \sqrt{a^3}$$

$$\ln y = 2 \ln a - \ln(a)^{\frac{3}{2}}$$

المترجمات اللوغاريتمية:

النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	الأنماط									
مترجمة تحوي $(\ln(x))^2$ و $(\ln(x))^3$	إشارة عدد لوغاريتمات تراجم	إشارة لوغاريتمات تراجم	شكل المترجمة									
حل المترجمة اللبئية												
<ul style="list-style-type: none"> * ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن * نحول لمعادلة ونحلها بدلالة x (كما ورد معنا في المعادلات اللوغاريتمية النمط الثالث) * ننظم جدول الإشارة وفق: <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>المقدار</td> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td>إشارة التراجم</td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> * نحدد S وهي المجالات التي تقابل كلمة محققة 	x	0	$+\infty$	المقدار			إشارة التراجم			<ul style="list-style-type: none"> * نحدد E شرط الحل * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد إشارة $\ln(a)$ تراجم * أي نعزل اللوغاريتم * نأخذ e للطرفين فنحصل على مترجمة * نحل هذه المترجمة * ولتكن مجموعة حلولها هي E' * تكون مجموعة حلول المترجمة هي: $S = E \cap E'$ 	<ul style="list-style-type: none"> * نحدد E شرط الحل * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $\ln(b)$ إشارة $\ln(a)$ تراجم * وهي مترجمة تكافئ: b إشارة a تراجم * نحل هذه المترجمة * ولتكن مجموعة حلولها هي E' * تكون مجموعة حلول المترجمة هي: $S = E \cap E'$ 	نص السؤال
x	0	$+\infty$										
المقدار												
إشارة التراجم												
			فكرة الحل									

التعريف الأول:

حل المتراجحات الآتية:

- $\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$
- $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$
- $\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$
- $\ln(3) \leq \ln(5 - x) + \ln(x - 1)$
- $\ln(x + 2) < 0$
- $\ln(2 - x) \geq 1$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$
- $(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) \leq 0$
- $(\ln(x))^2 > 25$
- $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 \geq 0$
- $(\ln(x))^2 \geq 6 - 5\ln(x)$

الحل:

1. $\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$

معرفة بشرط: $\ln(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 > 0$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$+$
> 0	p	p	p	p

$E_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

معرفة بشرط $\ln(-3x)$

$x < 0$

$E_2 =]-\infty, 0[$

إذا شرط الحل: $E =]-\infty, -2[$

$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$

تكافئ:

$x^2 - 4 \leq -3x$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

إما $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

أو $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	$+$
≤ 0	p	p	p	p

$E' = [-4, 1]$

تكون حلول المتراجحة:

$S = E \cap E' = [-4, -2[$

2. $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$

معرفة بشرط: $\ln(x)$

$x > 0$

$E_1 =]0, +\infty[$

معرفة بشرط: $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

$1 + \frac{2}{x} > 0$

$\frac{x + 2}{x} > 0$

$\frac{x + 2}{x} > 0$

تعدم البسط $x = 0$ وتعدم المقام $x = -2$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x + 2}{x}$	$+$	0	$-$	$+$
> 0	p	p	p	p

$E_2 =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

يكون شرط الحل:

$E =]0, +\infty[$

$\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$

تكافئ:

$1 + \frac{2}{x} \geq x$

$\frac{x + 2}{x} - x \geq 0$

$\frac{x + 2 - x^2}{x} \geq 0$

تعدم البسط:

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

إما $x = 2$

أو $x = -1$

تعدم المقام:

$x = 0$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
البسط	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
المقام	$-$	0	0	$+$	$+$
الكسور	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
≥ 0	p	p	p	p	p

$E' = [-1, 0[\cup]2, +\infty[$

تكون حلول المتراجحة:

$S = E \cap E' = [2, +\infty[$

3. $\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$

معرفة بشرط: $\ln(6 - x)$

$6 - x > 0 \rightarrow x < 6$

$E_1 =]-\infty, 6[$

معرفة بشرط: $\ln(x^2 - 3x)$

$x^2 - 3x > 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

إما $x = 0$

أو $x = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	$+$	0	$-$	$+$
> 0	p	p	p	p

$E_2 =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

إذا شرط الحل:

$E =]-\infty, 0[\cup]3, 6[$

$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$

$\ln(x^2 - 3x) \geq \ln(6 - x)^2$

تكافئ:

$x^2 - 3x \geq (6 - x)^2$

$x^2 - 3x \geq 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 3x - 36 + 12x - x^2 \geq 0$

$9x - 36 \geq 0$

$9x \geq 36$

$x \geq 4$

$E' = [4, +\infty[$

تكون حلول المتراجحة:

$S = E \cap E' = [4, +\infty[$

4. $\ln(3) \leq \ln(5 - x) + \ln(x - 1)$

معرفة بشرط: $\ln(5 - x)$

$5 - x > 0 \rightarrow x < 5$

$E_1 =]-\infty, 5[$

معرفة بشرط: $\ln(x - 1)$

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$E_2 =]1, +\infty[$

ومنه شرط الحل:

$E =]1, 5[$

$\ln(3) \leq \ln(5 - x) + \ln(x - 1)$

$\ln(3) \leq \ln((5 - x)(x - 1))$

$\ln(3) \leq \ln(5x - 5 - x^2 + x)$

$\ln(3) \leq \ln(-x^2 + 6x - 5)$

تكافئ:

$3 \leq -x^2 + 6x - 5$

$x^2 - 6x + 5 + 3 \leq 0$

$x^2 - 6x + 8 \leq 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 36 - 32 = 4 > 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
المقار	$+$	0	$-$	$+$
\leq	p	p	p	p

$E' = [2, 4]$

تكون حلول المتراجحة:

$S = E \cap E' = [2, 4]$

5. $\ln(x + 2) < 0$

شرط الحل:

$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$

$E =]-2, +\infty[$

$\ln(x + 2) < 0$

$x + 2 < 1$

$x < -1$

$E' =]-\infty, -1[$

تكون المتراجحة:

$S = E \cap E' =]-\infty, -1[$

6. $\ln(2 - x) \geq 1$

شرط الحل:

$2 - x > 0 \rightarrow x < 2$

$E =]-\infty, 2[$

$\ln(2 - x) \geq 1$

$2 - x \geq e$

$x \leq 2 - e$

$E' =]-\infty, 2 - e[$

تكون حلول المتراجحة:

$S = E \cap E' =]-\infty, 2 - e[$

7. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$

شرط الكل:

$$\frac{1}{x} > 0$$

نعدم المقام: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
بسط	+	+	+
مقام	-	0	+
كسر	-		+
> 0	م.ع		م

$$E =]0, +\infty[$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$$

$$\frac{1}{x} > e^2$$

$$\frac{1 - e^2 x}{x} > 0$$

نعدم البسط:

$$1 - e^2 x = 0$$

$$x = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

نعدم المقام:

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0	e^{-2}	$+\infty$
$1 - e^2 x$	+	+	0	-
x	-	0	+	+
$\frac{1 - e^2 x}{x}$	-		+	-
> 0	م.ع		م	م.ع

$$E' =]0, e^{-2}[$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' =]0, e^{-2}[$$

8. $(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) \leq 0$

شرط الكل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) \leq 0$$

$$(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) = 0$$

$$\text{إما } \ln(x) + 2 = 0$$

$$\ln(x) = -2$$

$$x = e^{-2}$$

$$\text{أو } \ln(x) - 3 = 0$$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3$$

x	0	e^{-2}	e^3	$+\infty$
المقار		+	0	+
≤ 0		م.ع		م.ع

$$S = [e^{-2}, e^3]$$

9. $(\ln(x))^2 > 25$

شرط الكل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 > 25$$

$$(\ln(x))^2 - 25 > 0$$

$$(\ln(x))^2 - 25 = 0$$

$$\text{بفرض: } t = \ln(x) \text{ فتكون: } t^2 = (\ln(x))^2$$

$$t^2 - 25 = 0$$

$$(t - 5)(t + 5) = 0$$

$$\text{إما } t - 5 = 0$$

$$t = 5$$

$$\ln(x) = 5$$

$$x = e^5$$

$$\text{أو } t + 5 = 0$$

$$t = -5$$

$$\ln(x) = -5$$

$$x = e^{-5}$$

x	0	e^{-5}	e^5	$+\infty$
المقار		+	0	+
> 0		م		م.ع

$$S =]0, e^{-5}[\cup]e^5, +\infty[$$

10. $(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 \geq 0$

شرط الكل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 \geq 0$$

$$(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0$$

$$\text{بفرض: } t = \ln(x) \text{ فتكون: } t^2 = (\ln(x))^2$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\text{إما } t = 3$$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3$$

$$\text{أو } t = -1$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	e^3	$+\infty$
المقار		+	0	+
≥ 0		م		م.ع

$$S =]0, e^{-1}[\cup [e^3, +\infty[$$

11. $(\ln(x))^2 \geq 6 - 5 \ln(x)$

معرف بشرط:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 \geq 6 - 5 \ln(x)$$

$$(\ln(x))^2 + 5 \ln(x) - 6 \geq 0$$

$$(\ln(x))^2 + 5 \ln(x) - 6 = 0$$

$$\text{بفرض: } t = \ln(x) \text{ فتكون: } t^2 = (\ln(x))^2$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$(t + 6)(t - 1) = 0$$

$$\text{إما } t = -6$$

$$\ln(x) = -6$$

$$x = e^{-6}$$

$$\text{أو } t = 1$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

x	0	e^{-6}	e	$+\infty$
المقار		+	0	+
≥ 0		م		م.ع

$$S =]0, e^{-6}[\cup [e, +\infty[$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا كثير الحدود وفق:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

$$\text{تحقق أن } P(-1) = 0$$

استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة

$$P(x) = (x + 1)Q(x) \text{ حيث } Q(x)$$

كثير حدود من الدرجة الثانية

$$\text{حل المتراجحة } P(x) \leq 0$$

استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة:

$$2 \ln(x) + \ln(2x + 5) \leq (2 - x)$$

الكل:

الطالب الأول:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2$$

$$= -2 + 5 - 1 - 2$$

$$= -5 + 5 = 0$$

الطالب الثاني:

نلاحظ أن $x = -1$ نعدم المقار ونقسمالمقار على $x + 1$ باستخدام القسمة

الإقليدية فنجد أن:

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$$

بالقارنة نجد أن:

$$Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

الطالب الثالث:

$$P(x) \leq 0$$

$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) \leq 0$$

$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$$

$$\text{إما } x = -1$$

$$\text{أو } 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 - 5}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 + 5}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
القوير الأول	-	-	0	+	+
القوير الثاني	+	0	-	-	0
الحداء	-	0	+	0	-
\leq	م		م.ع		م

$$E =]-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

حل المتراجحة:

$$2 \ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$

$$\text{معرف بشرط } \ln(2 - x)$$

$$2 - x > 0 \rightarrow x < 2$$

$$E_1 =]-\infty, 2[$$

$$\text{معرف بشرط } \ln(x)$$

$$x > 0$$

$$E_2 =]0, +\infty[$$

$$\text{معرف بشرط: } \ln(2x + 5)$$

$$2x + 5 > 0 \rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$E_3 =]-\frac{5}{2}, +\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]0, 2[$$

$$2 \ln x + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$

$$\ln x^2 + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$

$$\ln(x^2(2x + 5)) \leq \ln(2 - x)$$

تكافئ:

$$2x^3 + 5x^2 \leq 2 - x$$

$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$$

بالاستفادة من الطلب السابق:

لدينا:

$$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{2}$$

$$E' =]-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

إذا تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' = \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

التعريف الثالث:

ليكن لدينا كثير الحدود:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 16$$

الطلب الأول:

احسب $P(4)$ ثم ادرس إشارة $P(x)$.

$$P(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 16$$

$$= 64 - 48 - 16 = 0$$

دراسة إشارة $P(x)$:

$$P(x) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 16 = 0$$

نحل الطرف $x^3 - 3x^2 - 16 = 0$

باستخدام القسمة الاقليدية حيث نقسمه

على $x - 4$ ونجد أن:

$$P(x) = (x - 4)(x^2 + x + 4)$$

$$P(x) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\text{إما } x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{أو } x^2 + x + 4 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(4)$$

$$= 1 - 16 = -15 < 0$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	-	0	+
x^2+x+4	+	+	+
$P(x)$	-	0	+

الطلب الثاني: حل في \mathbb{R} المتراجحة الآتية:

$$\ln(4x^2 - 16) - 2 \ln(x) - \ln(7 - x) \geq 0$$

نوجد شرط الحل E :لدينا $\ln(4x^2 - 16)$ معرف بشرط:

$$4x^2 - 16 > 0$$

$$4x^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{إما } x = -2 \text{ أو } x = 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$4x^2-16$	+	0	-	0
> 0	م	م.ع	م	م

$$E_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

لدينا $\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$

$$E_2 =]0, +\infty[$$

لدينا $\ln(7 - x)$ معرف بشرط:

$$7 - x > 0 \rightarrow x < 7$$

$$E_3 =]-\infty, 7[$$

تكون E :

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 =]2, 7[$$

لدينا:

$$\ln(4x^2 - 16) - 2 \ln(x) - \ln(7 - x) \geq 0$$

$$\ln(4x^2 - 16) \geq 2 \ln(x) + \ln(7 - x)$$

$$\ln(4x^2 - 16) \geq \ln(x^2) + \ln(7 - x)$$

$$\ln(4x^2 - 16) \geq \ln(x^2(7 - x))$$

$$\ln(4x^2 - 16) \geq \ln(7x^2 - x^3)$$

نأخذ e للطرفين

$$4x^2 - 16 \geq 7x^2 - x^3$$

$$x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 16 \geq 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 16 \geq 0$$

من الطلب السابق نجد:

$$(x - 4)(x^2 + x + 4) \geq 0$$

$$(x - 4)(x^2 + x + 4) = 0$$

بالاستفادة من الطلب السابق نجد أن $x = 4$

نظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+
≥ 0	م.ع	م	م

$$E' = [4, +\infty[$$

تكون S :

$$S = E \cap E' = [4, 7[$$

ملاحظة هامة:

إذا كان لدينا معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ وتحتوي وسيط m نميز:

نص السؤال	كيف نختار العدد الحقيقي m	كيف نختار العدد الحقيقي m	كيف نختار العدد الحقيقي m
فكرة الحل	ليكون للمعادلة جذران مختلفان	ليكون للمعادلة جذر وحيد	ليكون للمعادلة مستحيلة الحل
	يكون للمعادلة جذران إذا تحقق: $\Delta > 0$	يكون للمعادلة جذر وحيد إذا تحقق: $\Delta = 0$	تكون المعادلة مستحيلة الحل إذا تحقق: $\Delta < 0$

$$4 - 4 \ln(m + 1) > 0$$

هذه المتراجحة لوغاريتمية من النمط الثاني:

شرط الحل:

لدينا $\ln(m + 1)$ معرف بشرط:

$$m + 1 > 0$$

$$m > -1$$

$$E =]-1, +\infty[$$

لدينا:

$$4 - 4 \ln(m + 1) > 0$$

$$-4 \ln(m + 1) > -4$$

$$\ln(m + 1) < 1$$

$$m + 1 < e$$

$$m < e - 1$$

$$E' =]-\infty, e - 1[$$

إذا تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' =]-1, e - 1[$$

$$m \in]-1, e - 1[\text{ أي:}$$

$$\text{أي: } -1 < m < e - 1$$

$$36 \ln(m + 2) = 16$$

$$\ln(m + 2) = \frac{16}{36}$$

$$\ln(m + 2) = \frac{4}{9}$$

تكافئ:

$$m + 2 = e^{\frac{4}{9}}$$

$$m = e^{\frac{4}{9}} - 2 \rightarrow \text{مقبول}$$

التعريف الثاني:

كيف نختار العدد الحقيقي m ليكونللمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m + 1)$ جذران مختلفان؟

$$a = 1, b = -2, c = \ln(m + 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(\ln(m + 1))$$

$$= 4 - 4 \ln(m + 1)$$

يكون للمعادلة حلان إذا تحقق:

$$\Delta > 0$$

التعريف الأول:

عين قيمة m التي تجعل المعادلة

$$x^2 - 4x + 9 \ln(m + 2) = 0$$

حل وحيد؟

الحل:

$$a = 1, b = -4, c = 9 \ln(m + 2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(1)(9 \ln(m + 2))$$

$$= 16 - 36 \ln(m + 2)$$

يكون للمعادلة حل وحيد إذا تحقق:

$$\Delta = 0$$

$$16 - 36 \ln(m + 2) = 0$$

شرط الحل:

لدينا $\ln(m + 2)$ معرف بشرط:

$$m + 2 > 0$$

$$m > -2$$

$$m \in]-2, +\infty[$$

لدينا:

$$16 - 36 \ln(m + 2) = 0$$

التابع اللوغاريتمي معرف بشرط: $0 < \dots$ مضمون اللوغاريتم

أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f

نحل المتراجحة: $0 < \dots$ مضمون اللوغاريتم تكون: مجموعة حلول المتراجحة $D_f = S \rightarrow$

ملاحظات:

نص السؤال	شكل التابع	التابع f مؤلف من لوغاريتمين	التابع f مؤلف من كسر ولوغاريتم	التابع f مؤلف من كسر ولوغاريتمين	إذا كان مضمون اللوغاريتم يحوي قيمة مطلقة
فكرة الحل	فكرة الحل	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم الأول * نوجد D_2 مجموعة تعريف اللوغاريتم الثاني * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \setminus \left\{ \begin{array}{l} \text{القيم التي} \\ \text{تعدم} \\ \text{المقام} \end{array} \right\}$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم الأول * نوجد D_2 مجموعة تعريف اللوغاريتم الثاني * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2 \setminus \left\{ \begin{array}{l} \text{القيم التي} \\ \text{تعدم} \\ \text{المقام} \end{array} \right\}$	* نعدم مضمون القيمة المطلقة * تكون: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \begin{array}{l} \text{القيم التي} \\ \text{تعدم مضمون} \\ \text{القيمة المطلقة} \end{array} \right\}$

تعريف:

أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f :

- $f(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \ln(x - 1)$
- $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
- $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$
- $f(x) = \ln(x) + \ln(x - 1)$
- $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x+2}$
- $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln(x)}$
- $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{2-\ln(x)}$
- $f(x) = \ln|x|$
- $f(x) = \ln|x - 1|$
- $f(x) = \ln|x^2 - 1|$

الحل:

1. $f(x) = \ln(x)$
معرف بشرط: $x > 0$
 $D_f =]0, +\infty[$

2. $f(x) = \ln(x - 1)$
معرف بشرط:
 $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$
 $D_f =]1, +\infty[$

3. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
 $x^2 - 1 > 0$
 $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$
إما $x = 1$
أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$
> 0	\neq	\neq	\neq	\neq

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

4. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

معرف بشرط: $0 < \frac{x-1}{3-x}$

نعدم البسط:

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

نعدم المقام:

$3 - x = 0 \rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x-1}{3-x}$	$-$	0	$+$	$-$
> 0	\neq	\neq	\neq	\neq

$D_f =]1, 3[$

5. $f(x) = \ln(x) - \ln(x - 1)$

معرف بشرط: $\ln(x)$

$x > 0$

$E_1 =]0, +\infty[$

معرف بشرط: $\ln(x - 1)$

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$E_2 =]1, +\infty[$

تكون D_f :

$D_f = E_1 \cap E_2 =]1, +\infty[$

6. $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x+2}$

معرف $\ln(x)$ بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$x + 2 = 0$

$x = -2$

$D_f = D_1 \setminus \{-2\} =]0, +\infty[$

7. $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln(x)}$

معرف $\ln(x)$ بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$\ln x = 0$

$x = 1$

$D_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$

8. $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{2-\ln(x)}$

معرف $\ln(x)$ بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$2 - \ln(x) = 0$

$\ln(x) = 2$

$x = e^2$

$D_f = D_1 \setminus \{e^2\}$

$=]0, e^2[\cup]e^2, +\infty[$

9. $f(x) = \ln|x|$

$x = 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

10. $f(x) = \ln|x - 1|$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

التنظير سهلا، الحركة أصعب. دوام الحركة أشد صعوبةً، والنبات لب المسألة، ولكن مقام أهله..

سنصعد في سرور فجر يوم ..
على بشرى وخير واصطفاء

$$\begin{aligned} \text{أو } x &= -1 \\ D_f &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. f(x) &= \ln|x^2 - 1| \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x - 1)(x + 1) &= 0 \\ \text{إما } x &= 1 \end{aligned}$$

نهايات التابع اللوغاريتمي:

ملاحظة	تعميمها	المبرهنة	الأولى
قيم نكتب تجاوزا: $\ln(0) = -\infty$ $\ln(+\infty) = +\infty$ $\ln(e) = 1$ $\ln(1) = 0$		$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	
لدينا: x كبير بينما الـ $\ln(x)$ صغير. ومنه نجد أن: لا نهاية = كبير صفر = صغير	$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 0$ $\lim_{\text{مقدار} \rightarrow +\infty} \frac{\text{مقدار}}{\ln(\text{مقدار})} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$	الثانية
عند ظهور المبرهنة في المقام فإن نهايتها عند الصفر هي (0^-) دوماً	$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \ln(\text{مقدار}) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$	الثالثة
	$\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 1$ $\lim_{\text{مقدار} \rightarrow 0} \frac{\text{مقدار}}{\ln(1+\text{مقدار})} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	الرابعة
		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$	الخامسة

المبرهنتات نفذ تم لا تعترض

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \frac{1}{x} + \ln(x) \\ D_f &=]0, +\infty[\\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \end{aligned}$$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + \ln(x) \\ &= \frac{1 + x \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1 + 0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = 0 \text{ علماً أن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$

$$4. f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- * توحيد المقامات
- * الضرب والقسمة
- * التباعد الاجتماعي
- * خواص لوغاريتمية (مناسبة)

التمرين الأول: أوجد D_f واحسب النهايات:

$$1. f(x) = x - \ln(x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = x - \ln(x)$$

$$= x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ علماً أن:}$$

$$2. f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0 \text{ علماً أن:}$$

النجاح الحقيقي يحتاج وقت

الاستمرارية هي السر

ملاحظات هامة جداً:

1. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة.
2. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرة أي:
- * يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
- * لا يوجد مبرهنة ← تعويض
3. التعويض هو استبدال x بالمسعى
4. في المبرهنة نحفظ: شكل التابع المسعى ونضع الناتج فوراً وعند اختلال أحدها فهذا يعني: عدم وجود مبرهنة إنما تعويض
5. تحذف كلمة \lim عند التعويض أي عند اختفاء x
6. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوّضها في المقام فقط
7. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك نصلح التابع باستخدام الإصلاح المناسب، حيث الإصلاحات:
- * النشر
- * إخراج عامل مشترك
- * تفرقة الكسور

$$14. f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$15. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2 \ln(\sqrt{x})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} \right) = +\infty \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$16. f(x) = x (\ln(x))^2$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = x (\ln(x))^2$$

$$= (\sqrt{x})^2 (\ln(x))^2$$

$$= (\sqrt{x} \ln(x))^2$$

$$= (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$= (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (2 \times 0)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \ln \sqrt{x}) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$9. f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$10. f(x) = (x^2 - x) \ln(x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x^2 - x) \ln x$$

$$= x^2 \ln x - x \ln x$$

$$= x \cdot x \ln x - x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (0)(0) - (0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$11. f(x) = (x+1) \ln(x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$12. f(x) = x \ln(x^2)$$

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = x \ln(x^2) = 2x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$13. f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

$$= \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2$$

$$= 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \ln \sqrt{x}) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$5. f(x) = x(1 - \ln(x))$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $0(\infty)$

$$f(x) = x(1 - \ln(x))$$

$$= x - x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x} (\ln(x) - 1)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$f(x) = \frac{1}{x} (\ln(x) - 1)$$

$$= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x - \ln(x)}{x}$$

$$= 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln(x)}$$

$$= \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)} \right) = +\infty \text{ :علماً أنّ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

4. $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+2)$

$\ln(2x+1)$ معرف بشرط:

$$2x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$D_1 =]-\frac{1}{2}, +\infty[$$

$\ln(x+2)$ معرف بشرط:

$$x+2 > 0 \rightarrow x > -2$$

$$D_2 =]-2, +\infty[$$

وهذا:

$$D_f =]-\frac{1}{2}, +\infty[$$

عند ال $(-\frac{1}{2})$:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (x+2) = \frac{3}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \ln(0) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\infty - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\infty$$

عند ال $(+\infty)$:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+2)$$

$$= \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = 2$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$$

النجاح الحقيقي يحتاج وقت

الاستمرارية هي السر

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$$\frac{x-1}{x+2} > 0$$

نعدم البسط: $x = 1$

نعدم المقام: $x = -2$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
البسط	-	-	0	+
المقام	-	0	+	+
الكسر	+		-	0
> 0	م		م.غ	م

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$$

عند ال $(-\infty)$:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 1$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

عند ال (-2) :

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

عند ال (1) :

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

عند ال $(+\infty)$:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 1$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

3. $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x)$

$\ln(x)$ معرف بالشروط: $x > 0$

$$D_1 =]0, +\infty[$$

$\ln(x-1)$ معرف بشرط:

$$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$D_2 =]1, +\infty[$$

$$D_f = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$$

عند ال (1) :

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(0) - \ln(1) = -\infty$$

عند ال $(+\infty)$:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$$

17. $f(x) = x(\ln(x))^3$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = x(\ln(x))^3$$

$$= (\sqrt[3]{x})^3 (\ln(x))^3$$

$$= (\sqrt[3]{x} \ln(\sqrt[3]{x}))^3$$

$$(3. \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (3 \times 0)^3 = 0$$

18. $f(x) = x + x(\ln(x))^2$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$f(x) = x + x(\ln(x))^2$$

$$= x + (\sqrt{x})^2 (\ln(x))^2$$

$$= x + (\sqrt{x} \ln(x))^2$$

$$= x + (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$= x + (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 4(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})) = 0 \text{ علماً أنّ:}$$

ملاحظة هامة:

أحياناً يكون التابع f عبارة عن لوغاريتم

مضمونه تابع آخر $g(x)$ فإننا للإيجاد نهاية

التابع f

نتبع الخطوات:

* نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$

* نعوض ناتج النهاية بدلاً من المضمون

التعريف الثاني: أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = \ln(x-1)$

إيجاد D_f :

$$x-1 > 0$$

$$x > 1 \rightarrow D_f =]1, +\infty[$$

إيجاد النهايات:

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

لذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

إذا كان التابع f من الشكل:

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{\text{مقدار}} \right)$$

فإنه لإزالة حالة عدم التعيين عند ظهورها نميز:

المسعى	كيفية الإزالة
لا نهاية	نستخدم تغيير المتحول
القيمة التي	نستخدم الخواص
تعدم المقدار	اللوغاريتمية

طريقة تغيير المتحول:

١. نفرض متحول جديد وفق:

$$1 + t = \text{مضمون اللوغاريتم}$$

٢. نزل t

٣. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض

المسعى القديم في علاقة t ٤. نكتب x بدلالة t ٥. نعوض في التابع f أي نكتب التابع f بدلالة t

٦. نصلح ونوجد النهاية

تدريب:

أوجد D_f واحسب النهايات:

$$1. f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] 0, +\infty[$$

إيجاد النهاية عند $(-\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(-\infty)$

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

نحتاج تغيير متحول:

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{t}$$

لذا كان: $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

إيجاد النهاية عند (-1) :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

إيجاد النهاية عند (0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = x \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$= x(\ln(x+1) - \ln(x))$$

$$= x \ln(x+1) - x \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (0)(0) - (0) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

إيجاد النهاية عند $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(+\infty)$

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

نحتاج تغيير متحول:

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{t}$$

لذا كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$2. f(x) = (x+2) \ln \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)$$

$$D_f =] - \infty, -3[\cup] -2, +\infty[$$

إيجاد النهاية عند $(-\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x+2) \ln \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)$$

نحتاج تغيير متحول:

لتكن:

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x+2}$$

$$t = \frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{t} = x+2$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{t} - 2$$

لذا كان: $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = \left(\frac{1}{t} - 2 + 2 \right) \ln(1+t)$$

$$= \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

إيجاد النهاية عند (-3) :

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = (-1)(-\infty) = +\infty$$

إيجاد النهاية عند (-2) :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x+2) \ln \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (x+2) \ln \left(\frac{x+3}{x+2} \right) \\ &= (x+2) [\ln(x+3) - \ln(x+2)] \\ &= (x+2) \ln(x+3) - (x+2) \ln(x+2) \end{aligned}$$

لتكن:

$$t = x+2$$

$$x = t-2$$

لذا كان: $x \rightarrow -2$ فإن $t \rightarrow 0$

$$= t \ln(t+1) - t \ln(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (t \ln(t+1) - t \ln(t))$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t \ln t) = 0$$

إيجاد النهاية عند $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

نحتاج تغيير متحول:

$$f(x) = (x+2) \ln \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)$$

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x+2}$$

$$t = \frac{1}{x+2} \rightarrow x = \frac{1}{t} - 2$$

لذا كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \right) = 1$$

اشتقاق التابع اللوغاريتمية:

التابع اللوغاريتمية اشتقاق على مجموعة

تعريفه ومشتقه هو:

مشتق المضمون على المضمون نفسه وفق:

$$f(x) = \ln(g(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

تدريب:

أوجد التابع المشتق للتابع f :

$$1. f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$2. f(x) = \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{(3-x)'}{3-x} = \frac{-1}{3-x}$$

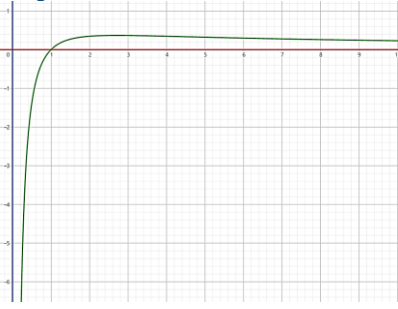
$$3. f(x) = \ln(x^2)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

ليست خطوة واحدة عملاقة التي حققت

الإنجاز .. إنما مجموعة خطوات صغيرة

الرسم:



$$f(x) = x \ln x$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = (x)' \ln x + (\ln x)'(x)$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} \in D_f \rightarrow f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	\times	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	0	\searrow	\nearrow	$+\infty$

التحضير للرسم:

مقاربات: لا يوجد

قيم حدية:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e} \text{ حدية صغرى محلياً.}$$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل:

$$\text{نحل المعادلة } f(x) = 0$$

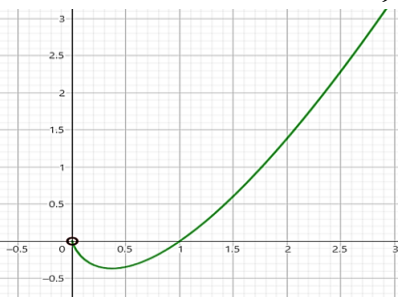
$$x \ln x = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

$$\text{أو } \ln x = 0 \rightarrow x = 1$$

النقطة (0,0) نقطة مفرغة.

الرسم:



انظر للغيب بقلبي يؤمن أن رب

الخير لن يأتي إلا بالخير..



$$= 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x}$$

$$13. f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

دراسة تغيرات تابع لوغاريتمي:
تمرين:

ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

التابع f مستمر ومعرف على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x) - (x)'(\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e \in D_f \rightarrow f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow 0

التحضير للرسم:

المقاربات:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

القيم الحدية:

$$f(e) = \frac{1}{e} \text{ حدية كبرى محلياً}$$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: لا يوجد

مع محور الفواصل:

$$\text{نحل المعادلة: } f(x) = 0$$

$$\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\ln(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$4. f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{x}$$

$$5. f(x) = \ln(\sin x)$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$6. f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)'}{\frac{x+3}{x-1}} = \frac{\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}}{\frac{x+3}{x-1}}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$7. f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2 - 4}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x+1}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + x}$$

$$9. f(x) = x - x \ln x$$

$$f'(x) = (x)' - [(x)' \ln x + (\ln x)'x]$$

$$= 1 - \left[\ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x\right] = 1 - \ln(x) - 1$$

$$= \ln x$$

$$10. f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \ln x)'x - (x)'(1 - \ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}x - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-2 + \ln x}{x^2}$$

$$11. f(x) = x^2 - 8x + 9 + 6 \ln x$$

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$$

$$12. f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)'}{\frac{x}{x-1}}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = 0$$

$$1 \neq 0$$

مستحيطة الحد.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 0

التحضير للرسم:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل: لا يوجد.

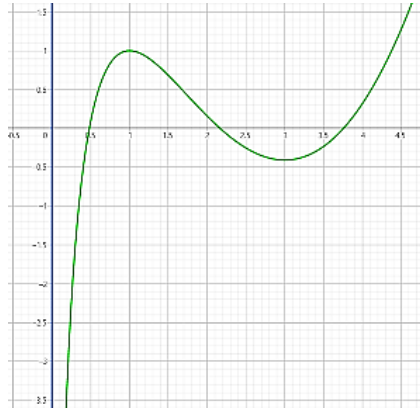
الرسم:



لو أن الغاية بسيطة لما أجهدنا ..

لكن يُؤنسنا أن التعب بقدر الضمغى

الرسم:



$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$I =]0, +\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

التابع f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)'$$

$$= \frac{(x)'(x+1) - (x+1)'(x)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6 \ln x$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على I :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 8 + \frac{6}{x} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 8x + 6}{x} = 0$$

$$2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

إما $x = 3$; $f(3) = -7 + 6 \ln 3$

أو $x = 1$; $f(1) = 1$

x	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$\searrow -7 + 6 \ln 3$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

القيم الحدية:

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(3) = -7 + 6 \ln 3$ قيمة حدية

صغرى محلياً.

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x) = 0$

بلاها كثرة الغلبة.

دراسة تابع لحل معادلة مختلطة:

$$x^2 + 1 - \ln(3) = 0 \leftarrow \text{معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$x^2 + 1 - \ln(x) = 0 \leftarrow \text{معادلة مختلطة}$$

حل المعادلة الآتية

نعلم أن المعادلة المختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ومن أجل ذلك فإننا نبيع الخطوات:

١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن

٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $g(x) =$

٣. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها

٤. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:

هل ينعدم $g(x)$ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟

* الحلا: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نعوض قيم تجريبية

② إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيطة الحد

حل المعادلات الآتية:

$$\ln(x) + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

هذه المعادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية.

لكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{x \ln x + 1 - x}{x}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x - 1 = 0$$

$$x = 1 \rightarrow g(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +
$g(x)$		$+\infty \searrow$	0 ↗ $+\infty$

اسأل نفسك هلا ينعدم $g(x)$ ؟
نعم ينعدم.

تلاحظ أن $0 \in g(x)$ ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل واحد هو $x = 1$.

ستنال ما كنت تسعى إليه ..

ستصل إلى ما كنت تريد يوماً 🍀💖

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +
$g(x)$		$+\infty \searrow$	2 ↗ $+\infty$

اسأل نفسك هلا ينعدم $g(x)$ ؟
لا ينعدم

تلاحظ أن $0 \notin g(x)$ ومنه للمعادلة

$g(x) = 0$ لا تنعدم فهي مستحيلة الحل.

$$\ln x + \frac{x+1}{x} = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} = \frac{x \ln x + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

لا تخلي المختلطة تأخذك بالعجة ..

ادرس تغيرات التابع f

حكمة

نصر السؤال

فكرة الحل

1. نحدد مجموعة تعريف التابع

2. نوجد النهايات والصور

3. نوجد $f'(x)$

4. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$

نستخدم أن المعادلة مختلطة ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية:

✎ نكتب: سنعود بعد قليل (سيستون قناة المستقبل)

1. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = f'(x)$

2. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ ونظم جدولاً بها

3. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:

✎ هل ينعدم $g(x)$ ؟ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل ؟

* الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل

② إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نستخدم قيم تجريبية

✎ نكتب: عدنا ونميز:

لا يوجد للمعادلة حل أي $f'(x)$ لا ينعدم

يوجد للمعادلة حل α أي ينعدم $f'(x)$ عند α نوجد $f(\alpha)$

4. ننظم جدول تغيرات التابع f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x^2} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow g(1) = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0 +
$g(x)$		$+\infty \searrow$	2 ↗ $+\infty$

$$\ln x + \frac{x+1}{x} = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} = \frac{x \ln x + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

تمرين:

في كل من الحالتين الآتيتين ادرس التابع f

على $I = \mathbb{R}_+^*$ وارسم خطه البياني:

$$f(x) = (x+1) \ln(x)$$

$$I = \mathbb{R}_+^*$$

التابع f معرف على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 = -2 \rightarrow \text{مستحيطة الحل}$$

تنظم جدول تغيرات التابع g :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		\nearrow
		$+\infty$

سألك نفسك ههنا هل $g(x)$ ينعدم؟

نعم ينعدم.

نلاحظ أن $g(1) = 0$ إذاً: $x = 1$

هو حل المعادلة $f'(x) = 0$.

(المشتق ينعدم عند $x = 1$)

عندنا..

$$f(1) = 1$$

تنظم جدول تغيرات التابع f :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$		$+\infty$	\searrow
		1	\nearrow
			$+\infty$

نرسم C_f :

المقاربات:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

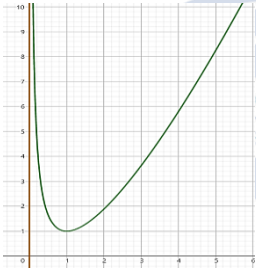
القيم الحدية:

$f(1) = 1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التقاطع مع محور الترتيب: لا يوجد

التقاطع مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسم:



$$f(x) = \frac{1}{x} + x \ln(x)$$

$$I = \mathbb{R}_+^*$$

التابع f معرف ومستمر على $]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \ln x + 1$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-1}{x^2} + \ln x + 1 = 0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية سنعود بعد قليلاً..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{-1}{x^2} + \ln x + 1$$

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{2 + x^2}{x^3}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{2 + x^2}{x^3} = 0$$

$$2 + x^2 = 0$$

نلاحظ أن $g(x)$ لا ينعدم إذاً المعادلة مستحيطة الحل و $f'(x)$ لا ينعدم. عندنا..

تنظم جدول تغيرات التابع f :

x	0	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		\nearrow	$+\infty$

نرسم C_f :

المقاربات:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور الترتيب: لا يوجد

التقاطع مع محور الفواصل

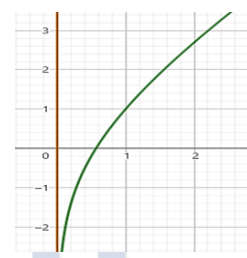
$$f(x) = 0$$

$$(x + 1) \ln x = 0$$

مرفوض $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$

$$\ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$$

الرسم:



العوذ أنت ورب القلب

أدري بميعاده..



أدري بميعاده..

دراسة تابع لحل متراجحة مختلطة:

أثبت صحة المتراجحة

نص السؤال

فكرة الحل

1. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن

2. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $g(x) =$

3. ندرس اطراد التابع $g(x)$ (دراسة تغيرات دون نهايات) وتنظم جدولاً بها بحيث نحدد إشارة $g'(x)$

4. بالاعتماد على حقل $g(x)$ نجري المناقشة الآتية:

ما هي إشارة $g(x)$ ؟

* الحل: يتم تحديدها من حقل $g(x)$ بالاعتماد على قيم $g(x)$ وليس عبر الأسمم يمكن تحديد الإشارة باستخدام أسلوب السرقة (للال)

5. ثبت صحة المتراجحة

نلاحظ أن:

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x + 1) - x - 1 < 0$$

$$\ln(x + 1) < x + 1$$

محقة

$$= \frac{1 - x - 1}{x + 1} = \frac{-x}{x + 1}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-x}{x + 1} = 0$$

$$x = 0$$

$$g(0) = -1$$

تنظم جدول الاطراد

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0
$g(x)$		\nearrow	-1
			\searrow

التعريف الأول:

أثبت أنه أي x كان $x > -1$ كان:

$$\ln(x + 1) < x + 1$$

الحل:

$$\ln(x + 1) < x + 1$$

$$\ln(x + 1) - x - 1 < 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $] -1, +\infty[$

وفق:

$$g(x) = \ln(x + 1) - x - 1$$

التابع g اشتقاقي على $] -1, +\infty[$ ولدنيا:

$$g'(x) = \frac{1}{x + 1} - 1$$

التعمير الثاني:

حل العترجة الآتية: $\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$
الحل:

$$\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

$$\ln x - \frac{x-1}{x} \geq 0$$

ليكن التابع g المعروف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

نوحده المقامات:

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

نعلم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1 \rightarrow g(1) = 0$$

نظم جدوا الأطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		\(\searrow\) 0 \(\nearrow\)	

نلاحظ أن: $g(x) \geq 0$

$$\ln x - \frac{x-1}{x} \geq 0$$

$$\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

التعمير الثالث:

أثبت أنه:

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2 \text{ أياً كان } x > 0$$

وباختيار $x = e^2$ و $x = \frac{1}{e}$ احصر e .

الحل:

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعروف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعلم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$1-\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \rightarrow g(1) = 0$$

نرسم جدوا اللطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
$g(x)$		\(\nearrow\) 0 \(\searrow\)	

نلاحظ أن:

$$g(x) \leq 0$$

$$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

$$\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$$

محققة.

الحصر:

من جهة أولى: باختيار $x = e^2$

$$\ln e^2 \leq 2\sqrt{e^2} - 2$$

$$2\ln e \leq 2e - 2$$

$$2 \leq 2e - 2$$

$$-2e \leq -4$$

$$e \geq 2$$

من جهة ثانية: باختيار $x = \frac{1}{e}$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq 2\sqrt{\frac{1}{e}} - 2$$

$$-\ln(e) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$

$$-1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

نضرب بـ \sqrt{e} :

$$\sqrt{e} \leq 2$$

نربع:

$$e \leq 4$$

مما سبق نجد أن:

$$2 \leq e \leq 4$$

التعمير الرابع:

أثبت أن:

$$\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1) \text{ أياً يكن } x > 0$$

واستنتج أن $2 < e < 4$ باختيار قيم

مناسبة للعدد

الحل:

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعروف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعلم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$1-\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \rightarrow g(1) = 0$$

نرسم جدوا اللطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
$g(x)$		\(\nearrow\) 0 \(\searrow\)	

نلاحظ أن:

$$g(x) \leq 0$$

$$\ln x - 2\sqrt{x} + 2 \leq 0$$

$$\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2 \rightarrow \text{محققة}$$

الحصر:

$$2 < e < 4$$

من جهة أولى: باختيار $x = e$

$$\ln e \leq 2(\sqrt{e} - 1)$$

$$1 \leq 2\sqrt{e} - 2$$

$$3 \leq 2\sqrt{e}$$

$$\frac{3}{2} \leq \sqrt{e}$$

نربع الطرفين:

$$\frac{9}{4} \leq e$$

من جهة ثانية باختيار $x = \frac{1}{e}$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}} - 1\right)$$

$$-1 \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$

نضرب بـ \sqrt{e} :

$$\sqrt{e} \leq 2$$

نربع الطرفين:

$$e \leq 4$$

مما سبق نجد:

$$\frac{9}{4} \leq e \leq 4$$

إذاً:

$$2 < e < 4$$

لا تترك لحظة..

دون أن تسأل الله الفهم عند الجيرة، والحكمة عند الشتات، والقوة عند الخوف.

والثبات عند الارتجاج، وأن يجعل صدرك جثة مهما ضاقت حولك الحياة، واسأله ألا تعيد الخطى حيث الأسبق، بل الأصحة وإن أردت مزيداً..
فاسأل الله أن تكون له وحده، خالصاً فخلصاً، نجماً لا يضره قلة الوهج، ولا تغريه زينة الناظرين، ولا ينطفئ إن لم يصفق له أحد، يأخذ مكانه بقوة، يكمل
مهفته، يرفع رايته، يحرك السفينة كأنه الناجي الوحيد، يضبط شراع الأية كل لحظة، إن تعثر قام، وإن مال استقام، هو أمة وحده، كوناً بما حوى.

يا نجبة، تمسك جيداً، لا بأس أن تهترئ، لكن لا تغفلت يدك. ♥

حكمة	نص السؤال	فكرة الحل
لا تخلي المختلطة تأخذك بالعطية.	ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمستقيم Δ	
①	نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_T$	
②	نعدم الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$ نتصمم أنها خيط لا يمكن حله بالطرق التقليدية ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية	
✍	نكتب: سنعود بعد قليل (سيستون قناة المستقبل)	
١.	نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = h(x)$	
٢.	ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها	
٣.	بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:	
٤.	ما هي إشارة $g(x)$ ؟	
*	الحل: نحدد من حقل $g(x)$ من جدول تغيرات $g(x)$	
✍	نكتب عدنا	
③	ننظم جدول الوضع النسبي بالاعتماد على جدول تغيرات التابع $g(x)$	

تفرياً:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(1+x)} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطالب الأول:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f وفسر النتيجة هندسياً
الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2}{\ln(1+x)} - 0}{x - 0} = \frac{\frac{x^2}{\ln(1+x)}}{x} = \frac{x \ln(1+x)}{\ln(1+x)} = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} \right) = 1$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

التفسير الهندسي:

الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 1$ في

النقطة $A(0,0)$ ومعادلة الماس:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = x$$

الطالب الثاني:

ادرس الوضع النسبي للخط البياني C_f

والمماس T

الحل:

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_T = \frac{x^2}{\ln(1+x)} - x$$

نوجد المقامات:

$$= \frac{x^2 - x \ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

نعدم الفرق:

$$f(x) - y_T = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x \ln(1+x)}{\ln(1+x)} = 0$$

$$x^2 - x \ln(1+x) = 0$$

$$x(x - \ln(1+x)) = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

$$\text{أو } x - \ln(1+x) = 0$$

خيط لا يمكن حله بالطرق التقليدية

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع h المعرف على $] -1, +\infty[$ وفق:

وفق:

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

التابع h معرف ومستمر على $] -1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

$$= (1+x) \left(\frac{x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) = 0$$

التابع h اشتقاقي على $] -1, +\infty[$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x}{1+x} = 0$$

$$x = 0$$

$$h(0) = 0$$

نرسم جدول الاطراد:

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$		$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$	

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 0$

إذاً الفرق $f(x) - y_T$ ينعدم عند $x = 0$ عدنا..

تنظم جدول الوضع النسبي:

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		+ 0 +	
الوضع النسبي		T فوق C 0 T فوق C	

لدينا $(0,0)$ نقطة مشتركة:

مسودة:

كيفية وضع الإشارات في الجدول:

$$f(x) - y_T = \frac{x^2 - x \ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

تجريب (1) بعد الصفر.

$$\frac{1 - \ln 2 \dots (+)}{\ln 2 \dots (+)}$$

تجريب $\left(-\frac{1}{2}\right)$ قبل الصفر.

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} \dots (-)}{-\ln 2 \dots (-)}$$

المماس المشترك:

نص السؤال أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0

فكرة الحل

١. ثبت أن $f(x_0) = g(x_0)$

٢. ثبت أن $f'(x_0) = g'(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$
 $y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.
 التابع g اشتقاقي على $]-1, +\infty[$ ولدنيا:
 $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$
 نطم جدول تغيرات التابع g :

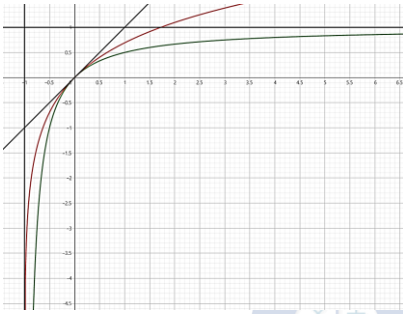
x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$-\infty$ ↗ 1

التحضير للرسم C_g :
 المقاربات:

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو oy^- .
 $y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.
 المعاسات:

$T: y = x$
 القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور الترتيب: (0,0)
 التقاطع مع محور الفواصل: (0,0)
 الرسم:



التعريف الثاني:

C_g و C_f هما الخطان البيانيان للتابعين
 المعرفين على \mathbb{R}_+^* وفق:

$$f(x) = \ln(x) ; g(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

الطالب الأول:

تحقق أن $f(x) \geq g(x)$ أيًا كانت x من \mathbb{R}_+^*
 الحل:

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$$

$$\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

ليكن لدينا التابع $h(x)$ المعرف على

$]0, +\infty[$ وفق:

$$h(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

التابع h اشتقاقي على $]0, +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x^2} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1 \rightarrow h(1) = 0$$

إذا C_g و C_f يقبلان معاً مشترك في
 النقطة التي فاصلتها $x = 0$
 كتابة معادلة المعاس:
 تحديد الميل: $m = 1$
 تحديد النقطة $A(0,0)$
 المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$$T: y = x$$

استنتاج الوضع النسبي لـ C_g و C_f
 لدينا من الطلب الأول:

$$g(x) \leq f(x)$$

$$g(x) - f(x) \leq 0$$

إذا: C_g تحت C_f

الطالب الثالث:

ادرس تغيرات كم من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستقيماً من رسم المعاس المشترك
 الحل:

$$f(x) = \ln(x+1)$$

التابع f معرف ومستمر على

$]-1, +\infty[$ ولدنيا

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-1, +\infty[$ ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x+1} = 0$$

مستحيلة الحل.

نظم جدول التغيرات التابع f

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

تحضيرات الرسم C_f :

المقاربات $x = -1$ مقارب شاقولي نحو oy^-
 المعاسات:

$$T: y = x$$

x	0	1
y	0	1
النقطة	(0,0)	(1,1)

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور الترتيب:

$$(0, f(0)) \Rightarrow (0,0)$$

التقاطع م محور الفواصل:

نحل المعادلة: $f(x) = 0$

$$\ln(x+1) = 0$$

$$x+1 = 1$$

$$x = 0 \rightarrow (0,0)$$

دراسة تغيرات التابع g :

$$g(x) = \frac{x}{x+1}$$

التابع g معرف ومستمر على

$]-1, +\infty[$ ولدنيا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو oy^-

التعريف الأول:

في معلم متجانس C_g و C_f هما على
 التوالي الخطان البيانيان للتابعين g و f
 المعرفين على المجال $I =]-1, +\infty[$
 وفق:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} ; f(x) = \ln(x+1)$$

الطالب الأول:

أثبت أن $g(x) \leq f(x)$ أيًا يكن x من I
 الحل:

$$g(x) \leq f(x)$$

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$$

$$\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \leq 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.
 ليكن لدينا التابع $h(x)$ المعرف على I وفق:

$$h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$$

التابع h اشتقاقي على I ومشتقه:

$$h'(x) = \frac{(1)(x+1) - (x)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{-x}{(x+1)^2} = 0$$

$$x = 0 \rightarrow h(0) = 0$$

نظم جدول الاطراد:

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+ 0 -	
$h(x)$		↗ 0 ↘	

تلاحظ أن:

$$h(x) \leq 0$$

$$g(x) - f(x) \leq 0$$

$$g(x) \leq f(x)$$

محققة.

الطالب الثاني:

أثبت أن C_g و C_f يقبلان معاً مشتركاً في

النقطة التي فاصلتها $x = 0$ واستنتج

الوضع النسبي لـ C_g و C_f

الحل:

الشرط الأول:

$$f(0) = 0$$

$$g(0) = 0$$

$$\rightarrow f(0) = g(0)$$

محققة.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$\Rightarrow g'(0) = f'(0)$$

محققة.

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$		\searrow	\nearrow

تلاحظ أن:

$$h(x) \geq 0$$

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \text{محققة}$$

الطالب الثاني:

أثبت أن C_f و C_g يقبلان معامساً مشتركاً في T في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها ثم اكتب معادلة T .
الحل:
لإيجاد النقطة المشتركة:
نحل المعادلة:

$$f(x) = g(x)$$

$$\ln(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.
ليكن لدينا التابع $l(x)$ المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$l(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

التابع $l(x)$ معرف ومستمر على $[0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$L(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

$$L(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\ln x - \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{x} (x \ln x - x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = +\infty(1) = +\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$l'(x)$		-	+
$l(x)$		$+\infty$	\searrow 0 \nearrow $+\infty$

تلاحظ أن:

$$\ln(x) = 0 \text{ ومنه للمعادلة } 0 \in l(x)$$

حله وحيد $x = 1$

إذاً النقطة المشتركة $B(1,0)$

إثبات أنه يقبل معامساً مشتركاً:

الشرط الأول:

$$f(1) = g(1)$$

حيث:

$$f(1) = 0$$

$$g(1) = 0$$

$$\rightarrow f(1) = g(1)$$

محققة

الشرط الثاني:

$$f'(1) = g'(1)$$

حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow g'(1) = 1$$

$$\rightarrow f'(1) = g'(1)$$

محققة

إذاً الخط البياني يقبل معامساً مشتركاً.

كتابة معادلة المماس:

$$m = 1 \text{ تحديد الميل}$$

$$B(1,0) \text{ تحديد النقطة}$$

$$T: y = m(x - x_B) + y_B$$

$$T: y = (1)(x - 1) + 0$$

$$T: y = x - 1$$

تمارين بين الماضي والحاضر:

التعريف الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعللاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(Ax + 1)}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases}$$

احسب قيمة A إذا علمت أن f مستمر على \mathbb{R}

الحل:

بما أن التابع f مستمر على \mathbb{R} فإنه يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \dots (*)$$

إيجاد $f(0)$:

$$f(0) = 3$$

إيجاد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\ln(Ax + 1)}{x}$$

$$= A \cdot \frac{\ln(Ax + 1)}{Ax}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A(1) = A$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(Ax + 1)}{Ax} \right) = 1$$

نعوض في (*):

$$A = 3$$

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعللاقة:

$$f(x) = \begin{cases} m + 2 & ; x \neq 0 \\ \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x} & ; x = 0 \end{cases}$$

احسب قيمة m إذا علمت أن f مستمر على \mathbb{R}

الحل:

بما أن التابع f مستمر على \mathbb{R} فإنه يتحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \dots (*)$$

إيجاد $f(0)$:

$$f(0) = m + 2$$

إيجاد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{\sin 2x} \cdot \ln(1 + 5x)$$

$$= \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$= \frac{1}{2 \sin 2x} \cdot 5 \cdot \frac{\ln(1 + 5x)}{5x}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{5}{2} (1)(1) = \frac{5}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 5x)}{5x} \right) = 1$$

نعوض في (*):

$$\frac{5}{2} = m + 2$$

$$m = \frac{5}{2} - 2 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

التعريف الثالث:

تأمل التابع f المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln(x)) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر.

الحل:

الطالب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(1 - \ln(x))}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \cdot \ln(x)) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln(x)) = 0$$

الطالب الثاني:

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر.

ثق بالوصول ما دمت تكافح 🍀🏆👏

التعريف الرابع:

ليكن g التابع المعرف على

$$I =]-1, +\infty[\text{ وفق العلاقة:}$$

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{2})}{x-1}$$

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

$$g(1) = \ln\sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2x+2}$$

$$g'(1) = \frac{1}{4}$$

استنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{2})}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x-1} \right) = g'(1) = \frac{1}{4}$$

التعريف الخامس:

احسب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ وفق:

$$g(x) = \ln(1 + \sin x)$$

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$g'(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x} \right) = g'(0) = 1$$

التعريف السادس:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$

المعطى بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$

أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

احسب $f'(x)$ على $]0, +\infty[$

استنتج مشتق التابع g المعرف على

المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{\sin x} \ln(1 + \sin x)$$

الحل:

الطلب الأول:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0(1) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط

البياني يقبل معاملاً ميله $m = 0$ في

النقطة $A(0,0)$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0$$

الطلب الثاني:

التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' \ln(1+x) + (\ln(1+x))' \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \cdot \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

الطلب الثالث:

$$g(x) = f(\sin x)$$

$$g'(x) = (\sin x)' f'(\sin x)$$

$$= \cos x \cdot \left[\frac{\ln(1 + \sin x)}{2\sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{1 + \sin x} \right]$$

التعريف السابع:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$

المعطى بالعلاقة $f(x) = x \ln(1 + \sqrt{x})$

أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

احسب $f'(x)$ على $]0, +\infty[$

استنتج مشتق التابع g المعرف على

المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = x^2 \ln(1+x)$$

الحل:

الطلب الأول:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x \ln(1 + \sqrt{x}) - 0}{x - 0}$$

$$= \ln(1 + \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط

البياني يقبل معاملاً ميله $m = 0$ في

النقطة $A(0,0)$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0$$

الطلب الثاني:

$$f'(x) = (x)' \ln(1 + \sqrt{x}) + (\ln(1 + \sqrt{x}))' \cdot x$$

$$= (1) \ln(1 + \sqrt{x}) + \frac{(\sqrt{x})'}{1 + \sqrt{x}} \cdot x$$

$$= \ln(1 + \sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x$$

$$= \ln(1 + \sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2 + 2\sqrt{x}}$$

الطلب الثالث:

$$g(x) = f(x^2)$$

$$g'(x) = (x^2)' f'(x^2)$$

$$g'(x) = 2x \left(\ln(1+x) + \frac{x}{2+2x} \right)$$

$$g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{2x^2}{2+2x}$$

التعريف الثامن:

ليكن f تابع معرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = x + 5$$

جوار $-\infty$

ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - (x + 5)$$

$$= 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

إذا المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 5$

مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

الطلب الثاني:

دراسة الوضع النسبي لنشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

نعدم الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

$$\frac{x}{x-1} = 1$$

$$\frac{x-1}{x-1} - 1 = 0$$

$$\frac{x-1}{x-x+1} = 0$$

$$\frac{1}{x-1} = 0$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق لا ينعدم

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0
الفرق		-
الوضع النسبي		C تحت Δ



$$\frac{x+1-x+1}{x-1} = 0$$

$$\frac{2}{x-1} = 0$$

$$2 \neq 0$$

مستحيطة الحل إذا $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h(x)$	-			+
الوضع النسبي	Δ تحت			Δ فوق

التمرين الحادي عشر:

ليكن a و b عددين حقيقيين ، في معلم متجانس $(0; \vec{t}, \vec{j})$ عضو الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}^* وفق:

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \ln(x)$$

النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من C والمماس للخط البياني C في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$ استغف من هذه المعطيات لتعيين a و b :

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(1,0)$ فإنه يتحقق:

$$f(x_A) = y_A$$

$$f(1) = 0$$

$$a + b = 0 \dots (1)$$

بما أن الخط البياني يقبل مماس يوازي

المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$ فإن:

$$f'(x_A) = m$$

$$f'(1) = 3$$

سنعود بعد قليل..

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = a + \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}$$

عدنا...

$$f'(1) = 3$$

$$a + 1 = 3$$

$$a = 2 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a + b = 0 \dots (1)$$

$$a = 2 \dots (2)$$

من (2) نجد:

$$a = 2$$

نعوض في (1):

$$2 + b = 0 \rightarrow b = -2$$

إذا:

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \ln(x)$$

تتلاشى المستحيطات ..

عندما نخطو أول خطوة 😊💙

الحل

الطالب الأول:

إيجاد Df :

التابع f معرف بشرط:

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

نعدم البسط:

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

نعدم المقام:

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
بسط	-	-	0	+
مقام	-	-	-	0
كسر	+	0	-	
> 0	$\#$		$\#$	$\#$

$$Df =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

الطالب الثاني:

الشرط الأول:

$$-x \in D_f \text{ فإن } x \in D_f$$

الإثبات:

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$l_1 = f(-x)$$

$$= -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -x + \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$= -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\left(x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$= -(x - (\ln(x-1) - \ln(x+1)))$$

$$= -(x - \ln(x-1) + \ln(x+1))$$

$$= -\left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$$= -f(x) = l_2$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق

ومنه التابع f فردي.

الصفة التناظرية ل C_f :

الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

الطالب الثالث:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - x = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذا Δ مقارب ل C_f في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$h(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = 0$$

التمرين التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f

المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 3x - 2 - \frac{\ln(x)}{x+1}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته:

$$y = 3x - 2$$

١. أثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط C

في جوار $+\infty$

٢. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن Δ مقارب ل C :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= 3x - 2 - \frac{\ln(x)}{x+1} - 3x + 2$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$h(x) = -\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$= -\frac{\ln(x)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذا المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

الطالب الثاني:

الوضع النسبي بين Δ و C :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{-\ln(x)}{x+1} = 0$$

تكافئ:

$$-\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow h(1) = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$		+	0
الوضع النسبي		Δ فوق C	

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعين بالعلاقة

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

١. أوجد Df مجموعة التعريف للتابع f

٢. أثبت أن التابع f فردي وما الصفة التناظرية لخطه البياني.

٣. أثبت أن المستقيم $y = x$ مقارب

مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس

وضع C بالنسبة ل Δ .

التعريف الثاني عشر:

$(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرف على \mathbb{N}^* وفق:

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

1. جد نهاية هذه المتتالية
2. أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$
3. ما نهاية $(S_n)_{n \geq 1}$ ؟

الحل:

الطالب الأول:

لما كان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(1) = 0$$

الطالب الثاني:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

إذًا:

$$S_n = \ln(n+1)$$

محققة ...

الطالب الثالث:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n+1)) = +\infty \end{aligned}$$

التعريف الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2 \ln x + 3}{\ln x - 1}$$

1. جد نهاية التابع f عند $+\infty$
2. عين عدداً حقيقياً A يحقق أياً $x > A$
3. اتضح $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 2 ونصف قطره 0,1
4. احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع:

الحل:

الطالب الأول:

$$g(x) = \sqrt{\frac{2 \ln x + 3}{\ln x - 1}}$$

الحل:

الطالب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f(x) = \frac{2 \ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}$$

$$= \frac{\ln(x) \left(2 + \frac{3}{\ln(x)}\right)}{\ln(x) \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{\ln(x)}}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$$

$$= \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$

الطالب الثاني:

نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال وفق:

$$r = 0.1 \rightarrow r = \frac{1}{10}$$

$$C = 2$$

$$|f(x) - C| < r$$

$$\left| \frac{2 \ln(x) + 3}{\ln(x) - 1} - 2 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{2 \ln(x) + 3 - 2 \ln(x) + 2}{\ln(x) - 1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{5}{\ln(x) - 1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{|5|}{|\ln(x) - 1|} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{|\ln(x) - 1|} < \frac{1}{10}$$

سنعود بعد قليلاً:

$$\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$-$	0	$+$
القيمة المطلقة	$-\ln(x) + 1$	1	$\ln(x) - 1$

عدنا:

$$\frac{5}{\ln(x) - 1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{\ln(x) - 1} > \frac{1}{10}$$

$$\ln(x) - 1 > 50$$

$$\ln(x) > 51$$

$$x > e^{51}$$

$$\rightarrow A = e^{51}$$

الطالب الثالث:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2 \ln(x) + 3)'(\ln(x) - 1) - (\ln(x) - 1)'(2 \ln(x) + 3)}{(\ln(x) - 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x}(\ln(x) - 1) - \frac{1}{x}(2 \ln(x) + 3)}{(\ln(x) - 1)^2}$$

$$= \frac{2 \ln(x) - 2 - 2 \ln(x) - 3}{x(\ln(x) - 1)^2}$$

$$= -\frac{5}{x(\ln(x) - 1)^2}$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{-5}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$g'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{\frac{2 \ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}}}$$

$$= -\frac{5}{2\sqrt{\frac{2 \ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}}}$$

$$g'(x) = -\frac{5}{2\sqrt{\frac{2 \ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}}}$$

التعريف الرابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

المجال $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x^2 + \ln(x^2 - 1)$$

أثبت أن التابع f زوجي

واستنتج الصفة التناظرية للخط C

الحل:

إثبات أن التابع f زوجي

الشرط الأول:

أيما كان $x \in D_f$ فإن: $-x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in D_f$$

$$x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$-x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق..

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x)$$

$$= (-x)^2 + \ln((-x)^2 - 1)$$

$$= x^2 + \ln(x^2 - 1)$$

$$= f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق ومنه التابع f زوجي.

الصفة التناظرية:

الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

التعريف الخامس عشر:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرفة على

$]0,4[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

أثبت أن النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر الخط C

الحل:

$$a = 2 \Rightarrow 2a = 4$$

$$b = 0 \Rightarrow 2b = 0$$

الشرط الأول:

أيما كان $x \in D_f$ فإن: $2a - x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in]0,4[$$

$$-x \in]0,-4[$$

$$4 - x \in]0,4[$$

$$4 - x \in D_f$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

يجب تحقق

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\underbrace{f(4 - x)}_{l_1} + \underbrace{f(x)}_{l_2} = 2b$$

$$l_1 = f(4 - x) + f(x)$$

$$= \ln\left(\frac{4-x}{4-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4-x}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4-x}{x} \cdot \frac{x}{4-x}\right) = \ln(1) = 0$$

$$2b = l_2$$

الشرط الثاني محقق ومنه النقطة $A(2,0)$

مركز تناظر للخط C

التعريف السادس عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $] -2,2[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

جد قيمة تقريبية للتابع f عند النقطة $x = 0.1$

الحل:

$$x = 0.1$$

$$a = 0, \quad h = 0.1$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

$$h = 0.1$$

$$f(a) = f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)'}{\frac{x+2}{2-x}}$$

$$(1)(2-x) - (-1)(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{(2-x)^2}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{2-x+x+2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x+2}$$

$$= \frac{4}{2-x} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{-x^2+4}$$

$$f'(0) = 1$$

عدنا..

$$f(0.1) \approx f(0) + f'(0) \cdot h$$

$$f(0.1) \approx 0 + (1)(0.1)$$

$$f(0.1) \approx 0.1$$

التعريف السابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x)$$

أثبت بالتدريج

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^n(n)}_{l_1} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\underbrace{x^n}_{l_2}}$$

ثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^1(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$l_2 = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x}$$

$$l_1 = l_2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \frac{(-1)^n(n)!}{\underbrace{x^{n+1}}_{l_2}}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x)$$

$$= (f^n(x))'$$

$$= \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \right)'$$

$$= \frac{0 - n(x^{n-1})(1)(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{2n}}$$

$$= \frac{-n(n-1)!(-1)^{n-1}(x^{n-1})}{x^{2n}}$$

$$= \frac{-n!(-1)^n(-1)^{-1}x^n x^{-1}}{x^{2n}}$$

$$= \frac{n!(-1)^n}{x^n \cdot x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = l_2$$

ومنه العلاقة محققة.

التعريف الثامن عشر:

أوجد مجموعة تعريف التابع

$$f(x) = \ln\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln(x)$$

ثم احسب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$$

الحل:

مجموعة تعريف التابع f :

$$\ln(\sqrt{x+3}) \text{ معرف بشرط:}$$

$$\sqrt{x+3} > 0$$

$$x+3 > 0$$

$$x > -3$$

$$D_1 =]-3, +\infty[$$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$

$$D_2 =]0, +\infty[$$

تكون D_f :

$$D_f = D_1 \cap D_2 =]0, +\infty[$$

إيجاد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$= \ln\sqrt{x+3} - \ln x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln\sqrt{x+3} - \ln\sqrt{x}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0 \text{ فإن:}$$

إيجاد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty \text{ ومنه نجد:}$$

التعريف التاسع عشر:

ليكن f التابع المعرفة على

$$]e^{-1}, +\infty[\text{ وفق:}$$

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

$$= \frac{\ln(x) \left(\frac{2}{\ln(x)} + 1 \right)}{\ln(x) \left(\frac{1}{\ln(x)} + 1 \right)} = \frac{\frac{2}{\ln(x)} + 1}{\frac{1}{\ln(x)} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

إيجاد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 2$$

التعريف العشرون:

نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f المعرفة

على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وخطه البياني C :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	$e \searrow 0$	$ $	$+\infty \searrow e$

الطلب الأول:

اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي وجدته

الحل:

المستقيم الذي معادلته $y = e$ مقارب أفقي

للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ والـ $-\infty$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي

للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^+

الطلب الثاني:

جد $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = f(]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[)$$

$$= f(]-\infty, 1[) \cup f(]1, +\infty[)$$

$$=]0, e[\cup]e, +\infty[$$

الطلب الثالث:

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

حل وحيد.

الطلب الرابع:

جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))$

بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = 1 \text{ فإن:}$$

التعريف الواحد والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$$]-1, +\infty[\text{ وفق:}$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x + 1)$$

الطلب الأول:

احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة

تعريفه واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب

أفقي أو شاقولي.

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x + 1)$$

$$= \ln(x^2 + x + 1) - \ln(x + 1)^2$$

$$= \ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

معادلات المقاربات:

المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب

شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^+

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي

للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

حاربوا من أجل الوصول لأحلامكم ..

فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 2 \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1) - 2(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x-2}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1 \in Df \rightarrow f(1) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	\nearrow 0

الطالب الثالث:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل.

الحل:

إيجاد النقطة A :تحديد الفاصلة x_A :بما أن الخط البياني C_f يقطع محور الفواصل فإن:

$$f(x) = 0$$

$$\ln(x^2+x+1) - 2\ln(x+1) = 0$$

$$\ln(x^2+x+1) - \ln(x+1)^2 = 0$$

$$\ln(x^2+x+1) = \ln(x+1)^2$$

$$x^2+x+1 = x^2+2x+1$$

$$x = 0 \rightarrow x_A = 0$$

تحديد الترتيب y_A :

$$y_A = f(x_A) = f(0) = 0$$

$$\rightarrow A(0,0)$$

إيجاد الميل m :

$$m = f'(x_A) = f'(0) = -1$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = -1(x - 0) + 0$$

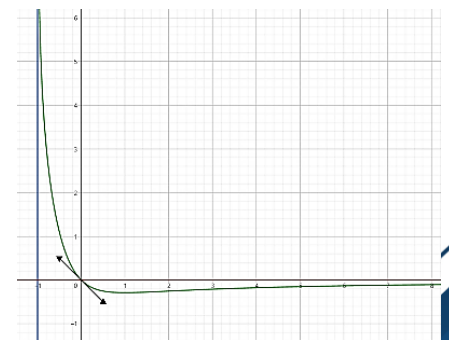
$$T: y = -x$$

الطالب الرابع:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم

المماس T والخط البياني C_f :

الرسم:



مسائل شاملة:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني التابع f المعروف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$$

١. احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كلا مقارب أفقي أو شاقولي.٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية.٣. في معلم متجانس ارس C

٤. باستخدام التكامل بالتجزئة احسب مساحة

السطح المحصور بين C ومحور الفواصلوالمستقيمين $x = e$ و $x = 1$ ٥. استنتج رسم الخط البياني C' التابع g

$$g(x) = \frac{\ln \sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

٦. احسب حجم الجسم الناتج عن دوران

المنطقة S دورة كاملة حول محورالفواصل على المجال $[1, e]$.

الحل:

الطالب الأول:

نهايات f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \ln \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

مقاربات C :المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقاربشاقولي للخط البياني C_f نحو $0y^-$ المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقاربأفقي للخط البياني C_f في جوار $+\infty$

المستقبل ملك لأولئك الذين

يؤمنون بروعة أحلامهم

الطالب الثاني:

تغيرات f :التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على I :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(2\sqrt{x}) - \left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)(2 + \ln x)}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{2 - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2 - 2 - \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}} = 0$$

$$-\ln x = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1 \in I \rightarrow f(1) = 1$$

نظم جدول تغيرات التابع f

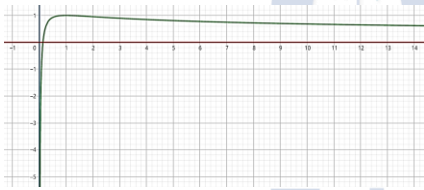
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1 \searrow	0

القيمة الحدية

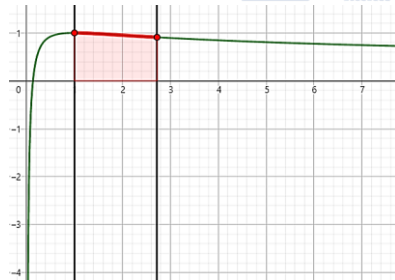
لدينا $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً

الطالب الثالث:

الرسم:



الطالب الرابع:



$$S = \int_1^e (f(x) - y_{\Delta}) dx$$

حيث: $y = 0$

$$S = \int_1^e f(x) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x) dx$$

$$u = 2 + \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow v = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$= \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{-x+2} = \frac{-2}{-x^2+2x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-2}{-x^2+2x} = 0$$

$$-2 \neq 0$$

مستحيية الحل $f'(x)$ لا ينعدم.

x	0	2
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

الطالب الخامس:

النقطة: $A(1,0)$

الميل:

$$m = f'(1) = -2$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = -2(x - 1) + 0$$

$$T: y = -2x + 2$$

دراسة الوضع النسبي بين T و C_f :

$$h(x) = f(x) - y_A$$

$$= \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right) - (-2x + 2)$$

$$= \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

$$h(x) = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرف التقليدية: سنعود بعد قليلاً:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرفة على $]0,2[$

$$g(x) = \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right) + 2x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-2}{-x^2+2x} + 2$$

$$g'(x) = \frac{-2 - 2x^2 + 4x}{-x^2 + 2x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$-2(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \in D_g \rightarrow g(1) = 0$$

x	0	1	2
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 1$

إذ $h(x)$ ينعدم عند $x = 1$

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني التابع f المعرفة على

$$f(x) = \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right); 0,2[$$

والمطلوب:

١. أثبت أن $(2-x) \in D_f$ أيًا كان $x \in D_f$

٢. احسب عند كل x من D_f المقدار:

$$f(2-x) + f(x)$$

٣. استنتج أن النقطة $A(1,0)$ هي مركز

تناظر للخط C_f

٤. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٥. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f

في النقطة A و ادرس الوضع بين T و C_f

٦. ارسم المقاربات والمماس T والخط C_f

٧. استنتج رسم الخط البياني C_g التابع g

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right)$$

الحل:

الطالب الأول: لدينا:

$$x \in D_f$$

$$x \in]0,2[$$

$$-x \in]0,-2[$$

$$2-x \in]0,2[$$

وهو المطلوب.

الطالب الثاني:

$$f(2-x) + f(x)$$

$$= \ln\left(-1 + \frac{2}{2-x}\right) + \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-2+x+2}{2-x}\right) + \ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) + \ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{2-x} \cdot \frac{-x+2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-2}{x-2}\right) = \ln(1) = 0$$

الطالب الثالث:

مما سبق نجد أن:

أيًا كان $x \in D_f$ فإن $2-x \in D_f$

$$f(2-x) + f(x) = 0$$

إذا النقطة $A(1,0)$ مركز تناظر للخط

البياني C_f .

الطالب الرابع:

التابع f معرفة على $]0,2[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,2[$ ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{\left(-1 + \frac{2}{x}\right)'}{\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$S = [2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= [2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln x]_1^e - \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= [2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln x]_1^e - \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^e$$

$$= [2\sqrt{x} + \sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}]_1^e$$

$$= [\sqrt{x} \ln x]_1^e = \sqrt{e}$$

الطالب الخامس:

$$g(x) = \frac{\ln \sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\ln \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\ln x^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \ln x + 1}{\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$= f(x) - 1$$

C' ينتج عن C بانسحابه على محور الترتيب نحو الأسفل بمقدار 1

الطالب السادس:

$$V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^e \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^e \frac{(2 + \ln x)^2}{4x} dx$$

$$V = \frac{\pi}{4} \int_1^e \frac{1}{x} (2 + \ln x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(2 + \ln x)^3}{3} \right]_1^e$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{(3)^3}{3}\right) - \left(\frac{(2)^3}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{19\pi}{12}$$

اللهم اليوم الذي نقول فيه:
قد كان حلاً لا نلظن دنوه.

لكنا فضل الله كان عظيماً 

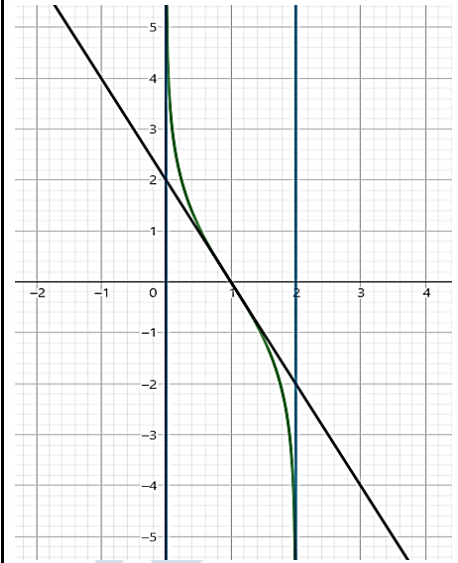
عدنا..

نظم جدول الوضع النسبي

x	0	1	2
$h(x)$	+	0	-
الوضع النسبي	T فوق C	0	T تحت C

الطالب السادس:

الرسم:



الطالب السابع:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \ln\left(\frac{2-x}{e \cdot x}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{1}{e} \cdot \frac{2-x}{x}\right) \\
 &= \ln\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) \\
 &= -1 + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) \\
 &= -1 + \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right) \\
 &= f(x) - 1 \\
 C_f &\text{ ينتج عن } C_g \\
 &\text{بإسحابه على محور الترتيب} \\
 &\text{نحو الأسفل بمقدار واحد.}
 \end{aligned}$$

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني التابع f المعروف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ و 0
- اكتب ما وجدته من مقاربات للخط C
- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
- اكتب معادلة المماس T المار بالمبدأ للخط البياني C ثم ارسم الخط C والمماس T .
- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$

٥. استنتج رسم C_g الخط البياني التابع g حيث:

$$g(x) = \frac{1 + \ln x + 3x}{x}$$

الحل:

الطالب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} + 0 = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

الطالب الثاني:

التابع f اشتقابي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (1 + \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-\ln x}{x^2} = 0$$

$$-\ln x = 0 \rightarrow \ln x = 0$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$ 1 \searrow 0	

الطالب الثالث:

نقطة التماس: بفرض: $x_M = a$

$$y_M = f(a) = \frac{1 + \ln a}{a}$$

$$M\left(a, \frac{1 + \ln a}{a}\right)$$

الميل:

$$m = f'(a) = \frac{-\ln a}{a^2}$$

$$T: y = m(x - x_M) + y_M$$

$$T: y = \frac{-\ln a}{a^2}(x - a) + \frac{1 + \ln a}{a}$$

$$T: y = \frac{-\ln a}{a^2}x + \frac{\ln a}{a} + \frac{1 + \ln a}{a}$$

$$T: y = \frac{-\ln(a)}{a^2}x + \frac{2 \ln a + 1}{a}$$

بما أن المماس T مار من المبدأ فإن:

النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس

نعوض..

$$0 = \frac{-\ln a + 1}{a^2}(0) + \frac{2 \ln a + 1}{a}$$

$$0 = \frac{2 \ln a + 1}{a}$$

$$0 = 2 \ln a + 1$$

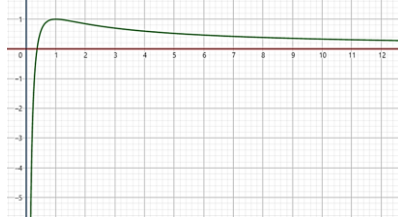
$$2 \ln a = -1$$

$$\ln a = -\frac{1}{2} \rightarrow a = e^{-\frac{1}{2}}$$

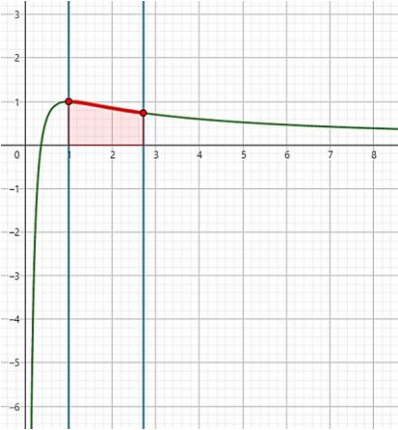
$$T: y = \frac{-\ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}x + \frac{2 \ln e^{-\frac{1}{2}} + 1}{e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$T: y = \frac{e}{2}x$$

الرسم:



الطالب الرابع:



$$S = \int_1^e (f(x) - y_\Delta) dx$$

$$= \int_1^e f(x) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x\right) dx$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{3}{2}$$

الطالب الخامس:

$$g(x) = \frac{1 + \ln x + 3x}{x}$$

$$g(x) = \frac{1 + \ln x}{x} + 3$$

$$g(x) = f(x) + 3$$

C_g ينتج عن C_f بإسحابه على محور الترتيب

نحو الأعلى بمقدار 3

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, 2[\cup]2, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{3 \ln x}{4 - x^2}$$

وليكن g التابع المعرف على \mathbb{R}_+^* وفق:

$$g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2 \ln x$$

- ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.
- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}_+^* .
- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

٤. أثبت من أجل كل x من I أن:

$$f'(x) = \frac{3x \cdot g(x)}{(4 - x^2)^2}$$

بتغيرات التابع f

٥. اكتب معادلة المماس T للخط C في

النقطة التي فاصلتها $x = 1$

٦. في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C .

الحل:

الطالب الأول:

التابع g معرف ومستمر على $]0, +\infty[$ وفق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{4}{x^2} - 1 + 2 \ln x$$

$$= \frac{4 - x^2 + 2x^2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{4 - x^2 + 2x \cdot x \ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{4 - 0 + 0}{0^+} = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 - 1 + \infty = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g'(x) = \frac{-8x}{x^4} + \frac{2}{x}$$

$$= -\frac{8}{x^3} + \frac{2}{x} = \frac{-8 + 2x^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-8 + 2x^2}{x^3} = 0$$

$$-8 + 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{إما } x = 2 \in D_g \rightarrow g(2) = 2 \ln(2)$$

$$\text{أو } x = -2 \notin D_g$$

نظم جدول تغيرات التابع g وفق:

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$+\infty \searrow 2 \ln 2 \nearrow$	$+\infty$

الطالب الثاني:

نلاحظ من جدول التغيرات وتحديداً من حقل

أن: $g(x)$

$$g(x) \geq 2 \ln 2 \rightarrow g(x) > 0$$

دراسة نهايات التابع f

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-\infty}{4} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3 \ln 2}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3 \ln 2}{0^-} = -\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{3 \ln x}{4 - x^2} = \frac{3 \ln x}{x \left(\frac{4}{x} - x \right)}$$

$$= \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{3}{\frac{4}{x} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \left(\frac{3}{\infty} \right) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الطالب الرابع:

$$f'(x) = \frac{3x \cdot g(x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$l_1 = f'(x)$$

$$= \frac{(3 \ln x)'(4 - x^2) - (4 - x^2)'(3 \ln x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{x}(4 - x^2) - (-2x)(3 \ln x)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{12}{x} - 3x + 6x \ln x}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{3x \left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2 \ln x \right)}{(4 - x^2)^2}$$

$$= \frac{3x \cdot g(x)}{(4 - x^2)^2} = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

نعدم:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{3x \cdot g(x)}{(4 - x^2)^2} = 0$$

$$3x \cdot g(x) = 0$$

$$3x \left(\frac{4}{x^2} - 1 + 2 \ln x \right) = 0$$

مختلطة لا يمكن حلها بالاعتماد على جدول

تغيرات التابع g ننظم جدول f .

نلاحظ أن $g(x)$ لا ينعدم.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$

الطالب الخامس:

كتابة معادلة المماس:

تحديد النقطة:

$$x = 1$$

$$y = f(1) = 0$$

$$\rightarrow A(1, 0)$$

تحديد الميل:

$$m = f'(1) = \frac{3(1)(g(1))}{9} = \frac{3(3)}{9} = 1$$

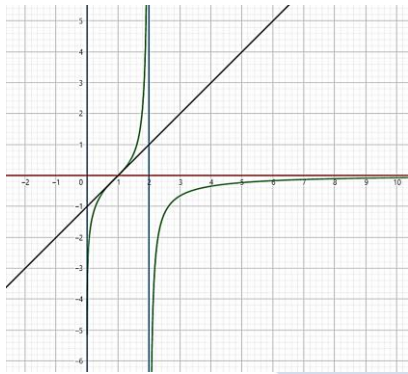
$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 1(x - 1) + 0$$

$$T: y = x - 1$$

الطالب السادس:

الرسم:



المسألة الخامسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على

$]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$$

١. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$

مقارب للخط C وادرس وضعه النسبي

بالنسبة لـ C

٢. ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب

الشاقولي لـ C .

٣. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً

وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5.

٤. ارسم كلا مقارب وجدته ثم ارسم C .

٥. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g

المعروف وفق:

$$g(x) = 2x + 1 + \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

الحل:

الطالب الأول:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= 2x - 1 + \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) - 2x + 1$$

$$= \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ln(1) = 0$$

$$-\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1 \in I \rightarrow f(1) = 1$$

نظم جدول التغيرات وفق:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	↗ 1 ↘

الطالب الثالث:

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على

المجال: $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$ ومنه:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3 \ln(3) < 0$$

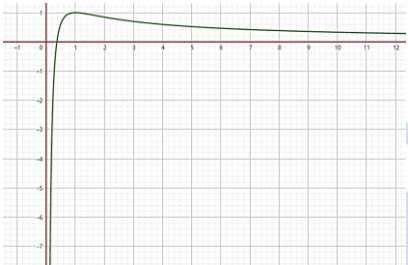
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \ln(2) > 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يكون

$$\text{لمعادلة } f(x) = 0 \text{ حلاً على المجال } \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$$

الطالب الرابع:



الطالب الخامس:

$$g(x) = \frac{1-x + \ln(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 1$$

$$g(x) = f(x) - 1$$

C_1 ينتج عن C بإسحابه على محور الترتيب

نحو الأسفل بمقدار 1

المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$$]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[\text{ وفق:}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1. احسب نهاية التابع f عند كلا طرف من

أطراف تعريفه D_f

2. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم

نظم جدولاً بتغيرات التابع f

3. ارسم الخط C في معلم متجانس.

4. لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^*

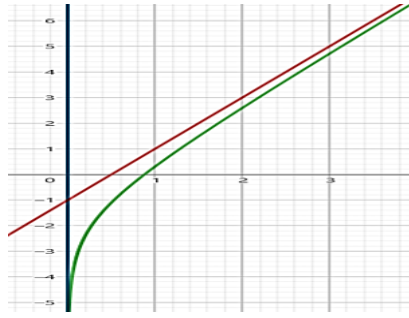
وفق: $u_n = f(n)$ نضع

$$\text{أن } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

الطالب الرابع:

الرسمة:



الطالب الخامس:

لدينا:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$f(-x) = -2x - 1 + \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)$$

$$= -2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$-f(-x) = 2x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= 2x + 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$g(x) = -f(-x)$$

أي الخط البياني C_g نظير الخط البياني C_f بالنسبة إلى المبدأ.

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \text{ وفق: } I =]0, +\infty[$$

احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة

تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو

شاقولي.

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً

$$\text{في المجال } \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$$

3. في معلم متجانس ارسم الخط C

4. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{1-x + \ln(x)}{x}$$

الحل:

الطالب الأول:

التابع f معرف ومستمر على I ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار ال $+\infty$

الطالب الثاني:

التابع f اشتقاقي على I ومنه:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

إذاً المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$

مقارب مائل في جوار ال $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$$

$$\frac{x}{1+x} = 1$$

$$x = 1 + x$$

$$0 \neq 1$$

مستحيية الحل ومنه $h(x)$ لا ينعدم

x	0	$+\infty$
$h(x)$		-
الوضع النسبي	Δ تحد C	

الطالب الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2 + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\frac{x}{1+x}}$$

$$= 2 + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{2x + 2x^2 + 1}{x + x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2x + 2x^2 + 1}{x + x^2} = 0$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$a = 2, b = 2, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4(ac)$$

$$= 4 - 4(2)(1) = -4 < 0$$

مستحيية الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

الطالب الثالث:

التابع f متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$$f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$0 \in]-\infty, +\infty[$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

x	f(x)
$\frac{1}{3}$	$-\ln(3)$
$\frac{1}{2}$	$1 - \ln(2)$

نلاحظ أن:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى

يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال

$$]0.5, 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

الطالب الثاني:

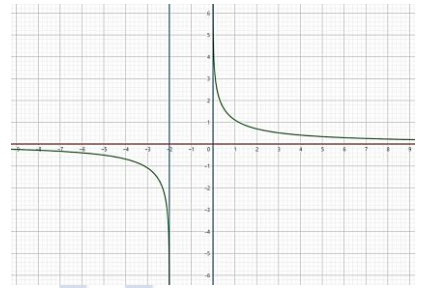
إن f معرف واشتقاقي على $] -\infty, -2[\cup] 0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= \frac{x-x-2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\parallel	\parallel	$-$
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	\parallel	$+\infty \searrow 0$

الطالب الثالث:



الطالب الرابع:

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln(n+2) - \ln(n)$$

نبرهن العلاقة:

$$E(n): S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

نثبت صحة القضية: $E(1)$:

$$S_1 = \ln\left(\frac{3 \times 2}{2}\right) = \ln(3) = u_1$$

إذا $E(1)$ محققة..نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) \dots (*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي:

$$S_{n+1} = \ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$= \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right) + \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot \frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

إذا القضية $E(n)$ صحيحة أيًا كان $n \in \mathbb{N}^*$

المسألة الثامنة:

أولاً: ليكن لدينا التابع h المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$h(x) = 3 - 3x^2 - 2 \ln x$$

الطالب الأول:

عين نهايتي h عند (0) وعند $(+\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

الطالب الثاني:

ادرس تغيرات h ونظم جدولاً بها.التابع h اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومئة:

$$h'(x) = -6x - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{-6x^2 - 2}{x}$$

نعدم المشتق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{-6x^2 - 2}{x} = 0$$

$$-6x^2 - 2 = 0$$

$$-6x^2 = 2$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل.

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	\parallel	$-$
$h(x)$	$\parallel +\infty \searrow$	$-\infty$

الطالب الثالث:

بين أن المعادلة $h(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثمتحقق أن $\alpha = 1$.

الحل:

إثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ حلاً وحيداً α :لدينا التابع h مستمر ومتناقص على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$h(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$0 \in]-\infty, +\infty[$$

إذاً للمعادلة $h(x) = 0$ حل وحيد α .التحقق أن $\alpha = 1$

$$h(\alpha) = h(1)$$

$$= 3 - 3(1)^2 - 2 \ln(1) = 0$$

إذاً $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$h(x) = 0$$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفعلى المجال $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

الطالب الأول:

احسب نهايات التابع f واكتب معادلة كل

مقارب في حال وجوده.

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

المقاربات:

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقاربشاقولي للخط البياني C_f نحو oy^-

$$f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2} \text{ أثبت أن}$$

$$f'(x) = \frac{(-6x+1)(2x) - (2)(-3x^2-1+x)}{(2x)^2} + \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-12x^2 + 2x + 6x^2 + 2 - 2x}{4x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 2}{4x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 2 + 4 - 4 \ln x}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(-3x^2 + 3 - 2 \ln x)}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 3 - 2 \ln x}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$$

الطالب الثالث:

مستقيماً من تغيرات h ادرس تغيرات التابع

ونظم جدولاً بها.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{h(x)}{2x^2} = 0$$

$$h(x) = 0$$

بالاستفادة مما سبق نجد أن:

$$x = 1 \in]0, +\infty[\rightarrow f(1) = -\frac{3}{2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	\parallel	$+$	$-$
$f(x)$	$\parallel -\infty \nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow -\infty$

الطالب الرابع:

أثبت أن المستقيم (T) ذو المعادلة:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \text{ مستقيم مقارب لـ } C_f.$$

$$h(x) = f(x) - y_T$$

$$h(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x} - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$h(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$h(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذاً المستقيم (T) مقارب لـ C_f في جوار $+\infty$

الطالب الخامس:

بين وضع C_f بالنسبة للمستقيم (T)

$$l(x) = f(x) - y_T$$

$$l(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$l(x) = \frac{-1 + 2 \ln x}{2x}$$

$$l(x) = 0$$

$$\frac{-1 + 2 \ln x}{2x} = 0$$

الإثبات..

$$\begin{aligned} x &\in]-1, 3[\\ -x &\in]-3, 1[\\ 2-x &\in]-1, 3[\\ \text{الشرط الأول محقق.} \end{aligned}$$

الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} f(2a-x) + f(x) &= 2b \\ \underbrace{f(2-x) + f(x)}_{l_1} &= \underbrace{2b}_{l_2} \\ l_1 &= f(2-x) + f(x) \\ &= \ln\left(\frac{1+2-x}{3-2+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{1+x}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{3-x}\right) \\ &= \ln(1) = 0 = 2b = l_2 \end{aligned}$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق
ومنه A مركز تناظر C .

الطالب الرابع:

اكتب معادلة d المماس للخط C في النقطة A

النقطة: $A(1,0)$

الميل:

$$m = f'(x_A) = f'(1) = 1$$

المعادلة:

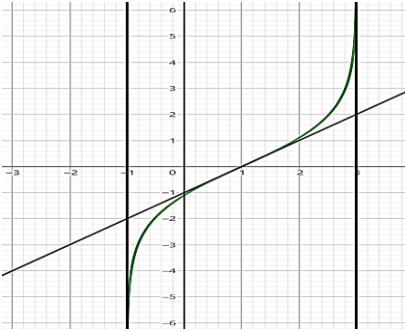
$$d: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$d: y = 1(x - 1) + 0$$

$$d: y = x - 1$$

الطالب الخامس:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C .



الطالب السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{f(u_n)} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

أثبت بالتدرج صحة العلاقة:

$$u_n < u_{n+1} < 1$$

ثم استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$$u_{n+1} = e^{f(u_n)} = e^{\ln\left(\frac{1+u_n}{3-u_n}\right)} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$$

لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n): u_n < u_{n+1} < 1$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$E(0): u_0 < u_1 < 1$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{محقة}$$

المسألة التاسعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$] -1, 3[$ بالعلاقة:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$$

والمطلوب:

الطالب الأول:

أوجد $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ثم حدد مقاربات C .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

مقاربات C :

المستقيم الذي معادلته $x = -1$

مقارب شاقولي للخط البياني C .

المستقيم الذي معادلته $x = 3$

مقارب شاقولي للخط البياني C .

الطالب الثاني:

احسب $f'(x)$ ثم استنتج أن التابع f متزايد

تماماً ثم نظم جدولاً بتغييرات التابع f .

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{3-x}\right)'}{\frac{1+x}{3-x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3-x+1+x}{(3-x)^2} \cdot \frac{3-x}{1+x} \\ &= \frac{4}{(3-x)(1+x)} > 0 \end{aligned}$$

إذا التابع f متزايد تماماً.

x	-1	3		
$f'(x)$	$ $	$+$	$ $	
$f(x)$	$ $	\nearrow	$+\infty$	$ $

الطالب الثالث:

عين نقطة تقاطع C مع محور الفواصل

ثم أثبت أن A مركز تناظر للخط C .

الحل:

إحداثيات A نقطة تقاطع C مع محور

الفواصل:

فاصلة النقطة تحقق:

$$f(x) = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) = 0$$

$$\frac{1+x}{3-x} = 1$$

$$1+x = 3-x \rightarrow 2x = 2$$

$$x_A = 1$$

ترتيب النقطة تحقق:

$$y_A = 0$$

ومنه النقطة:

$$\rightarrow A(1,0)$$

إثبات أن A مركز تناظر:

$$a = 1 \rightarrow 2a - x = 2 - x$$

$$b = 0 \rightarrow 2b = 0$$

الشرط الأول:

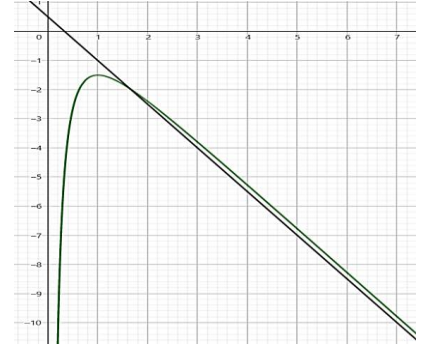
أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

$$-1 + 2 \ln x = 0 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$l(x)$	$ $	$-$	$+$
الوضع النسبي	$ $	T تحت C	T فوق C

الطالب السادس: ارسم T و C_f



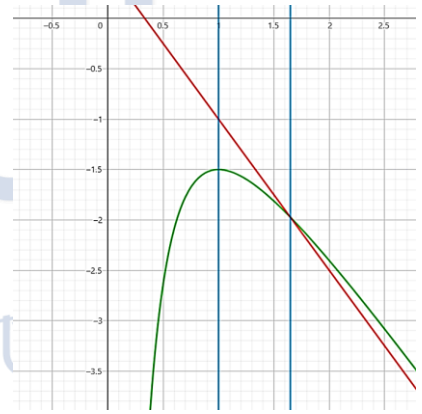
الطالب السابع:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط

البياني والمستقيم T والمستقيمان $x = 1$

و $x = \sqrt{e}$:

الحل:



$$S = \int_1^{\sqrt{e}} (y_t - f(x)) dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left[\frac{\ln x - (\ln x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2}\right) - (0) = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): u_n < u_{n+1} < 1 \dots (*)$$

ثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

الإثبات:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \frac{1+x}{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(3-x)^2} > 0$$

إذا التابع f متزايد تماماً.

لدينا من (*):

$$u_n < u_{n+1} < 1$$

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

محققة إذا القضية $E(n)$ صحيحة.

إثبات تقارب u_n :

* لدينا $u_n < u_{n+1}$

وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً.

* لدينا $u_n < 1$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى.

وبالتالي u_n متقاربة.

نهاية u_n :

هي حل المعادلة: $f(x) = x$

$$\frac{x+1}{3-x} = x$$

$$x+1 = 3x-x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

المسألة العاشرة:

ليكن C الخط البياني التابع f المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

التابع الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f .

f معرف بشرط:

$$1 + \frac{2}{x} > 0 \rightarrow \frac{x+2}{x} > 0$$

نعدم البسط: $x+2 = 0 \rightarrow x = -2$

نعدم المقام: $x = 0$

ننظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
بسط	-	0	+	+
مقام	-	-	0	+
كسر	+	0	-	+
> 0	م	غ.م	م	م

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

التابع الثاني:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

حدد مقاربات C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

المستقيم $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

المستقيم $x = -2$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

المستقيم $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty, -2[$ و $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)'}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= -\frac{2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} = -\frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-2}{x^2 + 2x} = 0$$

$$-2 \neq 0$$

مستحيلة الحد و منه المشتق لا يعدم.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			-
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0

التابع الثالث:

أثبت أن النقطة $A(-1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C

$$a = -1 \rightarrow 2a - x = -2 - x$$

$$b = 0 \rightarrow 2b = 0$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

$$x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$f(-2 - x) + f(x) = \frac{2b}{l_1} \quad \frac{2b}{l_2}$$

$$l_1 = f(-2 - x) + f(x)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{-2-x}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-2-x+2}{-2-x}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x}{-(2+x)}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x}{2+x} \cdot \frac{x+2}{x}\right)$$

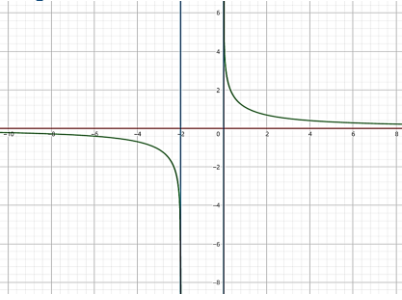
$$= \ln(1) = 0 = 2b = l_2$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق

ومنه النقطة $A(-1,0)$ مركز تناظر للخط

البياني C

التابع الرابع: ارسم مقاربات C ثم ارسم C .



التابع الخامس:

استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = -g(x)$$

بما أن

$$f(-x) = -g(x)$$

$$\rightarrow g(x) = -f(-x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو

نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ

الإحداثيات.

التابع السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالعلاقة:

$$u_n = f(n)$$

ونضع المتتالية:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

الحد:

$$u_n = f(n) = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$

$$S_n = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{6}{4} + \dots + \ln\frac{(n+1)}{(n-1)} + \ln\frac{(n+2)}{n}$$

$$S_n = \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

المسألة الحادية عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة

بالعلاقة:

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

التابع الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f .

التابع f معرف بشرط:

$$\frac{x}{x-2} > 0$$

نعدم البسط: $x = 0$

نعدم المقام: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
بسط	-	0	+	+
مقام	-	-	0	+
كسر	+	0	-	+
> 0	م		م.غ	

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

الطالب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
ثم حدد مقاربات C :
دراسة تغيرات التابع f .

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ و $]2, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\left(\frac{x}{x-2}\right)'}{\frac{x}{x-2}} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{x-2}\right)' \cdot \frac{x-2}{x} \\ &= 1 - \frac{(x-2-x)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x} \\ &= 1 + \frac{2}{x^2 - 2x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(2)$$

$$= 4 - 8 = -4 < 0$$

المعادلة مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا يعدم

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	∞	$-\infty$	$+\infty$

مقاربات C :

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب

شاقولي للخط البياني C_f من اليسار نحو oy^+ .

المستقيم الذي معادلته $x = 2$ مقارب

شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^- .

الطالب الثالث:

$$f(x) + f(2-x) = 4$$

ثم استنتج أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر

الخط البياني C .

$$f(x) + f(2-x) = 4$$

$$\underbrace{f(x)}_{l_1} + \underbrace{f(2-x)}_{l_2} = 4$$

$$l_1 = f(x) + f(2-x)$$

$$= x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 - x + 1 - \ln\left(\frac{2-x}{2-x-x}\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \ln\left(\frac{2-x}{-x}\right)\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2} \cdot \frac{2-x}{-x}\right)\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x}\right)\right)$$

$$= 4 - \ln(1)$$

$$= 4 = l_2$$

إذ العلاقة محققة.

استنتج أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر

للخط البياني:

لدينا:

$$a = 1 \rightarrow 2a - x = 2 - x$$

$$b = 2 \rightarrow 2b = 4$$

حتى تكون النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر

يجب أن يتحقق:

الشرط الأول:

$$\text{أياً كان } x \in D_f \text{ فإن } 2a - x \in D_f$$

الإثبات..

$$\text{أياً كان: } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

$$\text{فإن: } -x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$\text{وبالتالي: } 2-x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

إذا الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

$$f(x) + f(2 - x) = 4$$

تم سابقاً إثبات صحة العلاقة

ومنه الشرط الثاني محقق.

إذ النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر للخط

البياني C_f .

الطالب الرابع:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = x + 1$$

$$C$$

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - (x + 1)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

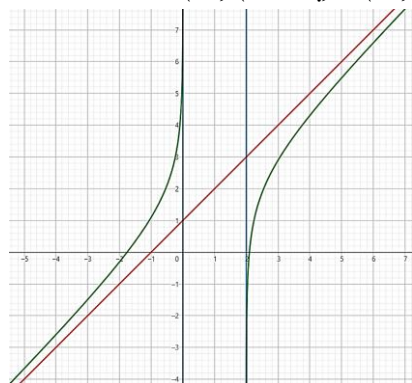
ومنه المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = x + 1$$

مقارب مائل للخط C

الطالب الخامس:

ارسم مقاربات C ثم ارسم C



الطالب السادس:

أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين

أياً كان العدد الحقيقي m :

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً

على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$f(] - \infty, 0[) =] - \infty, +\infty[$$

$$m \in] - \infty, +\infty[$$

ولدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً

على المجال $]2, +\infty[$ ولدينا:

$$f(]2, +\infty[) =] - \infty, +\infty[$$

$$m \in] - \infty, +\infty[$$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين

أياً كان العدد الحقيقي m

الطالب السابع:

استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = x - 1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

لدينا:

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$f(-x) = -x + 1 - \ln\left(\frac{-x}{-x-2}\right)$$

$$f(-x) = -x + 1 + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$-f(-x) = x - 1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$g(x) = -f(-x)$$

ومنه الخط البياني للتابع g هو نظير الخط

البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

المسألة الثانية عشر:

أولاً:

ليكن لدينا التابع g المعرفة على \mathbb{R}_+^* وفق:

$$g(x) = x - \ln(x)$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على

المجال $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$g(x) = x - \ln(x)$$

$$= x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1 \in D_g \rightarrow g(1) = 1$$

نظم جدول التغيرات وفق:

x	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+		
$f(x)$		$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

الطالب الثاني:

استنتج أن $g(x) > 0$ أيًا كان x من \mathbb{R}_+^* .

من جدول تغيرات التابع g نجد أنه:

$$g(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$$

ومنه: $g(x) > 0$ أيًا كان x من \mathbb{R}_+^* .

ثالثياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف وفق:

$$f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}; f(0) = -1$$

الطالب الأول:

تحقق أن $D_f = [0, +\infty[$

$\ln(x)$ معرف بشرط: $x > 0$

$$D_1 =]0, +\infty[$$

نعدم المقام: $x - \ln(x) = 0$

$$\rightarrow g(x) = 0$$

من جدول تغيرات التابع g نجد أن المعادلة

مستحيلة الحل

ولدينا:

$$f(0) = -1$$

$$D_f = D_1 \cup \{0\}$$

$$=]0, +\infty[\cup \{0\} = [0, +\infty[$$

الطالب الثاني:

ادرس استمرارية التابع عنج الصفر.

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{2x - x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{2x}{x - \ln(x)} - \frac{x - \ln(x)}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{2x}{x - \ln(x)} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

ولدينا:

$$f(0) = -1$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

فإن التابع f مستمر عند الصفر.

الطالب الثالث:

احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وفسر

النتيجة هندسياً

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$$

$$= \frac{x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln(x)}{x}}{1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

التفسير الهندسي:

المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب

أفقي للخط البياني C_f في جوار الـ $+\infty$

الطالب الرابع:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 0$

وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 0$:

لدينا التابع h المعرف $]0, +\infty[$ وفق:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)} - (-1)}{x}$$

$$= \frac{x + \ln(x) + x - \ln(x)}{x(x - \ln(x))}$$

$$= \frac{2x}{x(x - \ln(x))} = \frac{2}{x - \ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر.

وقيمة مشتقه $f'(0) = 0$

التفسير الهندسي:

الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 0$

في النقطة التي فاصلتها $x_A = 0$

وترتيبها $y_A = -1$ ومنه تكون المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0(x - 0) - 1$$

$$T: y = -1$$

الطالب الخامس:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

الحل:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على

المجال $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - \ln(x)) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x + \ln(x))}{(x - \ln(x))^2}$$

$$= \frac{x - \ln(x) + 1 - \frac{\ln(x)}{x} - x - \ln(x) + 1 + \frac{\ln(x)}{x}}{(x - \ln(x))^2}$$

$$= \frac{2 - 2 \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2 - 2 \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} = 0$$

$$2 - 2 \ln(x) = 0$$

$$2 \ln(x) = 2$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e \in D_f \rightarrow f(e) = \frac{e + 1}{e - 1}$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	↗ $\frac{e+1}{e-1}$ ↘	1

الطالب السادس:

عين أحداثيات نقطة تقاطع C مع المستقيم

Δ ذو المعادلة $y = 1$

تحديد الفاصلة:

نحل المعادلة $f(x) = 1$

$$\frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)} = 1$$

$$\frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)} - 1 = 0$$

$$\frac{x + \ln(x) - x + \ln(x)}{x - \ln(x)} = 0$$

$$\frac{2 \ln(x)}{x - \ln(x)} = 0$$

$$2 \ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x_A = 1$$

تحديد الترتيب:

$$y_A = 1$$

ومنه أحداثيات نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ

ذو المعادلة $y = 1$ هي $(1, 1)$

الطالب السابع:

أثبت أن C يقطع محور الفواصل بنقطة

وحيدة فاصلتها α .

أي: أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

بالاعتماد على جدول التغيرات التابع f :

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على

المجال $]0, e[$ ولدينا:

$$f(]0, e[) = \left[-1, \frac{e + 1}{e - 1}\right[$$

$$0 \in \left[-1, \frac{e + 1}{e - 1}\right[$$

ولدينا التابع f مستمر ومتناقص تماماً على

المجال $]e, +\infty[$ ولدينا:

$$f(]e, +\infty[) = \left]1, \frac{e + 1}{e - 1}\right]$$

$$0 \notin \left]1, \frac{e + 1}{e - 1}\right]$$

ومنه فإن المعادلة $f(x) = 0$ حلًا وحيداً α

على المجال $]0, +\infty[$

الطالب الثامن: أثبت أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

لدينا:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - 2 \ln(2)}{1 + 2 \ln(2)} < 0$$

$$f(1) = \frac{1 + \ln(1)}{1 - \ln(1)} = 1 > 0$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} - 2 - 2 \ln(x)\right)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x \left(\frac{1}{x^2} - 1 - 2 \ln(x)\right)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x g(x)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

تغيرات التابع f :

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على I

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x g(x)}{(x^2 + 1)^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x g(x) &= 0 \\ x &= 0 \notin I \\ \text{أو } g(x) &= 0 \end{aligned}$$

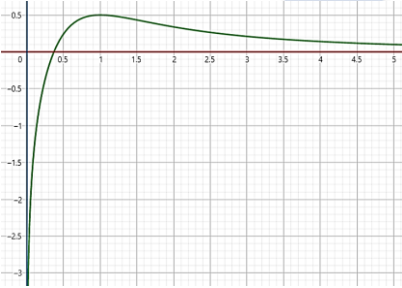
ومما سبق وجدنا أن $\alpha = 1$ هي حل للمعادلة $g(x) = 0$ ومنه نجد أن:

$$x = 1 \in I \rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$-\infty$	0

الطالب الخامس:

في معلم متجانس ارسم الخط C_f .



المسألة الرابعة عشر:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على

المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x + 1}$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$

3. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} g(x)$

5. مستفيداً من تغيرات g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2x}{(x^2)^2} - \frac{2}{x} = \frac{-2 - 2x^2}{x^3} \\ g'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{-2 - 2x^2}{x^3} = 0 \\ -2 - 2x^2 &= 0 \\ 2x^2 &= -2 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

مستحيلة الحل إذا المشتق لا يعدم.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$		$-\infty$

الطالب الثاني:

بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$

بما أن التابع g مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$ وبها أن:

$$\begin{aligned} g(]0, +\infty[) &=]-\infty, +\infty[\\ &=]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

ومن المعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α التحقق أن $\alpha = 1$

$$g(1) = 1 - 1 - 2 \ln(1) = 0$$

الطالب الثالث:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

نهايات التابع f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \ln(x)}{x^2 + 1} \\ \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} &= \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

مقاربات C :

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب

شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^-

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب

أفقي للخط البياني C_f بجوار $+\infty$

الطالب الرابع:

أثبت أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ثم ادرس

تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها مستفيداً من تغيرات التابع g

إيجاد $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \ln(x))(x^2 + 1) - (x^2 + 1)^2(1 + \ln(x))}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (2x)(1 + \ln(x))}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

وبالاستناد على مبرهنة القيمة الوسطى

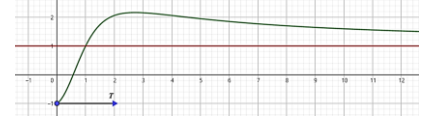
الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ يحقق

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

الطالب التاسع:

في معلم متجانس ارسم ما وجدته من

مقاربات ثم ارسم C :



المسألة الثالثة عشر:

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

أولاً:

الطالب الأول:

احسب كلاً من $g(1)$, $g'(x)$, $g'(1)$

$$g(1) = \ln(2)$$

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2x+2} \\ g'(1) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

الطالب الثاني:

استنتج:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x+1} - \ln(2)}{x-1} \\ &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x+1} - \ln(2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ثانياً:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على

المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2 + 1}$$

وليكن g التابع المعرف على I وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x^2} - 1 - 2 \ln(x)$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

الحل:

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على

المجال I .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-1-x}{x^2} = 0$$

$$-1-x = 0$$

$$x = -1 \notin I$$

نظم جدول تغيرات التابع g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow -\infty$

الطالب الثاني:

إثبات أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α لدينا التابع g معرف ومستمر على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا:

$$f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$0 \in]-\infty, +\infty[$$

إذا للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α التحقق أن $\alpha = 1$

$$g(\alpha) = g(1)$$

$$= 1 - 1 - \ln(1) = 0$$

إذاً $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

الطالب الثالث:

نهايات f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x + 1}$$

$$= \frac{x \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الطالب الرابع:

إثبات أن $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} g(x)$

$$f'(x) = \frac{(2 + \ln x)'(x+1) - (x+1)'(2 + \ln x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x+1) - (1)(2 + \ln x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x} - 2 - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x \right)$$

$$(4bx - 8ax - 8bx \cdot \ln(2x))$$

$$16x^4$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\frac{2b - 4a - 4b \cdot \ln(1)}{16 \cdot \frac{1}{16}} = 0$$

$$2b - 4a = 0$$

$$2b - 4 = 0$$

$$2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 + 2 \ln(2x)}{4x^2}$$

الطالب الثاني: نهايات f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{1 + 2 \ln(2x)}{4x^2}$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{2 \ln(2x)}{4x^2}$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(2x)}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

التأويل الهندسي للنتائج:

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقاربشاقولي للخط البياني نحو oy^- المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني في جوار $+\infty$ الطالب الثالث: تغيرات f :

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{2}{2x} 4x^2 - 8x(1 + 2 \ln(2x))}{(4x^2)^2}$$

$$= \frac{8x - 8x - 16x \cdot \ln(2x)}{16x^4}$$

$$= \frac{-16x \cdot \ln(2x)}{16x^4} = -\frac{\ln(2x)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-\frac{\ln(2x)}{x^3} = 0$$

$$-\ln(2x) = 0$$

$$\ln(2x) = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \in Df \rightarrow f \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 1	\searrow 0

الطالب الرابع:

حل المعادلة: $f(x) = 0$

$$\frac{1 + 2 \ln(2x)}{4x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot g(x)$$

الطالب الخامس:

تغيرات f :

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{g(x)}{(1+x)^2} = 0$$

$$g(x) = 0$$

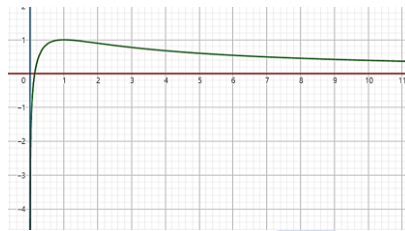
بالاستفادة مما سبق نجد أن:

$$x = 1 \in I \rightarrow f(1) = \frac{2 + \ln 1}{1+1} = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 1	\searrow 0

الطالب السادس:

الرسم:



المسألة الخامسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{a + b \ln(2x)}{4x^2}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.1. عين a و b بحيث يكون المعاصر في النقطة $A \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ للخط C موازياً لمحور القواصل.2. افرض $a = 1$, $b = 2$ نحصل على التابع:

$$f(x) = \frac{1 + 2 \ln 2x}{4x^2}$$

3. احسب نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج التأويل الهندسي للنتائج.4. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بهاً.5. حل المعادلة $f(x) = 0$ 6. ارسم c في معلم متجانس (\vec{i}, \vec{j}) .

الحل:

الطالب الأول:

تعيين a و b :

الترجمة الأولى:

$$f \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$\frac{a + b \cdot \ln(1)}{4 \left(\frac{1}{4} \right)} = 1 \rightarrow a = 1$$

$$4 \left(\frac{1}{4} \right)$$

الترجمة الثانية:

$$f' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{b \cdot \frac{2}{2x} 4x^2 - 8x(a + b \cdot \ln(2x))}{(4x^2)^2}$$

$$1 + 2 \ln(2x) = 0$$

$$2 \ln(2x) = -1$$

$$\ln(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$2x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{e}} \in Df \rightarrow \text{مقبول}$$

الطالب الخامس:

الرسم:



المسألة السادسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف علىعلى $]1, +\infty[\cup]0, 1[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل

على كلا قيمة حدية إن وجدت وبين نوعها

وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية.

تغيرات f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2} = 0$$

$$-\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in Df \rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$-e$	$-\infty$	$+\infty$

القيمة الحدية:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

المقاربات:

$$x = 0 \text{ مقارب شاقولي للخط البياني } C_f$$

$$x = 1 \text{ مقارب شاقولي للخط البياني } C_f$$

$$y = 0 \text{ مقارب أفقي للخط البياني } C_f$$

الطالب الثاني:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C فيالنقطة التي فاصلتها $x = e$ تحديد النقطة A :

$$x_A = e$$

$$y_A = f(e) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow A\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

تحديد الميل:

$$m = f'(e) = -\frac{2}{e^2}$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = -\frac{2}{e^2}(x - e) + \frac{1}{e}$$

$$= -\frac{2}{e^2}x + \frac{2}{e} + \frac{1}{e}$$

$$= -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$$

الطالب الثالث:

أثبت أن التابع $g(x) = \ln(\ln(x))$ المعروفعلى $]1, +\infty[$ هو تابع أصلي للتابع f على

هذا المجال.

الحل:

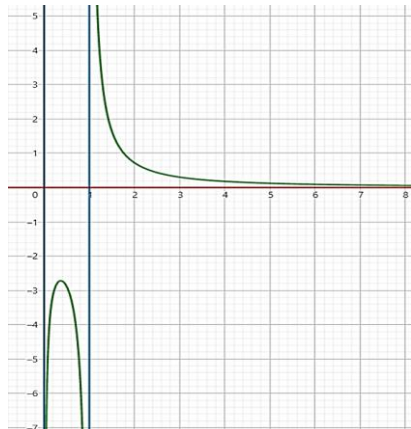
التابع $\ln(x) \mapsto x$ اشتقاقي على $]1, +\infty[$ والتابع $g(x)$ هو تركيب تابعين اشتقاقيين على $]0, +\infty[$ فهو اشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومنههو اشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

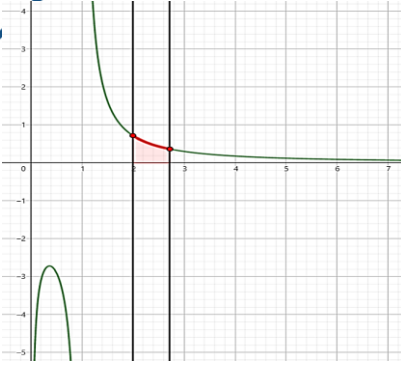
$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x} = f(x)$$

إذا التابع g هو تابع أصلي للتابع f على المجال $]1, +\infty[$

الطالب الرابع:

ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C .

الطالب الخامس:

احسب مساحة السطح المحصورين C ومحورالفواصل والمستقيمين $x = 2$ و $x = e$ 

$$S = \int_2^e (f(x) - y) dx$$

$$= \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \int_2^e \frac{1}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_2^e$$

$$= 0 - \ln(\ln 2) = -\ln(\ln 2)$$

الطالب السادس:

استنتج رسم الخط البياني للتابع

$$h(x) = \frac{1}{|x \cdot \ln x|}$$

لدينا: $h(x) = |f(x)|$ C_h ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات

الترتيب الموجبة وبأخذ النظائر ذات الترتيب

السالبة إلى محور الفواصل.

الطالب السابع:

ناقش بيانياً حلول المعادلة

$$1 - mx \ln(x) = 0$$

الحل:

$$1 = mx \ln(x)$$

$$m = \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$m = f(x)$$

أياً كان $m \in]-\infty, -e[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان.عندما $m = -e$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.أياً كان $m \in]-e, 0[$ تكون المعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.أياً كان $m \in]0, +\infty[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد

دورة 2017 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ والصفر
- ثم استنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي
- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
- ثم دل على القيمة الحدية محلياً
- جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x = 1$
- ارسم كلا مقارب وجدته وارسم المماس Δ ثم ارسم C
- احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x = e$

دورة 2017 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = x + x(\ln x)^2$$

- وليكنا:
- أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$
- اثبت أن $f'(x) = g(x)$
- حل المعادلة $g(x) = 0$
- نظم جدول بتغيرات f
- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم Δ وارسم C

دورة 2018 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = x^2 - \ln(x)$$

- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$
- في معلم متجانس:
- ارسم المماس T والخط البياني C
- احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$
- نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث: $u_n = n^2 - \ln(n)$ أثبت أن المتتالية متزايدة u_n

دورة 2019 الأولى 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]e^{-1}, +\infty[$

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{1 + \ln(x)}$$

- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ من المجال $]0.9, 1.1[$
- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

دورة 2019 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln(x)}{x}$$

- عين العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$
- من أجل $a = 4$ و $b = -4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

دورة 2020 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $] - 2, 2[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

- اثبت أن التابع f فردي
- ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0, 2[$
- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة $x = 0.1$
- في معلم متجانس ارسم الخط البياني C
- استنتج رسم الخط البياني C' للتابع: $g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$

دورة 2020 الأولى 40 درجة:

أثبت أنه أياً كان $x > -1$ كان:

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

دورة 2020 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي
- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$
- في معلم متجانس ارسم الخط البياني C
- استنتج رسم C' الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{1-x+\ln(x)}{x}$$

دورة 2021 الأولى 40 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $I =]0, +\infty[$

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

- أثبت أن f متزايدة تماماً على I واستنتج $f(I)$
- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

ادرس الوضع النسبي

بين الخط البياني C والمستقيم d

دورة 2022 الأولى 70 درجة:

ليكن f تابعاً معرفاً على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln(x)} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- أثبت أن f مستمر عند الصفر.
- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً
- بين أن الخط البياني C التابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته.
- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

دورة 2022 الثانية 40 درجة:

ليكن التابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = \ln(2 + \sin x)$$

احسب $g'(x)$ و $g'(0)$ ثم استنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + \sin x) - \ln(2)}{x}$$

دورة 2023 الأولى 40 درجة:

ليكن f معرفة على $] - 1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(x+1)} & ; x \in D \setminus \{0\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر ثماحسب $f'(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

دورة 2023 الأولى 70 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln(x)}{x}$$

- عين a و b ليمر التابع من النقطة $A(1,6)$ ويقبل مماساً في النقطة A ميله يساوي 3
- من أجل $a = 4$ و $b = 2$ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y = 4x + 2$ مقارب مائل للخط البياني عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب.

احسب $\int_1^2 f(x) \cdot dx$

دورة 2023 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة علىالمجال $I =] - 2, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = (x+1) \ln(x+2)$$

وليكنا g التابع المعرفة على $I =] - 2, +\infty[$

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

1. جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
2. أثبت أن $f'(x) = g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x = -1$
3. ادرس اطراد $g(x)$ واستنتج إشارته "مستقيماً من نقطة التماس"
4. نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.
5. استنتج اطراد المتتالية $u_n = \ln(n+2)^{n+1}$ أيأ كان n عدد طبيعي

النماذج الوزارية:

التحريث الأول:

- ليكن g التابع المعرف على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة:
- $$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$
1. احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$
 2. واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln(2)}{x-1}$$

التحريث الثاني:

- ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على $]-\infty, +\infty[\setminus]0, 2[$ بالعلاقة:
- $$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$
1. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f
 2. أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
 3. ارسم الخط C في معلم متجانس
 4. لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^* وفق: $u_n = f(u_n)$

نضع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 أثبت أن $S_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

التحريث الثالث:

- حل في \mathbb{R} المعادلة الآتية:
 $-\ln(x+1) + \ln(x) = \ln(x-1)$

التحريث الرابع:

احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

التحريث الخامس:

- ليكن لدينا الخط البياني C التابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:
- $$f(x) = 1 + \frac{2\ln(x)}{x}$$
1. احسب نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$ واستنتج ما له من مقاربات تواري

- المحورين الإحداثيين ثم ادرس وضع C مع مقاربه الأفقي Δ
1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
 2. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{2}, 1[$
 3. باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$
 4. ارسم Δ ثم ارسم C
 5. احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

التحريث السادس:

- ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق:
- $$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$
- وليكن C' الخط البياني التابع g مقصور التابع f على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ والمطلوب:
1. أثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C
 2. ادرس تغيرات التابع g ثم نظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب للخط C'
 3. ارسم كل مقارب وجدته وارسم C' ثم استنتج رسم C
 4. احسب مساحة السطح المحصور بين C' ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادليهما $x = 2$ و $x = 3$

التحريث السابع:

- ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على $]0, +\infty[$ المعطى بالعلاقة:
- $$f(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$$
1. أثبت أن f اشتقاقي عند الصفر
 2. ثم استنتج مجموعة تعريف $f'(x)$
 3. جد $f'(x)$ على $]0, +\infty[$
 4. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ وفق:
 $g(x) = \sqrt{\cos x} \cdot \ln(1 + \cos x)$

التحريث الثامن:

- ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ بالعلاقة:
- $$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
- ولتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^* وفق: $u_n = g(n)$ حيث g مقصور التابع f على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ والمطلوب:
1. ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0, +\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب
 2. ارسم C على المجال $]0, +\infty[$

3. أثبت أن النقطة $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ هي مركز تناظر للخط C ثم استنتج رسم الخط البياني التابع f
4. نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 أثبت أن: $S_n = -\ln(n+1)$
5. جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ وما نهاية $(S_n)_{n \geq 1}$

التحريث التاسع:

- ليكن C_f الخط البياني التابع f المعرف على $] -2, 2[$
- $$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$$
- أثبت أن التابع f هو تابع فردي ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $]0, 2[$
- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 0$
- ادرس الوضع النسبي بين T و C_f

التحريث العاشر:

- ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ وفق:
- $$f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
1. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d
 2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f
 3. أثبت أن $f(x) + f(-x) = -2$
 4. استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0, -1)$
 5. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f
 6. استنتج رسم C_g للتابع g المعرف وفق:
 $g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

اختبارات الكتاب:

التحريث الأول:

احسب النهاية الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$$

التحريث الثاني:

- أثبت أن $\ln(x) \leq x - 1$ أيأ يكن $x > 0$
 باختيار $x = e^{-\frac{1}{3}}$ و $x = e^{\frac{1}{3}}$ احصر e

التعريف الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على $]0, +\infty[$ بالعلامة:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .
- ادرس التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C وارسم كلا مقاربه ووجدته ثم ارسم C .
- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طولها 0.5.

التعريف الرابع:

أثبت أنه أيًا كانت x من $-1, +\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$$

التعريف الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln(x))}$$

- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين وعين قيمته الحدية مبيئاً نوعها.
- ارسم ما وجدته من مستقيمات مقارنة.
- ثم ارسم C .
- احسب مساحة السطح المحصور بين

$$x = \frac{1}{e^2} \text{ و } x = \frac{1}{e}$$

التعريف السادس:

أولاً:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f

المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

1. أثبت أن $f(x)$ يُكتب بالشكل:

$$f(x) = 1(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

ثانياً:

ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعروف على

$]0, +\infty[$ وفق: $g(x) = -2x \ln(x)$

أثبت أنه عند $x > 0$ يكون:

$$f(x) - g(x) = xf'(x)$$

واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g

ثالثاً:

ليكن x_0 من $]0, +\infty[$:

1. بين أن معادلة المماس T للمحني C_f في

النقطة التي فاصلتها x_0 هي:

$$y = xf'(x_0)g(x_0)$$

2. ادرس تقاطع المماس T مع محور

الترتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء

المماس للمحني C_f عند النقطة التي

فاصلتها x_0

حتى لا يصيبك الإحباط..

عُود نفسك ألا تقف بالمنتصف، ألا تترك كتاباً بدأت به، ولا مشروعاً انضممت إليه، ولا فكرة خطّطت لها، ولا عادةً تمارسها، ولا سلوكاً يضبط سيرك، إلا لظرفٍ يمنعك، انتبه من كثرة الثقل، ومرافقة العُلّ! لا تمكّن عينيك وتنسى نفسك..

إياك والبحث عن الكمال في كل شيء

لا تكن أشدّ تأنيباً يصعبُ جمعك!!

مُهرس برهت التابع اللوغاريتمي:

1. خواص

2. معادلات

3. متراجحات

4. مجموعة تعريف تابع لوغاريتمي

5. نهايات تابع لوغاريتمي

6. اشتقاق تابع لوغاريتمي

7. دراسة تغيرات تابع لوغاريتمي

8. معادلة مختلطة

9. متراجحة مختلطة

10. معامس مشترك

نحتاج إلى الفكاهة..

يريد الواحد منا أن يصل دون سير، وأن ينجز دون حركة، وأن يبلغ المراد بلا إرادة! وتلك أحلام الفارغين، ما إن سكنت قلبك حتى قتلتها! وأدخلت عليك حسرة القوات، تكثر الأمنيات وتقل الحركات، فكيف نريد النتائج!

نحتاج إلى مكابدة الهوى، حتى تستقيم نفوسنا، وأن تكابد العُلّ والعُلّ والقيل، ونجاهد الفراغ ليمتلئ، من ترّس على العمومة لا يطأبن فعالى الأمور، ومن اشتد امتد أثره، وزادت همته، وأدرك أن «أثقال الحياة لا يطيقها المهازيل»



شيفرة الـ 600 في التابع الأسّي

تفهيدي:

رمز التابع الأسّي	مقدار يحوي متغير e	مقدار يحوي متغير p ($e \times p$)
شروط تعريف التابع الأسّي	هو نفسه شرط تعريف أسه	

خواص التابع الأسّي:

شروط التطبيق	الخاصة	
	$* e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ $* \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	أولاً
	$* (e^a)^b = e^{a \cdot b}$ $* \frac{1}{e^a} = e^{-a}$	
	$* e^{\ln(a)} = a$ $* e^{n \ln(a)} = e^{\ln(a)^n} = a^n$ $* e^{\ln(a)+\ln(b)} = \begin{cases} e^{\ln(a \cdot b)} = a \cdot b \\ e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)} = a \cdot b \end{cases}$ $* e^{\ln(a)-\ln(b)} = \begin{cases} e^{\ln(\frac{a}{b})} = \frac{a}{b} \\ \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = \frac{a}{b} \end{cases}$	ثانياً
	$* e^0 = 1$ $* e^1 = e$	قيم مباشرة
تحفظ ولا تكتب	$* \ln(2) \cong 0.7$ $* \ln(3) \cong 1.1$ $* \ln(5) \cong 1.6$	قيم تقريبية
	$* e \cong 2.7$ $* e^2 \cong 7.3$ $* \frac{1}{e} \cong 0.4$ $* \sqrt{e} \cong 1.6$	

أنماط التمارين:

إثبات صحة علاقة	الاختزال	النقط
أثبت صحة العلاقة (المساواة)	(بسـط اختزل) المقادير الآتية	نص السؤال
لدينا أسلوبان: الأسلوب الأول: ننتقل من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني الأسلوب الثاني: ننتقل من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة	نطبق ما يلزم من خواص وعمليات وصولاً لأبسط شكل ممكن	فكرة الحل

$$= \frac{1}{x} \ln e + e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$5. H = e^{2+\ln(8)}$$

$$= e^2 \cdot e^{\ln 8} = 8 \cdot e^2$$

$$6. I = \frac{e^2}{e^{1+\ln(2)}}$$

$$= \frac{e^2}{e^1 \cdot e^{\ln 2}} = \frac{e}{e^{\ln 2}} = \frac{e}{2}$$

$$7. K = \ln(\sqrt{e^5})$$

$$= \ln(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2} \ln e = \frac{5}{2}$$

$$8. R = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$$

$$= \frac{e^2 \cdot e^{\ln 8}}{e^3 \cdot e^{\ln 4}} = \frac{8e^2}{4e^3} = \frac{2}{e} = 2 \cdot e^{-1}$$

$$12. P = -\frac{1}{3 \ln(3)}$$

$$13. Q = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$1. A = e^{\ln(2)}$$

$$A = 2$$

$$2. B = e^{\frac{1}{2} \ln(16)} + e^{\ln(3)}$$

$$B = e^{\ln \sqrt{16}} + e^{\ln(3)}$$

$$\sqrt{16} + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$3. F = e^{\ln(x-1) - \ln(x)} + \frac{1}{x}$$

$$= e^{\ln(\frac{x-1}{x})} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$4. G = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{\ln(x)^{-1}}$$

التعريف الأول:

بسـط كتابة الأعداد الآتية:

اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

- $A = e^{\ln(2)}$
- $B = e^{\frac{1}{2} \ln(16)} + e^{\ln(3)}$
- $F = e^{\ln(x-1) - \ln(x)} + \frac{1}{x}$
- $G = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}$
- $H = e^{2+\ln(8)}$
- $I = \frac{e^2}{e^{1+\ln(2)}}$
- $K = \ln(\sqrt{e^5})$
- $R = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$
- $L = \frac{e^{4x}}{e^x \cdot (e^x)^2}$
- $N = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{2x} - e^x}$
- $O = (32)^{\frac{3}{2}}$

٤

$$\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{l_1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

$$l_1 = e^{-x} - e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} = l_2$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$l_1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = l_2$$

التعريف الرابع:

أثبت أن التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

تابع ثابت.

الطريقة الأولى:

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$= ((e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2)$$

$$- ((e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2)$$

$$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

إذا التابع f تابع ثابت.

الطريقة الثانية:

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$= (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})$$

$$= (2e^{-x})(2e^x)$$

$$= 4 \cdot e^0 = 4$$

إذا التابع f تابع ثابت.

التعريف الثالث:

أثبت صحة كل مما يأتي:

- $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $\ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) = x$
- $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$
- $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$
- $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

الحل:

١.

$$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$l_1 = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{1}{e^{-x} + 1} = l_2$$

٢.

$$\frac{\ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1)}{l_1} = \frac{x}{l_2}$$

$$l_1 = \ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^{-x} + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^{-x} + 1}\right)$$

$$= \ln e^x = x = l_2$$

٣.

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{l_1} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$

$$l_1 = (e^x + e^{-x})^2 = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}} = l_2$$

$$9. L = \frac{e^{4x}}{e^x e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{4x} \cdot e^{-2x}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$$

$$10. N = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{2x} - e^x}$$

$$= \frac{e^x(e^{2x} - e^x)}{e^{2x} - e^x} = e^x$$

$$11. O = (32)^{\frac{3}{2}}$$

$$= ((2^5)^{\frac{3}{2}}) = (2)^{5 \times \frac{3}{2}} = (2)^{\frac{15}{2}}$$

$$12. P = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$$

$$= e^{\ln(3)^{\frac{-1}{\ln 3}}} = e^{\frac{-\ln 3}{\ln 3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$13. Q = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[6]{3^3} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = 3^1 = 3$$

التعريف الثاني:

$$A = 5^{\frac{1}{\ln(5)}}$$

$$\text{بسّط كتابة كلا من العددين } A \text{ و } B = 3^{\frac{-1}{\ln(3)}}$$

ثم احسب الجداء $A \cdot B$:

الحل:

تبسط A :

$$A = 5^{\frac{1}{\ln(5)}} = e^{\ln(5)^{\frac{1}{\ln(5)}}} = e^{\frac{1}{\ln(5)} \cdot \ln(5)}$$

$$= e^{\frac{\ln(5)}{\ln(5)}} = e^1 = e$$

تبسيط كتابة B :

$$B = 3^{\frac{1}{\ln(3)}} = e^{\ln(3)^{\frac{1}{\ln(3)}}}$$

$$= e^{\frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln(3)} = e^{\frac{\ln(3)}{\ln(3)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

حساب الجداء $A \cdot B$:

$$A \cdot B = e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

ما دمت تسعى ، فلا تُدعِن لمعضلةٍ لا بُدَّ من خاضِ دربَ السعي أن يصلَ.. أظنُّ أن التعبَ: تمخوُّها فكرةٌ فطنته :

«وَأَنْ سَعِيهِ سَوْفَ يُرَى»



المعادلات الأسية:

النمط الرابع	النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	النمط
جملة معادلتين تحوي e^{ax}	تكون من أحد الأشكال: * تحوي e^{2x} و e^{-x} معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-x} معاً * تحوي e^{4x} و e^{2x} معاً * تحوي e^{-4x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{3x} و e^x معاً * تحوي e^{-3x} و e^{-x} معاً	عدد $e^{ax} = e^{bx}$ كذا	$e^{ax} = e^{bx}$ كذا	شكل المعادلة
جد الحل المشترك لجملة المعادلتين	نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^{2x} و e^x فيكون $t = e^x$ وهكذا بقية الحالات. ٢. نعوض في المعادلة ٣. نحصل على معادلة بدلالة t ٤. نحل المعادلة ٥. نوجد قيم x	حل المعادلة الآتية * نحدد شرط الحل (عند الأروم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^{ax} = e^{bx}$ أي نعزل e ونميز: العدد سالب أو صفر: تكون المعادلة مستحيلة الحل العدد موجب: ١. نأخذ لوغاريتم الطرفين ٢. فنحصل على معادلة ٣. نحل هذه المعادلة ٤. نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	* نحدد شرط الحل (عند الأروم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^a = e^b$ وهي معادلة تكافؤ: $a = b$ * نحل هذه المعادلة * نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	نص السؤال فكرة الحل

الحل:

$$1. e^{3x-1} = e^{x^2}$$

$$\rightarrow 3x - 1 = x^2$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 9 - 4(1)(1) = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

٢. $e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$
معرف e^x على:
 $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

لدينا:

$$\frac{1}{e^x} = e^{x-3}$$

$$\frac{1}{x} = x - 3$$

$$1 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9 - 4(1)(-1) = 13$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \rightarrow \text{مقبول}$$

$$5. x^2 - (-1 + e^2)x - e^2 = 0$$

$$x^2 + (+1 - e^2)x - e^2 = 0$$

$$\rightarrow (x + 1)(x - e^2) = 0$$

$$6. x^2 - (1 + e)x + e = 0$$

$$x^2 + (-1 - e)x + e = 0$$

$$\rightarrow (x - 1)(x - e) = 0$$

التعريف الأول:
حل المعادلات الآتية:

- $e^{3x-1} = e^{x^2}$
- $e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$
- $e^{x^2} \cdot e^{5x} = (e^x)^3 \cdot e$
- $e^{3x-1} = 0$
- $e^{3x-1} = 1$
- $-e^{2x+1} + 2 = 0$
- $e^{x^2+1} = 2$
- $e^{x+\ln(4)} = \frac{2}{3}$
- $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
- $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$
- $e^x - \frac{4}{e^x} = 0$
- $2e^{-x} = \frac{1}{e^{x+2}}$
- $(e^x - 1)(e^x + 4) = 1$
- $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$
- $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$
- $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$
- $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$
- $4e^{2x} + e^{-2x} = 5$
- $(e^x - 2)e^x = 2(e^x - 2)$
- $\frac{e^x - 1}{e^{2x+1}} = \frac{e^x - 2}{e^{x+2}}$

ملاحظة هامة:

في المعادلات التي تحوي مجهول واحد أحياناً نحتاج للإصلاحات من أجل الوصول إلى أحد أنواعها التي وردت معنا والإصلاحات هي:

- * النشر
- * توحيد مقامات
- * النقل
- * الاختزال
- * تطبيق خواص أسية
- * إخراج عامل مشترك

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين
نضرب طرفي المعادلة بـ e^x
عند وجود e^{-x} و e^x معاً
نضرب طرفي المعادلة بـ e^{2x}
عند وجود e^{-2x} و e^{2x} معاً
توضيح: في حال:

- ◀ كانت الأسس من نفس الإشارة نقرض t
- ◀ كانت الأسس مختلفة الإشارة نضرب

ملاحظة خاصة بالتحليل المباشر:

حصراً

- $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$
 $(x + 1)(x - \sqrt{3}) = 0$
- $x^2 + (-1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
 $\rightarrow (x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$
- $x^2 + (-1 + e)x - e = 0$
 $\rightarrow (x - 1)(x + e) = 0$
- $x^2 + (-1 - e^2)x + e^2 = 0$
 $\rightarrow (x - 1)(x - e^2) = 0$

$$e^x = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}\right)$$

$$= \ln(-3 + \sqrt{29}) - \ln(2)$$

$$14. e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$$

$$e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} - e^{x+2} = 0$$

$$e^x(e^{2x} - (e^2 - 1)e^x - e^2) = 0$$

$$\text{إما } e^x = 0 \rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

$$\text{أو } e^{2x} - (e^2 - 1)e^x - e^2 = 0$$

$$e^{2x} + (-e^2 + 1)e^x - e^2 = 0$$

$$\text{لتكن: } t = e^x \text{ فتكون: } t^2 = e^{2x}$$

$$t^2 + (-e^2 + 1)t - e^2 = 0$$

$$(t - e^2)(t + 1) = 0$$

$$\text{إما } t = e^2$$

$$e^x = e^2$$

$$x = 2$$

$$\text{أو } t = -1$$

$$e^x = -1$$

$$\text{مستحيلة الحل}$$

$$15. e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$$

$$e^{2x} - 3e \cdot e^x + 2e^2 = 0$$

$$\text{لتكن: } t = e^x \text{ فتكون: } t^2 = e^{2x}$$

$$t^2 - 3e \cdot t + 2e^2 = 0$$

$$a = 1, b = -3e, c = 2e^2$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 9e^2 - 4(1)(2e^2)$$

$$= 9e^2 - 8e^2 = e^2$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3e - e}{2} = e$$

$$e^x = e$$

$$x = 1$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3e + e}{2} = 2e$$

$$e^x = 2e$$

$$x = \ln(2e)$$

$$= \ln(2) + \ln(e) = \ln 2 + 1$$

$$16. e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

$$e^{x+1}(e^{2x} + 4e^x - 5) = 0$$

$$\text{إما } e^{x+1} = 0$$

$$\text{مستحيلة الحل}$$

$$\text{أو } e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$$

$$\text{بفرض: } t = e^x \text{ فتكون: } t^2 = e^{2x}$$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t + 5)(t - 1) = 0$$

$$\text{إما } t = -5$$

$$e^x = -5$$

$$\text{مستحيلة الحل}$$

$$\text{أو } t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$10. e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$$

$$t^2 = e^{-2x} \text{ فتكون } t = e^{-x} \text{ لتكن}$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t - 6)(t - 1) = 0$$

$$\text{إما } t = 6$$

$$e^{-x} = 6$$

$$-x = \ln 6 \rightarrow x = -\ln 6$$

$$\text{أو } t = 1$$

$$e^{-x} = 1$$

$$-x = \ln 1 \rightarrow x = 0$$

$$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

$$t^2 = e^{2x} \text{ فتكون } t = e^x \text{ لتكن}$$

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$a = 4, b = -1, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 1 - 4(4)(2)$$

$$= -31 < 0 \rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

$$11. e^x - \frac{4}{e^x} = 0; E = \mathbb{R}$$

$$\frac{e^{2x} - 4}{e^x} = 0$$

$$e^{2x} - 4 = 0$$

$$e^{2x} = 4$$

$$2x = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln(4)}{2} = \frac{\ln(2)^2}{2}$$

$$= \frac{2 \ln(2)}{2} = \ln(2)$$

$$12. 2e^{-x} = \frac{1}{e^{x+2}}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2e^{-x}(e^x + 2) = 1$$

$$2e^0 + 4e^{-x} = 1$$

$$2 + 4e^{-x} = 1$$

$$4e^{-x} = -1$$

$$e^{-x} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

$$13. (e^x - 1)(e^x + 4) = 1$$

$$e^{2x} + 4e^x - e^x - 4 = 1$$

$$e^{2x} + 3e^x - 5 = 0$$

$$t^2 = e^{2x} \text{ فتكون: } t = e^x \text{ لتكن}$$

$$t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$a = 1, b = 3, c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 9 - 4(1)(-5) = 29$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$$

$$e^x = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} \rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$3. e^{x^2} \cdot e^{5x} = (e^x)^3 \cdot e$$

$$e^{x^2+5x} = e^{3x+1}$$

$$\rightarrow x^2 + 5x = 3x + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c) = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$4. e^{3x-1} = 0$$

$$\text{مستحيلة الحل.}$$

$$5. e^{3x-1} = 1$$

$$\rightarrow 3x - 1 = \ln(1)$$

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$6. -e^{2x+1} + 2 = 0$$

$$e^{2x+1} = 2$$

$$\rightarrow 2x + 1 = \ln 2$$

$$2x = \ln 2 - 1$$

$$x = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

$$7. e^{x^2+1} = 2$$

$$\rightarrow x^2 + 1 = \ln 2$$

$$x^2 = \ln 2 - 1$$

$$\text{مستحيلة الحل لأن: } \ln(2) - 1 < 0$$

$$8. e^{x+\ln(4)} = \frac{2}{3}$$

$$x + \ln(4) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x + \ln(4) = \ln(2) - \ln(3)$$

$$x = \ln(2) - \ln(3) - \ln(4)$$

$$x = \ln\left(\frac{2}{3 \times 4}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$x = -\ln 6$$

$$9. e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$

$$\text{لتكن } t = e^x \text{ فتكون } t^2 = e^{2x}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t - 4)(t - 1) = 0$$

$$\text{إما } t = 4$$

$$e^x = 4 \rightarrow x = \ln(4)$$

$$\text{أو } t = 1$$

$$e^x = 1 \rightarrow x = \ln 1 = 0$$

$$\frac{-8 + y^2}{y} = \ln(1) - \ln(e)^2$$

$$\frac{-8 + y^2}{y} = -2 \ln e$$

$$\frac{-8 + y^2}{y} = -2$$

$$\frac{-8 + y^2}{y} = +2 = 0$$

$$\frac{-8 + y^2 + 2y}{y} = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(y + 4)(y - 2) = 0$$

$$\text{إما } y = -4$$

نعوض في (*) :

$$x = \frac{-2}{-4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{أو } y = 2$$

نعوض في (*) :

$$x = \frac{-2}{2} \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \dots (1) \\ x + y = 1 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$y = 1 - x \dots (*)$$

نعوض في (1):

$$3e^x - e^{1-x+3} - 2e^2 = 0$$

$$3e^x - e^{-x+4} - 2e^2 = 0$$

نضرب بـ e^x :

$$3e^{2x} - e^4 - 2e^{x+2} = 0$$

$$3e^{2x} - 2e^2 \cdot e^x - e^4 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$3t^2 - 2e^2 t - e^4 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -2e^2, \quad c = -e^4$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 4e^4 - 4(3)(-e^4)$$

$$= 4e^2 + 12e^4 = 16e^4$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2 - 4e^2}{6} = -\frac{e^2}{3}$$

$$e^x = -\frac{e^2}{3}$$

مستحيلة الحل..

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2 + 4e^2}{6} = e^2$$

$$e^x = e^2$$

$$x = 2$$

سيفر الله العين بما نرجو 🙏❤️

$$20. \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$$

$$(e^x - 1)(e^x + 2) = (e^x - 2)(e^{2x} + 1)$$

$$e^{2x} + 2e^x - e^x - 2 = e^{3x} + e^x - 2e^{2x} - 2$$

$$e^{3x} - 3e^{2x} = 0$$

$$e^{2x}(e^x - 3) = 0$$

$$\text{إما } e^{2x} = 0$$

مستحيلة الحل

$$\text{أو } e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 3$$

$$x = \ln(3)$$

التمرين الثاني:

في كل حالة أتيه جد لكالمشترك لجملة المعادلتين:

$$1. \begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

الحل:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \dots (1) \\ 2e^x + e^y = 4 + e \dots (2) \end{cases}$$

نضرب بـ المعادلة (1) بالعدد -2

$$-2e^x + \frac{2}{e}e^y = -2 \dots (1)'$$

بجمع (1)' و (2) نجد:

$$\frac{2}{e} \cdot e^y + e^y = 2 + e$$

$$e^y \left(\frac{2}{e} + 1 \right) = 2 + e$$

$$e^y \left(\frac{2+e}{e} \right) = 2 + e$$

$$e^y = \frac{2+e}{\frac{2+e}{e}} = e$$

$$y = 1$$

نعوض في (2) فنجد:

$$2e^x + e = 4 + e$$

$$2e^x = 4$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

$$\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \dots (1) \\ xy = -2 \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$x = -\frac{2}{y} \dots (*)$$

نعوض في المعادلة (1):

$$e^{-\frac{8}{y}} \cdot e^y = \frac{1}{e^2}$$

$$e^{-\frac{8}{y}+y} = \frac{1}{e^2}$$

$$-\frac{8}{y} + y = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$$

$$17. e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$$

$$\frac{e^{2x} + e}{e^x} - (1 + e) = 0$$

$$\frac{e^{2x} + e - e^x - e^{x+1}}{e^x} = 0$$

$$e^{2x} - e^x - e \cdot e^x + e = 0$$

$$e^{2x} + (-1 - e)e^x + e = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 + (-1 - e)t + e = 0$$

$$(t - 1)(t - e) = 0$$

$$\text{إما } t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\text{أو } t = e$$

$$e^x = e$$

$$x = 1$$

$$18. 4e^{2x} + e^{-2x} = 5$$

نضرب بـ e^{2x} ونجد:

$$4e^{4x} + 1 = 5e^{2x}$$

$$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 = 0$$

لتكن: $t = e^{2x}$ فتكون: $t^2 = e^{4x}$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$a = 4, \quad b = -5, \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 25 - 4(4)(1) = 9$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$e^{2x} = \frac{1}{4}$$

$$2x = \ln \frac{1}{4} \rightarrow 2x = -\ln 4$$

$$2x = -\ln(2)^2 \rightarrow 2x = -2 \ln 2$$

$$x = -\ln 2$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{8} = 1$$

$$t = 1$$

$$e^{2x} = 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$19. (e^x - 2)e^x = 2(e^x - 2)$$

$$e^{2x} - 2e^x = 2e^x - 4$$

$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

بفرض: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t - 2)(t - 2) = 0$$

$$(t - 2)^2 = 0$$

$$t = 2$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

التمرين الثالث:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

الطالب الأول:

احسب $P(2)$ ثم تحقق أن:

$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الطالب:

حساب $P(2)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 \\ &= 2(8) - 5(4) + 4 \\ &= 16 - 20 + 4 = 0 \end{aligned}$$

تعيين a و b و c :

نلاحظ أن $x = 2$ تعدم $P(x)$ لذلك نقسم $P(x)$ على $x - 2$ ومن القسم الإقليدية نجد:

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 1)$$

بالمطابقة نجد أن:

$$c = -1 \text{ و } b = -1 \text{ و } a = 2$$

الطالب الثاني:

حل في \mathbb{R} المعادلة: $P(x) = 0$

$$P(x) = 0$$

$$(x - 2)(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\text{إما } x = 2$$

$$\text{أو } 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= (-1)^2 - 4(2)(-1)$$

$$= 1 + 8 = 9 > 0$$

إذا للمعادلة حلان حيث:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{4} = 1$$

ومن حل المعادلة $P(x) = 0$ هي:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

الطالب الثالث:

استنتج الحلول في \mathbb{R} المعادلة:

$$2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$$

الطالب:

مما سبق نجد أن حلول المعادلة هي:

$$\text{مستحيلة الحل} \rightarrow e^x = -\frac{1}{2} \text{ إما}$$

$$\text{أو } e^x = 1 \rightarrow x = 0$$

$$\text{أو } e^x = 2 \rightarrow x = \ln(2)$$

نحن جميعاً نجوم ..

وبرغبنا نستطيع أن نسطع



المترجمات الأسية:

النمط الثالث	النمط الثاني	النمط الأول	النمط
تكون المترجمة من أحد الأشكال: * تحوي e^{2x} و e^x معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-x} معاً * تحوي e^{4x} و e^{2x} معاً * تحوي e^{-4x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{3x} و e^x معاً * تحوي e^{-3x} و e^{-x} معاً	عدد إشارة e^{ax} كذا تراجع	إشارة e^{ax} كذا تراجع	شكل المترجمة
نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر وجعلها الصفر في الطرف الأيمن نحول إلى معادلة ونحلها وفق: نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^x و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^x$ فيكون $e^{2x} = t^2$ وهكذا بقية الحالات.. نعوض في المعادلة نحل المعادلة بدلالة t نوجد قيم x ننظم جدول الإشارة (ثلاثة حقول نصيحة ضع الإشارة باستخدام القيم الاختيارية) نحدد S حلول المترجمة	تطبيق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد إشارة e^{ax} موجب تراجع نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على مترجمة نحل هذه المترجمة نحصل على المطلوب.	تطبيق إصلاحات وخواص مناسبة عند اللزوم للوصول إلى الشكل: إشارة e^a تراجع وهي مترجمة تكافئ: إشارة b تراجع نحل هذه المترجمة	نص السؤال فكرة الحل

التمرين الأول:

حل المترجمات الآتية:

- $e^{3x-1} > e^2$
- $e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$
- $\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq (e^x)^3 \cdot e$
- $e^{3-x} \geq 0$
- $e^{3-x} \leq 1$
- $e^{(2x^2-1)} \geq 3$
- $e^{x+\ln(4)} > \frac{3}{2}$
- $e^{5-x} < 0$
- $e^{2x} - 5e^x > -4$
- $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$
- $e^x - 4e^{-x} \leq 0$

الطالب:

$$12. e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$$

$$13. e^{x+2} \geq \frac{3}{e^x}$$

$$14. \frac{e^{x-1}}{e^{2x+1}+1} \geq \frac{e^{x-2}}{e^{x+2}}$$

$$1. e^{3x-1} > e^2$$

$$3x - 1 > 2$$

$$3x > 3 \rightarrow x > 1$$

$$S =]1, +\infty[$$

$$2. e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$$

$$3x + 1 > \frac{1}{x}$$

$$3x + 1 - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{3x^2 + x - 1}{x} > 0$$

نعدم البسط:

$$3x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 1 - 4(3)(-1) = 13$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

نعدم المقام:

$$x = 0$$

مجموعة تعريف التابع الأساسي:

التابع الأساسي معرف على مجموعة تعريف أسه	
نص السؤال	أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f
فكرة الحل	نوجد مجموعة تعريف الأس فتكون: مجموعة تعريف الأس $D_f = \mathbb{R}$

ملاحظات:

أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f	
نص السؤال	التابع f مؤلف من كسر و e^a و e^b
شكل التابع	التابع f مؤلف من كسر و e^a
فكرة الحل	<p>نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a</p> <p>نوجد D_2 مجموعة تعريف e^b</p> <p>تكون:</p> $D_f = D_1 \cap D_2$

تدريب:

أوجد مجموعة تعريف التابع f :

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- $f(x) = e^x - x$
- $f(x) = e^x - \ln x$
- $f(x) = e^{2x} - e^x$
- $f(x) = \frac{2e^{x+1}}{1+e^x}$
- $f(x) = \frac{2e^{x+1}}{1-e^x}$
- $f(x) = \frac{e^{x+1}}{2x}$
- $f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1}}$
- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{3-e^x}$

الحل:

- $f(x) = e^x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow D_f = \mathbb{R}^*$

نهايات التابع الأساسي:

ملاحظات	تعميمها	المبرهنة	
قيم تكتب تجاوزا لسهولة الحفظ:		* $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	الأولى
$e^{-\infty} = 0$		* $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	
$e^1 = e$			الثانية
$e^0 = 1$			
لدينا:	التعميم الأول:	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	
* صغير x	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	
* كبير e^x	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$	* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	
ونعلم أن:	التعميم الثاني:		
* $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}} = 0$	* $\lim_{\text{مقدار} \rightarrow +\infty} \frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}^n} = +\infty$		
* $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = +\infty$	* $\lim_{\text{مقدار} \rightarrow +\infty} \frac{(\text{مقدار})^n}{\text{مقدار}} = 0$		

9. $f(x) = \frac{e^{x+1}}{2x}$

نعدم المقام:

$2x = 0$

$x = 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

10. $f(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}+1}}{x}$

نعدم المقام:

$x = 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{3-e^x}$

نعدم المقام:

$3 - e^x = 0 \rightarrow e^x = 3$

$x = \ln 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

3. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \rightarrow D_f = [0, +\infty[$

4. $f(x) = e^x - x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = e^x - \ln x \rightarrow D_f =]0, +\infty[$

6. $f(x) = e^{2x} - e^x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

7. $f(x) = \frac{2e^{x+1}}{1+e^x}$

نعدم المقام:

$1 + e^x = 0$

$e^x = -1$

مستحيلة الحل ومنه:

$D_f = \mathbb{R}$

8. $f(x) = \frac{2e^{x+1}}{1-e^x}$

نعدم المقام:

$1 - e^x = 0$

$e^x = 1$

$x = 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

	التعميم الأول	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	التعميم الثاني:	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	الثالثة
		$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\text{مقدار}} = 0$			
	التعميم الأول:	$\lim_{\text{شغلة} \rightarrow 0} \frac{e^{\text{شغلة}} - 1}{\text{شغلة}} = 1$	التعميم الثاني:	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	الرابعة
		$\lim_{\text{شغلة} \rightarrow 0} \frac{\text{شغلة}}{e^{\text{شغلة}} - 1} = 1$		$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$	
العبرهات نفذ ثم لا تعترض					

$$f(x) = e^{2x} - e^x$$

$$= e^x(e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$4. f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

$$= \frac{e^x \left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$f(x) = \frac{2 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$5. f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

اجتهدواكم كفيك بأن يحول

الحلم من خيال إلى واقع

$$7. f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

$$8. f(x) = e^{2x} - e^x + 3$$

$$9. f(x) = e^{2x} - x + 3$$

$$10. f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$$

$$11. f(x) = x - 1 + e^{-2x}$$

الحل:

$$1. f(x) = e^x - x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = e^x - x$$

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$2. f(x) = e^x - \ln x$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = e^x - \ln x$$

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$3. f(x) = e^{2x} - e^x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

ملاحظات هامة جداً:

1. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة.
2. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرة أي:
 - * يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
 - * لا يوجد مبرهنة ← تعويض
3. التعويض هو استبدال x بالمسعى
4. في المبرهنة نحفظ: شكل التابع المسعى
- * ونضع الناتج فوراً
- * وعند اختلال أحدها فهذا يعني عدم وجود مبرهنة إنما تعويض
5. تحذف كلمة \lim عند التعويض أي عند اختفاء x
6. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوّضها في المقام فقط
7. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك نصح التابع باستخدام الإصلاح المناسب:
 - * حيث الإصلاحات: النشر
 - * إخراج عامل مشترك
 - * تفرقة الكسور
 - * توحيد المقامات
 - * الضرب والقسمة
 - * التباعد الاجتماعي
 - * خواص لوغاريتمية (مناسبة)

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = e^x - x$
2. $f(x) = e^x - \ln(x)$
3. $f(x) = e^{2x} - e^x$
4. $f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$
5. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
6. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ملاحظة هامة:

أحياناً يكون التابع f عبارة عن أسّي أسه تابعآخر $g(x)$ فإننا لليجاد نهاية التابع f

نتبع الخطوات:

* نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$

* نعوض ناتج النهاية بدلاً من الأس

نعرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}-x}$
2. $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$
3. $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

الحل:

1. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}-x}$

$D_f =] -\infty, +\infty[$

عند $-\infty$:

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$$

عند $+\infty$:

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$$

2. $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

$D_f =] -\infty, +\infty[$

عند $-\infty$:

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

عند $+\infty$:

لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = e^{2x} - x + 3$$

$$= e^x \left(e^x - \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

10. $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$$

$$= 2x - 1 + \frac{1}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{2x \cdot e^x - e^x + 1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0 - 0 + 1}{0^+} = +\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^{-x}$$

$$= (x^2 - x + 1) \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$$

$$= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 - 0 + 0 = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

11. $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = x - 1 + e^{-2x}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$f(x) = \frac{xe^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$f(x) = \frac{2xe^{2x}}{2e^{2x}} - 1 + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 1 + 0 = -1$$

6. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$

$D_f = \mathbb{R}^* =] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{2x}$$

$$= \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

7. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

8. $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = e^{2x} - e^x + 3$$

$$= e^x \left(e^x - 1 + \frac{3}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

9. $f(x) = e^{2x} - x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x^{-1}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{t}} - 1}{\frac{1}{t}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل (0)(∞)

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

لتكن: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لما كان: $x \rightarrow -\infty$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{t} (e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

ملاحظة مهمة:

أحياناً نحتاج إلى استخدام طريقة تغيير المتحول لإزالة حالة عدم التعيين.

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات.

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$D_f =] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل (0)(∞)

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

لتكن: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لما كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{t} (e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \left(e^{\frac{1}{0^-}} - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل (0)(∞)

$$f(x) = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$$

$$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)$$

$$f(x) = \ln(e^{-x}(e^x + 1))$$

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3. f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

عند ال $(-\infty)$:
لما كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = 1 - e^{-x} + e^{-2x}$$

$$= e^{-x} \left(\frac{1}{e^x} - 1 + e^{-x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$f(x) = 2x + \ln(e^{-2x}(e^{2x} - e^x + 1))$$

$$f(x) = 2x + \ln e^{-2x} + \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

$$f(x) = 2x - 2x + \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$

$$f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

عند ال $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 1$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

النهيات المميزة:

نص السؤال	أوجد نهاية التابع f عند a
بعد التعويض ننتدم من ظهور 1^∞ طول بالك وذود نفس، القصة بسيطة صديقي هلق أبو فريم بلها.. المهم هي اسمها (نهاية مميزة) ونحن هون نتعلم كيف ممكن نزيلها بسر ركز بالخطوات الجاية:	
فكرة الحل	<ol style="list-style-type: none"> 1. نغرض متحول جديد وفق: (ما داخل الأقواس $1 + t =$) 2. نغزل t أي نكتب t بدلالة x ثم نغزل x أي نكتب x بدلالة t 3. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t 4. نعوض في التابع f أي نكتب التابع f بدلالة t 5. باستخدام إصلاحات مناسبة نظهر $\frac{1}{t}$ في الأسر وعند ظهور $\frac{1}{t}$ في الأسر نستخدم الخاصة: $a^x = e^{\ln(a^x)}$ 6. نصلح ثم نوجد النهاية شاييف ما أحلاها وما أسطها..

$$2. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; a = +\infty$$

وجود نهاية مميزة.

بغرض:

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{t}$$

لما كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= e^{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right] = e^1 = e$$

علماً أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a :

$$1. f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}; a = 0$$

وجود نهاية مميزة.

بغرض:

$$1 + t = 1 + x$$

$$\rightarrow t = x$$

$$\rightarrow x = t$$

لما كان: $x \rightarrow 0$ فإن: $t \rightarrow 0$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

دراسة تغيرات التابع الأسّي:

تمرين:

ادرس في كلا حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني:

$$f(x) = (3-x)e^x; I = \mathbb{R}$$

حالة عدم تعيين من الشكل (0) (∞)

$$f(x) = (3-x)e^x$$

$$f(x) = 3e^x - xe^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

علمًا أنّ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = -e^x + e^x(3-x)$$

$$f'(x) = -e^x + 3e^x - xe^x$$

$$f'(x) = 2e^x - xe^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - xe^x = 0$$

$$e^x(2-x) = 0$$

$$\text{إما } e^x = 0$$

مستحيلة الحد.

$$\text{أو } x = 2 \in D_f \rightarrow f(2) = e^2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow e^2$	$\searrow -\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f(2) = e^2 \text{ قيمة حدية كبرى.}$$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: (0,3)

مع محور الفواصل: نحل المعادلة:

$$f(x) = 0$$

$$(3-x)e^x = 0$$

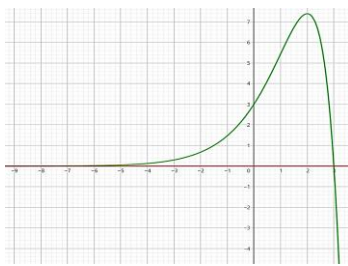
$$\text{إما } 3-x = 0$$

$$x = 3 \rightarrow (3,0)$$

$$\text{أو } e^x = 0$$

مستحيلة الحد.

الرسم:



$$f(x) = e^x - ex; I = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = e^x - ex$$

$$= x \left(\frac{e^x}{x} - e \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

اشتقاق التابع الأسّي:

التابع الأسّي اشتقاقي على مجموعة تعريفه ومشتقه هو مشتق أسه بنفسه وفق:

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow f'(x) = (as) \cdot (e^{ax})$$

التعريف الأول:

أوجد التابع المشتق للتابع f :

$$1. f(x) = e^{5x} \rightarrow f'(x) = 5e^{5x}$$

$$2. f(x) = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$3. f(x) = e^{\cos x} \rightarrow f'(x) = -\sin x e^{\cos x}$$

$$4. f(x) = (x^2 - 2x)e^x$$

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x)$$

$$= 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x$$

$$= -2e^x + x^2e^x$$

$$5. f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^{-x}) - (-e^{-x})(e^x - 1)}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 + 1 - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{2 + e^x - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$6. f(x) = \ln(1 + e^x) \rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$7. f(x) = e^{-x} \ln x$$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{1}{x} e^{-x}$$

التعريف الثاني:

f و g تابعان المعرفان على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

h هو التابع المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$h' = \frac{1}{f^2} \text{ وأثبت أنّ } g'(x) \text{ و } f'(x) \text{ احسب}$$

الحد:

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

إيجاد $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$h' = \frac{1}{f^2} \text{ إثبات أنّ:}$$

$$\frac{h'}{f^2} = \frac{g'(f) - f'(g)}{f^2}$$

$$l_1 = h' = \left(\frac{g}{f} \right)' = \frac{g'(f) - f'(g)}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \left(\frac{1}{2} \right) (e^x + e^{-x}) - \left(\frac{1}{2} \right) (e^x - e^{-x}) \left(\frac{1}{2} \right) (e^x - e^{-x})}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}}{f^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{f^2} = \frac{1}{f^2} = l_2$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$= e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^{\left(\frac{1}{t}\right)\ln(1+t)} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e$$

علمًا أنّ:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$3. f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}; a = 1$$

وجود نهاية معيّنة.

بفرض:

$$1+t = 2-x$$

$$\rightarrow t = 1-x$$

$$\rightarrow x = 1-t$$

لما كان: $x \rightarrow 1$ فإن $t \rightarrow 0$:

$$f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$$

$$f(x) = (1+t)^{\frac{3}{1-t-1}}$$

$$= (1+t)^{-\frac{3}{t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-3} = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right)^{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right)^{-3} = e^{-3}$$

علمًا أنّ:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$4. f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}; a = +\infty$$

وجود نهاية معيّنة:

بفرض:

$$1+t = \frac{x-2}{x+1}$$

$$\rightarrow t = \frac{-3}{x+1}$$

$$\rightarrow x = \frac{-3}{t} - 1$$

لما كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow 0$:

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= (1+t)^{\frac{-3-1+1}{3}} = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-1} = \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right)^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right)^{-1} = e^{-1}$$

علمًا أنّ:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

ثم إنه لا شيء يجبر قلوبنا مثل الذئاع..

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

التابع f اشتقاقي عن \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = e^x - e$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x - e = 0$$

$$e^x = e$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

التحضير للرسم:

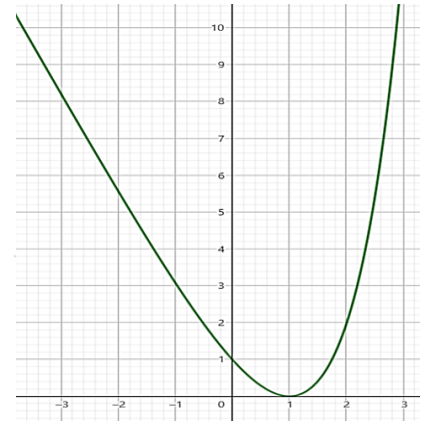
$f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: $(0, 1)$

مع محور الفواصل: بلاها كثرة الغلبة.

الرسم:



$$f(x) = e^x \times p\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1}$$

$y = e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-1}$$

$y = e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}; I = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = 0$$

$$e^x = 0$$

مستحيلة الحد.

لا ينعدم $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	\nearrow 1

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

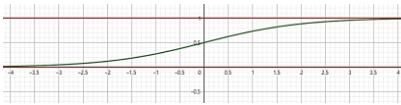
القيم الحدية: لا يوجد.

التقاطع مع محاور الإحداثيات:

محور الترتيب: $(0, \frac{1}{2})$

محور الفواصل: لا يوجد

الرسم:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{0^-} = 0$$

التابع f اشتقاقي على

$]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}} = 0$$

$$\frac{2}{(1-x)^2} = 0$$

$$2 \neq 0$$

مستحيلة الحد.

$$\frac{1+x}{1-x} = 0$$

مستحيلة الحد.

لا ينعدم $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	e^{-1}	\nearrow 0 \searrow	e^{-1}

التحضير للرسم:

$y = e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

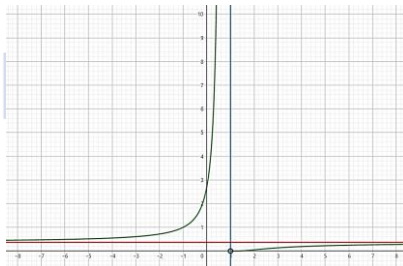
نقطة مفرغة $(1, 0)$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: $(0, e)$

مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسم:



دراسة تابع لحل معادلة مختلطة

$$x^2 + 1 - e^3 = 0 \leftarrow \text{معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$x^2 + 1 - e^x = 0 \leftarrow \text{معادلة مختلطة}$$

أي موقع الـ x يحدد نوع المعادلة.

حل المعادلة الآتية

تعلم أن المعادلة المختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ومن أجل ذلك فإننا نقيم الخطوات:

١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن

٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $= g(x)$

٣. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها

٤. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:

هل ينعدم $g(x)$ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟

* الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نعوض قيم تجريبية

② إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحد

تمرين:

حل المعادلة الآتية:

$$\frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرفة والمستمرة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$-5(e^{2x} - 2e^x + 1) = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$t^2 = e^{2x} \text{ فتكون } t = e^x$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)(t - 1) = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t - 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_g \rightarrow g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن:

$0 \in g(x)$ ومنه للمعادلة $g(x) = 0$ حل

والحل هو $x = 0$

$$g(x) = \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right) - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - \infty + \frac{1}{2} = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x - \frac{5}{4}}{(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$g'(x) = \frac{20e^x - 5(e^x + 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^x + 1)^2} = 0$$

$$-5e^{2x} + 10e^x - 5 = 0$$

لا تخلي المختلطة تأخذك بالعبطة..

حكمة

نصر السؤال

فكرة الحل

ادرس تغيرات التابع f

١. نحدد مجموعة تعريف التابع

٢. نوجد النهايات والصور

٣. نوجد $f'(x)$

٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$

نتأكد أن المعادلة مختلطة ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية:

✍ نكتب: سنعود بعد قليل (سيستون قناة المستقبل)

٥. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = f'(x)$

٦. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها

٧. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:

هل ينعدم $g(x)$ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟

الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز:

① إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل

② إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نستخدم قيم تجريبية

✍ نكتب: عدنا ونميز:

لا يوجد للمعادلة حل أي $f'(x)$ لا ينعدم

يوجد للمعادلة حل α أي ينعدم $f'(x)$ عند α نوجد $f(\alpha)$

٨. ننظم جدول تغيرات التابع f

تمرين:

ادرس تغيرات التابع f المعرفة على \mathbb{R} ونظم

جدولاً بها وارسم خطه البياني:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$$

$$f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

علماً أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$$f'(x) = e^x - ex$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x - ex = 0$$

هذا خيط لا يمكن حله بالطرق التقليدية..

سنعود بعد قليل:

ليكن لدينا التابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = e^x - ex$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = e^x - ex$$

$$= x \left(\frac{e^x}{x} - e \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = e^x - e$$

$$g'(x) = 0$$

$$e^x - e = 0$$

$$e^x = e$$

$$x = 1 \in D_g \rightarrow g(1) = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $0 \in g(x)$ ومنه للمعادلة حل

والحل هو $x = 1$

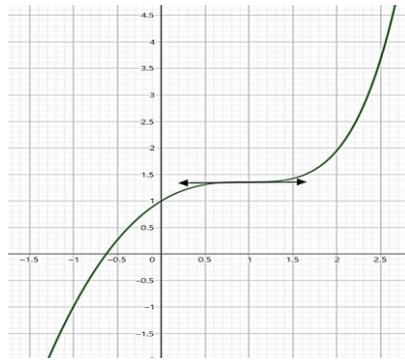
عدنا..

$f'(1) = \frac{e}{2}$ ومنه: $x = 1$ ينعدم $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{e}{2} \nearrow$	$+\infty$

مستقبلك يعتمد على ما تفعله الآن.. ❤

بالنسبة لدوافع الاستمرار ف
هو مفيتش دوافع أساسًا ..
انا مستير هدمعنة مني كدة !



التحضير للرسم:

لدينا معامس أفقي: $y = \frac{e}{2} \cong 1,4$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: بلاها كتره الغلبة.
الرسم:

دراسة تابع لحل متراجحة مختلفة:

نص السؤال	أثبت صحة المتراجحة
فكرة الحل	1. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
	2. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $g(x) =$
	3. ندرس اطراد التابع $g(x)$ (دراسة تغيرات دون نهايات) وننظم جدولاً بها بحيث نحدد إشارة $g'(x)$
	4. بالاعتماد على حقل $g(x)$ تجري المناقشة الآتية: ما هي إشارة $g(x)$
	* الحل: يتم تحديدها من حقل $g(x)$ بالاعتماد على قيم $g(x)$ وليس عبر الأسهم يمكن تحديد الإشارة باستخدام أسلوب السرعة (حلال)
	5. ثبت صحة المتراجحة

تمرين:

أثبت صحة المتراجحة الآتية من أجل $x \geq 0$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 1$$

$$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرفة على $[0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 0$$

ننظم جدول اطراد التابع:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	0	↗

نلاحظ أن:

$$g(x) \geq 0$$

$$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 1$$

وهذه المتراجحة محققة من أجل $x \geq 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} (e^{\sqrt{x}} - 1) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \text{مستحيلة الحل}$$

$$\text{أو } e^{\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$$e^{\sqrt{x}} = 1$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \in D_g \rightarrow g(0) = 0$$

دراسة تابع لدراسة الوضع النسبي:

حكمة	لا تخلي المختلطة تأخذك بالعبطة..
نص السؤال	ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمستقيم Δ
فكرة الحل	1. نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_{\Delta}$
	2. نعدم الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$
	ننصم أنها خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية
	✍ نكتب: سنعود بعد قليل (سيستون قناة المستقب)
	1. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = h(x)$
	2. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها
	3. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال:
	4. ما هي إشارة $g(x)$ ؟
	* الحل: نحدد من حقل $g(x)$ من جدول تغيرات $g(x)$
	✍ نكتب عننا
	3. ننظم جدول الوضع النسبي بالاعتماد على جدول تغيرات التابع $g(x)$

تمرين:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

\mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ

والخط البياني C_f .

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

الحل:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

نلاحظ أن للمعادلة حل وحيد $x = 0$
ومنه الفرق ينعدم عند $x = 0$
عدنا..

ينعدم الفرق عند $x = 0$
نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C	$ $	Δ تحت C

$$\begin{aligned} -5e^{2x} + 10e^x - 5 &= 0 \\ 4(e^{2x} + 2e^x + 1) &= 0 \\ -5e^{2x} + 10e^x - 5 &= 0 \\ -5(e^{2x} - 2e^x + 1) &= 0 \\ -5(e^x - 1)^2 &= 0 \\ (e^x - 1)^2 &= 0 \\ e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= 1 \\ x = 0 \in D_g &\rightarrow g(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{e^x \left(2 + \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= -\infty \\ \text{التابع } g &\text{ اشتقاقي على } \mathbb{R} \text{ ولدنا:} \\ g'(x) &= \frac{5e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} - \frac{5}{4} \\ g'(x) &= \frac{-5e^{2x} + 10e^x - 5}{4(e^{2x} + 2e^x + 1)} \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

المعاصر المشترك:

نصر السؤال
فكرة الحل
أثبت أن C_g و C_f يقبلان معامساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0
ثبت أن $f(x_0) = g(x_0)$
ثبت أن $f'(x_0) = g'(x_0)$

التعريف الثالث:

C_g و C_f هما الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين وفق:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

أثبت أن C_g و C_f يقبلان معامساً مشتركاً في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها واكتب معادلة المعاصر المشترك لـ C_g و C_f :
الحل:

للإيجاد النقطة المشتركة: نحل المعادلة:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ (e^x - e^{-x})(e^{2x} + 1) &= (e^{2x} - 1)(2) \\ e^{3x} + e^x - e^x - e^{-x} &= 2e^{2x} - 2 \\ e^{3x} - 2e^{2x} - e^{-x} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

نضرب بـ e^x :

$$e^{4x} - 2e^{3x} + 2e^x - 1 = 0$$

لتكن: $t = e^x$

$$t^4 - 2t^3 + 2t - 1 = 0$$

نلاحظ أن $t = 1$ تعدم المقدار:

بالقسمة الإقليدية نجد:

$$(t - 1)(t^3 - t^2 - t + 1) = 0$$

$$t = 1 \text{ إما}$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\text{أو } t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$

نلاحظ أن $t = 1$ تعدم المقدار:

بالقسمة الإقليدية نجد:

$$(t - 1)(t^2 - 1) = 0$$

$$t = 1 \text{ إما}$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

الطالب الأول:

أثبت أن C_g و C_f يقبلان معامساً مشتركاً في النقطة $T(0,0)$:
الحل:

الشرط الأول:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= 0 \\ \rightarrow f(0) &= g(0) \end{aligned}$$

الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{(x+1)^{-1}}{(1-x)} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)(1-x)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(1-x)} \\ f'(0) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ g'(x) &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

$$g'(0) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\rightarrow f'(0) = g'(0) = 1$$

مما سبق نجد أن C_g و C_f يقبلان معامساً في النقطة $(0,0)$:

الطالب الثاني:

اكتب معادلة المعاصر المشترك T :

النقطة $A(0,0)$

الميل: $m = 1$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$$T: y = x$$

التعريف الأول:

في معلم متجانس C_g و C_f هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x + 1) \\ g(x) &= e^x - 1 \end{aligned}$$

الطالب الأول:

أثبت أن C_g و C_f يقبلان معامساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$:
الحل:

الشرط الأول:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= 0 \\ \rightarrow f(0) &= g(0) \end{aligned}$$

الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} \rightarrow f'(0) = 1 \\ g'(x) &= e^x \rightarrow g'(0) = 1 \\ \rightarrow f'(0) &= g'(0) \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن C_g و C_f يقبلان معامساً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$:
الطالب الثاني:

اكتب معادلة المعاصر المشترك T :

الحل:

النقطة: $(0,0)$

الميل: $m = 1$

المعادلة: $T: y = x$

التعريف الثاني:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $] -1, 1[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$$

وليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على \mathbb{R}

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$f'(0) = g'(0) = 1$
 مما سبق نجد أن C_g و C_f يقبلان معاً
 مشتركاً في النقطة التي فصلتها $x = 0$
 النقطة $A(0,0)$ وميل المعام $m = 1$
 ومعادلتها:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$$T: y = x$$

الشرط الأول:

$$f(0) = 0$$

$$g(0) = 0$$

$$\rightarrow f(0) = g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \rightarrow f'(0) = 1$$

$$g'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \rightarrow g'(0) = 1$$

$$t^2 = 1 \text{ أو}$$

$$t = -1 \text{ إما}$$

$$e^x = -1$$

مستحيلة الحل..

$$\text{أو } t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

إذاً فاصلة نقطة تماس C_g و C_f هي $x = 0$

المعادلات التفاضلية:

حلها	شكل المعادلة	حلها	شكل المعادلة
$f_k(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$	$y' = ay + b$	$f_k(x) = k \cdot e^{ax}; k \in \mathbb{R}$	$y' = ay$

أنماط التمارين:

تمرين	فكرة الحل	نص السؤال	النمط
<p>التمرين الأول: أثبت أن التابع $f(x) = xe^x$ حل المعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$ ثم استنتج أن: $(f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = x$ الحل: لدينا:</p> $f'(x) = e^x + xe^x$ $f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$ $\underbrace{y' - y}_{l_1} = \underbrace{e^x}_{l_2}$ $l_1 = y' - y = e^x + xe^x - xe^x = e^x = l_2$ استنتج أن: $\underbrace{(f'' - 2f' + 2f)e^{-x}}_{l_1} = \underbrace{x}_{l_2}$ $l_1 = (2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + 2xe^x)e^{-x}$ $= (xe^x)e^{-x} = x = l_2$	<p>نعوض في المعادلة التفاضلية ونستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ ونميز: المعادلة محققة: إذا $f(x)$ هو الحل المعادلة غير محققة: إذا $f(x)$ ليس حل المعادلة</p>	<p>أثبت أن التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)</p>	الأول
<p>التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على: $\mathbb{R}f(x) = \frac{2x}{e^x}$ أثبت أن $f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية: $y' + y = 2e^{-x}$ $y = f(x) = \frac{2x}{e^x}$, $y' = f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 2x}{e^x}$ نعوض: $\frac{2 - 2x}{e^x} + \frac{2x}{e^x} = 2e^{-x} \rightarrow \frac{2}{e^x} = 2e^{-x} \rightarrow 2e^{-x} = 2e^{-x}$ محققة</p>	<p>نعوض في المعادلة التفاضلية بحيث نستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ فنحصل على معادلة بهذا المجهول وبهذا هذه المعادلة نحصل على المطلوب</p>	<p>عين قيمة المجهول m ليكون التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)</p>	الثاني
<p>لتكن E المعادلة التفاضلية: $(E): y' + 3y = 2e^{-x}$ عين العدد a ليكون التابع: $f(x) = ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية: الحل: إيجاد $f'(x)$: لدينا:</p> $f'(x) = -ae^{-x}$ $y' + 3y = 2e^{-x}$ $-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x} \rightarrow 2ae^{-x} = 2e^{-x}$ $a = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x}} \rightarrow a = 1$			

"في عصر السرعة، وزمن العجلة، قد تنظر لإنجازك بعين الباطن حتى تكاد تتخلى عنها ظناً منك بعدم جدواها.. لكن سأخبرك: أن أكثر الأشياء رسوخاً وجودةً تلك التي تأخذ وقتها الكافي لتنفو، وتمرُّ بكلِّ مراحلها لتتضح، أنت لا تحتاج لشيء سوى الشثيرة والصبر "فما انقادت الأمل إلا لصابراً!" ♥

١. نحل y'
٢. نحدد قيمة a
٣. نحدد قيمة b عند وجود حل
٤. نطبق التعريف المناسب

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$1. \quad y' = 3y$$

$$a = 3$$

حلول المعادلة هي التوابيع من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = ke^{3x}; k \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad 3y' = 5y \rightarrow y' = \frac{5}{3}y$$

$$a = \frac{5}{3}$$

حلول المعادلة هي التوابيع من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = ke^{\left(\frac{5}{3}\right)x}; k \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad 2y' = y - 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

حلول المعادلة هي التوابيع من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = ke^{\left(\frac{1}{2}\right)x} + 1; k \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad 2y + 3y' - 1 = 0 \rightarrow y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

حلول المعادلة هي توابيع من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = ke^{\left(-\frac{2}{3}\right)x} + \frac{1}{2}; k \in \mathbb{R}$$

حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عينا k بحيث يكون ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2
الحل:

$$2y' + y = 1$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

حلول المعادلة هي توابيع من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}; k \in \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)x} + 1; k \in \mathbb{R}$$

إيجاد قيمة k :

بما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2 فإن:

$$f'(0) = -2$$

وإذن:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)x}; k \in \mathbb{R}$$

إذا:

$$-\frac{1}{2}ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)(0)} = -2$$

$$-\frac{1}{2}k = -2 \rightarrow k = 4$$

إذا حل المعادلة التفاضلية: $f(x) = 4e^{\left(-\frac{1}{2}\right)x} + 1$ عينا تابعا من الدرجة الثانية f بحيث يحقق المعادلة التفاضلية:

$$2y' - y = -x^2 + x$$

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

وبما أن التابع f يحقق المعادلة فإن:

$$2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = -x^2 + x$$

$$4ax + 2b - ax^2 - bx - c = -x^2 + x$$

$$-ax^2 + (4a - b)x + 2b - c = -x^2 + x$$

وبالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} -a = -1 \dots (1) \\ 4a - b = 1 \dots (2) \\ 2b - c = 0 \dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد: $a = 1$ نعوض في (2) فنجد: $b = 3$ نعوض في (3) فنجد: $c = 6$ إذا التابع: $f(x) = x^2 + 3x + 6$

عينا حل المعادلة التفاضلية (معطاة) الذي يحقق الشرط (معطى)

١. نحل المعادلة كما ورد في النقط الثالث
٢. بالاعتماد على الشرط نضع الترجمة المناسبة
٣. نعوض ونصلح وصولاً إلى K قاموس الترجمات:

الترجمة	الشرط
$f(x_A) = y_A$	الخط البياني للحل يمر بالنقطة $A(x_A, y_A)$
$f(a) = b$	الحل f يحقق $f(a) = b$ ميل المماس في النقطة التي فاصلتها x_A للنقط C من الحل يساوي m

عينا تابعا من الدرجة الثانية يحقق المعادلة التفاضلية (معطاة)

١. نفرض تابعا من الدرجة الثانية من الشكل: $f(x) = ax^2 + bx + c$
٢. نشق التابع $f(x)$
٣. نعوض في المعادلة التفاضلية كلاً من $f(x)$ و $f'(x)$ فنحصل على معادلة بالمجهول a و b و c
٤. نتطابق بينهما وبين المعادلة التفاضلية (المعطاة)
٥. فنحصل على جملة معادلات بالمجهول a و b و c نحلها إما بالحدف بالجمع أو بالحدف بالتعويض
٦. نحصل على قيم a و b و c وبتعويضها في: $f(x) = ax^2 + bx + c$ نكون قد حصلنا على التابع

تعريف	الرمز	الخاصة	كيفية التعامل مع
التابع الأسّي هو حالة خاصة من التابع a^x حيث: $a = e$	$a > 0$ حيث: a^x	$a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x \ln(a)}$	المعادلات والمترجمات
النهايات والاشتقاق ودراسة التغيرات		نستفيد من الخاصّة $a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x \ln(a)}$ ثم نتابع كما ورد معنا في التابع الأسّي	تذكر
			وجود a^{2x} و a^x معا عدد $a^x = b^x$ العدد موجب العدد سالب أو صفر تأخذ لوغاريتم الطرفين تأخذ لوغاريتم الطرفين مستحيلة الحل

7. $2^{x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 = 0$

$2 \cdot 2^x - 10 \cdot 2^x + 12 = 0$

$-8 \cdot 2^x + 12 = 0$

$-8 \cdot 2^x = -12$

$2^x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 2^x = \ln \frac{3}{2}$

$x \cdot \ln 2 = \ln 3 - \ln 2$

$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$

8. $2^{x+1} - 10 \cdot 2^x + 12 \geq 0$

$2^x \cdot 2 - 10 \cdot 2^x + 12 \geq 0$

$-8 \cdot 2^x + 12 \geq 0$

$-8 \cdot 2^x \geq -12$

$2^x \leq \frac{3}{2}$

$x \cdot \ln 2 \leq \ln 3 - \ln 2$

$x \leq \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$

$S =]-\infty, \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}]$

التعريف الثاني:

حل في \mathbb{R} جملة المعادلتين:

$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 9 \dots (1) \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 9 \dots (1) \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$

من (2) نجد:

$3^x = 4\sqrt{3} - 3^y \dots (*)$

نعوض في (1):

$(4\sqrt{3} - 3^y)3^y = 9$

$4\sqrt{3} \cdot 3^y - 3^{2y} = 9$

$3^{2y} - 4\sqrt{3} \cdot 3^y + 9 = 0$

لتكن $t = 3^y$ فتكون: $t^2 - 4\sqrt{3}t + 9 = 0$

$t^2 - 4\sqrt{3}t + 9 = 0$

$a = 1, b = -4\sqrt{3}, c = 9$

4. $(\frac{1}{3})^x > 4$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln(\frac{1}{3})^x > \ln 4$

$x \cdot \ln(\frac{1}{3}) > \ln 4$

$x(\ln(1) - \ln(3)) > \ln 4$

$-x \cdot \ln 3 > \ln 4$

$-x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

$x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

$S =]-\infty, -\frac{\ln 4}{\ln 3}[$

5. $5^{-x} < 5^{2x}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 5^{-x} < \ln 5^{2x}$

$-x \cdot \ln 5 < 2x \cdot \ln 5$

$-x \cdot \ln 5 - 2x \cdot \ln 5 < 0$

$-3x \cdot \ln 5 < 0 \rightarrow x > 0$

$S =]0, +\infty[$

6. $\frac{2^x}{2^{x+1}} < \frac{1}{3}$

$2^x \cdot 3 < 2^x + 1$

$3 \cdot 2^x - 2^x < 1$

$2 \cdot 2^x < 1$

$2^{x+1} < 1$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 2^{x+1} < \ln 1$

$(x+1) \ln 2 < 0$

$x \cdot \ln 2 + \ln 2 < 0$

$x \cdot \ln 2 < -\ln 2$

$x < -\frac{\ln 2}{\ln 2} \rightarrow x < -1$

$S =]-\infty, -1[$

1. $7^{x-1} = 3^x$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 7^{x-1} = \ln 3^x$

$(x-1) \ln 7 = x \cdot \ln 3$

$x \cdot \ln 7 - \ln 7 = x \cdot \ln 3$

$x \cdot \ln 7 - x \cdot \ln 3 = \ln 7$

$x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7 \rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$

2. $3^x = 4^{2x+1}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 3^x = \ln 4^{2x+1}$

$x \cdot \ln 3 = (2x+1) \ln 4$

$x \cdot \ln 3 = 2x \cdot \ln 4 + \ln 4$

$x \cdot \ln 3 - 2x \cdot \ln 4 = \ln 4$

$x(\ln 3 - 2 \ln 4) = \ln 4$

$x = \frac{\ln 4}{\ln 3 - 2 \ln 4}$

3. $3^x > 4$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$\ln 3^x > \ln 4$

$x \cdot \ln 3 > \ln 4$

$x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

$S =]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty[$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(\infty - \infty)$

$$f(x) = e^{2x \cdot \ln 2} - 4e^{x \cdot \ln 2}$$

$$f(x) = e^{x \cdot \ln 2} (e^{x \cdot \ln 2} - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 2 \cdot e^{2x \cdot \ln 2} - 4 \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 \cdot \ln 2 \cdot e^{2x \cdot \ln 2} - 4 \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

$$2 \cdot \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} (e^{x \cdot \ln 2} - 2) = 0$$

$$\text{إما } 2 \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

مستحيلة الحل...

$$\text{أو } e^{x \cdot \ln 2} - 2 = 0$$

$$e^{x \cdot \ln 2} = 2$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln 2$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = -4$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	\searrow -4 \nearrow	$+\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f(1) = -4 \text{ قيمة حدية صغرى}$$

التقاطع مع المحاور:

مع محور الترتيب: $(0, -3)$

مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0$$

$$e^{2x \cdot \ln 2} - 4e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

$$e^{x \cdot \ln 2} (e^{x \cdot \ln 2} - 4) = 0$$

$$\text{إما } e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

مستحيلة الحل

$$\text{أو } e^{x \cdot \ln 2} - 4 = 0$$

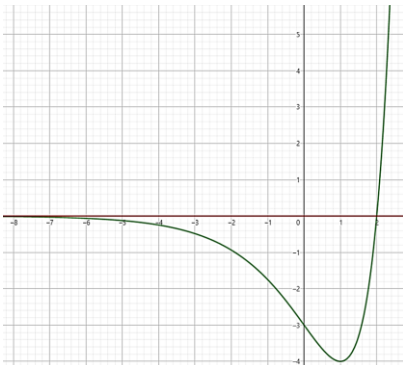
$$e^{x \cdot \ln 2} = 4$$

$$x \cdot \ln 2 = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \cdot \ln 2}{\ln 2}$$

$$x = 2 \rightarrow (2, 0)$$

الرسم...



التابع f معرف ومستمر على \mathbb{R} ولدنيا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(\infty)(0)$

$$f(x) = x e^{x \cdot \ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} x \cdot \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} .

ولدنيا:

$$f'(x) = (1)e^{x \cdot \ln 2} + (x \cdot \ln 2)' e^{x \cdot \ln 2} \cdot x$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln 2} + x \cdot \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^{x \cdot \ln 2} + x \cdot \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

$$e^{x \cdot \ln 2} (1 + x \cdot \ln 2) = 0$$

$$\text{إما } e^{x \cdot \ln 2} = 0$$

مستحيلة الحل

$$\text{أو } 1 + x \cdot \ln 2 = 0$$

$$x \cdot \ln 2 = -1$$

$$x = \frac{-1}{\ln 2} \in D_f$$

$$f\left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2} e^{-\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln 2} = -\frac{1}{\ln 2} e^{-1} = -\frac{1}{e \cdot \ln 2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	\searrow $-\frac{1}{e \cdot \ln 2}$ \nearrow	$+\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$f\left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{e \cdot \ln 2} \text{ قيمة حدية صغرى}$$

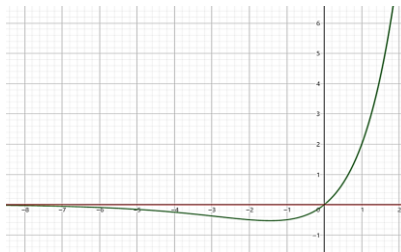
التقاطع مع محور الترتيب: $(0, 0)$

التقاطع مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسم...

القيم التقريبية
$-\frac{1}{\ln 2} \cong -1,4$
$-\frac{1}{e \cdot \ln 2} \cong -0,5$

الرسم:



$$f(x) = 4^x - 2^{x+2}$$

$$= (2^2)^x - 2^x \cdot 2^2 = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x$$

$$= e^{\ln 2^{2x}} - 4e^{\ln 2^x}$$

$$= e^{2x \cdot \ln 2} - 4e^{x \cdot \ln 2}$$

التابع f معرف ومستمر على \mathbb{R} ولدنيا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 48 - 36 = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$3^y = \sqrt{3} \rightarrow 3^y = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

نعوض في (*):

$$3^x = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$3^x = 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$3^y = 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

نعوض في (*):

$$3^x = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

التعريف الثالث:

جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية:

$$f(x) = x^x$$

$$x^x = e^{(\ln(x))^x} = e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$f'(x) = (x \cdot \ln x)' \cdot e^{x \cdot \ln x}$$

$$= (\ln x + 1) e^{x \cdot \ln x}$$

$$= (\ln x + 1) x^x$$

$$f(x) = 3^{x^2}$$

$$3^{x^2} = e^{\ln 3^{x^2}} = e^{x^2 \cdot \ln 3}$$

$$f'(x) = (x^2 \ln 3)' e^{x^2 \ln 3}$$

$$f'(x) = (2x \cdot \ln 3) e^{x^2 \ln 3}$$

$$f'(x) = (2x \cdot \ln 3) 3^{x^2}$$

$$f(x) = \pi^{\ln(x)}$$

$$\pi^{\ln x} = e^{\ln \pi^{\ln x}}$$

$$= e^{\ln x \cdot \ln \pi}$$

$$f'(x) = (\ln x \cdot \ln \pi)' e^{\ln x \cdot \ln \pi}$$

$$f'(x) = \frac{\ln \pi}{x} \cdot e^{\ln x \cdot \ln \pi}$$

$$f'(x) = \frac{\ln \pi}{x} \cdot \pi^{\ln x}$$

التعريف الرابع:

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f المعرف على \mathbb{R} وارسم خطه البياني.

$$f(x) = x^{2^x}$$

الحل:

$$f(x) = x^{2^x} = x e^{\ln 2^x}$$

$$f(x) = x e^{x \cdot \ln 2}$$

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^{\frac{x+2}{x+1}} & ; x \neq -1 \\ e & ; x = -1 \end{cases}$$

هنا التابع f مستمر عند -1

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر عند (-1) يجب تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

وجود نهاية مميزة.

ليكن:

$$1 + t = x + 2$$

$$\rightarrow t = x + 1$$

$$\rightarrow x = t - 1$$

لذا كان $x \rightarrow -1$ فإن $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^{\frac{x+2}{x+1}} \\ &= (1+t)^{\frac{t+1}{t}} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \\ &= (1+t)(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= (1+t)e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\ &= (1+t)e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t) \cdot e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right] \\ &= (1)e^{(1)} = e \end{aligned}$$

إيجاد الصورة:

$$f(-1) = e$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = e$$

إذا التابع f مستمر عند (-1)

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

هنا التابع f مستمر عند الصفر

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{3x} - e^x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot (e^{3x} - e^x) \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{e^{3x} - e^x}{x} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{e^{3x} - e^x}{x} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{e^{3x} - e^x}{x} \end{aligned}$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$-a + b = 1 \dots (1)$$

$$2a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد: $a = 1$

نعوض في (1) نجد: $b = 2$

إذاً: $a = 1$ و $b = 2$ ومنه يكون:

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

التمرين الخامس:

f هو التابع المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = e^x$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرفة على \mathbb{R}^* وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

إذاً التابع f اشتقافي عند الصفر والخط

البياني يقبل معاملاً ميله $m = 1$ في

النقطة $A(0,1)$ معادلته:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 1(x - 0) + 1$$

$$T: y = x + 1$$

التمرين السادس:

f هو التابع المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = e^{\sin x}$$

احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$ واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

الحل:

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$$

$$f'(0) = (1)e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1$$

التمرين السابع:

باستخدام تعريف المشتق أوجد النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x+\ln(x)} - e}{x - 1}$$

الحل:

ليكن لدينا التابع g حيث:

$$g(x) = e^{x+\ln x}$$

$$g(1) = e$$

$$g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{x+\ln x}$$

$$g'(1) = 2e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{x+\ln x} - e}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \right) = g'(1) = 2e$$

$$\begin{aligned} &= e^x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} \\ &= 2e^x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(1)(1)(1) = 2$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

إيجاد الصورة:

$$f(0) = 2$$

بما أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$$

إذاً التابع f مستمر عند الصفر.

التمرين الثالث:

عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة:

$$1. \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = a + \frac{b}{e^x + 1}$$

نجري القسمة على الطرف l_1 :

من القسمة نجد أن:

$$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{3}{e^x + 1}$$

بالمطابقة بين l_1 و l_2 نجد:

$$a = 1, b = -3$$

$$2. \frac{e^{2x} - 3e^x + 5}{e^x + 2} = e^x + a + \frac{b}{e^x + 2}$$

نجري القسمة الاقليدية على الطرف l_1 :

من القسمة نجد أن:

$$\frac{e^{2x} - 3e^x + 5}{e^x + 2} = e^x - 5 + \frac{15}{e^x + 2}$$

بالمطابقة بين l_1 و l_2 نجد:

$$a = -5, b = 15$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

\mathbb{R} وفق: $f(x) = (ax + b)e^{-x}$

عين قيمة a و b إذا علمت أن

قيمة حدية للتابع.

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من النقطة $(-1, e)$ فإن:

$$f(-1) = e$$

$$(-a + b)e = e$$

$$\rightarrow -a + b = 1 \dots (1)$$

بما أن التابع f قيمة حدية فإن:

$$f'(-1) = 0$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b)$$

$$= e^{-x}(a - ax - b)$$

عدنا..

$$f'(-1) = 0$$

$$e(2a - b) = 0$$

$$\rightarrow 2a - b = 0 \dots (2)$$

التعريف الثامن:

ليكن لدينا التابع: $f(x) = 3^{x^2-2x}$
احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$ واستنتج:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2-2x} - 1}{x}$$

الحل:

$$f(x) = e^{\ln(3)^{x^2-2x}}$$

$$= e^{(x^2-2x) \ln 3}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = ((x^2 - 2x) \ln 3)' e^{(x^2-2x) \ln 3}$$

$$= ((2x - 2) \ln 3) e^{(x^2-2x) \ln 3}$$

$$f'(0) = -2 \ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^{x^2-2x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

$$= f'(0) = -2 \ln 3$$

التعريف التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على

$$\mathbb{R} \text{ وفق: } f(x) = (x-1)e^x$$

1. جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

2. أثبت أن: $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

الحل:

الطالب الأول:

إيجاد القيمة التقريبية لـ $f(0.1)$

$$x = 0.1$$

$$a = 0, \quad h = 0.1$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h \cdot f'(a)$$

حيث:

$$f(a) = f(0) = -1$$

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x$$

$$= e^x(1+x-1) = x \cdot e^x$$

$$f'(a) = f'(0) = 0$$

$$h = 0.1$$

نعوض:

$$f(0.1) \cong f(0) + h \cdot f'(0)$$

$$f(0.1) \cong -1 + 0(0.1)$$

$$f(0.1) \cong -1$$

الطالب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n-1)e^x}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^x$$

$$l_2 = (x+1-1)e^x = xe^x$$

$$l_1 = l_2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي

يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n)e^x}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)} \right)'$$

الحل:

$$a = 0 \Rightarrow 2a = 0$$

$$b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$
الإثبات..

$$x \in D_f$$

$$x \in]-\infty, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, +\infty[$$

$$2a - x \in D_f$$

الشرط الأول محقق

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\frac{f(-x) + f(x)}{l_1} = \frac{4}{l_2}$$

$$l_1 = f(-x) + f(x)$$

$$= -x + \frac{4}{e^{-x} + 1} + x + \frac{4}{e^x + 1}$$

$$= \frac{4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}{4(e^x + 1) + 4(e^{-x} + 1)}$$

$$= \frac{1 + e^{-x} + e^x + 1}{4(e^x + 1 + e^{-x} + 1)}$$

$$= \frac{2 + e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x} + 2)}$$

$$= 4 \cdot \frac{(e^x + e^{-x} + 2)}{(e^x + e^{-x} + 2)}$$

$$= 4 = l_2$$

$$l_1 = l_2$$

محققة ومنه:

النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط البياني C

التعريف الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

الطالب الأول:

أثبت أن مجموعة تعريف التابع هي \mathbb{R}^*

نعدم المقام:

$$e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\rightarrow D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

الطالب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على مقاربات C الأفقية والשאقولية.

الحل:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على \mathbb{R}^*
إيجاد النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^x(2 - \frac{3}{e^x})}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \frac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\begin{aligned} &= ((x+n-1)e^x)' \\ &= e^x + (x+n-1)e^x \\ &= e^x(1+x+n-1) \\ &= e^x(x+n) = l_2 \\ & \quad l_1 = l_2 \\ & \text{محققة.} \end{aligned}$$

التعريف العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

أثبت أن f فردي

واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\begin{aligned} \frac{f(-x)}{l_1} &= \frac{-f(x)}{l_2} \\ l_1 &= f(-x) \\ &= \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}(1 - \frac{1}{e^{-x}})}{e^{-x}(1 + \frac{1}{e^{-x}})} \\ &= \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{-(e^x - 1)}{1 + e^x} \\ &= -f(x) = l_2 \\ & \quad l_1 = l_2 \end{aligned}$$

إذا التابع f فردي

الصفة التناظرية لخطه البياني:

والخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

التعريف الحادي عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R}^* وفق:

$$f(x) = e^{\frac{2}{x^2}} - 1$$

أثبت أن التابع f زوجي.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كانت $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in D_f$$

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in D_f$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$\frac{f(-x)}{l_1} = \frac{f(x)}{l_2}$$

$$l_1 = f(-x)$$

$$= e^{\frac{2}{(-x)^2}} - 1$$

$$= e^{\frac{2}{x^2}} - 1 = f(x) = l_2$$

محققة ومنه: إذا التابع f زوجي.

التعريف الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

أثبت أن النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط C

نشتق التابع f وفق:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

نعم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

مستحيلة الحل $\rightarrow e^x = 0$

نظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	3	\nearrow	2

مقاربات C :

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+ و oy^-

الطالب الثالث:

أثبت أن النقطة $I(0, \frac{5}{2})$ مركز تناظر للخط البياني التابع f .

لدينا:

$$a = 0 \rightarrow 2a - x = -x$$

$$b = \frac{5}{2} \rightarrow 2b = 5$$

الشرط الأول:

أيما كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\frac{f(-x) + f(x)}{l_1 l_2} = \frac{5}{2}$$

$$l_1 = f(-x) + f(x)$$

$$\frac{2e^{-x} - 3}{2e^x - 3} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^{-x} - 1}{2e^x - 3} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{1}{e^x - 1} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2 - 3e^x}{e^x} + \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

ومنة النقطة I مركز تناظر للخط البياني C

الغابات لا تنال بالتنزي ..

مسائل:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني التابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = 2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

والمطلوب:

1. أثبت أن التابع f فردي

2. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0, +\infty[$

3. اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي

فاصلتها $x = 0$ واحسب القيمة

التقريبية التابع f عند النقطة التي

فاصلتها $x = 0,1$

4. في معلم متجانس ارسم C

5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور

الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 3$

الحل:

الطالب الأول

الشرط الأول:

أيما كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\frac{f(-x)}{l_1} = \frac{-f(x)}{l_2}$$

$$l_1 = 2 \cdot \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = 2 \cdot \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= -2 \cdot \frac{(e^x - 1)}{e^x + 1} = -f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا التابع f فردي

الطالب الثاني:

التابع f معرف على $[0, +\infty[$ ولدينا:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x(2 - \frac{2}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

التابع f اشتقاقي على $[0, +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 2)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = 0$$

$$4e^x = 0$$

مستحيلة الحل إذا $f'(x)$ لا ينعدم

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	\nearrow 2

الطالب الثالث:

النقطة:

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(0) = 0$$

$$\rightarrow A(0,0)$$

الميل:

$$m = f'(0) = 1$$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = x$$

حساب القيمة التقريبية:

$$a = 0, h = 0,1$$

ولدينا:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(a + h) \cong f(a) + f'(a) \cdot h$$

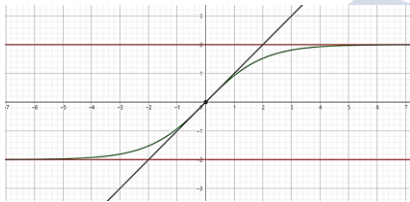
$$f(0,1) \cong f(0) + f'(0) \cdot (0,1)$$

$$f(0,1) \cong 0 + 1 \times 0,1$$

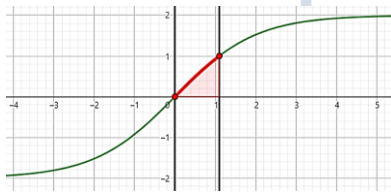
$$f(0,1) \cong 0,1$$

الطالب الرابع:

الرسم:



الطالب الخامس:



$$S = \int_0^{\ln 3} (f(x) - y_\Delta) dx$$

$$S = \int_0^{\ln 3} f(x) dx$$

$$S = \int_0^{\ln 3} 2 \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 3} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 3} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right) dx$$

$$= 2 \left[\ln|e^x + 1| + \ln|1 + e^{-x}| \right]_0^{\ln 3}$$

$$= 2 \left[\left(\ln 4 + \ln \frac{4}{3} \right) - (\ln 2 + \ln 2) \right]$$

$$= 2 \ln \frac{4}{3}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على \mathbb{R}

$$f(x) = \ln(x + e^{-x})$$

١. أثبت أن التابع f يكتب بالشكل

$$f(x) = \ln(1 + xe^x) - x$$

٢. أثبت أن المستقيم الذي معادلته

$$y = -x$$

$-\infty$ وادرس وضعه النسبي

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٤. في معلم متجانس ارسم Δ ثم C

٥. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع

$$g(x) = \ln(e^x - x)$$

الحل:

الطالب الأول:

$$\ln(x + e^{-x}) = \ln(1 + xe^x) - x$$

$$l_1 = \ln(x + e^{-x})$$

$$= \ln\left(x + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{xe^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= \ln(xe^x + 1) - \ln e^x$$

$$= \ln(1 + xe^x) - x = l_2$$

الطالب الثاني:

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta}$$

$$= \ln(1 + xe^x) - x + x$$

$$= \ln(1 + xe^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \ln(1) = 0$$

إذا المستقيم $\Delta: y = -x$ مقارب مائل

للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = 0$$

$$\ln(1 + xe^x) = 0$$

$$1 + xe^x = 1$$

$$x \cdot e^x = 0$$

$$x = 0 \text{ إما}$$

مستحيلة الحل $\rightarrow e^x = 0$ أو

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$		$-$	$+$
الوضع النسبي		Δ تحت C	Δ فوق C

الطالب الثالث:

التابع f معرف على \mathbb{R} ولدنيا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{(x + e^{-x})'}{x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0$$

$$1 - e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

$$-x = 0$$

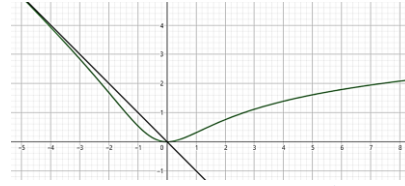
$$x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = 0$$

نظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$ <td></td> <td>$-$</td> <td>$+$</td>		$-$	$+$
$f(x)$ <td>$+\infty$</td> <td>\searrow</td> <td>\nearrow</td>	$+\infty$	\searrow	\nearrow

الطالب الرابع:

الرسم:



الطالب الخامس:

نلاحظ أن:

$$g(x) = f(-x)$$

إذا الخط C' نظير C بالنسبة إلى محور الترتيب.

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$$\mathbb{R} \text{ بالعلاقة } f(x) = \frac{2}{e^x + 1} \text{ والمطلوب:}$$

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٢. اكتب معادلة كلا مقارب أفقي للخط C

وادرس وضعه النسبي.

٣. اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة

منه فاصلتها صفر وادرس وضعه النسبي.

٤. أثبت أن النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر

للخط البياني C .

٥. ارسم مقاربات C و T ثم ارسم C

٦. أثبت أن التابع f يكتب بالشكل

$$f(x) = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \text{ من } \mathbb{R}$$

٧. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور

الفواصل والمستقيمان $x = 0$ و $x = 1$

٨. أثبت أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية

$$(e^x + 1)^2 (y + y') = 2$$

الحل:

الطالب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$f'(x) = \frac{-e^x(2)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} = 0$$

$$-2e^x = 0$$

مستحيلة الحل إذاً $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$ <td></td> <td>$-$</td>		$-$
$f(x)$ <td></td> <td>0</td>		0

الطالب الثاني:

$$y = 2 \Delta_1 \text{ مقارب أفقي في جوار } -\infty$$

$$y = 0 \Delta_2 \text{ مقارب أفقي في جوار } +\infty$$

دراسة الوضع النسبي مع Δ_1 :

$$h(x) = f(x) - y_{\Delta_1}$$

$$h(x) = \frac{2}{e^x + 1} - 2$$

$$h(x) = \frac{2 - 2e^x - 2}{e^x + 1}$$

$$h(x) = \frac{-2e^x}{e^x + 1}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{-2e^x}{e^x + 1} = 0$$

$$-2e^x = 0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$ <td></td> <td>$-$</td>		$-$
وضع نسبي		Δ_1 تحت C

دراسة الوضع النسبي مع Δ_2 :

$$g(x) = f(x) - y_{\Delta_2}$$

$$g(x) = \frac{2}{e^x + 1} - 0$$

$$g(x) = \frac{2}{e^x + 1}$$

$$g(x) = 0$$

$$\frac{2}{e^x + 1} = 0$$

$$2 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $g(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$ <td></td> <td>$+$</td>		$+$
وضع نسبي		Δ_2 فوق C

الطالب الثالث:

النقطة:

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(0) = 1$$

$$\rightarrow A(0,1)$$

الميل:

$$m = f'(0) = -\frac{1}{2}$$

المعادلة:

$$T: m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = -\frac{1}{2}(x - 0) + 1$$

$$T: y = -\frac{1}{2}x + 1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x) = f(x) - T$$

$$l(x) = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$

$$l(x) = 0$$

هذا خيط لا يمكن حله بالطرق التقليدية سنعود بعد قليلاً..

ليكن لدينا التابع $k(x)$ المعروف على \mathbb{R} وفق:

$$k(x) = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 2 - \infty - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

التابع $k(x)$ من اشتقاقي على \mathbb{R} وادينا:

$$k'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{1}{2}$$

$$k'(x) = \frac{-4e^x + e^{2x} + 2e^x + 1}{2(e^x + 1)^2}$$

$$k'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x + 1)^2}$$

$$k'(x) = 0$$

$$\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x + 1)^2} = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

لتكن $t = e^x$ فتكون:

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)(t - 1) = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t - 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_k \rightarrow k(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$		$+$	$+$
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل $x = 0$ إذا $l(x)$ ينعدم عند $x = 0$ عدنا.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$		$-$	$+$
الوضع النسبي		T تحت C	T فوق C

الطالب الرابع:

$$a = 0 \rightarrow 2a = 0$$

$$b = 1 \rightarrow 2b = 2$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$ محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} + \underbrace{f(x)}_{l_2} = 2$$

$$l_1 = f(-x) + f(x)$$

$$= \frac{2}{e^{-x} + 1} + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2}{1 + e^x} + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2e^x}{2e^x} + \frac{2}{2(1 + e^x)}$$

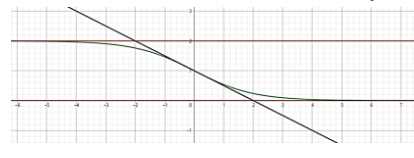
$$= \frac{2e^x + 2}{2(1 + e^x)}$$

$$= \frac{2(1 + e^x)}{2(1 + e^x)}$$

$$= 2 = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط البياني C .

الطالب الخامس:



الطالب السادس:

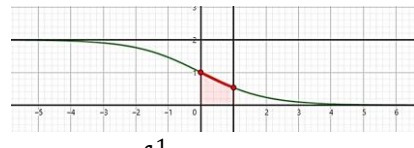
$$f(x) = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f(x) = \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$$

وهو المطلوب

الطالب السابع:



$$S = \int_0^1 (f(x) - y_\Delta) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}\right) dx$$

$$= [2x - 2 \ln|e^x + 1|]_0^1$$

$$= (2 - 2 \ln(e + 1)) - (-2 \ln 2)$$

$$= 2 - 2 \ln(e + 1) + 2 \ln 2$$

$$= 2 + 2 \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right)$$

الطالب الثامن:

$$\frac{(e^x + 1)^2 (y + y')}{l_1 l_2} = \frac{2}{l_2}$$

$$l_1 = (e^x + 1)^2 (y + y')$$

$$= (e^x + 1)^2 \left(\frac{2}{e^x + 1} + \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}\right)$$

$$= 2(e^x + 1) - 2e^x$$

$$= 2e^x + 2 - 2e^x$$

$$= 2 = l_2$$

ومنه التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية.

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على \mathbb{R} وفق: $f(x) = x \cdot e^x - 1$ والمطلوب:

- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضعه النسبي.
- ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية.
- اكتب معادلة المماس T للخط البياني في نقطة من فاصلتها $x = 0$ وادرس وضع T بالنسبة لـ C .
- احسب قيمة تقريبية لـ $f(0.01)$.
- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $]0,1[$

٦. في معلم متجانس ارسم المقارب الأفقي T ثم ارسم C .

٧. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمتين $x = 0$ و $x = 1$

٨. ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$.

الحل:
الطالب الأول:

التابع f معرف على \mathbb{R} وادينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 1 = -1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$$

$y = -1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= xe^x - 1 + 1 = xe^x$$

$$h(x) = 0$$

$$xe^x = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

مستحيية الحل $\rightarrow e^x = 0$ أو

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي		C تحت Δ	C فوق Δ

الطالب الثاني:

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} وادينا:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$$

$$= e^x(x + 1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$\text{إما } x = -1 \in D_f \rightarrow f(-1) = -1 - \frac{1}{e}$$

مستحيية الحل $\rightarrow e^x = 0$ أو

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow -1 - \frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{e}$$

الطالب الثالث:

النقطة:

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(0) = -1$$

$$\rightarrow A(0, -1)$$

الميل:

$$m = f'(0) = 1$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 1(x - 0) - 1$$

$$y = x - 1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x) = f(x) - T$$

$$= xe^x - 1 - (x - 1)$$

$$= xe^x - 1 - x + 1$$

$$= xe^x - x$$

$$= (e^x - 1)x$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_g \rightarrow g(0) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	\searrow	1	\nearrow

استنتاج أن $g(x) > 0$

من جدول الاطراد نجد أن: $g(x) > 0$

ثانياً:

الطالب الأول:

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - e^x(x+1)}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - xe^x - e^x}{e^{2x}}$$

$$= 1 + \frac{-xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - xe^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x(e^x - x)}{e^{2x}} = \frac{e^x - x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

استنتاج تغيرات التابع:

لدينا $g(x) > 0$ و $e^x > 0$

إذا $f'(x)$ متزايد تماماً.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x+1}{e^x}$$

$$= x + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الطالب الثاني:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + \frac{x+1}{e^x} - x = \frac{x+1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$h(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

$$= \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

إذا المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$

مقارب مائل لـ C_f في جوار الـ $+\infty$.

$$S = \int_{-1}^0 (y_\Delta - f(x)) dx$$

$$S = \int_{-1}^0 -f(x) dx$$

$$S = \int_{-1}^0 -(xe^x - 1) dx$$

$$S = - \int_{-1}^0 (xe^x - 1) dx$$

سنعود بعد قليل..

$$J = xe^x$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$J = [xe^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$J = [xe^x]_{-1}^0 - [e^x]_{-1}^0$$

$$J = [xe^x - e^x]_{-1}^0$$

عدنا..

$$S = -[xe^x - e^x - x]_{-1}^0$$

$$S = -\left[(0-1) - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1\right)\right]$$

$$S = -\left(-1 + \frac{2}{e} - 1\right) = 2 - \frac{2}{e}$$

الطالب الثالث:

عندما $m \in]-\infty, -1 - \frac{1}{e}[$ فإن

المعادلة مستحيلة الحل.

عندما $m \in]-1 - \frac{1}{e}, -1[$ للمعادلة حلان.

عندما $m \in]-1, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد.

المسألة الخامسة:

أولاً: ليكن لدينا التابع $g(x) = e^x - x$

ادرس اطراد التابع g ثم استنتج أن

$$g(x) > 0$$

ثانياً: ليكن C الخط البياني التابع f المعروف

على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = x + \frac{x+1}{e^x}$

$$1. \text{ أثبت أن } f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

ثم استنتج تغيرات التابع f

2. أثبت أن $y = x$ مقارب مائل لـ C في

جوار الـ $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.

3. أثبت أن C يقيد معاساً يوازي المستقيم Δ واكتب معادلته وادرس وضعه النسبي.

4. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α واحصر هذا الحل بجمال طول واحد.

5. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C و T

6. استنتج رسم الخط البياني التابع

$$h(x) = \frac{(x+1)(e^x+1)}{e^x}$$

الحل:

أولاً:

$$g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

$$g'(x) = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$l(x) = 0$$

$$(e^x - 1)x = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

$$\text{أو } e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$	$+$	0	$+$
الوضع النسبي	Δ فوق C		Δ فوق C

الطالب الرابع:

$$a = 0, h = 0,01$$

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$$

$$f(0.01) \cong f(0) + f'(0).h$$

$$f(0.01) \cong -1 + 1(0.01)$$

$$f(0.01) \cong -0.99$$

الطالب الخامس:

التابع f متناقص تماماً على المجال $] -\infty, -1[$

$$f(]-\infty, -1[) =] -1, -1 - \frac{1}{e}[$$

$$0 \notin] -1, -1 - \frac{1}{e}[$$

التابع f متزايد على المجال $]-1, +\infty[$ ولدينا:

$$f(]-1, +\infty[) =] -1 - \frac{1}{e}, +\infty[$$

$$0 \in] -1 - \frac{1}{e}, +\infty[$$

مما سبق نجد أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

إثبات أن α ينتمي إلى المجال $]0, 1[$:

التابع f مستمر ومطرود على المجال $]0, 1[$:

$$f(0) = -1$$

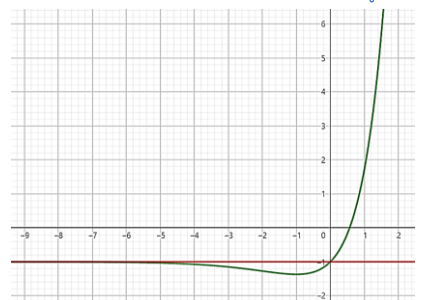
$$f(1) = e - 1$$

$$f(0).f(1) < 0$$

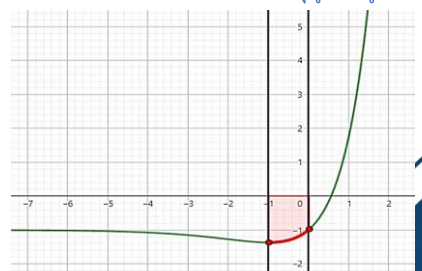
إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على

المجال $]0, 1[$.

الطالب السادس:



الطالب السابع:



دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = f(x) - y_A$$

$$= \frac{x+1}{e^x}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{x+1}{e^x} = 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	Δ فوق C	Δ تحت C

الطالب الثالث:

بما أن الخط البياني يقبل مماس يوازي Δ فإن:

$$f'(x) = 1$$

$$\frac{e^x - x}{e^x} = 1$$

$$\frac{e^x - x}{e^x} - 1 = 0$$

$$\frac{e^x - x - e^x}{e^x} = 0$$

$$\frac{-x}{e^x} = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(0) = 1$$

$$\rightarrow A(0,1)$$

الميل:

$$m = f'(0) = 1$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 1(x - 0) + 1$$

$$y = x + 1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x) = f(x) - T$$

$$= x + \frac{x+1}{e^x} - x - 1$$

$$= \frac{x+1}{e^x} - 1 = \frac{x+1 - e^x}{e^x}$$

$$l(x) = 0$$

$$\frac{x+1 - e^x}{e^x} = 0$$

$$x+1 - e^x = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية. سنعود بعد قليلاً.

ليكن لدينا التابع $k(x)$ المعروف على \mathbb{R} وفق

$$k(x) = x - e^x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$k(x) = x - e^x + 1$$

$$= x \left(1 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

التابع $k(x)$ اشتقاقي على \mathbb{R} ولدنيا:

$$k'(x) = 1 - e^x$$

$$k'(x) = 0$$

$$1 - e^x = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_k \rightarrow k(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \searrow$	$-\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 0$

إذا $l(x)$ ينعدم عند $x = 0$ عدنا.

نظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$	$-$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ تحت C	Δ تحت C	Δ تحت C

الطالب الرابع:

التابع f متزايد تماماً على المجال

$]-\infty, +\infty[$ ولدنيا:

$$f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

$$0 \in]-\infty, +\infty[$$

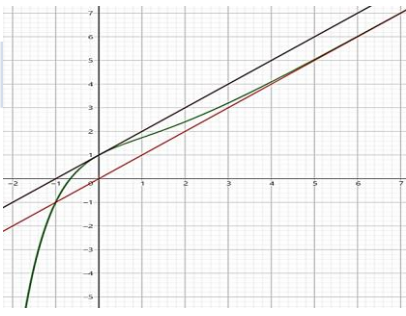
إذا للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد. لدينا:

x	$f(x)$
-1	-1
0	1

نلاحظ أن $f(-1) \cdot f(0) < 0$ وبالتالي

استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يوجد $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق: $-1 < \alpha < 0$

الطالب الخامس:



الطالب السادس:

لدينا:

$$h(x) = \frac{(x+1)(e^x + 1)}{e^x}$$

$$= \frac{(x+1)e^x}{e^x} + \frac{x+1}{e^x}$$

$$= x+1 + \frac{x+1}{e^x}$$

$$= x + \frac{x+1}{e^x} + 1$$

$$= f(x) + 1$$

C_h ينتج عن C_f بانسحابه على محور الترتيب

نحو الأعلى بمقدار 1

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على \mathbb{R}

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

الطالب الأول:

جد نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$

وهل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نعم، يقبل الخط C مقارب أفقي في جوار

ال $+\infty$ معادلته $y = 0$

الطالب الثاني:

أثبت أن: $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

$$= \ln(e^{-x} + 1) = \ln\left(e^{-x} \left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)\right)$$

$$= \ln(e^{-x}(1 + e^x))$$

$$= \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x)$$

$$= -x + \ln(1 + e^x)$$

$$= -x + \ln(e^x + 1)$$

الطالب الثالث:

أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل

للخط C في جوار ال $-\infty$:

$$h(x) = f(x) - y_A$$

$$= -x + \ln(e^x + 1) + x$$

$$= \ln(e^x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$$

إذا المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط

C في جوار ال $-\infty$

الطالب الرابع:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = 0$$

$$-e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = 0$$

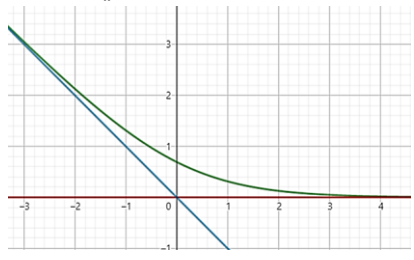
$$e^{-x} = 0$$

مستحيلة الحل.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0

الطالب الخامس:

ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C :



المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{(0)(e^x + 1) - e^x(4)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\nearrow +\infty$

الطالب الثاني:

أثبت أن $y = x$ مقارب مائل للخط C

وادرس وضعه النسبي.

إثبات أن Δ مقارب مائل:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + \frac{4}{e^x + 1} - x = \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي بين Δ و C :

$$h(x) = \frac{4}{e^x + 1}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{4}{e^x + 1} = 0$$

$$4 \neq 0$$

مستحيلة الحد.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$		$+$
الوضع النسبي		C فوق Δ

ثم إنه لا شيء يجبر قلوبنا مثل الدعاء..

الطالب الثالث:

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 4))$

ثم فسر النتيجة هندسياً

لدينا:

$$f(x) - (x + 4)$$

$$= x + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 4)$$

$$= \frac{4}{e^x + 1} - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 4)) = 0$$

تفسير النتيجة هندسياً:

المستقيم الذي معادلته $d: y = x + 4$

مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

الطالب الرابع:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في

النقطة التي فاصلتها صفر.

تحديد النقطة A :

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(x_A) = f(0) = 2$$

$$\rightarrow A(0, 2)$$

تحديد الميل m :

$$m = f'(x_A) = f'(0) = 0$$

المعادلة:

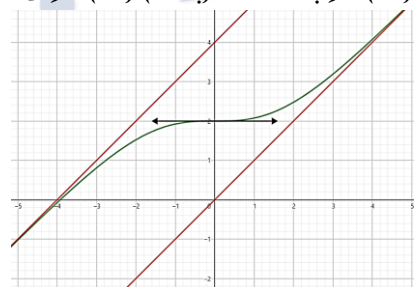
$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0(x - 0) + 2$$

$$T: y = 2$$

الطالب الخامس:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C و T :



الطالب السادس:

استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - x$$

الحد:

$$f(-x) = -x + \frac{4}{e^{-x} + 1}$$

$$= -x + \frac{4}{1 + e^x} = -x + \frac{4}{1 + e^x}$$

$$= -x + \frac{4e^x}{1 + e^x} = \frac{4e^x}{1 + e^x} - x$$

$$= g(x)$$

الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني

للتابع f بالنسبة لمحور الترتيب.

المسألة الثامنة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^x}$$

الطالب الأول:

احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة

تعريفه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الطالب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل

على القيمة الحدية.

التابع f معرفة ومستمر واشتقاقية على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{(1 - e^{-x})e^x - (e^x)'(1 - e^{-x})}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(e^{-x})(e^x) - e^x(1 - e^{-x})}{e^{2x}}$$

$$= \frac{1 - e^x + 1}{e^{2x}} = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2 - e^x}{e^{2x}} = 0$$

$$2 - e^x = 0$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2 \in D_f$$

$$f(\ln 2) = \frac{1 - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$

القيمة الحدية:

$$f(\ln 2) = \frac{1}{4}$$

الطالب الثالث:

اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة

التي فاصلتها $x = 0$ وادرس وضعه

النسبي

معادلة المماس T :

تحديد النقطة A :

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(x_A) = f(0) = 0$$

$$\rightarrow A(0, 0)$$

تحديد الميل m :

$$m = f'(x_A) = f'(0) = 1$$

معادلة T :

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$$T: y = x$$

الوضع النسبي بين T و C_f :

$$h(x) = f(x) - y_T$$

$$= \frac{1 - e^{-x}}{e^x} - x$$

$$= \frac{1 - e^{-x}}{e^x} - x$$

المسألة التاسعة:

حساب مساحة السطح المحصور بين C و C_f هما الخطان البيانيان للتابعين
المعرفين على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

الطالب الأول:

أثبت أن التابعين f و g فرديان

إثبات أن التابع f فردي:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\frac{f(-x)}{l_1} = \frac{-f(x)}{l_2}$$

$$l_1 = f(-x)$$

$$= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})$$

$$= \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -f(x)$$

$$= l_1$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه التابع f فردي.

إثبات أن التابع g فردي.

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\frac{g(-x)}{l_1} = \frac{-g(x)}{l_2}$$

$$l_1 = g(-x)$$

$$= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= -g(x) = l_2$$

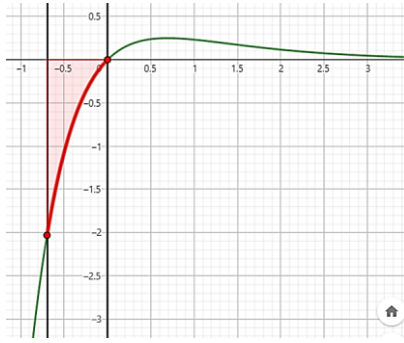
بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه التابع g فردي.

الطالب الخامس:

احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور
الحوصل والمستقيمين اللذين معادلتهم

$$x = -\ln 2 \text{ و } x = 0$$



$$s = \int_{-\ln 2}^0 (y_{\Delta} - f(x)) \cdot dx$$

حيث: $y_{\Delta} = 0$

$$s = \int_{-\ln 2}^0 (-f(x)) \cdot dx$$

$$s = \int_{-\ln 2}^0 -\left(\frac{1 - e^{-x}}{e^x}\right) \cdot dx$$

$$s = \int_{-\ln 2}^0 -\left(\frac{1}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^x}\right) \cdot dx$$

$$s = \int_{-\ln 2}^0 (-e^{-x} + e^{-2x}) \cdot dx$$

$$s = \left[e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^0$$

$$s = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2 \ln 2}\right)$$

$$s = \frac{1}{2} - \left(2 - \frac{1}{2} \cdot 4\right)$$

$$s = \frac{1}{2}$$

الطالب السادس:

استنتج رسم الخط البياني C' للتابع:

$$g(x) = e^{2x} - e^x$$

لدينا:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^x}$$

$$f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$$

$$-f(-x) = e^{2x} - e^x$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$g(x) = -f(-x)$$

ومنه الخط البياني C' نظير الخط البياني C

بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

كلا نهاية تُعهد الطريقة

لبدايات جديدة ..

بسم الله .. يا الله

سنعود بعد قليلاً..

ندرس تغيرات التابع $g(x)$ حيث:

$$g(x) = h(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^x} - x$$

$$D_g =] - \infty, +\infty [$$

التابع g معرف ومستمر واشتقاقه على \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty + \infty)$

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^x} - x$$

$$= \frac{1 - e^{-x} - x e^x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 - \infty = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{2 - e^x}{e^{2x}} - 1$$

$$= \frac{2 - e^x - e^{2x}}{e^{2x}}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{2 - e^x - e^{2x}}{e^{2x}} = 0$$

$$2 - e^x - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

بفرض: $t = e^x$ تكون:

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t + 2)(t - 1) = 0$$

$$t = -2$$

$$e^x = -2$$

مستحيل الحالا:

$$t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0 \in D_g \rightarrow g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$

عدنا..

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$-$
الوضع النسبي	T تحت C	$ $	T تحت C

الطالب الرابع:

في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C .



ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
 التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على \mathbb{R}
 إيجاد النهايات:
 عند $-\infty$:
 لها كان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(-\infty + \infty)$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{x^2 - x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{-1}$$

$$= \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

عند $+\infty$:
 لها كان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

إيجاد المشتق:

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})} = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = -x$$

بشرط $x < 0$ نربع الطرفين:

$$(\sqrt{x^2 + 1})^2 = (-x)^2$$

$$x^2 + 1 = x^2$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذا المشتق لا ينعدم.

نظم جدول تغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow $+\infty$

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.
 التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على \mathbb{R}
 إيجاد النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

إيجاد المشتق:

$$g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$$

$$e^x + e^{-x} = 0$$

$$e^{2x} + 1 = 0$$

$$e^{2x} = -1$$

مستحيلة الحل إذا المشتق لا ينعدم.

نظم جدول تغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow $+\infty$

أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T
 في النقطة $(0,0)$ ثم اكتب معادلة T .
 الحل:

إثبات أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T
 في النقطة $(0,0)$
 الشرط الأول:

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$g(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\rightarrow f(0) = g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(0) = 1$$

$$g'(0) = 1$$

$$\rightarrow f'(0) = g'(0)$$

ومن ثم C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T فيالنقطة $(0,0)$ ولكتابة معادلة المماس:النقطة $(0,0)$

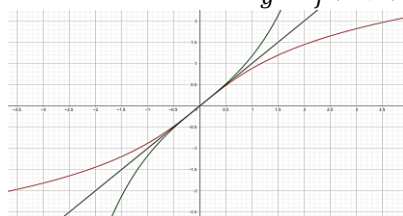
$$\text{الميل: } m = f'(0) = g'(0) = 1$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$$T: y = x$$

في معلم متجانس ارسم المماس T ثم ارسم C_f و C_g .ليكن التابع f المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3e^x + 5}{e^x + 2}$$

أولاً:

احسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ ثم عينعدداً حقيقياً A يحقق أياً كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي

مركزه 3 ونصف قطره 0,1.

الحل:

نهاية $f(x)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{3e^x + 5}{e^x + 2}$$

$$= \frac{e^x \left(3 + \frac{5}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{3 + \frac{5}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

تعيين العدد الحقيقي A :

لدينا:

$$r = \frac{1}{10}, \quad c = 3$$

تتحقق العلاقة:

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left| \frac{3e^x + 5}{e^x + 2} - 3 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{3e^x + 5 - 3e^x - 6}{e^x + 2} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{-1}{e^x + 2} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{e^x + 2} < \frac{1}{10}$$

$$e^x + 2 > 10$$

$$e^x > 8$$

$$x > \ln 8 \rightarrow x > 3 \ln 2$$

$$A = 3 \ln 2 \quad \text{أي أن:}$$

ثانياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = (ax + b)e^x$$

الطالب الأول:

عين العددين a و b كي يكون للخط البياني f قيمة حدية في النقطة $A(1, -e)$

الحل:

الترجمة الأولى:

$$(a + b)e = -e$$

$$a + b = -1 \quad \dots (1)$$

الترجمة الثانية:

$$f'(x) = ae^x + e^x(ax + b)$$

$$= (a + ax + b)e^x$$

$$f'(1) = 0$$

$$(2a + b)e = 0$$

$$2a + b = 0 \quad \dots (2)$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \dots (1) \\ 2a + b = 0 \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (1) نجد:

$$-a = -1 \rightarrow a = 1$$

نعوض في (1) نجد:

$$b = -2$$

ومنهُ يكون التابع f :

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

في حالة $a = 1$ و $b = -2$ تعرف C الخط البياني التابع f المعروف بالعلاقة:

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

الطالب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها. التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$$f(x) = (x - 2)e^x = xe^x - 2e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^x + e^x(x - 2)$$

$$= e^x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x(x - 1) = 0$$

مستحيحة الحل $\rightarrow e^x = 0$ إما

$$\text{أو } x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = -e$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow -e$	$\nearrow +\infty$

الطالب الثالث:

اكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

الحل:

معادلة المقارب الأفقي:

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب

أفقي للخط البياني C في جوار $-\infty$

وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي:

$$h(x) = f(x) - y$$

$$h(x) = (x - 2)e^x$$

$$h(x) = 0$$

$$(x - 2)e^x = 0$$

$$\text{إما } x = 2$$

مستحيحة الحل $\rightarrow e^x = 0$ أو

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	تحت المقارب الأفقي	C فوق المقارب الأفقي	فوق المقارب الأفقي

الطالب الرابع:

اكتب معادلة d المماس للخط C في النقطة التي تعدهم $f''(x)$.

تحديد النقطة A :

تحديد الفاصلة:

$$f'(x) = (x - 1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + e^x(x - 1)$$

$$f''(x) = e^x(1 + x - 1)$$

$$f''(x) = xe^x$$

$$f''(x) = 0$$

$$xe^x = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

مستحيحة الحل $\rightarrow e^x = 0$ أو

ومنهُ فاصلة نقطة التماس هي:

$$x_A = 0$$

تحديد الترتيب:

$$y_A = f(x_A) = f(0) = -2$$

$$\rightarrow A(0, -2)$$

تحديد الميل m :

$$m = f'(x_A) = f'(0) = -1$$

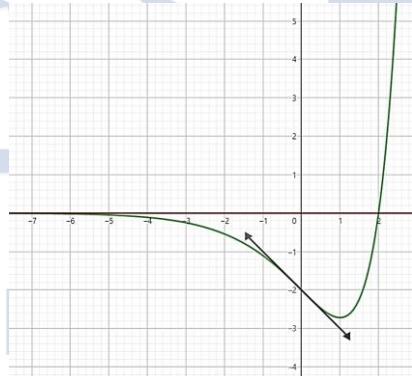
معادلة المماس d :

$$d: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$d: y = -1(x - 0) - 2$$

$$d: y = -x - 2$$

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C .



الطالب الخامس:

ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول

$$xe^x = m + 2e^x$$

لدينا:

$$xe^x = m + 2e^x$$

$$xe^x - 2e^x = m$$

$$(x - 2)e^x = m$$

$$f(x) = m$$

ولدينا:

عندما $m \in]-\infty, -e[$ ليس للمعادلة حل.

عندما $m = -e$ للمعادلة حل وحيد.

عندما $m \in]-e, 0[$ للمعادلة حلين.

عندما $m \in [0, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد.

سنجد ما نريد يوماً .. 🤔💡

المسألة الحادية عشر:

أولاً: ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ والمعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \sqrt{x}(e^x - 1)$$

أولاً:

الطالب الأول:

أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

نشكل التابع $h(x)$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(e^x - 1) - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}(e^x - 1)}{x}$$

نوجد $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

نعلم أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0(1) = 0$$

إذا التابع f اشتقاقي عند الصفر

الطالب الثاني:

احسب $f'(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

$$f'(x) = (\sqrt{x})'(e^x - 1) + (e^x - 1)'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{(x)'}{2\sqrt{x}}(e^x - 1) + (x)'e^x(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x - 1) + \sqrt{x}e^x$$

$$= \frac{e^x - 1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x$$

$$= \frac{e^x - 1 + 2xe^x}{2\sqrt{x}}$$

الطالب الثالث:

استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$g(x) = \sqrt{\cos x}(e^{\cos x} - 1)$$

$$g(x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = (\cos x)'f'(\cos x)$$

$$= -\sin \left[\frac{e^{\cos x} - 1 + 2 \cos x e^{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}} \right]$$

ثانياً:

ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = (x - 1)e^x$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم

دل على القيمة الحدية.

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على \mathbb{R}

إيجاد النهايات:

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

المسألة الثانية عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x - x \ln x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطالب الأول:

أثبت أن التابع f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ فإن التابع f مستمر عند الصفر.

الطالب الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر. ما طبيعة المعام في المبدأ؟ قابلية الاشتقاق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - x \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x - x \ln x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x \ln x}{x} = 1 - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الصفر.

طبيعة المعام في المبدأ:

يقبل معاماً شاقولياً في المبدأ معادلته $x = 0$

الطالب الثالث:

ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0, +\infty[$ وحدد قيمته الحدية ثم ارسم C

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = x - x \ln x = x(1 - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

$$f'(x) = 0$$

$$-\ln x = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		0 ↗ 1 ↘	$-\infty$

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$S = [(x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x-1)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = -[(x-1)e^x - e^x]_0^1 = -((0-e) - (-1-1)) = -(-e+2) = -(2-e) = e-2$$

الطالب الرابع:

استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث:

$$g(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

لدينا

$$f(x) = (x-1)e^x$$

$$f(-x) = (-x-1)e^{-x} = \frac{-x-1}{e^x}$$

$$-f(-x) = \frac{x+1}{e^x}$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$g(x) = -f(-x)$$

إذاً: الخط البياني C'

نظير الخط البياني C بالنسبة إلى المبدأ

الطالب الخامس:

أثبت أن $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$y' - y = e^x$$

نستبدل كل y بـ y' وكل y بـ $f(x)$

$$l_1 = y' - y = xe^x - (x-1)e^x$$

$$= xe^x - (x - e^x)$$

$$= xe^x - xe^x + e^x$$

$$= e^x = l_2$$

$$y = f(x) \text{ إذاً}$$

هو حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$

الطالب السادس:

أثبت أن عبارة المشتق من المرتبة n للتابع f تعطى وفق:

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n-1)e^x}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^x$$

$$l_2 = (x+1-1)e^x = xe^x$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n)e^x}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \left(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)} \right)'$$

$$= ((x+n-1)e^x)'$$

$$= e^x + (x+n-1)e^x$$

$$= e^x(1+x+n-1)$$

$$= e^x(x+n) = l_2$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

$$f(x) = (x-1)e^x = xe^x - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

عند $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

نوجد $f'(x)$ وفق:

$$f'(x) = (x-1)'e^x + (e^x)'(x-1) = e^x + e^x(x-1)$$

$$= e^x(1+x-1) = xe^x$$

نعلم $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$xe^x = 0$$

مستحيلة الحل $\rightarrow e^x = 0$ إما

$$\text{أو } x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = -1$$

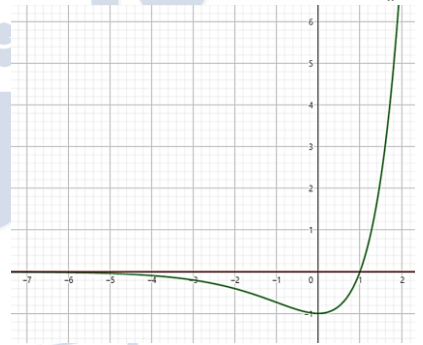
نظم جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	↘ -1 ↗	$+\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

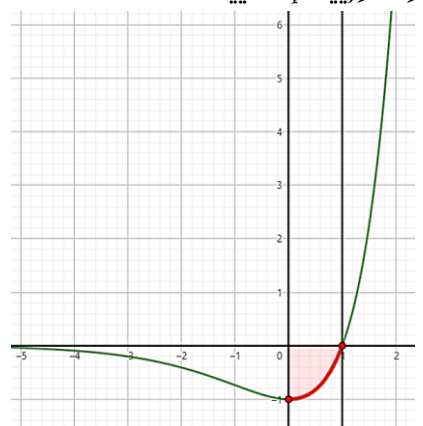
الطالب الثاني:

في معلم متجانس ارسم C



الطالب الثالث:

احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين



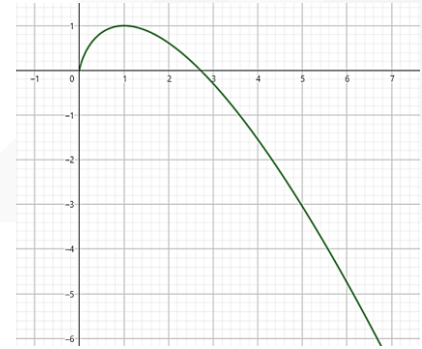
$$S = \int_0^1 (y_{\Delta} - f(x)) dx$$

$$S = \int_0^1 -f(x) dx$$

$$S = - \int_0^1 (x-1)e^x dx$$

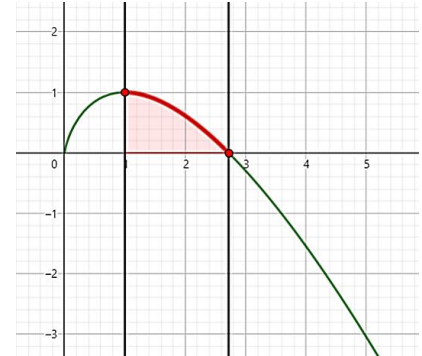
يحتاج تجزئة:

$$u = x-1 \rightarrow u' = 1$$



الطالب الرابع:

احسب مساحة السطح المحصورين الخط

البياني Cf والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$ 

$$S = \int_1^e f(x) dx$$

$$= \int_1^e (x - x \ln x) dx$$

$$= \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx$$

باعتبار أن:

$$I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \left(\frac{e^2 - 1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\Rightarrow S = \int_1^e x dx - \int_1^e x \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^e - I$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

اللهم أفرأحاً، تهوي بنا ساجدين

المسألة الثالثة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة:

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

الطالب الأول:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

$$= \frac{x}{e^x} + x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

نشقة التابع:

$$f'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x) + 1$$

$$= e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

سنعود بعد قليلاً..

نفرز تابعاً $g(x)$ المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f'(x) = g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

$$g'(x) = -e^{-x} - (e^{-x} + (-e^{-x})(x))$$

$$= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= (x - 2)e^{-x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$(x - 2)e^{-x} = 0$$

$$\text{إما } x = 2 \in D_g \rightarrow g(2) = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

مستحيطة الحد أو $e^{-x} = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow \frac{e^2 - 1}{e^2} \nearrow$	

نلاحظ أن $f'(x)$ مستحيطة الحد

عدنا..

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

الطالب الثاني:

اثبت أن المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي.إثبات أن Δ مقارب لـ C_f :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= xe^{-x} + x - 2 - (x - 2)$$

$$= xe^{-x} + x - 2 - x + 2$$

$$= xe^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty)(0)$

$$h(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

إذا المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - 2$ مقاربمائل للخط C في جوار $+\infty$ دراسة الوضع النسبي لـ Δ و C_f :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = xe^{-x}$$

$$h(x) = 0$$

$$xe^{-x} = 0$$

$$\text{إما } x = 0$$

مستحيطة الحد أو $e^{-x} = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	0	0
الوضع النسبي	Δ تحت C	Δ فوق C

الطالب الثالث:

أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ثم تحقق $1 < \alpha < 2$:لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]1, 2[$ ولدينا:

$$f(1) = \frac{1 - e}{e} < 0$$

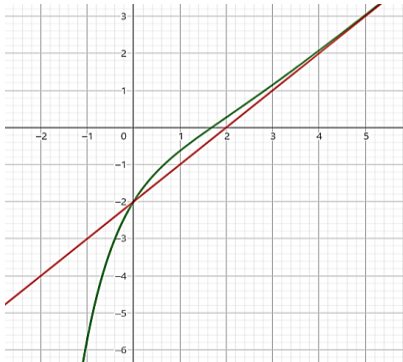
$$f(2) = \frac{2}{e^2} > 0$$

ومنه:

$$f(1).f(2) < 0$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $1 < \alpha < 2$.

الطالب الرابع:

ارسم Δ ارسم C 

الطالب الخامس:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$(E): y + y' = e^{-x} + x - 1$$

اثبت أن التابع f حلاً للمعادلة التفاضلية E

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$xe^{-x} + x - 2 + e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

$$= e^{-x} + x - 1$$

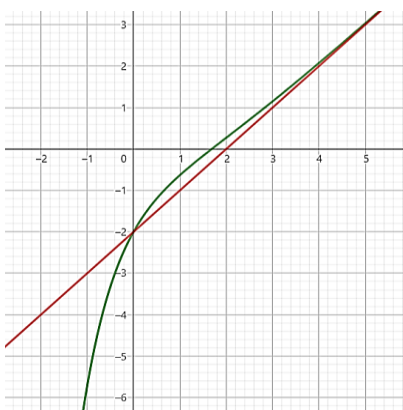
وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية (E)

الطالب السادس:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط

البياني والمستقيم Δ والمستقيمان $x = 0$ و $x = 1$

الحل:



$$S = \int_0^1 (f(x) - y_{\Delta}) dx$$

$$= \int_0^1 (xe^{-x} + x - 2 - (x - 2)) dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$= [xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= [-(1)e^{-1} - e^{-1}] - [0e^0 - e^0]$$

$$= [-e^{-1} - e^{-1} + 1]$$

$$= -2e^{-1} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

$$S = \frac{e - 2}{e}$$

الدورات للمتحانية:

دورة 2017 الأولى 40 درجة:

$$\text{حل المعادلة: } 0 = 4 - 3^{x+1} + 9^x \text{ في } \mathbb{R}$$

دورة 2017 الثانية 40 درجة:

$$\text{حل المعادلة التفاضلية الآتية:}$$

$$2y' + 3y = 0$$

والخط البياني C للحد يمر بالنقطة $A(\ln 4, 1)$

دورة 2018 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

1. جد نهاية التابع f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة

3. أثبت أن $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

4. أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

5. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

6. ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C

دورة 2018 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = e^x - 1$$

1. جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

$$2. \text{ احسب } \int_0^{\ln 2} f(x) dx$$

دورة 2019 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{4}{1 + e^x}$$

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته

2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0, 2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C و T

4. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T واخذ البياني
5. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:
- $$g(x) = \frac{4e^x}{1 + e^x}$$
6. استنتج الخط البياني C' للتابع g

دورة 2019 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي

2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3. في معلم متجانس ارسم الخط C

4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$

5. استنتج رسم الخط C₁ للتابع g المعرفة وفق:

$$g(x) = 2xe^x$$

6. أثبت أن f(x) هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 2e^{-x}$

دورة 2021 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي

2. أثبت أن $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

4. ادرس القيمة الحدية ميبناً نوعها

5. ارسم C في معلم متجانس

6. استنتج رسم الخط البياني C₁ للتابع g المعرفة وفق:

$$g(x) = (x-1)^2 e^x$$

7. جد مجموعة تعريف التابع $h(x) = \ln(f(x))$

دورة 2021 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

1. احسب قيمة كل من a و b إذا علمت أن $f(-1) = e$

2. لتكن المعادلة التفاضلية $y' + y = \lambda e^{-x}$ إذا علمت أن $f(x) = (x+2)e^{-x}$ حللاً لها

دورة 2021 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln(x))$$

والتابع g المعرفة على I وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln(x)$$

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها
2. بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$
3. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
4. أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
5. مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
6. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

دورة 2022 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

2. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ

3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في \mathbb{R} أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1, 0]$

4. ارسم Δ و C ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور الترتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$

5. استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = e^{2x} + 2x + 2$$

دورة 2022 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1 - x)$$

وليكن g التابع المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

1. ادرس اطراف التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$

2. تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3. اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$

4. في معلم متجانس ارسم المستقيم T ثم ارسم C للخط البياني للتابع f

دورة 2023 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{4e^x - 2}{e^x + 1}$$

1. جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه وعين ما للخط البياني C من مقاربات.

2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

4. ليكن لدينا التابع g المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$g(x) = f(x) - y_T$$

٥. ادرس اطراد التابع g ثم استنتج الوضع النسبي للخط C مع المعام T
٦. ارسم في معلم واحد المعام T ومقاربات C ثم ارسم C
٧. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع h المعرف على \mathbb{R} وفق:

$$h(x) = \frac{6e^x}{e^x + 1}$$

دورة 2023 الثانية 40 درجة:

- حل المعادلة $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$
- ثم استنتج حلول المتراجحة $e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$

النماذج الوزارية:

التصريف الأول:

- احسب مشتق التابع f المعرف على \mathbb{R} وفق:
- $$f(x) = e^{1-\sin x}$$

التصريف الثاني:

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}
- $$f(x) = 2e^{-x} + x - 2$$
- أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه
 - ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عندها وبين نوعها
 - استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمز له بالرمز α أثبت أن $1 < \alpha < 2$
 - ارسم المقارب المائل ثم ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمتين التي معادلتها $y = x - 2$ و $x = \ln(2)$ و $x = \ln(3)$

التصريف الثالث:

أولاً:

- ليكن التابع g المعرف على \mathbb{R} وفق:
- $$g(x) = e^x + 2 - x$$
- ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$
- ثانياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$$

- أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
- بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
- أثبت أن المستقيم $y = x$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
- ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

التصريف الرابع:

حل المعادلة:

$$(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

ثم حل المتراجحة:

$$(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right) \leq 0$$

التصريف الخامس:

حل المعادلة: $4^x = 5^{x+1}$

التصريف السادس:

حل المتراجحة: $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$

التصريف السابع:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e} e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

التصريف الثامن:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

- أوجد نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه
- ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها
- بين القيم الحدية للتابع f وارسم خطه البياني
- استنتج عدد حلول المعادلة $x^2 e^{-x} = 1$
- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

التصريف التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

احسب $f(\ln(2))$ و $f'(\ln(2))$ ثم استنتج:

$$\lim_{x \rightarrow \ln(2)} \frac{e^x - 2}{x - \ln(2)}$$

التصريف العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = x e^{-x}$$

- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ و $-\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته الحدية ثم ارسم C
- احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين الذين معادلتها $x = 0$ و $x = 1$
- بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $[-1, e^{-1}]$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين.
- لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_{n+1} = u_n \cdot e^{-u_n}$, $u_0 = 1$
- * أثبت أن $0 < u_n \leq 1$
- وذلك مهما كان العدد الطبيعي n
- * أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة ثم بين تقاربها واحسب نهايتها.

التصريف الحادي عشر:

احسب مشتق التابع $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

التصريف الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = x^3 e^x$$

- جد تابعاً أصلياً F للتابع f على \mathbb{R} بالصيغة: $F(x) = P(x)e^x$ حيث P كثير حدود.
- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
- ارسم C الخط البياني للتابع f
- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

التصريف الثالث عشر:

عين حل المعادلة التفاضلية:

$$3y = 2y' = 1$$

الذي يحقق الشرط $f(0) = 1$

اختبارات الكتاب:

التصريف الأول:

احسب ما يلي:

$$\int_0^{\ln 2} e^x (1 - e^x)^3 dx$$

التصريف الثاني:

حل في \mathbb{R} المعادلة:

$$9x - 3^{x+1} + 2 = 0$$

التصريف الثالث:

حل المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 1$ ثم

عين حلها f الذي يحقق: $f(-1) = 2$

التصريف الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = x e^{-x}$$

١. احسب $\int_0^{\ln(3)} f(x) dx$

٢. أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل

المعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

التصريف الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج المقارب الموزي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه
- ارسم C مقارب وجدته ثم ارسم C
- بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$ واستنتج أن α تحقق المعادلة $\alpha = 1 - \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}}$
- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$
- استنتج مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

١. خواص

٢. معادلات

٣. متراجحات

٤. مجموعة تعريف تابع أسّي.

٥. نهايات تابع أسّي.

٦. نهايات مميزة.

٧. اشتقاق تابع أسّي.

٨. دراسة تغيرات تابع أسّي.

٩. معادلة مختلطة.

١٠. متراجحة مختلطة.

١١. معاس مشترك

١٢. معادلات تفاضلية:

- * إثبات أن تابع $f(x)$ هو حل لمعادلة تفاضلية
- * تعيين قيمة مجهول ليكون $f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية
- * حل المعادلة التفاضلية
- * تعيين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق شرط فطس
- * تعيين تابع يحقق المعادلة التفاضلية

١٣. التابع الأسّي الذي أساسه a

يا نخبه..

طمأن الله روحك، ورد إليك قلبك، وباعد بينك والقلق، وجمع عليك نفسك، وجعلك أترأ لا يمدح، وثبت خطاك، وأحكك



شيفرة الـ 600 في التكامل

القسم الأول: إثبات أن التابع F تابع أصلي.

تعريف	نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I إذا تحقق الشرطين:	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين		
		F اشتقاقي على المجال I $F'(x) = f(x)$		تحقق أن F تابع أصلي للتابع f على المجال I : $f(x) = \tan^2 x$ $F(x) = \tan x - x$ $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ الحل: $x \mapsto -x$ اشتقاقي على المجال \mathbb{R} فهو اشتقاقي على I . $x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}\}$ فهو اشتقاقي على I مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على I $F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$ $F'(x) = \tan^2 x = f(x)$ إذا التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I	ثبت أن التابع $F(x)$ اشتقاقي على المجال I * نوجد $F'(x)$ * ثبت أن $F'(x) = f(x)$	أثبت أن التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I
الثاني	تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال	أثبت أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$ على المجال I	الأسلوب الأول: * ثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I . * ثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I . * نشكل الفرق بين التابعين ونميز: الحالة الأولى: إذا كان الناتج عدد ثابت فإن التابعان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$. الحالة الثانية: إذا كان الناتج مقدار يحوي x فإن التابعان $F(x)$ و $G(x)$ ليسا تابعان أصليان للتابع $f(x)$.	تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$ $I =]1, +\infty[$ الحل: $x \mapsto \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ فهو اشتقاقي على I $x \mapsto \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$ اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ فهو اشتقاقي على I نشكل الفرق: $F(x) - G(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} - \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$ $= \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2 - 7x + 5}{x - 1} = \frac{-4x + 4}{x - 1}$ $F(x) - G(x) = -4 \left(\frac{x - 1}{x - 1} \right) = -4$ إذا $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال.	الأسلوب الثاني: * ثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $F'(x)$ * ثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $G'(x)$ * ثبت أن: $G'(x) = F'(x)$ وبالتالي يكون $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال I	

القسم الثاني: كيفية إيجاد تابع أصلي:

الخواص	
تكامل مجموع	إذا كان لدينا مجموع توابع يمكننا إيجاد التابع الأصلي لكل منهما على حدا
تكامل جداء عدد حقيقي بتابع	إذا كان لدينا جداء عدد حقيقي بتابع فإننا نترك العدد بحاله ونوجد التابع الأصلي لهذا التابع
تكامل جداء تابعين	لا يوجد قانون فوري
تكامل قسمة تابعين	لا يوجد قانون فوري

قواعد التكامل:

القاعدة	تمرين: أوجد تابعا أصليا F للتابع f
أولاً إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = \alpha$ حيث α هو عدد ثابت حقيقي فإن تابعه الأصلي يعطى وفق: $F(x) = \alpha x + c$	1. $f(x) = 7; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = 7x$ 2. $f(x) = 1; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = x$ 3. $f(x) = -2; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = -2x$ 4. $f(x) = \frac{1}{2}; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{x}{2}$

$$5. f(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 5)^7; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{(x^2 + x + 5)^8}{8}$$

$$6. f(x) = e^x(e^x - 1)^2; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{(e^x - 1)^3}{3}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2; I =]0, +\infty[\rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$8. f(x) = \frac{-1}{x^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{-7}; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-6}}{-6}$$

$$9. f(x) = (1 + \tan^2 x) \cdot \tan^3 x; I = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right\} \rightarrow F(x) = \frac{\tan^4 x}{4}$$

$$10. f(x) = x; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$11. f(x) = x^3; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$12. f(x) = x^{-\frac{1}{2}}; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$13. f(x) = x^{-5}; I = \mathbb{R} \rightarrow F(x) = \frac{x^{-4}}{-4}$$

$$17. f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$= -(-\sin x) \cos^3 x$$

$$= \cos^4 x$$

$$F(x) = \frac{-\cos^4 x}{4}$$

$$14. f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x)^{-5}$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2}(2x + 2)(x^2 + 2x)^{-5}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x)^{-4}}{-4}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x)^{-4}}{-8} = \frac{-1}{8(x^2 + 2x)^4}$$

$$18. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$I =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)$$

$$F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$15. f(x) = (-5x^4 + 10)(x^5 - 10x)^3$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$= -(5x^4 - 10)(x^5 - 10x)^3$$

$$F(x) = \frac{-(x^5 - 10x)^4}{4}$$

$$16. f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^5}\right); I = \mathbb{R}^*$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x}\right)^5 = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$F(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^6}{6} = \frac{-1}{6x^6}$$

$$21. f(x) = \frac{\sin x}{\cos^5 x}$$

$$I = \mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$$

$$= \sin x \cdot \cos^{-5} x$$

$$= (-\sin x) \cos^{-5} x$$

$$F(x) = \frac{-\cos^{-4} x}{-4} = \frac{1}{4 \cos^4 x}$$

$$19. f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}; I =]2, +\infty[$$

$$f(x) = 5(x-2)^{-7}$$

$$F(x) = 5 \left(\frac{(x-2)^{-6}}{-6} \right) = \frac{-5}{6(x-2)^6}$$

$$22. f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$$

$$I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^3} = \frac{1}{x} (\ln x)^{-3}$$

$$F(x) = \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(\ln x)^2}$$

$$20. f(x) = \frac{e}{(1+ex)^2}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e(1+ex)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(1+ex)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(1+ex)}$$

الملاحظة الأولى:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = g'(x)(g(x))^n$ حيث $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ فإن تابعه الأصلي يعطى وفق:

$$F(x) = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

الملاحظة الثانية:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = x^n$ فإن تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

الملاحظة الثالثة:

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

الملاحظة الرابعة:

عند وجود قوة في المقام فإننا نرفعها إلى البسط

اعمل بدائرة تأثيرك، بالتغر الذي تُبج فيه، استثمر كل لحظة .. التحسينات البسيطة التي فيك، هي عالمك، افرد بها كأنها كل انتصاراتك 🏆❤️

$$23. f(x) = 2x\sqrt{(x^2 + 1)^5}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{(x^2 + 1)^7}$$

$$24. f(x) = 2x^3\sqrt{(x^2 + 1)^2}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3(x^2 + 1)^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^2 + 1)^5}$$

$$25. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3; I =]-\infty, 2[$$

$$= \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}} + 3 = (2-x)^{-\frac{1}{2}} + 3 = -(-)(2-x)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} + 3$$

$$F(x) = -\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3x = -2\sqrt{2-x} + 3x$$

$$26. f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}; I =]-2, +\infty$$

طريقة أولى:

$$f(x) = \frac{x+1+1-1}{(x+2)^4} = \frac{x+2-1}{(x+2)^4} = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{1}{(x+2)^4}$$

$$= (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4} = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$$

$$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3}$$

$$= -\frac{(x+2)^{-2}}{2} + \frac{(x+2)^{-3}}{3} = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$$

طريقة ثانية:

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$$

$$f(x) = (x+1)(x+2)^{-4} = (x+2-1)(x+2)^{-4}$$

$$= (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4} = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$$

$$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$$

$$27. f(x) = x\sqrt{(x+1)^3}; I = \mathbb{R}$$

$$= x(x+1)^{\frac{3}{2}} = (x+1-1)(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (x+1)(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} = (x+1)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}$$

الملاحظة الخامسة:

في حال وجود جذر فإننا نحوله إلى قوة ثم نتابع كما سبق.

تذكر يا عزيزي الطالب: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$28. f(x) = \frac{1}{x} ; I =]0, +\infty[\rightarrow F(x) = \ln|x| = \ln x$$

$$29. f(x) = \frac{1}{x-1} ; I =]-\infty, 1[\\ F(x) = \ln|x-1| = \ln(-x+1)$$

$$30. f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} ; I =]0, \frac{\pi}{2}[\\ F(x) = \ln|\sin x| = \ln \sin x$$

$$31. f(x) = \frac{1}{\ln x} ; I =]0, 1[\\ F(x) = \ln|\ln x| = \ln(-\ln x)$$

$$32. f(x) = \frac{-e^{-x} + e^x}{e^x + e^{-x}} ; I = \mathbb{R} \\ F(x) = \ln|e^x + e^{-x}| = \ln(e^x + e^{-x})$$

$$33. f(x) = \frac{x}{x^2-4} ; I =]2, +\infty[\\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-4} \\ F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| = \frac{1}{2} \ln(x^2-4)$$

$$34. f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1} ; I =]0, +\infty[\\ f(x) = 2 \frac{e^x}{e^x-1} \\ F(x) = 2 \ln|e^x-1| = 2 \ln(e^x-1)$$

$$35. f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; I =]1, +\infty[\\ f(x) = \frac{1}{\ln x} \\ F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)$$

$$36. f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} ; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ F(x) = x + \ln|1+e^{-x}| = x + \ln(1+e^{-x})$$

طريقة أولى:

طريقة ثانية:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$F(x) = \ln(1+e^x)$$

الملاحظة الأولى:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ فإن تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = \ln(|g(x)|) + c$ انتبه: عند وجود قيمة مطلقة يجب التخلص منها ومن أجل ذلك.

الخطوة الأولى:

ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة ونميز:

① الحالة الأولى: مثلي:

ندرس الإشارة بالاعتماد على الدائرة المثلية

② الحالة الثانية: غير مثلي:

نعدم المقدم ثم ننظم جدول الإشارة

الخطوة الثانية:

نتخلص من القيمة المطلقة بحيث:

* إذا كان مضمون القيمة المطلقة سالب

فالقائمة المطلقة تساوي عكس المضمون

* إذا كان مضمون القيمة المطلقة موجب

فالقائمة المطلقة تساوي المضمون نفسه

الملاحظة الثانية:

نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

ثالثاً

لا غيب الله عن قلوبنا السعة .. فهما توغر الطريق واستضاء

<p>37. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}; I =]-\infty, 2[$ بالقسمة الاقليدية نجد أن: $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + 3 \frac{1}{x-2}$ $F(x) = x + 3 \ln x-2 = x + 3 \ln(-x+2)$</p>	<p>38. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}; I =]\frac{1}{2}, +\infty[$ بالقسمة الاقليدية نجد أن: $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2(2x-1)} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{2x-1}$ $F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \ln 2x-1$</p>	<p>إذا كان التابع $f(x)$ عبارة عن تابع كسري بسطه ومقامه كثيري حدود وفشلنا ثانياً وثالثاً فإننا نميز: الحالة الأولى: إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام * نصلح باستخدام القسمة الإقليدية * نكامل كما سبق</p> <p>رابعاً</p>
<p>40. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}; I =]0, 1[$ الإصلاح بطريقة تفريق الكسور: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$ $= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x+2) = 2x+1$ بفرض: $x = -1 \rightarrow B = 1$ بفرض: $x = -2 \rightarrow A = 3$ إذاً: $f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$ $F(x) = 3 \ln x+2 + \ln x+1$ $F(x) = 3 \ln(x+2) + \ln(x+1)$</p>	<p>39. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}; I =]-\infty, -2[$ الإصلاح باستخدام تفريق الكسور: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$ $= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(x-2) = x+1$ بفرض: $x = -2 \rightarrow B = \frac{1}{4}$ بفرض: $x = 2 \rightarrow A = \frac{3}{4}$ إذاً: $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$ $F(x) = \frac{3}{4} \ln x-2 + \frac{1}{4} \ln x+2$ $= \frac{3}{4} \ln(-x+2) + \frac{1}{4} \ln(-x-2)$</p>	<p>الحالة الثانية: إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإننا: * نصلح التابع باستخدام تفريق الكسور * نكامل كما سبق</p> <p>خامساً</p>
<p>42. $f(x) = (\ln(x) + 1)e^{x \ln x}$ $I =]0, +\infty[$ $F(x) = e^{x \ln x}$</p>	<p>41. $f(x) = 2xe^{x^2}; I = \mathbb{R}$ $F(x) = e^{x^2}$</p>	<p>الملاحظة الأولى: إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = g'(x)e^{g(x)}$ فإن تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = e^{g(x)} + c$</p> <p>الملاحظة الثانية: إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = e^{ax}$ فإن تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + c$</p> <p>الملاحظة الثالثة: أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$.</p>
<p>45. $f(x) = e^{(-3x)}; I = \mathbb{R}$ $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$</p>	<p>43. $f(x) = e^{5x}; I = \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$</p>	<p>44. $f(x) = e^{\frac{5}{2}x}; I = \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}x}$</p>
<p>46. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}; I = \mathbb{R}$ $F(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$</p>	<p>47. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}; I = \mathbb{R}$ $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$</p>	<p>48. $f(x) = \sin x e^{\cos x}; I = \mathbb{R}$ $f(x) = -(\sin x)e^{\cos x}$ $F(x) = -e^{\cos x}$</p>

مكاملة التوابع المثلثية

ساحدا

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = 1 + \cot^2 x$	$F(x) = -\cot x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x + c$

القسم الأول: قوانين

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x) = g'(x) \sin(g(x))$	$F(x) = -\cos(g(x)) + c$	$f(x) = g'(x) \cos(g(x))$	$F(x) = \sin(g(x)) + c$

القسم الثاني

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \sin(ax)$	$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax)$

القسم الثالث

دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل المكاملة.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	المجموعة الأولى
$\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\text{ضعفي الزاوية})$	المجموعة الثانية
$\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\text{ضعفي الزاوية})$	المجموعة الثالثة
$\sin(\text{زاوية}) = 2 \sin(\text{نصف الزاوية}) \cos(\text{نصف الزاوية})$	المجموعة الرابعة
$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$	
$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$	
$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$	
$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$	

القسم الرابع

7. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + 3}}, I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{(2 \cos x + 3)^{\frac{1}{2}}} = \sin x (2 \cos x + 3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2} (-2 \sin x) (2 \cos x + 3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \frac{(2 \cos x + 3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = -\sqrt{2 \cos x + 3}$$

8. $f(x) = \cos^2(3x), I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin(6x)$$

9. $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x, I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} [\cos(4x) + \cos(2x)]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

4. $f(x) = \cot^2 x, I =]0, \pi[$

طريقة أولى:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$F(x) = -\cot x - x$$

طريقة ثانية:

$$f(x) = \cot^2 x$$

$$f(x) = 1 + \cot^2 x - 1$$

$$F(x) = -\cot x - x$$

5. $f(x) = 2 \cos x \cdot \sin^2 x, I = \mathbb{R}$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{\sin^3 x}{3}$$

6. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}, I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^{-3} x$$

$$f(x) = -(-\sin x) \cdot \cos^{-3} x$$

$$F(x) = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} = \frac{\cos^{-2} x}{2}$$

في كل حالة من الحالات الآتية أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I .

1. $f(x) = \tan x, I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x|$$

$$F(x) = -\ln(-\cos x)$$

2. $f(x) = \cos^2 x, I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

3. $f(x) = \sin^3 x, I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x \cdot \sin^2 x$$

$$f(x) = \sin x (1 - \cos^2 x)$$

$$f(x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 \cos x} + \frac{\cos x}{2 \sin x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln |\cos x| + \frac{1}{2} \ln |\sin x|$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(\cos x) + \frac{1}{2} \ln(\sin x)$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$$

$$11. f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1, I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2 \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$F(x) = 2 \tan x - x$$

$$12. f(x) = \frac{1}{\sin 2x}, I =]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin 2x}$$

$$10. f(x) = \cos^4 x, I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (\cos^2 x)^2$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos^2 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos^2(2x)$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x) \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

القسم الثالث: التكامل المحدد

رمزه	$\int_a^b d(x)$
قانونه	$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
حواصيه	$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
ملاحظة	$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f + g) dx$ علاقة شاك: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ شرط التطبيق: أن يكون التابع نفسه وتطبق بشكل عكسي أيضاً $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
انتبه	إن الرمز $\int_a^b d(x)$ يبقى عند الإصلاخ ولكنه يختفي عند المكاملة عند وجود قيمة مطلقة قبل المكاملة فإننا نتخلص منها ثم نصلح ثم نكامل (مع الانتباه أنه يمكنك استخدام علاقة شاك عند الأروم)

$$6. I = \int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2} dx$$

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| \right]_1^2$$

$$I = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 + \ln(2) \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 + 0 \right)$$

$$I = \frac{8}{3} + 2 + 2 + \ln(2) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

$$I = \frac{7}{3} + 3 - \frac{1}{2} + \ln(2)$$

$$I = \frac{14 + 18 - 3}{6} + \ln(2) = \frac{29}{6} + \ln(2)$$

سيأتي بها الله ..

وإن تأخرت 🙄❤

$$4. I = \int_{-1}^2 (x-2)(x^2-4x+3) dx$$

$$= \int_{-1}^2 \frac{1}{2} (2x-4)(x^2-4x+3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+3)^2}{2} \right]_{-1}^2$$

$$= \left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{4} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{64}{4} = -\frac{63}{4}$$

$$5. I = \int_{-1}^1 \left(x + 1 - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln(|x+2|) \right]_{-1}^1$$

$$I = \left(\frac{1}{2} + 1 - \ln(3) \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - \ln(1) \right)$$

$$I = \frac{1}{2} + 1 - \ln(3) - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \ln(3)$$

تدريب: احسب I في كل من الحالات الآتية:

$$1. I = \int_{-1}^2 (2x-2) dx$$

$$= \left[2 \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 = [x^2 - 2x]_{-1}^2$$

$$= (4 - 4) - (1 + 2) = -3$$

$$2. I = \int_0^1 2x e^{x^2} dx$$

$$= [e^{x^2}]_0^1 = (e^1) - (e^0) = e - 1$$

$$3. I = \int_2^4 \frac{3}{x-1} dx$$

$$= \int_2^4 3 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= [3 \ln(|x-1|)]_2^4$$

$$= (3 \ln(3)) - (3 \ln(1)) = 3 \ln(3)$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left((5)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$I = \frac{1}{3} 5\sqrt{5} - \frac{1}{3}$$

14. $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ تم التأكيد

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$$

$$I = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$I = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$$

$$I = \left[\frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^e$$

$$I = \left(\frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{1}{3}$$

15. $I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

$$I = [\ln|e^x + e^{-x}|]_0^1$$

$$I = (\ln(e + e^{-1})) - \ln 2$$

$$I = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$$

$$I = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e}\right) - \ln 2$$

$$I = \ln(e^2 + 1) - \ln(e) - \ln 2$$

$$I = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$$

16. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x dx$

$$I = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \left(\frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{1}{3}$$

17. $I = \int_0^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

$$I = \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\pi}$$

$$I = \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

عدنا:

$$I = \int_0^1 \left(2x + 3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2x+1} + \frac{26}{5} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$I = \left[\frac{2x^2}{2} + 3x - \frac{1}{5} \ln|2x+1| + \frac{26}{5} \ln|x-2| \right]_0^1$$

$$I = \left(4 - \frac{1}{5} \ln(3) - 0 \right) - \left(0 - 0 + \frac{26}{5} \ln(2) \right)$$

$$I = 4 - \frac{1}{5} \ln(3) - \frac{26}{5} \ln(2)$$

10. $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$$I = \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$I = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^3$$

$$= \left[2(1+t)^{\frac{1}{2}} \right]_0^3 = 2[\sqrt{1+t}]_0^3$$

$$I = 2(\sqrt{4}) - (\sqrt{1}) = 2$$

11. $I = \int_0^1 te^{t^2-1} dt$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} 2t \cdot e^{t^2-1} dt$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 2t \cdot e^{t^2-1} dt$$

$$I = \frac{1}{2} [e^{t^2-1}]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} ((e^0) - (e^{-1})) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

12. $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$

$$I = \int_0^1 x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I = \left[\frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I = \left(\frac{1}{3} (2)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{3} (1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$I = \frac{1}{3} (2\sqrt{2}) - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

13. $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx$

$$I = \int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

7. $I = \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 1}{x} dx$$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I = \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| \right]_1^2$$

$$I = \left(\frac{(2)^2}{2} + 2(2) + \ln(2) \right) - \left(\frac{1}{2} + 2 + 0 \right)$$

$$I = 2 + 4 + \ln(2) - \frac{1}{2} - 2$$

$$I = \frac{8-1}{2} + \ln(2) = \frac{7}{2} + \ln(2)$$

8. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} dx$

بالإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:

$$\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

ونجد:

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$I = [2x + \ln|x-1|]_{-2}^{-1}$$

$$I = (2(-1) + \ln 2) - (2(-2) + \ln 3)$$

$$I = (-2 + \ln 2) - (-4 + \ln 3)$$

$$I = -2 + \ln 2 + 4 - \ln 3$$

$$I = 2 + \ln 2 - \ln 3$$

9. $I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2} dx$

بالإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:

$$\frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2} = 2x+3 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}$$

$$I = \int_0^1 \left(2x+3 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2} \right) dx$$

الإصلاح باستخدام طريقة الكسور نجد أن:

سنعود بعد قليل:

$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2} = \frac{10x+6}{(2x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$$

تكافئ:

$$A(x-2) + B(2x+1) = 10x+6$$

بفرض: $x=2$

$$5B = 26 \rightarrow B = \frac{26}{5}$$

بفرض: $x = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{5}{2}A = 1 \rightarrow A = -\frac{2}{5}$$

إذًا:

$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{26}{5} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$I = \frac{8-9}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$21. I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x} dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos 2x)} dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 x} dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} 2|\sin x| dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} -2\sin x dx$$

$$I = 2[\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}}$$

$$I = 2\left[\cos 2\pi - \left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$I = 2(1-0) = 2$$

$$I = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-2}^{-1}$$

$$I = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (9 - 9) + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4\right)$$

$$I = \frac{8}{3} - 4 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 4$$

$$I = -8 + 6 = -2$$

$$20. I = \int_0^3 (2 - |2-x|) dx$$

سنعود بعد قليل...

(دراسة إشارة $2-x$)

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

عندنا...

$$I = \int_0^2 (2 - (2-x)) dx + \int_2^3 (2 - (-2+x)) dx$$

$$I = \int_0^2 x dx + \int_2^3 (4-x) dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[4x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$I = 2 - 0 + 12 + \frac{9}{2} - 8 - 2$$

$$I = 4 - \frac{9}{2}$$

$$18. I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) dx$$

$$I = [-\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$I = \ln 2 + \ln \sqrt{3} - \ln 2 = \ln \sqrt{3}$$

$$19. I = \int_{-3}^{-1} x|x+2| dx$$

سنعود بعد قليل...

(دراسة إشارة $x+2$)

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

عندنا...

$$I = \int_{-3}^{-2} x(-x-2) dx + \int_{-2}^{-1} x(x+2) dx$$

$$I = \int_{-3}^{-2} (-x^2 - 2x) dx + \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x) dx$$

التكامل بالتجزئة:

الثانية	الأولى	الحالة
$I = \int_a^b x^n \ln(x) dx$ <p>فإن الفرضية المناسبة:</p> $u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$ <p>تكاملاً $v' = \text{الباقي} \rightarrow v = \text{تكاملاً الباقي}$</p>	$I = \int_a^b x^n \sin x dx$ $I = \int_a^b x^n \cos x dx$ $I = \int_a^b x^n e^x dx$ <p>فإن الفرضية المناسبة:</p> $u = \text{التابع الصحيح} \rightarrow u' = (\text{التابع الصحيح})'$ <p>تكاملاً $v' = \text{الباقي} \rightarrow v = \text{تكاملاً الباقي}$</p>	
		الخطوات
		* نضع الفرضية المناسبة
		* نضع القانون: $I = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx$
		ملاحظة
		أحياناً نحتاج إلى للمكاملة بالتجزئة مرات متتالية
		ملاحظة
		يمكن إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ بالاستفادة من التكامل المحدد وفق الخطوات التالية:
		* نستبدل x بـ t
		* نوجد المطلوب باستخدام التكامل بالتجزئة فيكون: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ حيث: a مقدار كفي من المجال I

$$2. I = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= [x \sin x]_0^{\pi} - [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= [x \sin x + \cos x]_0^{\pi}$$

$$I = (-1) - (1) = -2$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

التعريف الأول: احسب I في كل من الحالات الآتية

$$1. I = \int_1^e x \ln x dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= [t \cdot \ln t]_1^x - [t]_1^x = [t \cdot \ln t - t]_1^x$$

$$F(x) = x \ln x - x + 1$$

التعريف الثالث:

جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I :

1. $f(x) = x \cos x ; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$F(x) = \int_0^x t \cos t \cdot dt$$

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos t \rightarrow v = \sin t$$

$$F(x) = [t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t \cdot dt$$

$$= [t \sin t]_0^x - [-\cos t]_0^x = [t \sin t + \cos t]_0^x$$

$$= (x \sin x + \cos x) - (1)$$

$$= x \sin x + \cos x - 1$$

2. $f(x) = x^2 e^x ; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^t \cdot dt$$

$$u = t^2 \rightarrow u' = 2t$$

$$v' = e^t \rightarrow v = e^t$$

$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2t e^t \cdot dt$$

$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - 2 \int_0^x t e^t \cdot dt$$

سنعود بعد قليل نكامل J بالتجزئة وفق:

$$J = \int_0^x t e^t \cdot dt$$

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^t \rightarrow v = e^t$$

$$J = [t e^t]_0^x - \int_0^x e^t \cdot dt$$

$$J = [t e^t]_0^x - [e^t]_0^x$$

$$J = [t e^t - e^t]_0^x$$

..حنا..

$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - 2[t e^t - e^t]_0^x$$

$$= [t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t]_0^x$$

$$= (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) - (0 + 0 + 2)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$$

3. $f(x) = x^2 \ln x ; I =]0, +\infty[$

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$F(x) = \int_1^x t^2 \ln t \cdot dt$$

$$u = \ln t \rightarrow u' = \frac{1}{t}$$

7. $I = \int_0^1 x^2 \cdot e^x \cdot dx$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$I = [x^2 \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot e^x dx$$

سنعود بعد قليل نكامل J بالتجزئة وفق:

$$J = \int_0^1 2x \cdot e^x dx$$

$$u = 2x \rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$J = [2x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 2 \cdot e^x dx$$

$$= [2x \cdot e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1$$

$$= [2x \cdot e^x - 2e^x]_0^1$$

..حنا..

$$I = [x^2 \cdot e^x]_0^1 - [2x \cdot e^x - 2e^x]_0^1$$

$$= [x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x]_0^1$$

$$= F(1) - F(0)$$

$$= (e - 2e + 2e) - (2)$$

$$= e - 2$$

8. $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx$$

سنعود بعد قليل نكامل J بالتجزئة وفق:

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$

$$J = [-e^x \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cdot \cos x dx$$

$$J = [-e^x \cdot \cos x]_0^\pi - I$$

..حنا..

$$I = [e^x \sin x]_0^\pi - [-e^x \cos x]_0^\pi - I$$

$$2I = [e^x \sin x + e^x \cos x]_0^\pi$$

$$2I = (-e^\pi) - (1) = -e^\pi - 1$$

$$I = \frac{-e^\pi - 1}{2}$$

المكاملة باستخدام t :

التعريف الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$f(x) = \ln(x)$$

عين تابعاً أصلياً للتابع f .

$$F(x) = \int_1^x f(t) \cdot dt$$

$$F(x) = \int_1^x \ln t \cdot dt$$

$$u = \ln t \rightarrow u' = \frac{1}{t}$$

$$v' = 1 \rightarrow v = t$$

$$F(x) = [t \cdot \ln t]_1^x - \int_1^x 1 \cdot dt$$

3. $I = \int_1^2 (x-2)e^x \cdot dx$

$$u = x - 2 \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$I = [(x-2)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$$

$$I = [x e^x - 2e^x]_1^2 - [e^x]_1^2$$

$$I = [x e^x - 2e^x - e^x]_1^2$$

$$I = [x e^x - 3e^x]_1^2$$

$$I = (2e^2 - 3e^2) - (e - 3e)$$

$$I = -e^2 + 2e$$

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \sin 3x$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin 3x \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{3} \cos 3x dx$$

$$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{9} \sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right) (-1) + 0\right) - (0 + 0)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

5. $I = \int_1^e (x-1) \ln x dx$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x - 1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) dx$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{6} - x\right]_1^e$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x - \frac{x^3}{6} + x\right]_1^e$$

$$I = \left[\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \frac{e^2}{4} + e\right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1\right]$$

$$I = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

6. $I = \int_0^1 (2x+1) e^{-x} dx$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$I = [-(2x+1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} dx$$

$$I = [(-2x-1)e^{-x} - 2e^{-x}]_0^1$$

$$I = (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1 - 2)$$

$$I = -\frac{5}{e} + 3$$

$$v' = t^2 \rightarrow v = \frac{t^3}{3}$$

$$F(x) = \left[\frac{t^3}{3} \ln t \right]_1^x - \left[\frac{1}{3} \frac{t^3}{3} \right]_1^x$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \ln t - \frac{1}{9} t^3 \right]_1^x$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right) - \left(-\frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{9}$$

لك شيء في هذا العالم فقم وقاوم ..

4. $f(x) = x^2 \sin 2x ; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$F(x) = \int_0^x t^2 \sin(2t) \cdot dt$$

$$u = t^2 \rightarrow u' = 2t$$

$$v' = \sin 2t \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x - \int_0^x -t \cos 2t \cdot dt$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x + \int_0^x t \cos 2t \cdot dt$$

سنعود بعد قليل نكمل [بالتجزئة وفق:

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos 2t \rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2t \cdot dt$$

$$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^x - \left[-\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x$$

$$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x$$

عندنا..

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x + \left[\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x$$

$$= \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^x$$

$$= \left(-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) - \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4}$$

تطبيقات التكامل:

حساب الججوم	حساب المساحات	التطبيق
أوجد حجم المجسم الدوراني	احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ (مستقيم أفقي أو مائل) وبين $x = a$ و $x = b$	نصر السؤال
نطبق القانون:	نرسم الخط البياني	فكرة الحل
$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$	نضع القانون: $S = \int_a^b dx$ (تحت - فوق)	
	حيث فوق وتحت يقصد بها $f(x)$ و y_Δ	
	نتابع كما سبق..	
	انتبه يا صديقي الطالب:	
	* إذا كان الخط البياني C_f فوق المستقيم Δ فإن قانون المساحة يُعطى وفق:	
	$S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta) dx$	
	* إذا كان المستقيم Δ فوق الخط البياني C_f فإن قانون المساحة يُعطى وفق:	
	$S = \int_a^b (y_\Delta - f(x)) dx$	
	ملاحظات هامة:	
	١. يمكن استخدام علاقة شال عند اللزوم لإيجاد المساحة المطلوبة	
	٢. أحياناً حدود التكامل تكون غير مُعطاة إنما تستنتج وفق:	
	* محور الترتيب $x = 0$	
	* عند وجود نقاط تقاطع مع محور الفواصل فإن حدود التكامل هي فواصل نقاط التقاطع	
	* حدود التكامل في المساحة هي قيم x وتكون من الصغير إلى الكبير	
	٣. عندما يكون Δ هو محور الفواصل فإن $y_\Delta = 0$	
	٤. ناتج المساحة موجب حصراً	

الحل:
أولاً:
التابع f معرف ومستمر على \mathbb{R} ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على \mathbb{R} ولدينا:

$$f'(x) = 2x$$

نعم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = -4$$

٣. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 3$ و $x = 1$

٤. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل ومحور الترتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

٥. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = 5$ والمستقيمان $x = 2$ و $x = 1$

٦. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = x$ ومحور الترتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

التعريف الأول:
ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = x^2 - 4$$

١. أولاً:
ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

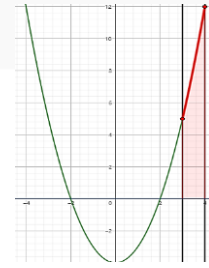
٢. ثانياً:
في كل من الحالات الآتية احسب المساحة S

١. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 4$ و $x = 3$

٢. مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 2$ و $x = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	-4	\nearrow

الطالب الأول:



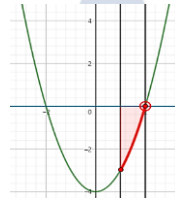
$$S = \int_3^4 (f(x) - y_{\Delta}) dx$$

$$= \int_3^4 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_3^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - (9 - 12)$$

$$= \frac{64}{3} - 16 + 3 = \frac{64}{3} - 13 = \frac{25}{3}$$

الطالب الثاني:



$$S = \int_1^2 (y_{\Delta} - f(x)) dx$$

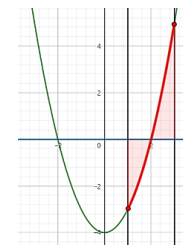
$$= \int_1^2 (-x^2 + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 4 \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 + \frac{1}{3} - 4 = -\frac{7}{3} + 4 = \frac{5}{3}$$

الطالب الثالث:



$$S = \int_2^3 (y_{\Delta} - f(x)) dx + \int_2^3 (f(x) - y_{\Delta}) dx$$

$$= \int_2^3 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

الطالب الرابع:



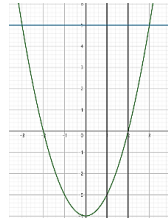
$$S = \int_1^2 (y_{\Delta} - f(x)) dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 = \frac{16}{3}$$

الطالب الخامس:



$$S = \int_1^2 (y_{\Delta} - f(x)) dx$$

$$= \int_1^2 (5 - x^2 + 4) dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 9) dx$$

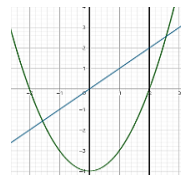
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_1^2$$

$$\left(-\frac{(2)^2}{3} + 9(2) \right) - \left(-\frac{1}{3} + 9 \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 18 + \frac{1}{3} - 9$$

$$= -\frac{7}{3} + 9 = \frac{-9 + 27}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

الطالب السادس:



$$S = \int_1^2 (y_{\Delta} - f(x)) dx$$

$$= \int_1^2 (x - x^2 + 4) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 4(2) \right) - (0 + 0 + 0)$$

$$= \frac{30 - 8}{3} = \frac{22}{3}$$

التمرين الثاني:

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران الخط البياني
للتابع: $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$ دورة كاملة حول محور
الفاصل على المجال $[1, 2]$
الحل:

$$V = \pi \int_1^2 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \pi \int_1^2 x^{-3} dx$$

$$= \pi \left[\frac{(x^{-2})}{-2} \right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{1}{8} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \pi \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right)$$

$$V = \frac{3}{8} \pi$$

التمرين الثالث:

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران الخط البياني
للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ دورة كاملة حول محور
الفاصل على المجال $[0, 1]$
الحل:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$V = \pi \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^1$$

$$V = \pi(1 - \ln(1+e) - (-\ln e))$$

$$V = \pi(1 - \ln(1+e) + \ln 2)$$

التمرين الرابع:

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران الخط البياني
للتابع $f(x) = x \cdot \sqrt{x(1-x)}$ دورة كاملة حول
محور الفواصل على المجال $[0, 1]$
الحل:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x \sqrt{x(1-x)})^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2(x(1-x)) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - (0) \right] = \pi \left(\frac{1}{20} \right) = \frac{\pi}{20}$$

أن نترك ما نسعى إليه يوماً .. آمين 🙏

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-1) + c(x-1) + d(x+1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx - c + dx + d}{x^2-1}$$

بالمقارنة:

$$\begin{cases} a = 1 & \dots (1) \\ b = 1 & \dots (2) \\ -a + c + d = 1 & \dots (3) \\ -b - c + d = -3 & \dots (4) \end{cases}$$

من (1) نجد $a = 1$ من (2) نجد $b = 1$

نعوض في (3) و (4):

$$\begin{cases} -1 + c + d = 1 & \dots (3) \\ -1 - c + d = -1 & \dots (4) \\ c + d = 2 & \dots (3) \\ -c + d = 0 & \dots (4) \end{cases}$$

بجمع (3) و (4) نجد أن:

$$2d = 2 \rightarrow d = 1$$

نعوض في (3):

$$c = 1$$

ومنه:

$$a = 1, b = 1$$

$$c = 1, d = 1$$

الطالب الثاني:

احسب

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot dx$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot dx \dots (2)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + \ln|x-1| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{1}{2}) \right) - \left(\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{1}{2} + \ln(\frac{1}{2}) + \ln(-\frac{1}{2}) \right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \ln(\frac{1}{2}) - \ln(\frac{3}{2}) = 1$$

التمرين الرابع: ليكن لدينا العدديين:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \cdot dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx$$

الطالب الأول:

احسب J.

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)} \cdot dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right]_0^1$$

$$J = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

$$= \frac{(ax(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1))}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^3 - ax^2 - 2ax + bx - 2b + cx + c}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^3 - ax^2 + (-2a+b+c)x - 2b+c}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 & \dots (1) \\ -a = -1 & \dots (2) \\ 2a + b + c = 1 & \dots (3) \\ -2b + c = -3 & \dots (4) \end{cases}$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$a = 1$$

نعوض في (3):

$$\begin{cases} b + c = 3 & \dots (3) \\ -2b + c = -3 & \dots (4) \end{cases}$$

نضرب (3) بـ (-1):

$$-b - c = -3 \dots (3)'$$

$$-2b + c = 3 \dots (4)$$

بجمع (3)' و (4):

$$-3b = -6$$

$$b = 2$$

نعوض في (4):

$$-4 + c = -3 \rightarrow c = 1$$

إذاً

$$a = 1, b = 2, c = 1$$

الطالب الثاني:

أياً كان x من D احسب:

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

الحل:

$$f(x) = x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + 2 \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x+1| + \ln|x-2| \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2 \ln 2 + 0 \right) - (0 + \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln 2$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

الطالب الأول:

عين الأعداد الحقيقية a, b و c, d التي تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

تمارين:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

المطلوب:

الطالب الأول:

جد الأعداد a, b و c التي تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

بالمقارنة:

$$a = 1 \dots (1)$$

$$-a + b = -5 \dots (2)$$

$$b + c = 1 \dots (3)$$

من (1) نجد أن:

نعوض في (2):

$$1 + b = -5$$

$$b = -6$$

نعوض في (3):

$$-6 + c = 1$$

$$c = 7$$

$$\rightarrow f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$$

الطالب الثاني:

أياً كان x من D احسب:

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

الحل:

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - 6 + \frac{7}{x+1} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - 6 + 7 \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 7 \ln|x+1| \right]_0^2$$

$$= (2 - 12 + 7 \ln 3) - 0$$

$$= 7 \ln 3 - 10$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$$

الطالب الأول:

عين الأعداد الحقيقية a, b و c التي تحقق

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$$

$$e^{2x} \cdot \cos x = e^{2x}(2a \cdot \cos x - a \cdot \sin x) + 3b \cdot \cos x - 4$$

$$\cos x = (2a + 3b) \cos x + (-a - 4b) \sin x$$

بالمقارنة نجد:

$$2a + 3b = 1 \dots (1)$$

$$-a - 4b = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد 2:

$$2a + 3b = 1 \dots (1)$$

$$-2a - 8b = 0 \dots (2')$$

بجمع (1) و (2') نجد:

$$-5b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$$

نعوض في (1):

$$2a - \frac{3}{5} = 1$$

$$2a = \frac{8}{5}$$

$$a = \frac{8}{10} \Rightarrow a = \frac{4}{5}$$

$$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x)$$

الطالب الثالث:
لدينا:

$$f(x) = \frac{4}{5}f'(x) - \frac{1}{5}f''(x)$$

$$F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)$$

التمرين الثامن:
أثبت صحة المساواة:

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$$

ثم احسب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

إثبات صحة المساواة:

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} [1 - \cos^2(2x)]$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$$

حساب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1) dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{8} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{16}$$

التعريف السادس: ليكن لدينا العددين

$$I = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2} + 1} dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{xe^2}{e^{x^2} + 1} dx$$

حساب J:

$$J = \int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{(2xe^{x^2})}{e^{x^2} + 1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|e^{x^2} + 1|\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln(e + 1)\right) - \left(\frac{1}{2} \ln(2)\right)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(e + 1) - \ln(2))$$

$$J = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

حساب I + J:

$$I + J = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2} + 1} dx + \int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{e^{x^2} + 1} + \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x + xe^{x^2}}{e^{x^2} + 1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1 + e^{x^2})}{e^{x^2} + 1} dx = \int_0^1 x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$\Rightarrow I + J = \frac{1}{2}$$

استنتاج I:

$$I + J = \frac{1}{2}$$

$$I + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

التعريف السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = e^{2x} \cos x$$

1. احسب $f''(x), f'(x)$

2. عين عددين a, b يحققان المساواة:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$

3. استنتج تابعاً أصلياً للتابع f على \mathbb{R} .

الحل:

الطالب الأول:

$$f'(x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$$

$$= e^{2x} (2 \cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = 2e^{2x} (2 \cos x - \sin x)$$

$$+ (-2 \sin x - \cos x) e^{2x}$$

$$= e^{2x} (4 \cos x - 2 \sin x - 2 \sin x - \cos x)$$

$$= e^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x)$$

الطالب الثاني:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$

$$e^{2x} \cos x = a(e^{2x} (2 \cos x - \sin x))$$

$$+ b(e^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x))$$

$$e^{2x} \cos x = ae^{2x} (2 \cos x - \sin x) + be^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x)$$

الطالب الثاني:

احسب I + J ثم استنتج I.

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} + \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} + \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(x^2 + 1)}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

استنتاج I:

نعلم أن:

$$I + J = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - J$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

التعريف الخامس: ليكن لدينا العددين:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

حساب J:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} [\ln |1 + 2 \sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 3$$

حساب I + J:

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x + \cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (2 \sin x + 1)}{1 + 2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

استنتاج قيمة I:

$$I + J = 1$$

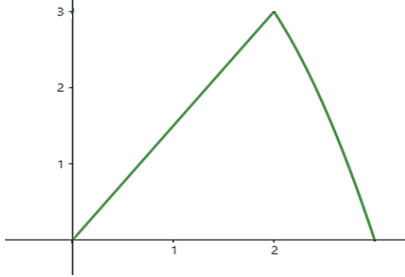
$$I + \frac{1}{2} \ln 3 = 1 \Rightarrow I = 1 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
المقدار	-	+	-	-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & ; x \in [0, 2] \\ 4 - (x - 1)^2 & ; x \in [2, 3] \end{cases}$$

الرسم:



الطالب الثاني:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{2}x dx + \int_2^3 (4 - (x - 1)^2) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 + \left[4x - \frac{(x - 1)^3}{3} \right]_2^3$$

$$= (3) - (0) + \left(12 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 - \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{3}$$

* الحجم

١. تمارين بأفكار مميزة:

* تكامل يحوي قيمة مطلقة.

* تابع الـ (max أو min)

* تعريف إيجاد I + J ثم استنتاج I

* تمارين تعيين ثوابت ثم إيجاد تكامل.

التعريف العاشر:

نرمز إلى C_f للخط البياني التابع f المعروف على $[0, 3]$ بالعلاقة:

$$f(x) = \min\left(4 - (x - 1)^2, \frac{3}{2}x\right)$$

١. ارسم الخط البياني التابع f على المجال $[0, 3]$.

٢. احسب $\int_0^3 f(x) dx$

الحل:

الطالب الأول:

ندرس إشارة الفرق:

$$4 - (x - 1)^2 - \frac{3}{2}x$$

$$= 4 - x^2 + 2x - 1 - \frac{3}{2}x$$

$$= -x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$a = -1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= \frac{1}{4} - 4(-1)(3)$$

$$= \frac{1}{4} + 12$$

$$= \frac{49}{4} > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

١. التكامل المحدد

٤. التكامل بالتجزئة

٥. تطبيقات التكامل المساحة *

التعريف التاسع:

نرمز عادة بالرمز $\min(a, b)$ إلى أصغر العددين a و b وتحقق أن الخط البياني C_f للتابع f المعروف على $[0, 2]$ بالصيغة:

$$f(x) = \min(x^2, 2 - x)$$

هو الخط المرسوم في الشكل المجاور.



احسب التكامل $\int_0^2 f(x) dx$.
وقد ماذا يمثل هذا العدد.

نلاحظ أنه أيًا كان: $0 \leq x \leq 1$ يكون:

$$x^2 + x - 2 \leq 0 \rightarrow x^2 \leq 2 - x$$

نلاحظ أنه أيًا كان: $1 \leq x \leq 2$ يكون:

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 2 - x$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

يمثل هذا العدد مساحة السطح المحصورة بين الخط ومحور الفواصل.

فهرس بحث التكامل:

١. إثبات تابع أصلي:

* إثبات أن F تابع أصلي للتابع f

* إثبات أن F و G تابعتان أصليتان للتابع نفسه

٢. إيجاد التابع الأصلي:

اللهم أنت رب الأهداف التي أسعى إليها . حاشاك أن تسقط في قلب المرء شيئاً لن يصل إليه

شيفرة الـ 600 في بحث المتتاليات

الطالب الثاني:

$$\begin{aligned}v_0 &= u_0 + 2 = 1 + 2 = 3 \\v_1 &= u_1 + 2 = 7 + 2 = 9 \\v_2 &= u_2 + 2 = 25 + 2 = 27\end{aligned}$$

الطالب الثالث:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\&= 3u_n + 4 + 2 \\&= 3u_n + 6\end{aligned}$$

مجموع يحوي نقاط

مجموع يحوي نقاط حيث وجود النقاط يعني وجود حدود منخفية تحمل صفات الحدود التي قبلها والتي بعدها

مثال:

$$\begin{aligned}*& u_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) *& u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} *& u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} *& u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

كيفية إيجاد حد من متتالية المجموع:

- * نحدد الحد الأول وذلك باستبدال كل n بالحد المطلوب (هذه الخطوة تطبق عند الزوم)
- * نحدد الحد الأخير باستبدال كل n بالحد المطلوب
- * نعلّم ما بينهما (عند الزوم) وفقاً للمتتالية.

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

أوجد كلاً من:

$$u_{4n} \text{ و } u_{2n} \text{ و } u_{n+1} \text{ و } u_4 \text{ و } u_3 \text{ و } u_2 \text{ و } u_1$$

الحل:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$$

الشكل التدريجي

كل حد من حدود المتتالية معطى بدلالة الحد الذي يسبقه أي: u_{n+1} معطاة بدلالة n مثال:

$$\begin{aligned}*& u_{n+1} = 2 - 7u_n, u_0 = 1 *& u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 1, u_0 = -1 *& u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, u_0 = 3 *& u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2 - u_n}, u_0 = 1 *& u_{n+1} = 3^{u_n}, u_0 = 0 *& u_{n+1} = \ln(u_n + 3), u_0 = 1 *& u_{n+1} = e^{2u_n - 7}, u_0 = -1\end{aligned}$$

كيفية إيجاد حد

من متتالية معطاة بالشكل التدريجي: لا يمكن إيجاد حد دون معرفة الحد أو الحدود التي سبقته.

تعريف:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

احسب كلاً من:

$$u_8 \text{ و } u_5 \text{ و } u_2 \text{ و } u_1$$

الحل:

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$

$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$

$$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

$$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-29) - 3 = -61$$

$$u_6 = 2u_5 - 3 = 2(-61) - 3 = -125$$

$$u_7 = 2u_6 - 3 = 2(-125) - 3 = -253$$

$$u_8 = 2u_7 - 3 = 2(-253) - 3 = -509$$

التعابير

تكون المتتالية معطاة بدلالة متتالية أخرى.

مثال:

$$* u_n = v_n - 3$$

$$* w_n = \frac{1}{u_n} + 2$$

$$* x_n = y_n + 6$$

كيفية إيجاد حد من متتالية التعابير:

نستخدم الاستبدال

تعريف:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_n + 2$$

1. احسب u_1 و u_2 2. احسب v_0 و v_1 و v_2 3. احسب v_{n+1}

الطالب الأول:

$$u_1 = 3u_0 + 4 = 3(1) + 4 = 7$$

$$u_2 = 3u_1 + 4 = 3(7) + 4 = 25$$

تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} أو أي مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط:

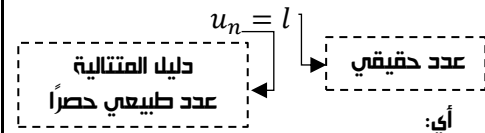
$$\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$$

عدد طبيعي معطى (يمكن أن يتغير من متتالية إلى أخرى) ونرمز إلى المتتالية بالرمز:

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ أو } (u_n)_{n \geq n_0}$$

و نسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n وللمتتالية عدد لا نهائي من الحدود بقطع النظر عن هذه الحدود.

ملاحظة مهمة جداً جداً:



أي:

$$* u_1 = 3$$

$$* u_2 = -7$$

$$* u_3 = -\frac{5}{2}$$

$$* u_{\frac{1}{2}}$$

$$* u_{-3}$$

غير موجود

أشكال المتتالية:

يمكن التعبير عن المتتالية بأحد الأشكال الآتية:

الشكل الصريح

يعرف الحد ذو الدليل n بصيغة تتبع للعدد n أي: تكون u_n معطاة بدلالة n .

مثال:

$$* u_n = 2 - 7n$$

$$* u_n = n^2 - 3n + 1$$

$$* u_n = \sqrt{n+1}$$

$$* u_n = \frac{n+1}{2-n}$$

$$* u_n = 3^n$$

$$* u_n = \ln(n+3)$$

$$* u_n = e^{2n+7}$$

كيفية إيجاد حد

من متتالية معطاة بالشكل الصريح:

يكفي استبدال كل n بدليل الحد المطلوب

تعريف:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث:

$$u_n = 5n - 1$$

احسب كلاً من:

$$u_{2n} \text{ و } u_{n+1} \text{ و } u_{50} \text{ و } u_2 \text{ و } u_1 \text{ و } u_0$$

الحل:

$$u_0 = -1$$

$$u_1 = 5(1) - 1 = 4$$

$$u_2 = 5(2) - 1 = 9$$

$$u_{50} = 5(50) - 1 = 249$$

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 1 = 5n + 4$$

$$u_{2n} = 5(2n) - 1 = 10n - 1$$

التعريف الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

أوجد كلاً من:

$$u_{4n} \text{ و } u_{2n} \text{ و } u_{n+1} \text{ و } u_4 \text{ و } u_3$$

الحل:

$$u_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$u_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

المتتالية الحسابية والهندسية

أولاً: التعريف:

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية	التعريف:
كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: q قانونه: حد يسبقه - حد $q = \frac{\text{حد}}{\text{حد يسبقه}}$	كل حد فيها ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: r قانونه: حد يسبقه - حد $r = \text{حد} - \text{حد يسبقه}$	التعريف:
مثال: $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots$	مثال: $2, 4, 6, 8, \dots$ $1, 4, 7, 10, \dots$ $-5, -3, -1, \dots$ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$	مثال:
تمرين: باستخدام حاسة واحدة (حاسة) حدد نوع المتتالية وحدد أساسها في كل من الحالات الآتية:		
1. هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$	1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots$	
2. هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$	2. $\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4, \dots$	
3. ليست حسابية وليست هندسية	3. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots$	
4. ليست حسابية وليست هندسية	4. $\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^4}, \dots$	
5. هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$	5. $\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^4}, \dots$	
6. حسابية أساسها $r = \frac{1}{e}$	6. $\frac{1}{e}, \frac{2}{e}, \frac{3}{e}, \frac{4}{e}, \dots$	
7. حسابية أساسها $r = 1$	7. $1, 2, 3, 4, \dots$	
8. حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$	8. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$	
9. حسابية أساسها $r = \frac{1}{12}$	9. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$	
10. هندسية أساسها $q = 2$	10. $2, 4, 8, 16, \dots$	
11. هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$	11. $\frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{9^3}, \frac{1}{9^4}, \dots$	
12. هندسية أساسها $q = \alpha$	12. $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots$	

أن تكون معنا ..

يعني أن تكون طالباً مُرِيداً، عظيم الغايات، مُستثمراً الأوقات، مُتعلماً من السكّنات والحركات، ساعياً في الذّرب ما بقيت ..

فطريق الـ 600 لا راحة فيه ولا وقوف 

ثانياً: إثبات نوع المتتالية:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
لإثبات أن المتتالية حسابية فإننا:	لإثبات أن المتتالية هندسية فإننا:
1. نوجد u_{n+1}	1. نوجد u_{n+1}
2. نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$	2. نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3. ونميز:	3. ونميز:
* إذا كان ناتج الفرق يحوي n فالمتتالية ليست حسابية	* إذا كان ناتج النسبة يحوي n فالمتتالية ليست هندسية
* إذا كان ناتج الفرق لا يحوي n فالمتتالية تكون حسابية وأساسها هو ناتج الفرق	* إذا كان ناتج النسبة لا يحوي n فالمتتالية تكون هندسية وأساسها هو ناتج النسبة

التعريف الأول:

هذه المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ في الحالات الآتية حسابية:

$$u_n = 5n - 1$$

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 1 = 5n + 4$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow u_{n+1} - u_n \\ &= 5n + 4 - 5n + 1 = 5 \\ &\text{حسابية أساسها } r = 5 \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{3}{2} - 7n$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3}{2} - 7(n+1) \\ &= \frac{3}{2} - 7n - 7 = -7n - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow u_{n+1} - u_n \\ &= -7n - \frac{11}{2} - \frac{3}{2} + 7n \\ &= -\frac{14}{2} = -7 \\ &\text{حسابية أساسها } r = -7 \end{aligned}$$

$$u_n = (n+1)^2 - 3$$

$$= n^2 + 2n + 1 - 3 = n^2 + 2n - 2$$

$$u_{n+1} = (n+2)^2 - 3 = n^2 + 4n + 4 - 3 = n^2 + 4n + 1$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow u_{n+1} - u_n \\ &= n^2 + 4n + 1 - n^2 - 2n + 2 = 2n + 3 \\ &\text{ليست حسابية.} \end{aligned}$$

$$u_n = 2n^2 + 3n$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n+1)^2 + 3(n+1) \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 \\ &= 2n^2 + 7n + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow u_{n+1} - u_n \\ &= 2n^2 + 7n + 5 - (2n^2 + 3n) \\ &= 2n^2 + 7n + 5 - 2n^2 - 3n \\ &= 4n + 5 \end{aligned}$$

ومنه المتتالية ليست حسابية

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2 + u_n \\ u_0 = -3 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = 2 + u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2 + u_n - u_n = 2$$

حسابية أساسها $r = 2$

التعريف الثاني:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

أثبت أن u_n حسابية وعين أساسها وحدها الأول.نوجد u_{n+1} وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_n}{1 + v_n}} = \frac{1 + v_n}{v_n}$$

نشكل الفرق وفق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1 + v_n - 1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

ومنه حسابية أساسها $r = 1$

وحدها الأول:

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

التعريف الثالث:

هذه المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ في الحالات الآتية هندسية؟

$$u_n = \frac{2}{3^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$$

إذا المتتالية u_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

$$u_n = \frac{4^n}{3n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3n+2}$$

$$u_n = \frac{4^n}{3n+1}$$

$$\frac{4 \cdot 4^n \cdot 3^n \cdot 3}{3^n \cdot 3^2 \cdot 4^n} = \frac{4}{3}$$

إذا المتتالية u_n هندسية أساسها $q = \frac{4}{3}$

$$u_n = n + 2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1+2}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$

إذا المتتالية u_n ليست هندسية

$$u_n = \sqrt{2^n}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 2^n}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$$

إذا المتتالية u_n هندسية أساسها $q = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n \\ u_n = 1 \end{cases}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5u_n}{u_n} = 5$$

إذا المتتالية u_n هندسية أساسها $q = 5$

التعريف الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n + 4 \\ v_0 = 6 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$w_n = v_n + 2$$

أثبت أن w_n هندسية

الحل:

نوجد w_{n+1} وفق:

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 2 = 3v_n + 4 + 2 = 3v_n + 6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3v_n + 6}{v_n + 2} = \frac{3(v_n + 2)}{v_n + 2} = 3$$

إذا: w_n هندسية أساسها $q = 3$

إن أعظم النجاحات تأتي بعد

تخطي أصعب العوائق 🧠💡

التعريف الخامس:المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق:

$$t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

أثبت أن المتتالية t_n متتالية هندسية

الحل:

نوجد t_{n+1} وفق:

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{2}{u_n + 1} - 1$$

$$= \frac{2}{u_n + 1} + 2$$

$$= \frac{2 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{u_n + 1}$$

نشكلا النسبة وفق:

$$t_{n+1} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n}$$

$$t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n} \cdot \frac{u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{2(u_n + 2)(u_n + 1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

 $q = -\frac{1}{2}$ إذا المتتالية t_n هندسية أساسها**ثالثاً: العلاقة بين حدان كفيان:****المتتالية الحسابية**لدينا u_m و u_n حدان كفيان من متتالية حسابية إذا:

$$u_n - u_m = (n - m)r$$

$$u_m - u_n = (m - n)r$$

الفائدة:

تفيد في حساب u_m أو u_n بمعرفة r اثنان منها**المتتالية الهندسية**لدينا u_m و u_n حدان كفيان من متتالية هندسية إذا:

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$$

$$\frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$$

الفائدة: تفيد في حساب u_m أو u_n أو q بمعرفة اثنان منها**التعريف الأول:**ليكن لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية1. فيها $u_0 = 1$ و $u_{10} = 31$ احسب كلاً من r و u_5 و u_{2004}

الحل:

لدينا $u_0 = 1$ و $u_{10} = 31$ حساب r :

$$u_{10} - u_0 = (10 - 0)r$$

$$31 - 1 = 10r$$

$$30 = 10r$$

$$r = 3$$

حساب u_5 :

$$u_5 - u_0 = (5 - 0)(3)$$

$$u_5 - 1 = 15$$

$$u_5 = 16$$

حساب u_{2004} :

$$u_{2004} - u_0 = (2004 - 0)(3)$$

$$u_{2004} - 1 = 6012$$

$$u_{2004} = 6013$$

2. فيها $u_0 = 2$ و $r = 5$ احسب كلاً من u_1 و u_{121}

الحل:

لدينا $u_0 = 2$ و $r = 5$ حساب u_1 :

$$u_1 - u_0 = (1 - 0)(5)$$

$$u_1 - 2 = 5$$

$$u_1 = 7$$

حساب u_{121} :

$$u_{121} - u_0 = (121 - 0)(5)$$

$$u_{121} - 2 = 605$$

$$u_{121} = 607$$

التعريف الثاني:ليكن لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية:1. فيها $u_5 = 88$ و $u_8 = 11$ احسب كلاً من q و u_{100}

الحل:

لدينا $u_5 = 88$ و $u_8 = 11$ حساب q :

$$\frac{u_8}{u_5} = q^{8-5} \rightarrow \frac{11}{88} = q^3$$

$$q^3 = \frac{1}{8} \rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

حساب u_{100} :

$$\frac{u_{100}}{u_8} = q^{100-8}$$

$$u_{100} = u_8 \cdot q^{92}$$

$$u_{100} = 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{92}$$

2. فيها: $u_0 = 3$ و $q = 2$ احسب كلاً من u_3 و u_5

الحل:

لدينا $u_0 = 3$ و $q = 2$ حساب u_3 :

$$\frac{u_3}{u_0} = q^{3-0} \rightarrow \frac{u_3}{3} = (2)^3 \rightarrow u_3 = 24$$

حساب u_5 :

$$\frac{u_5}{u_0} = q^{5-0} \rightarrow \frac{u_5}{3} = (2)^5$$

$$u_5 = 3(32) \rightarrow u_5 = 96$$

رابعاً: علاقة الحد العام "كتابة u_n بدلالة n ":

نوع المتتالية غير معلوم	نوع المتتالية معلوم	
* يكون المعطى هو متتالية u_n نوعها معلوم ومتتالية v_n نوعها غير معلوم مكتوبة بدلالة u_n (علاقة التعايش) فإننا: - نكتب u_n بدلالة n وفقاً لنوعها - من علاقة التعايش نزل المتتالية v_n ونعوض الحد العام للمتتالية u_n بالعلاقة الجديدة	متتالية هندسية * في حال معرفة الحد u_0 فإن: $\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$ * في حال معرفة الحد u_7 (مثلاً) فإن: $\frac{u_n}{u_7} = q^{n-7}$ * وهكذا...	متتالية حسابية * في حال معرفة الحد u_0 فإن: $u_n - u_0 = (n - 0)r$ * في حال معرفة u_7 (مثلاً) فإن: $u_n - u_7 = (n - 7)r$ * وهكذا...

التعريف الأول:

ليكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية في كل حالة من الحالات الآتية عبر عن u_n بدلالة n :

$$r = 4, u_0 = -1$$

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n + 1 = 4n$$

$$u_n = 4n - 1$$

$$u_0 = \frac{45}{2}, r = 10^{-2}$$

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - \frac{45}{2} = 10^{-2} \cdot n$$

$$u_n = 10^{-2}n + \frac{45}{2}$$

$$u_0 = 5, u_{100} = -45$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة r :

$$u_{100} - u_0 = (100 - 0)r$$

$$-45 - 5 = 100r$$

$$-50 = 100r$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - 5 = -\frac{1}{2}r$$

$$u_n = -\frac{1}{2}n + 5$$

$$u_2 = 3, u_5 = 10$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة r :

$$u_5 - u_2 = (5 - 2)r$$

$$10 - 3 = 3r \rightarrow r = \frac{7}{3}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$u_n - u_2 = (n - 2)r$$

$$u_n - 3 = \frac{7}{3}n - \frac{14}{3}$$

$$u_n = \frac{7}{3}n - \frac{14}{3} + 3$$

$$u_n = \frac{7}{3}n - \frac{5}{3}$$

التعريف الثاني:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية في كل حالة من الحالات الآتية عبر عن u_n بدلالة n :

$$q = 2, u_0 = 3$$

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{u_n}{3} = 2^n$$

$$u_n = 3(2)^n$$

$$q = -\frac{1}{2}, u_0 = 10$$

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{u_n}{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = 10 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_1 = 2, u_3 = 5$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة q وفق:

$$\frac{u_3}{u_1} = q^{3-1}$$

$$\frac{5}{2} = q^2 \rightarrow q = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$$

$$\frac{u_n}{2} = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{n-1}$$

$$u_n = 2 \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{n-1}$$

$$u_4 = 8, u_6 = 32$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة q وفق:

$$\frac{u_6}{u_4} = q^{6-4} \rightarrow \frac{32}{8} = q^2$$

$$q = \sqrt{\frac{32}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$\frac{u_n}{u_4} = q^{n-4} \rightarrow \frac{u_n}{8} = (2)^{n-4}$$

$$u_n = 8(2)^{n-4}$$

التعريف الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية v_n وفق:

$$v_n = u_n - 1$$

١. أثبت أن v_n هندسية.

٢. اكتب v_n بدلالة n .

٣. اكتب u_n بدلالة n .

الحل:

الطالب الأول:

نشكل النسبة:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} \\ &= \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - 1} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

إذا المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

الطالب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n :

بما أن v_n متتالية هندسية فإن:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$$v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\rightarrow v_n = v_0 \cdot q^n$$

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

الطالب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n :

المتتالية u_n لا نعلم نوعها:

لكتابة u_n بدلالة n من علاقة التفاضل نجد:

$$v_n = u_n - 1$$

نعزل u_n وفق:

$$u_n = v_n + 1$$

نعلم من الطالب السابق أن:

نعوض وفق:

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

التعريف الرابع:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n} \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية (v_n) حيث:

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

١. أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية

وعين أساسها وحدها الأول

٢. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن المتتالية v_n حسابية:

نوجد v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n} + 1}{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{2 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}}$$

$$= \frac{2 + 4u_n - 1 - u_n}{1 + 2u_n - 1 - u_n} = \frac{1 + 3u_n}{u_n}$$

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 1}{u_n} - \frac{u_n + 1}{u_n}$$

$$= \frac{3u_n + 1 - u_n - 1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$

إذا المتتالية v_n حسابية أساسها $r = 2$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0} = \frac{-1 + 1}{-1} = 0$$

$$v_0 = 0$$

الطالب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n

$$v_n - v_0 = (n - 0)r$$

$$v_n - 0 = n(2)$$

$$v_n = 2n$$

كتابة u_n بدلالة n وفق:

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

نصلح v_n لأنها مكتوبة بدلالة u_n ويتم إصلاح المتتالية بالقسمة الإقليدية ل نجد أن:

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

نعوض:

$$v_n = 1 + \frac{1}{u_n}$$

نعزل u_n :

$$\frac{1}{u_n} = v_n - 1$$

نقلب:

$$u_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

ولدينا من الطالب السابق

$$v_n = 2n$$

نعوض في علاقة u_n :

$$u_n = \frac{1}{2n - 1}$$

خامساً: مجموع حدود متوالية من متتالية:

المتتالية الحسابية

القانون:

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

المتتالية الهندسية

القانون:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$$

الأنماط:

النمط الأول: مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها معلوم.

تحتوي فقرات	لا تحتوي فقرات	مثلاً
$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n}$	$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$	الخطوات
* نضع القانون المناسب * نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أن:	* نضع القانون المناسب * نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أن:	
دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير عدد الحدود = $\frac{\text{طول القفزة}}{\text{طول القفزة}} + 1$	دليل الحد الأول دليل الحد الأخير عدد الحدود = $1 + \frac{\text{الحد الأخير} - \text{الحد الأول}}{\text{القفزة}}$	
* نعوض مع مراعاة أنه في المتتالية الهندسية يكون:	* نعوض	
عدد الحدود $\left[\frac{1 - (q')^{\text{عدد الحدود}}}{1 - (q')} \right]$ المجموع = $\text{الحد الأول} \times$		
حيث: $q' = q^{\text{طول القفزة}}$		

التعريف الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متتاليةحسابية فيها: $r = 2$ و $u_0 = -2$

والمطلوب احسب كلاً من المجاميع الآتية:

- $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{50}$
- $S_2 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_n$
- $S_3 = u_4 + u_8 + u_{12} + \dots + u_{60}$
- $S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$

الحل:

1.

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{50}$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = 50 - 1 + 1 = 50$$

$$\text{الحد الأول} = u_1 = ?$$

$$u_1 - u_0 = (1 - 0)r$$

$$u_1 + 2 = 2$$

$$u_1 = 0$$

$$\text{الحد الأخير} = u_{50} = ?$$

$$u_{50} - u_0 = (50 - 0)r$$

$$u_{50} + 2 = 100$$

$$u_{50} = 98$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$= \frac{50}{2} (0 + 98)$$

$$= (25)(98)$$

$$\text{المجموع} = 2450$$

2.

$$S_2 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_n$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = n - 3 + 1 = n - 2$$

$$\text{الحد الأول} = u_3 = ?$$

$$u_3 - u_0 = (3 - 0)r$$

$$u_3 + 2 = 6$$

$$u_3 = 4$$

$$\text{الحد الأخير} = u_n = ?$$

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n + 2 = 2n$$

$$u_n = 2n - 2$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$= \frac{n - 2}{2} (4 + 2n - 2)$$

$$= \frac{n - 2}{2} (2n + 2)$$

$$= \frac{n - 2}{2} (2)(n + 1)$$

$$= (n - 2)(n + 1)$$

$$= n^2 + n - 2n - 2$$

$$\text{المجموع} = n^2 - n - 2$$

3.

$$S_3 = u_4 + u_8 + u_{12} + \dots + u_{60}$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = \frac{60 - 4}{4} + 1 = 15$$

$$\text{الحد الأول} = u_4 = ?$$

$$u_4 - u_0 = (4 - 0)r$$

$$u_4 + 2 = 8$$

$$u_4 = 6$$

$$S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول} = u_6 = ?$$

$$\frac{u_6}{u_0} = q^{6-0}$$

$$\frac{u_6}{1} = (2)^6 \rightarrow u_6 = 64$$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{3n - 6}{3} + 1 = n - 1$$

$$q' = (q^{\text{قديم}})^{\text{طول القفزة}} = (2)^3 = 8$$

$$q' = 8$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q'^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q'}$$

$$= 64 \left(\frac{1 - (8)^{n-1}}{1 - 8} \right) = 64 \left(\frac{1 - (8)^{n-1}}{-7} \right)$$

$$= -\frac{64}{7} (1 - (8)^{n-1}) = -\frac{64}{7} + \frac{(8)^n}{7}$$

$$\text{المجموع} = -\frac{64}{7} + \frac{(8)^{n+1}}{7}$$

التعريف الثالث:

لتكن لدينا المتتالية حسابية فيها:

$$S_n = u_3 + \dots + u_n \text{ و } r = 5 \text{ و } u_0 = 2$$

إذا علمت أن $S_n = 6456$ احسب n

$$S_n = u_3 + \dots + u_n$$

نحسب المجموع:

$$\text{المجموع} = \frac{\text{(عدد الحدود)} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = n - 3 + 1 = n - 2$$

$$\text{الحد الأول} = u_3 = ?$$

$$u_3 - u_0 = (3 - 0)r$$

$$u_3 - 2 = 15 \rightarrow u_3 = 17$$

$$\text{الحد الأخير} = u_n = ?$$

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - 2 = 5n$$

$$u_n = 5n + 2$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{(عدد الحدود)} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

$$= \frac{n - 2}{2} (17 + 5n + 2)$$

$$= \frac{n - 2}{2} (19 + 5n)$$

$$S_n = 6456 \text{ بما أننا:}$$

$$6456 = \frac{(n - 2)(19 + 5n)}{2}$$

$$12912 = (n - 2)(19 + 5n)$$

$$12912 = 19n + 5n^2 - 38 - 10n$$

$$12912 = 5n^2 + 9n - 38$$

$$5n^2 + 9n - 12950 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 259081$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{259081} = 509$$

$$\text{الحد الأول} = u_1 = ?$$

$$\frac{u_1}{u_0} = q^{1-0}$$

$$\frac{u_1}{1} = (2) \rightarrow u_1 = 2$$

$$\text{عدد الحدود} = 30 - 1 + 1 = 30$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

$$= 2 \left(\frac{1 - (2)^{30}}{1 - 2} \right) = 2 \left(\frac{1 - (2)^{30}}{-1} \right)$$

$$= -2(1 - (2)^{30})$$

$$\text{المجموع} = -2 + (2)^{31}$$

ر

$$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول} = u_1 = ?$$

$$\frac{u_1}{u_0} = q^{1-0}$$

$$\frac{u_1}{1} = (2) \rightarrow u_1 = 2$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

$$= 2 \left(\frac{1 - (2)^n}{1 - 2} \right) = 2 \left(\frac{1 - (2)^n}{-1} \right)$$

$$= -2(1 - (2)^n)$$

$$\text{المجموع} = -2 + (2)^{n+1}$$

ر

$$S_3 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول} = u_2 = ?$$

$$\frac{u_2}{u_0} = q^{2-0}$$

$$\frac{u_2}{1} = (2)^2 \rightarrow u_2 = 4$$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{20 - 2}{2} + 1 = 10$$

$$q' = (q^{\text{قديم}})^{\text{طول القفزة}} = (2)^2 = 4$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q'^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q'}$$

$$= 4 \left(\frac{1 - (4)^{10}}{1 - 4} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1 - (4)^{10}}{-3} \right)$$

$$= -\frac{4}{3} (1 - (4)^{10})$$

$$\text{المجموع} = -\frac{4}{3} + \frac{4^{11}}{3}$$

$$\text{الحد الأخير} = u_{60} = ?$$

$$u_{60} - u_0 = (60 - 0)r$$

$$u_{60} + 2 = 120$$

$$u_{60} = 118$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{(الحد الأخير} + \text{الحد الأول)} (\text{عدد الحدود})}{2}$$

$$= \frac{15}{2} (6 + 118)$$

$$= \frac{15}{2} (124) = (15)(62)$$

$$\text{المجموع} = 930$$

ر

$$S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{(الحد الأخير} + \text{الحد الأول)} (\text{عدد الحدود})}{2}$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = \frac{3n - 6}{3} + 1$$

$$= \frac{3(n - 2)}{3} + 1 = n - 1$$

$$\text{الحد الأول} = u_6 = ?$$

$$u_6 - u_0 = (6 - 0)r$$

$$u_6 + 2 = 12$$

$$u_6 = 10$$

$$\text{الحد الأخير} = u_{3n} = ?$$

$$u_{3n} - u_0 = (3n - 0)r$$

$$u_{3n} + 2 = 6n$$

$$u_{3n} = 6n - 2$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{\text{(الحد الأخير} + \text{الحد الأول)} (\text{عدد الحدود})}{2}$$

$$= \frac{n - 1}{2} (10 + 6n - 2)$$

$$= \frac{n - 1}{2} (6n + 8)$$

$$= \frac{n - 1}{2} (2)(3n + 4)$$

$$= (n - 1)(3n + 4)$$

$$= 3n^2 + 4n - 3n - 4$$

$$\text{المجموع} = 3n^2 + n - 4$$

التعريف الثاني:لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متتاليةهندسية أساسها 2 وفيها $u_0 = 1$

والمطلوب احسب كل من المجاميع الآتية:

- $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{30}$
- $S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$
- $S_3 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$
- $S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$

الحل:

ر

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{30}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

حيث:

الطالب الثاني:

كتابة u_n بدلالة n كتابة u_n بدلالة n نكتب v_n بدلالة n :كتابة v_n بدلالة n وفق:

$$v_n - v_0 = (n - 0)r$$

$$v_n - 2 = 2n$$

$$v_n = 2n + 2$$

كتابة u_n بدلالة n من علاقة التعايش نغزل u_n

$$v_n = \frac{2}{u_n - 1}$$

نقسم على (2):

$$\frac{v_n}{2} = \frac{1}{u_n - 1}$$

نقلب

$$\frac{2}{v_n} = u_n - 1$$

$$u_n = \frac{2}{v_n} + 1$$

نغزل u_n

$$u_n = \frac{2}{2n + 2} + 1$$

نعلم أن

$$v_n = 2n + 2$$

نعوض:

$$u_n = \frac{2}{2n + 2} + 1 = \frac{1}{n + 1} + 1$$

$$= \frac{1 + n + 1}{n + 1} = \frac{n + 2}{n + 1}$$

الطالب الثالث:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

نعلم أن المتتالية v حسابية

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$$

$$\text{الحد الأول} = v_0 = ?$$

$$v_0 = \frac{2}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

$$\text{الحد الأخير} = v_n = ?$$

$$v_n - v_0 = (n - 0)r$$

$$v_n - 2 = 2n$$

$$v_n = 2n + 2$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$= \frac{n + 1}{2} (2 + 2n + 2)$$

$$= \frac{n + 1}{2} (4 + 2n)$$

$$= \frac{n + 1}{2} (2)(2 + n)$$

$$= (n + 1)(2 + n)$$

$$= 2n + n^2 + 2 + n$$

$$\text{المجموع} = n^2 + 3n + 2$$

الطالب الرابع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

بما أن المتتالية v_n هندسية.

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{1 - q} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})$$

حيث:

$$\text{الحد الأول} = v_0 = -1$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{1 - q} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})$$

$$= (-1) \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$$

$$= (-1) \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) = -3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$\text{المجموع} = -3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

التعريف الخامس:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ولتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$v_n = \frac{2}{u_n - 1}$$

1. اثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية2. عبر عن u_n بدلالة n 3. عبر عن المجموع بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن v_n متتالية حسابية

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1} - 1} - \frac{2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2}{2u_n - 1 - 1} - \frac{2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2}{2u_n - 1 - u_n} - \frac{2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n}{u_n - 1} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2$$

إذا حسابية أساسها 2 $r = 2$

اللهم إنَّ خلصي بين يديك ، فيستره لي

وقرِّبه مِنِّي ، وقرِّ عيني به ..

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 509}{10} = \frac{-518}{10}$$

مرفوض لأن $n \in \mathbb{N}$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 509}{10} = \frac{500}{10} = 50$$

التعريف الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$:

$$v_n = u_n - 1$$

1. أثبت أن v_n هندسية.2. اكتب $(v_n)_{n \geq 0}$ بدلالة n 3. اكتب u_n بدلالة n 4. ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

عبر عن S_n بدلالة n .

الحل:

الطالب الأول:

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2}{3}$$

إذا المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

الطالب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n :بما أن v_n متتالية هندسية فإن:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

$$\text{حيث: } q = \frac{2}{3}$$

$$v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\rightarrow v_n = v_0 \cdot q^n$$

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

الطالب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n :المتتالية u_n لا نعلم نوعها:كتابة u_n بدلالة n من علاقة التعايش نجد:

$$v_n = u_n - 1$$

نغزل u_n وفق:

$$u_n = v_n + 1$$

نعلم من الطالب السابق أن: $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعوض وفق:

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

النقط الثاني: مجموع أرقام:

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
<p>* نطبق القانون:</p> $S = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$ <p>* نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أن:</p> <p>عدد الحدود = الحد - الأول + 1</p> <p>* نعوض:</p>	<p>* نحدد أساس المتتالية r</p> <p>* نضرب الطرفين بمقلوب الأساس</p> <p>* نطبق القانون:</p> $\frac{1}{r} \text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$ <p>* نعوض حيث:</p> $\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الحد} - \text{الأول} + 1}{r}$ <p>* نعزل S</p>

نكشآت:

- * نكشة اتركوني بحالي:
- وجود عدد مختلف عن المجموع فإننا:
- نتركه بحاله.
- نجمع الأرقام.
- نجمع ناتج الأرقام مع الرقم المختلف.
- * نكشة أخرجني:
- وجود إشارة سالب ضمن المجموع فإننا:
- نخرجها كعامل مشترك.
- نجمع الأرقام.

تعريف:

احسب كلاً من المجاميع الآتية:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 10$$

حسابية أساسها $\frac{1}{2}$
نضرب الطرفين بـ (2)

$$2S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20$$

$$2S = \frac{20}{2} (1 + 20)$$

$$2S = (10)(21)$$

$$2S = 210$$

$$S = 105$$

٢

$$S = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \dots + 10$$

حسابية أساسها $\frac{1}{12}$
نضرب الطرفين بـ (12)

$$12S = 1 + 2 + 3 + \dots + 120$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$\text{عدد الحدود} = 120 - 1 + 1 = 120$$

$$\text{الحد الأول} = 1$$

$$\text{الحد الأخير} = 120$$

$$12S = \frac{120}{2} (1 + 120)$$

$$= (60)(121)$$

$$12S = 7260$$

$$S = \frac{7260}{12}$$

$$S = 605$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
عدد الحدود = الأول

$$S = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{2}$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = -5 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S = -5 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

$$\text{المجموع} = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{3}$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

$$S = -5 + \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= -5 + \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= -5 + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = -5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{المجموع} = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{128}$$

$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^7}$$

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$S = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{4}$$

$$\text{عدد الحدود} = 7 - 2 + 1 = 6$$

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right)$$

$$S = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{63}{128}$$

٤

$$S = 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-7}$$

$$S = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^7}$$

هندسية أساسها $\frac{1}{10}$

$$\text{المجموع} = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$\text{عدد الحدود} = 7 - 0 + 1 = 8$$

$$\text{الحد الأول} = 1$$

$$q = \frac{1}{10}$$

$$\text{المجموع} = (1) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^8}{1 - \frac{1}{10}} \right)$$

$$\text{المجموع} = \frac{10}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^8 \right)$$

$$\text{المجموع} = \frac{10}{9} - \frac{10}{9} \left(\frac{1}{10}\right)^8$$

$$= 3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= 3 - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$$

$$= 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$q = \frac{1}{4}$$

$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{4}$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{المجموع} = 3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$S = 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \dots - \frac{1}{4^n}$$

$$S = 3 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right]$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

$$q = \frac{1}{4} \text{ أساسها}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

النمط الثالث: مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها غير معلوم:

وجود علاقة تعاضل

* بالاستفادة من علاقة التعاضل تحولها إلى متتالية نوعها معلوم

* نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم

ملاحظة:

- تذكر أن عدد الحدود يساوي عدد القطر

- مجموع العدد نفسه عدد من المرات يساوي جداء هذا العدد بعدد المرات

$$(\text{عدد المرات}) \times (\text{الرقم نفسه}) = \text{مجموع الرقم مع نفسه عدداً من المرات}$$

عدم وجود علاقة تعاضل

نستخدم التعويض ثم الإصلاح.

$$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \dots + y_n - 3$$

$$= \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_n}{S_n} - 3(1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= S_n - 3(n + 1)$$

$$= 9 - 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 3n - 3$$

$$= 6 - 3n - 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الثاني:

ليكن u_n عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن:

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n \geq 0}$

الحل:

الطالب الأول:

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

نوجد المقامات:

$$u_n = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2an + a + 2bn - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2an + 2bn + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{(2a + 2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

كتابة x_n بدلالة n :

المتتالية x_n لا نعلم نوعها.

نعزل x_n من علاقة التعاضل

$$y_n = x_n + 3$$

$$x_n = y_n - 3$$

نعلم أن:

$$y_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نعوض:

$$x_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

الطالب الثالث:

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

نعلم أن y_n مجموع حدود من متتالية

هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{المجموع} = \frac{\text{الحد الأول} (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q}$$

حيث:

$$q = \frac{1}{3}$$

$$\text{الحد الأول} = y_0 = ?$$

$$y_0 = x_0 + 3 \rightarrow y_0 = 3 + 3 = 6$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = 6 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = 6 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right]$$

$$= 6 \left(\frac{3}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 9 - 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الأول:

تأمل المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$$y_n = x_n + 3$$

أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية.

احسب y_n ثم x_n بدلالة n .

نضع:

$$S_n = y_0 + \dots + y_n$$

$$S'_n = x_0 + \dots + x_n$$

1. احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n

2. احسب نهاية كلا من $(S_n)_{n \geq 0}$ و $(S'_n)_{n \geq 0}$

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن y_n هندسية:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1} + 3}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(x_n + 3)}{x_n + 3} = \frac{1}{3}$$

إذاً هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

الطالب الثاني:

كتابة y_n بدلالة n :

بما أن y_n هندسية إذاً:

$$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{y_n}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$y_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بالمطابقة نجد أن:

$$2a + 2b = 0$$

$$a + b = 0 \dots (1)$$

$$a - b = 1 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أن:

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

نعوض في (2):

$$\frac{1}{2} - b = 1$$

$$b = \frac{1}{2} - 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

ومن:

$$u_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

الطالب الثاني:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

لدينا من الطالب السابق أن:

$$u_n = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$u_0 = \frac{1}{4(0)-2} - \frac{1}{4(0)+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{4(1)-2} - \frac{1}{4(1)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{4(2)-2} - \frac{1}{4(2)+2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

نعوض في S_n وفق:

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

إيجاد نهاية S_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$$

سادساً: العلاقة بين ثلاثة حدود متوالية من متتالية:

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن: $a \cdot c = b^2$ تعميم: الثاني = الثالث \times الأول	* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$ تعميم: الثاني = 2(الثالث + الأول)
* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإن: $b = a \cdot q$ $c = a \cdot q^2$	* a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r فإن: $b = a + r$ $c = a + 2r$

أنماط التمارين:

النمط الأول:

المعطى:

هو علاقتين تحويان a و b و c لمتتالية

نوعها معلوم

المطلوب:

تعيين قيمة a و b و c

الخطوات:

* حساب b (وفقاً لنوع المتتالية)

* نعوض قيمة b في العلاقتين فنحصل

على جملة معادلتين بجهولين ولحل

هذه الجملة نستخدم (الحذف بالجمع أو

الحذف بالتعويض) وبذلك نكون قد حصلنا

على المطلوب

ملاحظة:

دائماً عند وجود شرط للحل يجب وضع مقبول

ومرفوض ونميز:

* الشرط واضح وصريح "انتهى"

* الشرط يتبع أسلوب الحكي إلك يا جارة

واسمعي يا كثة:

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية متزايدة تماماً نفهم أن:

$$a < b < c$$

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية متناقصة تماماً نفهم أن:

$$a > b > c$$

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية ثابتة نفهم أن:

$$a = b = c$$

التعريف الأول:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية حسابية بحيث $a > c$ وتحقق

العلاقتين:

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a \cdot b^2 \cdot c = -48 \end{cases}$$

1. احسب a و b و c

2. استنتج r

الحل:

الطالب الأول:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية حسابية فإن:

$$a + c = 2b$$

نعوض في (1):

$$2b + b = 6$$

$$3b = 6 \rightarrow b = 2$$

نعوض قيمة b في كلا من المعادلتين (1) و (2)

$$a + c = 4 \dots (1)$$

$$a \cdot c = -12 \dots (2)$$

من (1) نجد أن:

$$a = 4 - c \dots (*)$$

نعوض (*) في (2) وفق:

$$(4 - c)c = -12$$

$$4c - c^2 = -12$$

$$c^2 - 4c - 12 = 0$$

$$(c - 6)(c + 2) = 0$$

$$\text{إما } c = 6$$

نعوض في (*):

$$a = -2 \rightarrow \text{مرفوض}$$

$$c = -2 \text{ أو}$$

نعوض في (*):

$$a = 6 \rightarrow \text{مقبول}$$

ومن هنا الحل المقبول:

$$a = 6, b = 2, c = -2$$

الطالب الثاني:

حساب قيمة r :

$$b = a + r$$

$$r = b - a$$

$$r = 2 - 6$$

$$r = -4$$

التعريف الثاني:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية

هندسية بحيث $a > c$ تحقق:

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = -27 \\ 3a + 2b + c = -18 \end{cases}$$

1. احسب a و b و c

2. استنتج q

الحل:

الطالب الأول:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية هندسية فإن:

$$a \cdot c = b^2$$

نعوض في (1):

$$b^2 \cdot b = -27$$

$$b^3 = -27 \rightarrow b = -3$$

نعوض قيمة b في كلا من المعادلتين (1) و (2)

$$a \cdot c = 9 \dots (1)$$

$$3a + c = -12 \dots (2)$$

من (2) نجد أن:

$$c = -12 - 3a \dots (*)$$

نعوض (*) في (1) وفق:

$$a(-12 - 3a) = 9$$

$$-12a - 3a^2 = 9$$

$$3a^2 + 12a + 9 = 0$$

$$3(a^2 + 4a + 3) = 0$$

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$

$$(a + 3)(a + 1) = 0$$

إما $a = -3$

نعوض في (*):

$$c = -3 \rightarrow$$
 مرفوض

أو $a = -1$

نعوض في (*):

مقبول $c = -9 \rightarrow$

ومن هنا الحل المقبول:

$$a = -1, b = -3, c = -9$$

الطالب الثاني:

حساب قيمة q :

$$b = a \cdot q$$

$$q = \frac{b}{a} \rightarrow q = \frac{-3}{-1} = 3$$

التعريف الثالث:

لدينا a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماما حيث أنها تحقق:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

- احسب كلا من a و b و c
- استنتج r أساس المتتالية u_n
- اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_0 = a$
- احسب المجموع:

$$S = u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{63}$$

الحل:

الطالب الأول:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$a + c = 2b$$

نعوض في (2):

$$2b + b = 6$$

$$3b = 6 \rightarrow b = 2$$

نعوض قيمة b في كلا من المعادلتين (1) و (2)

$$a^2 + c^2 = 10 \dots (1)$$

$$a + c = 4 \dots (2)$$

من (2) نجد أن:

$$a = 4 - c \dots (*)$$

نعوض (*) في (1) وفق:

$$(4 - c)^2 + c^2 = 10$$

$$16 - 8c + c^2 + c^2 = 10$$

$$2c^2 - 8c + 6 = 0$$

$$2(c^2 - 4c + 3) = 0$$

$$c^2 - 4c + 3 = 0$$

$$(c - 3)(c - 1) = 0$$

إما $c = 1$

نعوض في (*):

مرفوض $a = 3 \rightarrow$

أو $c = 3$

نعوض في (*):

مقبول $a = 1 \rightarrow$

ومن هنا الحل المقبول:

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

الطالب الثاني:

$$b = a + r$$

$$r = b - a$$

$$r = 2 - 1$$

$$r = 1$$

الطالب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - 1 = n(1)$$

$$u_n = n + 1$$

الطالب الرابع:

$$S = u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{63}$$

نفرض متتالية جديدة حيث:

$$v = u_{3n}$$

$$S = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{21}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود} \cdot (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = 21 - 1 + 1 = 21$$

$$\text{الحد الأول} = v_1 = ?$$

$$v_1 = u_3 \rightarrow u_3 - u_0 = (3 - 0)r$$

$$u_3 - 1 = 3(1)$$

$$u_3 = 4$$

$$\text{الحد الأخير} = v_{21} = ?$$

$$v_{21} = u_{63} \rightarrow u_{63} - u_0 = (63 - 0)r$$

$$u_{63} - 1 = (63)(1)$$

$$u_{63} = 64$$

$$\text{المجموع} = \frac{21}{2} (4 + 64)$$

$$= \frac{21}{2} (68) = 21(34)$$

$$\text{المجموع} = 714$$

التعريف الرابع:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث $a > c$ تحقق:

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{cases}$$

- احسب a و b و c
- استنتج q أساس المتتالية u_n
- اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_1 = 6$
- احسب المجموع:

$$S = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{63}$$

الحل:

الطالب الأول:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$$a \cdot c = b^2$$

نعوض في (1):

$$b^2 \cdot b = 216$$

$$b^3 = 216 \rightarrow b = 6$$

نعوض قيمة b في كلا من المعادلتين (1) و (2):

$$a + c = 20 \dots (1)$$

$$a \cdot c = 36 \dots (2)$$

من (1) نجد أن:

$$a = 20 - c \dots (*)$$

نعوض (*) في (2) وفق:

$$(20 - c)c = 36$$

$$20c - c^2 = 36$$

$$c^2 - 20c + 36 = 0$$

$$(c - 18)(c - 2) = 0$$

إما $c = 18$

نعوض في (*):

مرفوض $a = 2 \rightarrow$

أو $c = 2$

نعوض في (*):

مقبول $a = 18 \rightarrow$

ومن هنا الحل المقبول:

$$a = 18, b = 6, c = 2$$

الطالب الثاني:

$$b = a \cdot q$$

$$q = \frac{b}{a} \rightarrow q = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

الطالب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n :

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$$

$$\frac{u_n}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$u_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

الطالب الرابع:

$$S = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{63}$$

نفرض متتالية جديدة v حيث:

$$v = u_{3n}$$

$$S = v_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_{21}$$

$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود} \cdot (1 - q^{\text{عدد الحدود}})}{1 - q'}$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = 21 - 2 + 1 = 20$$

$$\text{الحد الأول} = v_2 = ?$$

$$v_2 = u_6 \rightarrow \frac{u_6}{u_1} = q^{6-1}$$

$$\frac{u_6}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$u_6 = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$q' = \text{طول القفزة} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{27}} \right]$$

$$= 6 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{26}{27} \left(1 - \left(\frac{1}{27}\right)^{20}\right)$$

ذلك الحلم الذي بات في فُحَيْتِكَ لسنوات

سيأتي يوم ويصبح حقيقة ..



التمرين الخامس:

لتكن (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وتحقق:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$$

١. عين الحدود v_1 و v_2 و v_3 والمتتالية وأساسها.
٢. احسب الحد العام v_n بدلالة n .
٣. عبر بدلالة n عن المجموع:
٤. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = -21$ يكون

الحل:

الطالب الأول:

تعيين v_1 و v_2 و v_3 :

بما أن v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$v_1 + v_3 = 2v_2$$

وبما أن:

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4}$$

$$v_1 + v_3 + v_2 = 8$$

$$2v_2 + v_2 = \frac{3}{4}$$

$$3v_2 = \frac{3}{4} \rightarrow v_2 = \frac{1}{4}$$

إذاً:

$$\begin{cases} v_1 + v_3 = \frac{1}{2} \dots (1) \\ v_1 - v_3 = 5 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2v_1 = \frac{11}{2} \rightarrow v_1 = \frac{11}{4}$$

نعوض في (1):

$$\frac{11}{4} + v_3 = \frac{1}{2} \rightarrow v_3 = -\frac{9}{4}$$

وبالتالي:

$$v_1 = \frac{11}{4}, v_2 = \frac{1}{4}, v_3 = -\frac{9}{4}$$

أساس v :

حد يسبقه - حد = الأساس

$$r = v_2 - v_1$$

$$r = \frac{1}{4} - \frac{11}{4}$$

$$r = -\frac{5}{2}$$

الطالب الثاني:

الحد العام:

$$v_n - v_1 = (n-1)r$$

$$v_n - \frac{11}{4} = (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$v_n - \frac{11}{4} = -\frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_n = -\frac{5}{2}n + \frac{21}{4}$$

الطالب الثالث:

حساب S_n :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$S_n = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{الحد الأول} = v_1 = \frac{11}{4}$$

$$\text{الحد الأخير} = v_n = -\frac{5}{2}n + \frac{21}{4}$$

ومنه:

$$S_n = \frac{n}{2} \left(\frac{11}{4} - \frac{5}{2}n + \frac{21}{4} \right)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \left(8 - \frac{5}{2}n \right)$$

$$S_n = 4n - \frac{5}{4}n^2$$

الطالب الرابع:

تعيين n علماً أن $S_n = -21$

لدينا:

$$S_n = -21$$

$$4n - \frac{5}{4}n^2 = -21$$

$$\frac{5}{4}n^2 - 4n - 21 = 0$$

$$a = \frac{5}{4}, b = -4, c = -21$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\left(\frac{5}{4}\right)(-21)$$

$$\Delta = 16 + 105$$

$$\Delta = 121 > 0$$

ومنه للمعادلة حلان

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 11}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = -\frac{7}{5}$$

$$n_1 = -\frac{14}{5} \notin \mathbb{N} \rightarrow \text{مرفوض}$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 11}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{15}{5}$$

$$n_2 = 6 \in \mathbb{N} \rightarrow \text{مقبول}$$

النقط الثاني:

المعطى:

هو معلومات عن متتالية حسابية وهندسية

المطلوب:

تعيين q أو تعيين r

الخطوات:

* نضع العلاقات المناسبة

* بالإصلاح والتعويض المناسب نحصل على المطلوب

ملاحظة:

نضع الترجمات المناسبة "نعتمد على نص السؤال" نميز:

* عند إيجاد q نأخذ العلاقات التي تحوي q

ونعوض في العلاقة التي لا تحوي q .

* عند إيجاد r نأخذ العلاقات التي تحوي r

ونعوض في العلاقة التي لا تحوي r .

التمرين الأول:

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وفيها a و b و c ثلاث حدود متعاقبة تحقق العلاقة:

$$b^2 - 4 - a.c = 0$$

والمطلوب احسب r

نعلم أن:

$$b = a + r$$

$$c = a + 2r$$

نعوض:

$$(a+r)^2 - 4 - a(a+2r) = 0$$

$$a^2 + 2ar + r^2 - 4 - a^2 - 2ar = 0$$

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2 \text{ إما}$$

$$r = -2 \text{ أو}$$

التمرين الثاني:

لدينا a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية هندسية أثبت أن

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{l_1} = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{l_2}$$

$$l_2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

ننشر:

$$= a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2$$

$$= a^2 + ac - b^2 + ac + c^2$$

$$= a^2 - b^2 + c + 2ac$$

ليكن لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة

من متتالية هندسية إذاً: $a.c = b^2$

نعوض:

$$= a^2 - b^2 + c^2 + 2b^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 = l_2$$

محققة.

التمرين الثالث:

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$ ونعلم أن a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q كما أن $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من

متتالية حسابية، احسب q

الحل:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإن:

$$b = a.q, c = a.q^2$$

بما أن $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$3a + c = 2(2b)$$

$$3a + c = 4b$$

نعوض:

$$3a + a.q^2 = 4aq$$

$$aq^2 - 4aq + 3a = 0$$

$$a(q^2 - 4q + 3) = 0$$

$$\text{مرفوض} \rightarrow a = 0 \text{ إما}$$

$$q^2 - 4q + 3 = 0 \text{ أو}$$

$$(q-3)(q-1) = 0$$

$$q = 3 \text{ أو } q = 1 \text{ إما}$$

التعريف الرابع:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q ونعلم أن $4a$ و $5b$ و $4c$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية احسب q الحل: بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإن: $b = a \cdot q$, $c = aq^2$

بما أن $4a$ و $5b$ و $4c$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$4a + 4c = 2(5b)$$

$$4a + 4c = 10b$$

نعوض:

$$4a + 4aq^2 = 10aq$$

$$4aq^2 - 10aq + 4a = 0$$

$$a(4q^2 - 10q + 4) = 0$$

مرفوض $a = 0 \rightarrow$ إما

$$4q^2 - 10q + 4 = 0$$

$$a = 4 , b = -10 , c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= (-10)^2 - 4(4)(4)$$

$$= 100 - 64$$

$$= 36 > 0$$

$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 6}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + 6}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

الإثبات بالتحريج:

نستخدم الإثبات بالتحريج لإثبات صحة خاصة ويتم ذلك وفق:

- * ترميز الخاصة
- * نثبت صحة الخاصة من أجل القيمة الابتدائية أي نثبت صحة $E(n_0)$
- * نفرض صحة الخاصة $E(n)$
- * نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

يتم تحديد القيمة الابتدائية بالاعتماد على نص السؤال، حيث:

القيمة الابتدائية	نص السؤال
$n_0 = 1$	أيًا كان $n > 0$
$n_0 = 0$	أيًا كان $n \geq 0$
$n_0 = 6$	أيًا كان $n > 5$
$n_0 = 0$	أيًا كان العدد الطبيعي
$n_0 = 1$	أيًا كان العدد الطبيعي الموجب تمامًا
$n_0 = 0$	أيًا كان $n \in \mathbb{N}$
$n_0 = 1$	أيًا كان $n \in \mathbb{N}^*$
$n_0 = 1$	أيًا كان n العدد الطبيعي غير المعدوم

الأخطأ:

النمط الأول: المساواة:

لإثبات صحة $E(n+1)$ في نمط المساواة فإننا: نطلق من العلاقة الهدف وتحديداً من l_1 نصل ونستفيد من الفرض (*) من أجل الوصول إلى الطرف الثاني l_2 من علاقة الهدف.

التعريف الأول:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{l_1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = l_2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$l_1 = 1^3 = 1$$

$$l_2 = \frac{(1)^2(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3}{l_1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

نطلق من l_1 وفق:

$$l_1 = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

نؤحد المقامات:

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

نخرج $(n+1)^2$ عاملاً مشتركاً:

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محقة}$$

التعريف الثاني:

نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار:

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

1. احسب s_1 و s_2 و s_3 و s_n

2. ثم عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n و n

3. أثبت بالتحريج في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

$$s_1 = 1^2 = 1$$

$$s_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$s_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

الطالب الثاني:

$$s_{n+1} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2}{s_n}$$

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$$

الطالب الثالث:

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{s_n}{l_1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = l_2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$l_1 = s_1 = 1$$

$$l_2 = \frac{(1)(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{s_{n+1}}{l_1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = l_2$$

$$l_1 = s_{n+1}$$

$$= \frac{s_n}{s_n} + (n+1)^2$$

من علاقة (*)

$$= 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} = l_2$$

$$l_1 = l_2$$

فالقضية محققة.

النمط الثاني: المضاعفات

تمهيد:

تعريف:

المضاعف للعدد 3 هو ناتج جداء عدد طبيعي k للعدد 3 رمزه $3k$

مجموعة مهارات:

* ناتج جداء عدد طبيعي بمضاعف العدد 3 هو مضاعف للعدد 3

هو مضاعف للعدد 3

* ناتج مجموع مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3

هو مضاعف للعدد 3

* ناتج جداء مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3

هو مضاعف للعدد 3

* ناتج طرح مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 بشرط الكبير ناقص الصغير

العدد 3 بـ شرط الكبير ناقص الصغير

* العدد صفر مضاعف لجميع الأعداد

ملاحظات: في نمط المضاعفات

للإثبات صحة $E(n+1)$ فإننا:

* ننتقل من العلاقة الهدف

* نستفيد من (*)

* نصلح

* ناقش

تمرين: أثبت بالتدريج صحة كلا من الخواص الآتية

أياً كان العدد الطبيعي n :

1. $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

2. $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3

3. $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

4. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

الحل:

1.

$4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

نرمز الخاصة $E(n)$:

$$E(n) = 4^n + 5$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$E(0) = 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

6 مضاعف للعدد 3 ومنه محققة.

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$E(n) = 4^n + 5$$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق العلاقة:

$$4^n + 5 = 3k$$

$$4^n = 3k - 5 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي

يجب إثبات أن:

$$E(n+1) = 4^{n+1} + 5$$

$$= 4 \cdot 4^n + 5$$

$$\text{من (*)} = 4(3k - 5) + 5$$

$$= 12k - 20 + 5$$

$$= 12k - 15 = 3(4k - 5)$$

إذاً $4k - 5$ مضاعف للعدد 3

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

نخرج عامل مشترك $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = l_2$$

ومنه القضية محققة.

التعريف الرابع:

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ثم

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_0 = 2 \cos \theta \end{cases}$$

في حالة $n \in \mathbb{N}$

1. احسب u_1 و u_2

2. أثبت بالتدريج أن:

$$u_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$$

الحل:

الطالب الأول:

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0}$$

$$= \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1}$$

$$= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{4}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{4}} = 2 \cos \frac{\theta}{4}$$

الطالب الثاني:

نرمز الخاصة:

$$E(n): \underbrace{u_n}_{l_1} = 2 \cos \underbrace{\frac{\theta}{2^n}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$l_1 = u_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$l_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2^1} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n}\right) \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي

يجب إثبات أن:

$$\underbrace{u_{n+1}}_{l_1} = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$l_1 = u_{n+1} = \sqrt{2 + \underbrace{u_n}_{(*)}}$$

$$= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2 \cdot 2^n}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

نوجد المقامات:

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

نخرج عامل مشترك $(n+1)$:

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \left(2 \left(n + \frac{3}{2}\right) (n+2)\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

$$= \frac{6}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

التعريف الثالث:

لتكن لدينا S_n بالشكل:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

أثبت بالتدريج أيما كان العدد الطبيعي n أن:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

نرمز الخاصة:

$$E(n): \underbrace{S_n}_{l_1} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$l_1 = S_0 = 1$$

$$l_2 = \frac{1}{2} (3 - 1) = \frac{2}{2} = 1$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right) \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي

يجب إثبات أن:

$$\underbrace{S_{n+1}}_{l_1} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$l_1 = S_{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \underbrace{S_n}_{(*)} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{3 \cdot 3^n}$$

نوجد المقامات

$$= \frac{3}{2} - \frac{3+2}{6 \cdot 3^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3^n}$$

٢

4ⁿ + 2 مضاعف العدد 3

نرمز الخاصة $E(n): 4^n + 2$ مضاعف العدد 3
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=0)$:
 $E(0): 4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$
 مضاعف العدد 3 ومنه محققة.
 نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:
 $E(n): 4^n + 2$
 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:
 $4^n + 2 = 3k$
 $4^n = 3k - 2 \dots (*)$
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:
 $E(n+1): 4^{n+1} + 2$
 $= 4 \cdot 4^n + 2$
 $= 4(3k - 2) + 2$
 $= 12k - 8 + 2$
 $= 12k - 6$
 $= 3(4k - 2)$
 إذ $4^n + 2$ مضاعف العدد 3

٣

2³ⁿ - 1 مضاعف العدد 7

نرمز الخاصة $E(n): 2^{3n} - 1$ مضاعف العدد 7
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=0)$:
 $E(0): 2^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$
 مضاعف العدد 7 ومنه محققة.
 نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:
 $E(n): 2^{3n} - 1$
 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:
 $2^{3n} - 1 = 7k$
 $2^{3n} = 7k + 1 \dots (*)$
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:
 $E(n+1): 2^{3(n+1)} - 1$
 $= 2^3 \cdot 2^{3n} - 1$
 $= 8(7k + 1) - 1$
 $= 56k + 8 - 1$
 $= 56k + 7$
 $= 7(8k + 1)$
 إذ $2^{3n} - 1$ مضاعف العدد 7

٤

3²ⁿ⁺¹ + 2ⁿ⁺² مضاعف العدد 7

نرمز الخاصة $E(n): 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف العدد 7
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=0)$:
 $E(0): 3 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
 مضاعف العدد 7 ومنه محققة.
 نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:
 $E(n): 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:
 $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$
 $2^{n+2} = 7k - 3^{2n+1} \dots (*)$
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:
 $E(n+1): 3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2}$
 $= 3^{2n+3} + 2^{n+2} \cdot 2$
 $= 3^{2n+3} + 2 \cdot 2^{n+2}$
 $= 3^{2n+3} + (7k - 3^{2n+1}) \cdot 2$
 $= 3^{2n+3} + 14k - 2 \cdot 3^{2n+1}$
 $= 14k + 3^2 \cdot 3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{2n+1}$
 $= 14k + 9 \cdot 3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{2n+1}$
 $= 14k + 7 \cdot 3^{2n+1}$
 $= 7(2k + 3^{2n+1})$
 إذ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف العدد 7

التعمير الثاني:

أثبت بالتدرج صحة الخاصة الآتية:

$n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على 3

حيث $n \geq 1$

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$E(n): n^3 - 4n + 6$

يقبل القسمة على 3

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$:

$E(1): 1 - 4 + 6 = 3$

يقبل القسمة على 3

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$E(n): n^3 - 4n + 6$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$n^3 - 4n + 6 = 3k$

$n^3 = 3k + 4n - 6 \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$(n+1)^3 - 4(n+1) + 6$
 $= \underbrace{n^3}_{(*)} + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$

$= 3k + 4n - 6 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$

$= 3k + 3n^2 + 3n - 3$

$= 3(k + n^2 + n - 1)$

إذ $n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على العدد (3)

النقط الثالث: المتراجحات

للإثبات صحة $E(n+1)$ فإننا:

* نتطرق من العلاقة الفرض (*)

* نصلح بحيث نأخذ الأوامر من العلاقة الهدف

وصولاً إلى العلاقة الهدف

ملاحظات مهمة جداً:

* إن إضافة أو طرح عدد إلى طرفي المتراجحة

لا يغير من جهة التراجح

* إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد

موجب لا يغير من جهة المتراجحة

* إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد

سالب يغير من جهة التراجح

* القلب يغير جهة التراجح

* تكبير الكبير لا يغير من جهة المتراجحة

ويتم وفق: إما إضافة مقدار موجب أو إهمال

مقدار سالب أو استبدال مقدار بمقدار أكبر منه

* تصغير الصغير لا يغير من جهة المتراجحة

ويتم وفق: إما إضافة مقدار سالب أو إهمال مقدار

موجب أو استبدال مقدار بمقدار أصغر منه

ملاحظة:

عند وجود مشكلة في أحد الأطراف فإننا نميز

المشكلة في:

① الطرف الكبير:

نستخدم تكبير الكبير وفق:

* إضافة مقدار موجب.

* إهمال مقدار سالب.

* استبدال مقدار بمقدار أكبر منه.

② الطرف الصغير:

نستخدم تصغير الصغير وفق:

* إضافة مقدار سالب.

* إهمال مقدار موجب.

* استبدال مقدار بمقدار أصغر منه.

وعند فشل المحاولات السابقة جميعها فنكّر

بالإضافة والطرح بنفس الطرف.

أصيحة:

عند وجود مطابقة ينصح بفكها.

التعمير الأول:

ليكن $x > 1$ في حالة عدد طبيعي n ونرمز

$E(n)$ إلى المتراجحة:

$(1+x)^n \geq 1+nx$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محققة.

أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نرمز الخاصة:

$E(n): (1+x)^n \geq 1+nx$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$(1+x)^0 \geq 1+0x \rightarrow 1 \geq 1$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$(1+x)^n \geq 1+nx \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

الإثبات:

لدينا من الفرض الذي يدعى (*):

$(1+x)^n \geq 1+nx$

نضرب الطرفين ب $1+x > 0$

$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$

المشكلة في الصغير لذلك نستخدم تصغير

الصغير ويتم ذلك "إهمال موجب - إضافة

سالب (للطرفين) - استبدال مقدار بمقدار

أصغر منه"

بما أن $nx^2 > 0$ فإن:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

فالقضية محققة.

التعمير الثاني:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإن:

$n! \geq 2^{n-1}$

الحل:

نرمز الخاصة:

$E(n): n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$1! \geq 2^0 \rightarrow 1 \geq 1$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$n! \geq 2^{n-1} \dots (*)$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن

$(n+1)! \geq 2^n$

لدينا من الفرض:

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$

نستخدم تصغير الصغير $(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$

نعلم أن: $2 \leq n+1 \leq 2n$

ومنه:

$(n+1)! \geq 2 \cdot 2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2^n$

محققة أياً كان $n \geq 1$

التعريف الثالث:

أثبت أنه أيًا كان $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} \rightarrow 1 \leq 1 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

لدينا من الفرض:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

نستخدم تكبير الكبر

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$n \geq 1 \text{ محقة أيًا كان } n$$

التعريف الرابع:

أثبت بالتحريج أن $n \leq 2^n$

أيًا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): n \leq 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1 \leq 2^1 \rightarrow 1 \leq 2$$

محقة

نفرض صحة $E(n)$:

$$n \leq 2^n \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$n \leq 2^n$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$2n \leq 2 \cdot 2^n$$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

نعلم أن:

$$2 \leq n+1 \leq 2n$$

نستبدل:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

محقة أيًا كان العدد الطبيعي n

التعريف الخامس:

أثبت أنه أيًا كان $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

الحل:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1 \leq 2 - 1 \rightarrow 1 \leq 1$$

محقة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نضيف $\frac{1}{(n+1)^2}$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

محقة أيًا كان $n \geq 1$

التعريف السادس:

أولًا:

أثبت أيًا كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ أن:

$$3 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$$

ثانيًا:

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية:

$$3n^2 \geq 2n^2 + 5n^2$$

1. ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده

2. أثبت أن $E(n)$ صحيحة أيًا كان العدد الطبيعي $n \geq 5$ الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

الحل:

أولًا:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 3n^2 \geq (n+1)^2$$

نثبت صحة الخاصة $E(2)$:

$$12 \geq 9 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

$$3n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

الإثبات: لدينا من (*):

$$3n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

نضيف $(6n+3)$:

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 3$$

$$3n^2 + 6n + 3 > n^2 + 8n + 4$$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4 + 4n$$

بما أن $4n > 0$ فإن "إهمال موجب"

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

محقة أيًا كان العدد الطبيعي n

ثانيًا:

الطالب الأول:

$$E(1): 3 \geq 2 + 5$$

$$3 \geq 7 \rightarrow \text{غير محقة}$$

$$E(2): 3^2 \geq 2^2 + 5(2)^2$$

$$9 \geq 24 \rightarrow \text{غير محقة}$$

$$E(3): 3^3 \geq 2^3 + 5(3)^2$$

$$27 \geq 53 \rightarrow \text{غير محقة}$$

$$E(4): 3^4 \geq 2^4 + 5(4)^2$$

$$81 \geq 96 \rightarrow \text{غير محقة}$$

$$E(5): 3^5 \geq 2^5 + 5(5)^2$$

$$243 \geq 157 \rightarrow \text{محقة}$$

الطالب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نثبت صحة الخاصة $E(5)$:

$$3^5 \geq 2^5 + 5(5)^2$$

$$243 \geq 157 \text{ محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3^n \geq 2^n + 5n^2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$$

الإثبات:

لدينا من الفرض (*):

$$3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نضرب بـ (3):

$$3 \cdot 3^n \geq 3 \cdot 2^n + 3(5n^2)$$

$$3^{n+1} \geq 3 \cdot 2^n + 3(5n^2)$$

لدينا العتراجدة العتبتة مسبقًا:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 3 \cdot 2^n + 5(n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 3 \cdot 2^n + 5n^2 + 10n + 5$$

$$3^{n+1} \geq 2 \cdot 2^n + 5n^2 + 10n + 5$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$$

محقة أيًا كان العدد الطبيعي $n \geq 5$

التعريف السابع:

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية:

$$\ll 3^n \geq (n+2)^2 \gg$$

أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

أثبت بالتحريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند

كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.

$$E(0): 3^0 \geq (0+2)^2$$

$$1 \geq 4 \rightarrow \text{غير محققة}$$

$$E(1): 3^1 \geq (1+2)^2$$

$$3 \geq 9 \rightarrow \text{غير محققة}$$

$$E(3): 3^3 \geq (3+2)^2$$

$$27 \geq 25 \rightarrow \text{محققة}$$

$$E(4): 3^4 \geq (4+2)^2$$

$$81 \geq 36 \rightarrow \text{محققة}$$

الطالب الثاني:
لتكن الخاصة:

$$E(n): 3^n \geq (n+2)^2$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(3)$:

$$3^3 \geq (3+2)^2$$

$$9 \geq 25 \text{ محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3^n \geq (n+2)^2$$

$$3^{n+1} \geq 3n^2 + 4n + 4 \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

$$3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9$$

الإثبات:

لدينا من الفرض (*):

$$3^n \geq n^2 + 4n + 4$$

نضرب بـ (3):

$$3 \cdot 3^n \geq 3(n^2 + 4n + 4)$$

$$3^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$$

$$3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$$

نعلم أن:

$$2n^2 + 6n + 3 > 0$$

$$3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9$$

$$n \geq 3 \text{ محققة أي كان العدد الطبيعي}$$

التمط الرابع:

إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدريجي

من أجل إثبات $E(n+1)$ نميز ما يلي:

الحالة الأولى:

عدم وجود طلب اطراد تابع قبل طلب إثبات المحدودية الخطوات:

نطبق مرحلتين:

* مرحلة الإصلاح:

باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة

إقليدية أو الإتمام إلى مربع كامل ...)

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n واحدة

* مرحلة الحصر:

حيث نتطرق من العلاقة الفرض (*) ونبدأ رحلة تأليف u_{n+1} ثم نصلح وصولاً للمهدف.

التعريف الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أي كان العدد الطبيعي

$$E(n): 0 \leq u_0 \leq 2$$

ثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$0 \leq u_0 = 1 \leq 2$$

محققة

نفترض صحة الخاصة $E(n)$

$$0 \leq u_n \leq 2 \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

الإثبات: مرحلة الإصلاح: لا داعي لها

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض (*):

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف (2):

$$2 \leq 2 + u_n \leq 4$$

نجز:

$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$$

$$0 \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$$

محققة إذا الخاصة صحيحة

أي كان العدد الطبيعي n

التعريف الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$ أي كان $n \in \mathbb{N}$

الحل:

لتكن الخاصة

$$E(n): 1 \leq u_n \leq 2$$

ثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

نفترض صحة الخاصة من أجل $E(n)$

$$1 \leq u_n < 2 \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 - 1 + 2$$

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

نضيف (-1):

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

نربع:

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$$

نضيف (1):

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

محققة.

إذا الخاصة $E(n)$ صحيحة أي كان $n \in \mathbb{N}$

التعريف الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

أثبت أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ أي كان العدد

الطبيعي n

الحل:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

ثبت صحة $E(0)$

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \dots (*)$$

ثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2u_n + 6}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من (*):

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

نضرب بـ (2):

$$1 \leq 2u_n \leq 2$$

نضيف (6):

$$7 \leq 2u_n + 6 \leq 8$$

نقلب:

$$\frac{1}{7} \geq \frac{1}{2u_n + 6} \geq \frac{1}{8}$$

نضرب بـ (-7):

$$-1 \leq \frac{-7}{2u_n + 6} \leq -\frac{7}{8}$$

نضيف $(\frac{3}{2})$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{7}{2u_n + 6} \leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

محققة.

نحن لأحلامنا وهي لنا ..

ولو شاء ألف طريق أن يمتعنا 🤔❤️

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

1. تحقق أن $v_n > 0$ أيأ كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية
3. استنتج عبارة v_n بدلالة n

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): v_n > 0$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$1 > 0 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$v_n > 0 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$$v_{n+1} > 0$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{v_n + 1}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من (*):

$$v_n > 0$$

نضيف (1):

$$v_n + 1 > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{v_n + 1} < 1$$

نضرب ب (-1) :

$$-\frac{1}{v_n + 1} > -1$$

نضيف (1):

$$1 - \frac{1}{v_n + 1} > 0$$

$$v_{n+1} > 0$$

محقة

الطالب الثاني:

إثبات أن المتتالية u_n متتالية حسابية:

نشكل u_{n+1} وفق:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{v_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1+v_n}} = \frac{1+v_n}{1} = 1 + v_n \end{aligned}$$

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{1+v_n} - \frac{1}{v_n} \\ &= \frac{v_n - (1+v_n)}{v_n(1+v_n)} = \frac{-1}{v_n(1+v_n)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + v_n - 1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

وهذا المتتالية u_n حسابية أساسها $r = 1$

الطالب الثالث:

كتابة عبارة v_n بدلالة n .

لكيلا ننسى نحنا ما منعرف نوع المتتالية v_n وعشان هيك رح نكتب علاقة الحد العام للمتتالية u_n الحسابية وفق:

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

حيث:

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$r = 1$$

$$u_n - 1 = (n)(1)$$

$$u_n = n + 1$$

هلق صار فينا نكتب علاقة الحد العام للمتتالية v_n وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} \rightarrow v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$v_n = \frac{1}{n + 1}$$

الحالة الثانية:

وجود طلب اطراف تابع قبل طلب إثبات المحدودية الخطوات:

نستخدم طريقة التصوير وفق:

* نطلق من العلاقة الفرض (*):

* نصور أطراف العلاقة (*) وفق التابع f

* مع الانتباه إلى أن:

إذا كان التابع f متزايد تماماً فإنه يتحقق:

$$f(a) > f(b) \leftrightarrow a > b$$

إذا كان التابع f متناقص تماماً فإنه يتحقق:

$$f(a) < f(b) \leftrightarrow a > b$$

* نصلح وصولاً إلى العلاقة الهدف

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$$

المعرف على $]-2, +\infty[$ والمطلوب:

1. أثبت أن التابع f متزايد تماماً على المجال I

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة التدرجية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

2. أثبت بالتدرج أن $1 > u_{n+1} > u_n$

أيأ يكن $n \in \mathbb{N}$

الحل:

الطالب الأول:

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

إذا التابع f متزايد تماماً على I

الطالب الثاني:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): 1 > u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$1 > u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$$

محقة

نفرض صحة $E(n)$:

$$1 > u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن

$$1 > u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$1 > u_{n+1} > u_n$$

بالاستفادة من تزايد f يكون

$$f(1) > f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

$$1 > \frac{2u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 2} > \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

$$1 > u_{n+2} > u_{n+1}$$

محقة أيأ يكن $n \in \mathbb{N}$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 5} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{2x+2}{x+5}$ متزايداً تماماً

2. استنتج أن $0 \leq u_n \leq 1$ أيأ كان العدد

الطبيعي n

الحل:

الطالب الأول:

$$f'(x) = \frac{2(x+5) - (1)(2x+2)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x+10-2x-2}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{8}{(x+5)^2} > 0$$

إذا التابع f متزايداً تماماً

الطالب الثاني:

إثبات القضية: $0 \leq u_n \leq 1$

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \leq u_0 = 1 \leq 1$$

محقة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$0 \leq u_n \leq 1$$

بالاستفادة من تزايد f يكون:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{2}{5} \leq \frac{2u_n + 2}{u_n + 5} \leq \frac{4}{6}$$

$$0 \leq \frac{2}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{4}{6} \leq 1$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

محقة إذا الخاصة محقة أيأ كان العدد الطبيعي n

من أجل إثبات الخاصة $E(n + 1)$ نميز ما يلي وفقاً للأنماط الآتية:

المساواة	المضاعفات	المتراجحات	إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدريجي
<p>تنطلق من العلاقة الهدف وتحديداً من l_1 نصلح ونستفيد من الفرض (*) من أجل الوصول إلى الطرف الثاني l_2 من علاقة الهدف</p>	<p>تعريف: المضاعف العدد 3 هو ناتج جداء عدد طبيعي k للعدد $3k$ رمزه $3k$ مجموعة مهارات: ناتج جداء عدد طبيعي بمضاعف العدد 3 هو مضاعف للعدد 3 ناتج مجموع مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 ناتج جداء مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 ناتج طرح مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 الكبير ناقص الصغير العدد صفر مضاعف لجميع الأعداد</p>	<p>تنطلق من العلاقة الفرض (*) نصلح بحيث نأخذ الأوامر من العلاقة الهدف وصولاً إلى العلاقة الهدف ملاحظات مهمة جداً: إن إضافة أو طرح عدد إلى طرفي المتراجحة لا يغير من جهة التراجحة إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد موجب لا يغير من جهة المتراجحة إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد سالب يغير من جهة التراجحة القلب يغير جهة التراجحة تكبير الكبير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار موجب أو إهمال مقدار سالب أو استبدال مقدار بمقدار أكبر منه تصغير الصغير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار سالب أو إهمال مقدار موجب أو استبدال مقدار بمقدار أصغر منه</p>	<p>وجود طلب اطراد تابع f قبل طلب إثبات محدودية * نستخدم طريقة التصوير وفق: * تنطلق من العلاقة الفرض (*) * تصور أطراف العلاقة (*) وفق التابع f مع الانتباه إلى أن: إذا كان التابع f متزايد تماماً فإنه يتحقق: $f(a) > f(b) \leftrightarrow a > b$ إذا كان التابع f متناقص تماماً فإنه يتحقق: $f(a) < f(b) \leftrightarrow a > b$ نصلح وصولاً إلى العلاقة الهدف</p>
<p>عدم وجود طلب تزايد تابع f قبل طلب إثبات محدودية * نطبق مرحلتين: * مرحلة الإصلاح: باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية - الإنعام إلى مربع كامل ...) أي نكتب u_{n+1} بـ u_n واحدة * مرحلة الحصر: حيث نطلق من العلاقة الفرض (*) ونبدأ رحلة تأليف u_{n+1} ثم نصلح وصولاً للهدف.</p>			

اطراد متتالية:

لدراسة اطراد متتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ يمكننا أن نتبع إحدى الطرق الآتية:

طريقة الفرق	طريقة النسبة	طريقة التابع	شرط التطبيق
<p>لا يوجد شروط ويمكن تطبيقها دوماً</p>	<p>يجب أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة تماماً</p>	<p>يجب أن تكون المتتالية u_n بالشكل الصريح أي: $u_n = f(n)$</p>	<p>شرط التطبيق</p>
<p>نشكل الفرق: $u_{n+1} - u_n$ نقارن مع الصفر ونميز:</p> <ul style="list-style-type: none"> < 0 الفرق ومنه تكون u_n متناقصة تماماً ≤ 0 الفرق ومنه تكون u_n متناقصة > 0 الفرق ومنه تكون u_n متزايدة تماماً ≥ 0 الفرق ومنه تكون u_n متزايدة $= 0$ الفرق ومنه تكون u_n ثابتة 	<p>نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نقارن مع الواحد ونميز:</p> <ul style="list-style-type: none"> < 1 النسبة ومنه u_n متناقصة تماماً ≤ 1 النسبة ومنه u_n متناقصة > 1 النسبة ومنه u_n متزايدة تماماً ≥ 1 النسبة ومنه u_n متزايدة $= 1$ النسبة ومنه u_n ثابتة 	<p>نضع التابع المناسب بحيث نستبدل كل u_n بـ $f(x)$ وكل n بـ x ندرس اطراد التابع f تكون جهة اطراد المتتالية هي ذاتها جهة اطراد التابع</p>	<p>كيفية التطبيق</p>

ملاحظات:

- * طريقة الفرق تنفع دوماً.
- * طريقة النسبة يمكن اللجوء إليها عند وجود قوى أو عملي مع الانتباه لتتحقق شرط التطبيق "أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة"
- * طريقة التابع لا نستخدمها إلا في حال كانت المتتالية معطاة بالشكل الصريح واشتقاق التابع بسيطاً.
- * أحياناً نحتاج وضع كلمة (بداً من) بحيث كلمة بدلاً تعني تغيير سلوك
- * كلمة بدلاً من الحد ذو الدليل $= 0$ لا معنى لها

تمرين:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

- $u_n = \frac{3}{n^2}$
- $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
- $u_n = \frac{n}{10^n}$
- $u_n = \sqrt{3n+1}$
- $u_n = 2^n$
- $u_n = 3n+1$
- $u_n = \frac{n^2}{n!}$
- $u_n = \frac{4^{n-2}}{7n+2}$
- $u_n = \frac{\sqrt{5}}{32n}$
- $u_n = -\sqrt{3^n}$
- $u_n = 7 - 3n$

الحل:

1. $u_n = \frac{3}{n^2}$

نشكل النسبة بشرط $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$

إذا المتتالية u_n متناقصة تماماً بدلاً من

الحدود الدليل $n = 1$

2. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+1+1} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{-2n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$

إذا المتتالية u_n متناقصة تماماً

3. $u_n = \frac{n}{10^n}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10} \cdot \frac{10^n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{10} \cdot \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10n} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً بدلاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

ملاحظة:

في المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث أنها تمثل مجموع حدود (متتالية مجاميع) أو (تحتوي نقاط) نستخدم طريقة الفرق حصراً.

التمرين الأول:

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

2. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

الحل:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+1-2n-2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

إذا المتتالية u_n متزايدة تماماً.

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} - \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right]$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

إذا المتتالية u_n متزايدة تماماً.

التمرين الثاني:

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة تماماً

الحل:

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

10. $u_n = -\sqrt{3^n}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\sqrt{3^{n+1}}}{-\sqrt{3^n}}$$

$$= \frac{\sqrt{3^n} \sqrt{3}}{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3} > 1$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

11. $u_n = 7 - 3n$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 7 - 3n - 3 - 7 + 3n = -3 < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً.

ملاحظة:

قد نواجه بعض المتتاليات غير المطردة ويتم الكشف عنها بالتعويض (التجريب)

تمرين:

ادرس جهة اطراد كلا من المتتاليات الآتية:

1. $u_n = (-1)^n$

2. $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

3. $u_n = \frac{1}{2}(-3)^n$

الحل:

1. $u_n = (-1)^n$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = (-1)^2 = 1$$

$$u_3 = (-1)^3 = -1$$

$$u_4 = (-1)^4 = 1$$

إذا المتتالية u_n غير مطردة

2. $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

$$u_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 = -1$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

$$u_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

إذا المتتالية u_n غير مطردة

3. $u_n = \frac{1}{2}(-3)^n$

$$u_1 = \frac{1}{2}(-3)^1 = -\frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{9}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(-3)^3 = -\frac{27}{2}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}(-3)^4 = \frac{81}{2}$$

إذا المتتالية u_n غير مطردة

4. $u_n = \sqrt{3n+1}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$$

نضرب بالمرافق

$$= \frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{3n+4-3n-1}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

5. $u_n = 2^n$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 1$ أو $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

6. $u_n = 3n+1$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 3n+4-3n-1 = 3 > 0$$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

7. $u_n = \frac{n^2}{n!}$

نشكل النسبة بشرط $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} = \frac{n+1}{n^2} < 1$$

المتتالية تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

8. $u_n = \frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 2$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n-1}}{7^{n+3}} = \frac{4^{n-1}}{7^{n+3}} \cdot \frac{7^{n+2}}{4^{n-2}}$$

$$= \frac{4^{-1}}{7^3} \cdot \frac{7^2}{4^{-2}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4^{-1}} = \frac{4}{7} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً.

9. $u_n = \frac{\sqrt{5}}{3^{2n}}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{5}}{3^{2n+2}} \cdot \frac{3^{2n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3^{2n+2}} \cdot \frac{3^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{9} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً.

إذا المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

إياك أن تيأس فكل الصابرين قد جبروا 🤔❤️

$$= \frac{2n + 2 - 2n - 1}{(2n + 1)(2n + 2)} = \frac{1}{(2n + 1)(2n + 2)} > 0$$

$$= \frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{2n + 2} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 2}$$

دراسة اطراد متتالية معطاة بشكل تدريجي.

وتنقسم المتتالية التدريجية إلى ثلاثة أقسام من حيث الشكل

الشكل	نستخدم طريقة الفرق:	نستخدم طريقة النسبة:	عدد $u_n +$ عدد u_{n+1}
كيفية التعامل معها	ونقارن الناتج مع الصفر ونميز: * إذا كان: $u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية متناقصة تماماً	ونقارن الناتج مع الواحد ونميز: * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فالمتتالية u_n متناقصة تماماً	فكرة الحل
			نص السؤال
			أثبت أن u_n متزايدة
			أثبت أن u_n متزايدة تماماً
			أثبت أن u_n متناقصة
			أثبت أن u_n متناقصة تماماً
			أدرس اطراد المتتالية
			توجد الحدود الأولى منها ونحدد جهة الاطراد ثم نثبت صحة ما توصلنا له بالإثبات بالتدرج

يمكن استخدام طريقة الفرق لدراسة اطراد متتالية معطاة بشكل تدريجي وذلك عند وجود طلب محدودية متتالية قبل طلب اطراد متتالية.

نضرب بـ $(\frac{3}{4})$:

$$\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$$

نضيف (2):

$$\frac{3}{4}u_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}u_n + 2$$

محققة إذا المتتالية متزايدة تماماً.

التعريف الثاني:

لتكن u_n المتتالية المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

أثبت أن u_n متزايدة تماماً

الحل:

نستخدم الإثبات بالتدرج لإثبات صحة:

$$u_{n+1} > u_n$$

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$u_1 = 2\sqrt{2} > u_0 = 0$$

محققة.

نفرض صحة $E(n)$

$$E(n): u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$u_{n+1} > u_n$$

نربع.

$$(u_{n+1})^2 > (u_n)^2$$

$$4. \begin{cases} u_{n+1} = 7 + u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 7 + u_n - u_n = 7 > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً.

$$5. \begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

إيجاد الحدود الأولى:

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{37}{8}\right) + 2 = \frac{175}{32}$$

نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

لنثبت صحة ذلك بالتدرج.

أي يجب إثبات صحة الخاصة

$$u_{n+1} > u_n$$

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_1 > u_0 \rightarrow \frac{7}{2} > 2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$u_{n+1} > u_n$$

التعريف الأول:

يبين أي المتتاليات $(u_n)_{n \geq 0}$ الآتية

مطردة (بما بدأ من حد معين n_0)

- $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_{n+1} = 7 + u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

الحل:

$$1. \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

$$2. \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2 > 1$$

المتتالية متزايدة تماماً

$$3. \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = u_n - 3 - u_n = -3 < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً

نقسم على (3) :

$$\frac{(u_{n+1})^2}{3} > \frac{(u_n)^2}{3}$$

نضيف (8) :

$$8 + \frac{(u_{n+1})^2}{3} > 8 + \frac{(u_n)^2}{3}$$

نجدز الطرفين:

$$\sqrt{8 + \frac{(u_{n+1})^2}{3}} > \sqrt{8 + \frac{(u_n)^2}{3}}$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

محقة

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

التعريف الثالث:

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, u_0 = 1$$

1. أثبت أن $0 \leq u_n < 2$ لأي n طبيعي

أياً كان العدد الطبيعي n

2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \leq u_0 = 1 \leq 2$$

محقة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

مرحلة الإصلاح: لا داعي لها.

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض (*):

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف (2) :

$$2 \leq u_n + 2 \leq 4$$

نجدز:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2$$

$$0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

محقة أياً كان العدد n

الطالب الثاني:

يوجد طلب محدودية قبل طلب الاطراد لذلك

نستخدم طريقة الفرق:

نشكّل الفرق:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{2 + u_n} - u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{2 + u_n} - u_n)(\sqrt{2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{-(u_n^2 - u_n - 2)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

مناقشة:

بما أن: $1 \leq u_n \leq 2$

فإن:

$$* u_n - 2 \leq 0$$

$$* u_n + 1 > 0$$

$$* \sqrt{2 + u_n} + u_n > 0$$

فإن:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

إذا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

طالب إضافي:

هل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة؟

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد

2 فهي متقاربة.

طالب إضافي:

احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

ليكن لدينا التابع f وفق:

$$f(x) = \sqrt{2 + x}$$

نحل المعادلة

$$f(x) = x$$

$$\sqrt{2 + x} = x$$

بشرط $x > 0$ نربع الطرفين.

$$2 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

مقبول $x = 2 \rightarrow$ إما

مرفوض $x = -1 \rightarrow$ أو

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = 2$$

التعريف الرابع:

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6}; u_0 = 1$$

1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد

تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أي

كان العدد الطبيعي n

2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

الحل:

الطالب الأول:

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - (2)(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

إذا التابع f متزايداً تماماً.

استنتج $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

لتكن الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

محقة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

الإثبات..

لدينا من الفرض (*):

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

بالاستفادة من تزايد التابع f يكون

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \leq \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{7} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

محقة أياً كان العدد الطبيعي n

الطالب الثاني:

نشكّل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} - u_n$$

$$= \frac{3u_n + 2 - 2u_n^2 - 6u_n}{2u_n + 6}$$

$$= \frac{-2u_n^2 - 3u_n + 2}{2u_n + 6}$$

مناقشة:

لدينا: $-2u_n^2 - 3u_n + 2 < 0$

ولدينا: $2u_n + 6 > 0$

إذاً: $u_{n+1} - u_n < 0$

إذا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.

التعريف الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ادرس اطراد المتتالية u_n

الحل:

نوجد الحدود الأولي:

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + 3) = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + 3\right) = \frac{11}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_2 + 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4} + 3\right) = \frac{23}{8}$$

نلاحظ أن: $u_1 < u_2 < u_3$

أي المتتالية u_n متزايدة

أي يجب إثبات أن: $u_{n+1} > u_n$

لتكن الخاصة:

$$E(n): u_{n+1} > u_n$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$u_1 > u_0 \rightarrow \frac{5}{2} > 2$$

محقة

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات:

لدينا من (*):

$$u_{n+1} > u_n$$

نضيف (3)

$$u_{n+1} + 3 > u_n + 3$$

نضرب ب $(\frac{1}{2})$

$$\frac{1}{2}(u_{n+1} + 3) > \frac{1}{2}(u_n + 3)$$

محقة إذا القضية $E(n)$ محقة أي كانت $n \in \mathbb{N}$ ومنه المتتالية u_n متزايدة تماماً.

التعريف السادس:

لتكن لدينا المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

1. احسب x_1 و x_2 و x_3
2. ادرس اطراد المتتالية x_n
3. تعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n + 4$
4. أثبت أن $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية
5. اكتب y_n بدلالة n ثم استنتج x_n بدلالة n
6. احسب المجموع:

$$y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$$

الحل:

الطالب الأول:

$$x_0 = 5$$

$$x_1 = x_{0+1} = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = x_{1+1} = \frac{6}{5}x_1 + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = x_{2+1} = \frac{6}{5}x_2 + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$$

الطالب الثاني:

بها أن:

$$x_0 = 5, \quad x_1 = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = \frac{224}{25}, \quad x_3 = \frac{1444}{125}$$

نلاحظ أن:

$$x_3 > x_2 > x_1 > x_0$$

أي أن x_n متزايدة

أي يجب إثبات أن: $x_{n+1} \geq x_n$

الإثبات:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): x_{n+1} \geq x_n$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$x_1 \geq x_0 \rightarrow \frac{34}{5} \geq 5$$

محقة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$E(n): x_{n+1} \geq x_n \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

الإثبات..

لدينا من (*):

$$x_{n+1} \geq x_n$$

نضرب ب $(\frac{6}{5})$.

$$\frac{6}{5}x_{n+1} \geq \frac{6}{5}x_n$$

نضيف $(\frac{4}{5})$.

$$\frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} \geq \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$$

$$x_{n+2} \geq x_{n+1}$$

$E(n+1)$ صحيحة ومنه $E(n)$ محقة أي

كان $n \geq 0$ ومنه المتتالية x_n متزايدة.

الطالب الثالث:

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4$$

$$= \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$$

$$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n + 4)$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{6}{5}(x_n + 4)}{x_n + 4} = \frac{6}{5}$$

ومنه y_n هندسية وأساسها $q = \frac{6}{5}$

الطالب الرابع:

كتابة y_n بدلالة n

$$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0} \Rightarrow y_n = y_0 q^n$$

حيث:

$$y_0 = x_0 + 4 = 9$$

$$q = \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow y_n = 9 \left(\frac{6}{5}\right)^n$$

كتابة x_n بدلالة n :

لدينا:

$$y_n = x_n + 4$$

$$x_n = y_n - 4$$

$$x_n = 9 \left(\frac{6}{5}\right)^n - 4$$

الطالب الخامس:

حساب المجموع:

$$y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$$

بمعلنا مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{6}{5}$

$$\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right] \text{ الحد الأول} = \text{المجموع}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول} = y_2 = x_2 + 4$$

$$y_2 = \frac{224}{25} + 4 = \frac{324}{25}$$

$$\text{عدد الحدود} = 10 - 2 + 1 = 9$$

$$q = \frac{6}{5}$$

المجموع:

$$= \frac{324}{25} \left(\frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{1 - \frac{6}{5}} \right)$$

$$= \frac{324}{25} \left(\frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}} \right)$$

$$= -\frac{324}{5} \left(1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9 \right)$$

$$= -\frac{324}{5} + \frac{324}{5} \left(\frac{6}{5}\right)^9$$

من التعيم ..

أن يرزقك الله طلاباً نخباً نجباء، تراهم نجومياً يستدل بهم الحائر، يُبَيِّنُ أحداً يشدُّ بعضه، تحاول وإياهم، تثبت معهم، وتغرس بقلوبهم ألف فكرة، يرتحلون معك، جسداً واحداً، يستقون ماء الشغف من أجل تحقيق الهدف، يرسمون من كل كلمة خريطة، ومن كل مهمة ثغر.. 🤗🤗🤗

يميل الواحد فيجد من يأخذه ولا يتركه، مهما تراكمت عليه المهام جاء، ومهما أبعدته الحياة اقترب!

وما إن حن يوماً لنا، يلقانا تنتظره، ونشأقه .. وإن غاب ضمناه بالسجود حتى يطمئن .. نفتقد الفبتعد، ونتمنّى القريب، والكل لنا حبيب!

يا نخبة .. 🤗🤗

لا تنسوا ساعة، أننا اجتمعنا لله، وأن كل محاولاتنا العظيمة، لله!

وأن كل شخص تعرّفنا عليه هنا هو جزء منا لا يفصلنا، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلوبنا والكثير من

حبنا 🤗

وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السجّات، لا تتركوا يداً وقلوباً، شدوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك شغف، هناك 600

🤗🤗🤗🤗🤗

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

إذا المتتالية متقاربة (تتقارب من الواحد)

$$8. u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}}{(\sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2})(\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2n^2 - 5 - 2n^2}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{2n^2 - 5} + n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-5}{+\infty} = 0$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

$$9. u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

$$= \frac{n\sqrt{n+2} - n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}}$$

$$= \frac{n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$$

$$= \frac{n(-1)}{\sqrt{n^2 + 3n + 2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$$

$$= \frac{n\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب عن الصفر)

$$10. u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n+2}$$

$$= \frac{n(\sqrt{n} + 1)}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{\sqrt{n} + 1}{1 + \frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

إذا المتتالية متباعدة (تتباع نحو $+\infty$)

$$11. u_n = n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$4. u_n = \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{3n + 1}}$$

لما كان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 - 1}{3n + 1} \right) = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

إذا المتتالية u_n متباعدة (تتباع إلى $+\infty$)

$$5. u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$$

لما كان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n\pi}{3n+1} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من $-\frac{1}{2}$)

$$6. u_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{n^2 + n} - \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - (n + \frac{1}{2}))(\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{(n^2 + n) - (n + \frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{n^2 + n - n^2 - n - \frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

$$7. u_n = \frac{n! - 2}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{n! - 2}{n!}$$

$$= \frac{n!(1 - \frac{2}{n!})}{n!} = 1 - \frac{2}{n!}$$

شيفرة الـ 600 في وحدة نهاية متتالية:
تعميد:

يتم إيجاد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$
عند $+\infty$ أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
ونميز:

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
نقول أن المتتالية متقاربة أو أنها تتقارب من l
إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$
نقول أن المتتالية تتباعد إلى ∞
أولاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل صريح:
نتعامل معها كما مر معنا في أفكار نهايات
التوابع
قاعدة: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!) = +\infty$

التصريح الأول:

فيما يلي احسب نهاية المتتالية
 $(u_n)_{n \geq 1}$ في حال وجودها:

- $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$
- $u_n = n - \frac{1}{n+1}$
- $u_n = \frac{10n-3}{n^2+n+1}$
- $u_n = \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}}$
- $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$
- $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}$
- $u_n = \frac{n!-2}{n!}$
- $u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - n\sqrt{2}$
- $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$
- $u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n+2}$
- $u_n = n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right)$
- $u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$

الحل:

- $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$
إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من $\frac{2}{3}$)
- $u_n = n - \frac{1}{n+1}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty + 0 = +\infty$
إذا المتتالية u_n متباعدة (تتباع إلى $+\infty$)
- $u_n = \frac{10n-3}{n^2+n+1}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

التعريف الثالث:

أوجد نهاية كلاً من المتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ و $(t_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

- $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
- $y_n = x_n \cdot \sqrt{n}$
- $w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $t_n = \frac{y_n}{w_n}$

الحل:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$x_n = \frac{\sqrt{x}}{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$y_n = x_n \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$y_n = x_n \sqrt{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{n+1} (\sqrt{n}) = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$$

$$w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 - \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ثانياً: إيجاد نهاية (عدد)

ننظر إلى العدد ونميز:

* إذا كان: $1 < \text{عدد}$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{عدد})^n = +\infty$$

* إذا كان: $1 = \text{عدد}$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1)^n = 1$$

* إذا كان: $1 < \text{عدد} < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{عدد})^n = 0$$

* إذا كان: $-1 < \text{عدد}$, فإنه لا يوجد نهاية

* إذا كان: $-1 = \text{عدد}$

فإننا نحتاج إلى مرحلتين

المرحلة الأولى: مرحلة الحصر حيث:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

ثم نبدأ في رحلة تأليف المتتالية.

المرحلة الثانية:

مرحلة إيجاد النهاية

باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة

تعريف:

احسب نهاية كلاً من المتتاليات الآتية:
الحل:

$$1. u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$$

مرحلة الحصر: نعلم أن:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

نضيف $(2n)$:

$$2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$$

نقسم على $3n > 0$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq \frac{2n+(-1)^n}{3n} \leq \frac{2n+1}{3n}$$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{3n}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-1}{3n} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{3n} \right) = \frac{2}{3}$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

$$2. x_n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

لذا كان $\frac{3}{2} > 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$$

$$3. y_n = \frac{10^n}{10.1^n} = \left(\frac{10}{10.1} \right)^n$$

لذا كان: $1 < \frac{10}{10.1} < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{10.1} \right)^n = 0$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

التعريف الثاني:

ليكن $-1 < q < 1$ ولنعرف المتتالية

$(u_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة:

$$u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n ثم

استنتج نهاية u_n .

الحل:

$$u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية حدها

الأول (1) أساسها q وعدد الحدود $n+1$

$$\left(\frac{\text{عدد الحدود}}{1-q} \right) = \text{المجموع}$$

$$u_n = \frac{n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{n^2 \left[\left(2 + \frac{1}{n} - 2 \right) \right]}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

إذا المتتالية متباعدة (تتباع نحو $+\infty$)

$$12. u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \frac{(3n - \sqrt{9n^2 + 1})(3n + \sqrt{9n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 5}(3n + \sqrt{9n^2 + 1})}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{n^2 + 5}(3n + \sqrt{9n^2 + 1})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب عن الصفر)

التعريف الثاني:

متتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$$

تحقق أن $-\frac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ وذلك أي كان

$n \geq 1$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_n$

الحل:

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos(2n) \leq 1$$

نقسم على $\sqrt{n} > 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

إذا محققة.

استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

اللهم تلك الأمنية ..  

التعريف الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{3n+1}{n-1}$$

$+\infty$ هي 3 والمطلوب: جد عدداً طبيعياً n_0

يحقق $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n أكبر تعاماً

من n_0

الحل:

$$C = \frac{2.98 + 3.02}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$r = \frac{3.02 - 2.98}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02 = \frac{2}{100}$$

$$|u_n - c| < r$$

$$\left| \frac{3n+1}{n-1} - 3 \right| < \frac{2}{100}$$

$$\left| \frac{3n+1-3n+3}{n-1} \right| < \frac{2}{100}$$

$$\left| \frac{4}{n-1} \right| < \frac{2}{100}$$

$$\frac{4}{|n-1|} < \frac{2}{100}$$

$$n-1 = 0$$

$$n = 1$$

n	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{n-1}{ n-1 }$	$-$	0	$+$
	$-\frac{1}{n-1}$		$\frac{1}{n-1}$

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

$$\frac{n-1}{4} > \frac{100}{2}$$

$$n-1 > 200$$

$$n > 201 \rightarrow n_0 > 201$$

النمط الثاني:

نصر السؤال:

جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > l$

عند كل $n > n_0$

فكرة الحل:

نتطلق من العلاقة $u_n > l$

نعوض ونصلح للوصول إلى الشكل:

$$n > \text{عدد}$$

فيكون:

$$n_0 \geq \text{هذا العدد}$$

تعريف:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق:

$+\infty$ هي $u_n = n\sqrt{n}$ ونعلم أن نهاية المتتالية عند $+\infty$

هي $+\infty$ والمطلوب: جد عدداً طبيعياً n_0

يجعل $u_n > 10^6$

عند كل n أكبر تعاماً من n_0

الحل:

انتطلقاً من العلاقة:

$$u_n > 10^6$$

نعوض:

$$u_n = n\sqrt{n}$$

$$n\sqrt{n} > 10^6$$

نربع الطرفين:

$$n^3 > (10^6)^2$$

$$n^3 > 10^{12}$$

$$n > 10^4$$

$$n_0 > 10^4$$

$$\rightarrow n_0 > 10000$$

حصر متتالية في مجال:

النمط الأول:

نصر السؤال:

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]a, b[$

عند كل $n > n_0$

فكرة الحل:

* نوجد مركز المجال C وفق:

$$C = \frac{a+b}{2}$$

* نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2}$$

* بما أن $u_n \in]a, b[$ فإنه يحقق:

$$|u_n - c| < r$$

* نعوض في العلاقة ونصلح للوصول إلى:

$$n > \text{عدد}$$

* فيكون:

$$n_0 \geq \text{هذا العدد}$$

التعريف الأول:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق:

$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ونعلم أن نهاية المتتالية عند $+\infty$

هي الصفر والمطلوب:

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق

$u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$

الحل:

نوجد مركز المجال وفق:

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-10^{-3} + 10^{-3}}{2} = 0$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{10^{-3} + 10^{-3}}{2} = 10^{-3}$$

بما أن $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ فإن:

$$|u_n - c| < r$$

$$\left| \frac{1}{n\sqrt{n}} - 0 \right| < 10^{-3}$$

$$\left| \frac{1}{n\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{10^3} \rightarrow \frac{1}{|n\sqrt{n}|} < \frac{1}{10^3}$$

ندرس إشارة $n\sqrt{n}$ وفق:

$$n\sqrt{n} = 0$$

$$\text{إما } n = 0$$

$$\text{أو } \sqrt{n} = 0 \rightarrow n = 0$$

n	$-\infty$	0	$+\infty$
$n\sqrt{n}$	$-$	0	$+$
$ n\sqrt{n} $	$-n\sqrt{n}$		$n\sqrt{n}$

ومن:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3}$$

$$n\sqrt{n} > 10^3$$

نربع الطرفين:

$$n^3 > 10^6$$

نجد الطرفين تكعيباً:

$$n > 10^2$$

$$\rightarrow n_0 > 100$$

$$= (1) \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{1 - q q^n}{1 - q}$$

لغا كان: $-1 < q < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q q^n) = q(0) = 0$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

ثالثاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل مجموع:

* نوجد المجموع.

* نتابع كما سبق.

تعريف: أوجد نهاية المجموع:

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

S_n تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

حدها الأول (1) وأساسها $\left(\frac{1}{5}\right)$ وعدد

الحدود $n + 1$

$$\text{عدد الحدود} \left(\frac{1 - q}{1 - q} \right) = \text{الحد الأول} = \text{المجموع}$$

$$= (1) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \right)$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{4} \left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

لغا كان: $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

ومن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4} (5 - 0)$$

$$= \frac{1}{4} (5) = \frac{5}{4}$$

رابعاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل تدريجي

نأخذ التابع f المستمر على المجال I , حيث:

نستبدل كل u_{n+1} بـ $f(x)$ وكل u_n بـ x

نحل المعادلة: $f(x) = x$

حيث نحدد الحل بالاهتمام لـ:

* جهة اطراف المتتالية.

* حد البعد.

* محدودية المتتالية

انتباه: يتم دعم الفكرة بتمارين لاحقاً.

تعريف	نقول إن المتاليين $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقاربت المتالية $(s_n - t_n)_{n \geq 0}$ من الصفر
مبرهنة	تأمل متاليين متجاورين $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ عندئذ: * تكون المتاليات $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ متقاربتين * يكون للمتاليين $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ النهاية نفسها.
نص السؤال	أثبت أن المتاليين x_n و y_n متجاورتان
فكرة الحل	① ثبت أن إحدى المتاليين متزايدة والأخرى متناقصة ② ثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$

التعريف الثالث:

في كل من الحالات الآتية أثبت أن المتاليين

$(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

دراسة اطراد المتالية x_n :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right] \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n+2}{2n+2} \\ &= \frac{(2n+1) - (2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

ومن المتالية x_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتالية y_n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)} - x_n - \frac{1}{4n} \\ &= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} \\ &= x_{n+1} - x_n + \frac{n - n - 1}{4n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{n - n - 1}{4n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{4n(n+1)} \\ &= \frac{2n - 2n - 1}{2n(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{-1}{2n(2n+2)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

المتالية y_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = x_n - x_n - \frac{1}{4n} = -\frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

إذ المتاليين x_n و y_n متجاورتان.

الحل:

دراسة اطراد المتالية t_n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{(n+1)n} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

إذ المتالية t_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتالية s_n :

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-2n - 1}{n^2(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

إذ المتالية s_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} s_n - t_n &= 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{-n+1}{n} \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2 + n}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{n^2} \end{aligned}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - t_n) = 0$$

ومن المتاليين s_n و t_n متجاورتان.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$$

التعريف الأول:

لتكن $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ المعرفتان وفق

$$s_n = \frac{1}{n+1}, \quad t_n = -\frac{1}{2n+4}$$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

الحل:

دراسة اطراد المتالية t_n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= -\frac{1}{2n+6} + \frac{1}{2n+4} \\ &= \frac{-2n-4+2n+6}{(2n+4)(2n+6)} \\ &= \frac{2}{(2n+4)(2n+6)} > 0 \end{aligned}$$

إذ المتالية t_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتالية s_n :

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1 - n-2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \end{aligned}$$

إذ المتالية s_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} t_n - s_n &= -\frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-n-1-2n-4}{(2n+4)(n+1)} \\ &= \frac{-3n-5}{2n^2+6n+4} \end{aligned}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = 0$$

ومن المتاليين s_n و t_n متجاورتان.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$

التعريف الثاني:

لتكن $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ المعرفتان وفق

$$s_n = 1 + \frac{1}{n^2}, \quad t_n = \frac{n-1}{n}$$

أثبت أنهما متجاورتان

ثم عين نهايتهما المشتركة.

التعريف الرابع:

بين أن المتتاليات $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ الأتيتين متجاورتان.

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

الحل:

دراسة اطراد المتتالية u_n :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} - \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{n^2 + 3n + 2} + 2n + 2}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{3 + 2n - 2\sqrt{n^2 + 3n + 2}}{\sqrt{n+1}}$$

بعد الضرب المرافق نجد:

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}(3 + 2n + 2\sqrt{n^2 + 3n + 2})}$$

$$\rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

إذا المتتالية u_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية v_n :

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} - \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1 - 2n - 2 + 2\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-1 - 2n + 2\sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n^2 + n} - (1 + 2n)}{\sqrt{n+1}}$$

بعد الضرب بالمرافق نجد أن:

$$= \frac{-1}{\sqrt{n+1}(2\sqrt{n^2 + n} + 1 + 2n)} < 0$$

إذا المتتالية v_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$u_n - v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right)$$

$$= -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

نوجد نهاية الفرق وفق:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{n+1} - x_n - \frac{1}{n}$$

$$= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n - n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

إذا المتتالية y_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = x_n - x_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

ومنه المتتاليات x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1 - n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2 + n} > 0$$

إذا المتتالية x_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1} - y_n = 2 + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

إذا المتتالية y_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = 2 - \frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{-n - 1}{n^2}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

ومنه المتتاليات x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2n+1 + 2n - 4n - 2}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{4n^2 + 2n} < 0$$

إذا المتتالية y_n متناقصة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2n+1 - 2n+2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

ومنه المتتالية y_n متزايدة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

ومنه المتتاليات x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

إذا المتتالية x_n متزايدة تماماً.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

إذا المتتاليات u_n و v_n متجاورتان.

$$\begin{aligned} &= \frac{4n - 4n - 4}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n} + 1} \\ &= -\frac{4}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1})(2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1})}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

محدودية متتالية

تعريف:

- * نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي M يحقق عند كل عدد طبيعي n ، المتراجحة $u_n \leq M$ يسمى M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n \geq 0}$
- * نقول إن المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأدنى إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي m يحقق عند كل عدد طبيعي n ، المتراجحة $m \leq t_n$ يسمى m عنصراً قاصراً على $(t_n)_{n \geq 0}$
- * نقول إن متتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى في آنٍ معاً.

نصر السؤال:

- * أثبت أن u_n محدودة من الأعلى بالعدد M أو أثبت أن $u_n \leq M$ أو (أثبت - استنتج) عنصر راجح
- * أثبت أن u_n محدودة من الأدنى بالعدد m أو أثبت أن $m \leq u_n$ أو (أثبت - استنتج) عنصر قاصر

طريقة الإجابة: تميز:

شكل المجموع تميز:		الشكل التدريجي	الشكل الصريح
غير ذلك	مجموع نوعه غير معلوم ويوجد طلب مثبتة مسبقاً	نستخدم الإثبات بالتدرج	شكل الفرق ثم مناقشة
نحدد أصغر حد * نحدد أكبر حد * نحدد عدد الحدود *	بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً نحول إلى مجموع نوعه معلوم. نوجد المجموع ونحدد المطلوب	نوجد المجموع ونحدد المطلوب	
$\left(\begin{matrix} \text{أصغر} \\ \text{حد} \end{matrix}\right) \leq \text{المجموع} \leq \left(\begin{matrix} \text{أكبر} \\ \text{حد} \end{matrix}\right)$			

الطالب الأول:

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - 5n \\ &= \frac{2n^2 + 5n + 3 - 10n^2 - 5n}{2n + 1} \\ &= \frac{-8n^2 + 3}{2n + 1} \leq 0 \\ x_n - y_n &\leq 0 \\ \rightarrow x_n &\leq y_n \end{aligned}$$

الطالب الثاني:

$$\begin{aligned} x_n - \frac{1}{5}y_n &= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - \frac{1}{5}(5n) \\ &= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - n \\ &= \frac{2n^2 + 5n + 3 - 2n^2 - n}{2n + 1} \\ &= \frac{4n + 3}{2n + 1} \geq 0 \\ x_n - \frac{1}{5}y_n &\geq 0 \\ \rightarrow x_n &\geq \frac{1}{5}y_n \end{aligned}$$

سيقرر الله العليم بما ترجو

التعريف الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$

أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\left(\frac{1}{2}\right)$.
نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{n^2 - 5n + 6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2 - n^2 + 5n - 6}{2(n^2 - 5n + 6)} \\ &= \frac{-(n^2 - 5n + 4)}{2(n^2 - 5n + 6)} \\ &= \frac{-(n-4)(n-1)}{2(n-3)(n-2)} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2} &\leq 0 \\ \rightarrow u_n &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

إذا المتتالية $(u_n)_{n \geq 4}$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

التعريف الثالث:

المتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ معرفتان وفق:

$$\begin{aligned} y_n &= 5n, \quad x_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} \\ \text{أثبت أن } x_n &\leq y_n \text{ أيًا كان } n \geq 1 \\ \text{أثبت أن } x_n &\geq \frac{1}{5}y_n \text{ أيًا كان } n \geq 1 \end{aligned}$$

التعريف الأول:

تأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$ أيًا كان العدد الطبيعي n

$$1 \leq u_n \leq 3$$

من جهة أولى:

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} - 1 \\ &= \frac{n^2 + n + 1 - n^2 + n - 1}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{2n}{n^2 - n + 1} \geq 0 \\ u_n - 1 &\geq 0 \\ \rightarrow u_n &\geq 1 \end{aligned}$$

من جهة ثانية:

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} - 3 \\ &= \frac{n^2 + n + 1 - 3n^2 + 3n - 3}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{-2n^2 + 4n - 2}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{-2(n^2 - 2n + 1)}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{-2(n-1)^2}{n^2 - n + 1} \leq 0 \\ u_n - 3 &\leq 0 \\ \rightarrow u_n &\leq 3 \end{aligned}$$

مما سبق نجد أن:

$$1 \leq u_n \leq 3$$

التعريف الرابع:

- المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{1}{n!}$
- احسب الحدود الستة الأولى منها.
 - تأكد أن $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية u_n .

الحل:

الطالب الأول:

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{(2)(1)} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{(3)(2)(1)} = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{1}{24}$$

$$u_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{(5)(4)(3)(2)(1)} = \frac{1}{120}$$

$$u_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = \frac{1}{720}$$

الطالب الثاني:

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$$

من جهة أولى: بما أن $n! > 0$ فإن:

$$\frac{1}{n!} > 0$$

$$\rightarrow u_n > 0$$

من جهة ثانية: نعلم أن: $n! \geq n$
الطريقة الأولى: بالقلب نجد:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \rightarrow u_n \leq \frac{1}{n}$$

إذاً:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

الطريقة الثانية:
نشكل الفرق:

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n} = \frac{n-n!}{n \cdot n!} \leq 0$$

$$u_n - \frac{1}{n} \leq 0$$

$$\rightarrow u_n \leq \frac{1}{n}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

التعريف الخامس:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

أثبت أن: $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ أيما كان

$n \geq 1$
الحل:

طريقة القاعدة:

$$\left(\begin{array}{c} \text{أصغر} \\ \text{الحدود} \end{array} \right) \leq u_n \leq \left(\begin{array}{c} \text{أكبر} \\ \text{الحدود} \end{array} \right)$$

حيث:

$$\left(\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{الحدود} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{المتغير} \\ \text{الأخير} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{المتغير} \\ \text{الأول} \end{array} \right) + 1$$

$$= n - 1 + 1 = n$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{أصغر} \\ \text{حد} \end{array} \right) = \frac{n}{n^2+n}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{أكبر} \\ \text{حد} \end{array} \right) = \frac{n}{n^2+1}$$

نعوض:

$$\left(\frac{n}{n^2+1} \right) (n) \leq u_n \leq (n) \cdot \left(\frac{n}{n^2+1} \right)$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

طالب إضافي:

استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right) = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

التعريف السادس:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

أثبت أن

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

أيما كان $n \geq 1$

$$\left(\begin{array}{c} \text{أصغر} \\ \text{الحدود} \end{array} \right) \leq u_n \leq \left(\begin{array}{c} \text{أكبر} \\ \text{الحدود} \end{array} \right)$$

حيث:

$$\left(\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{الحدود} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{المتغير} \\ \text{الأخير} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{المتغير} \\ \text{الأول} \end{array} \right) - 1$$

$$= n - 1 + 1 = n$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{أصغر} \\ \text{حد} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{أكبر} \\ \text{حد} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

نعوض:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) n \leq u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right) n$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

طالب إضافي: استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

التعريف السابع:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$

الحل:

نستخدم الإثبات بالتدرج:

نرمز الخاصة:

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$0 \leq u_1 = \sqrt{2} \leq 2 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

الإثبات: مرحلة الإصلاح: لا داعي
مرحلة الحصر

لدينا من الفرض (*):

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف (2)

$$2 \leq u_n + 2 \leq 4$$

نجد:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{4}$$

$$0 \leq \sqrt{2} \leq u_n \leq 2$$

$$0 \leq u_n \leq 2$$

محقة

التعريف الثامن:

المتتاليتان $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ معرفتان

$$y_n = \frac{1}{n} \text{ و } x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

1. أثبت أن العدد 1 راجح على $(x_n)_n \geq 1$

2. أثبت أن $x_n \leq y_n$ أيما كان $n \geq 1$

3. أي التيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

الحل:

الطالب الأول:

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} & x_n - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \right)$$

مرحلة الحصر:
نعلم أن:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

نقسم على: $n^2 + 3n + 2 > 0$

$$\frac{-1}{n^2 + 3n + 2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2 + 3n + 2} \leq \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$\frac{-1}{n^2 + 3n + 2} \leq (-1)^n \cdot u_n \leq \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{n^2 + 3n + 2} \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \right) = 0$$

إذا حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n u_n = 0$$

التعريف الثاني عشر:

متتالية معرفة بالعلاقة: $(u_n)_{n \geq 1}$

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن $n \leq 2^n$ أي أن العدد الطبيعي n

2. أثبت أن $\frac{2}{3}$ عنصراً راجحاً على المتتالية u_n

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): n \leq 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$1 \leq 2^1 \rightarrow 1 \leq 2 \rightarrow \text{محقة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): n \leq 2^n \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات:

لدينا من الفرض (*):

$$n \leq 2^n$$

نضرب بـ (2):

$$2n \leq 2 \cdot 2^n$$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

$$2 \leq n+1 \leq 2n$$

نعلم أن $2 \leq n+1 \leq 2n$

إذاً:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

محقة إذاً الخاصة صحيحة

أي أن العدد الطبيعي n

الطالب الثاني:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} + \dots + \frac{2^n}{5^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

التعريف العاشر:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \dots - \frac{1}{9^n}$$

استنتج عنصراً قاصراً على u_n

الحل:

$$u_n = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \dots - \frac{1}{9^n}$$

$$u_n = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots + \frac{1}{9^n} \right]$$

نمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

حدها الأول $\frac{1}{9}$ أساسها $\frac{1}{9}$ وعدد الحدود n

$$u_n = 1 - \frac{1}{9} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{9} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$u_n = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \geq \frac{7}{8}$$

إذاً العنصر القاصر هو كل عدد أصغر أو يساوي $\frac{7}{8}$

التعريف الحادي عشر:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

1. أثبت أن العدد $M = \frac{1}{2}$ راجح على المتتالية u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \cdot u_n$$

الحل:

الطالب الأول:

نشكل الفرق:

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2 - n^2 - 3n - 2}{2n^2 + 6n + 4}$$

$$= \frac{-n^2 - 3n}{2n^2 + 6n + 4}$$

$$= \frac{2n^2 + 6n + 4}{-(n^2 + 3n)} \leq 0$$

$$u_n \leq \frac{1}{2}$$

إذاً: $u_n - \frac{1}{2} \leq 0$ تكافئ:

$$u_n \leq \frac{1}{2}$$

إذاً العدد $\frac{1}{2}$ راجح على المتتالية u_n

$$= \frac{(1 - \sqrt{n^2 + 1})(1 + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 1}(1 + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$= \frac{1 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 1}(1 + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$= \frac{-n^2}{\sqrt{x^2 + 1}(1 + \sqrt{x^2 + 1})} \leq 0$$

$$x_n - 1 \leq 0$$

$$x_n \leq 1$$

إذاً العدد 1 راجح على المتتالية $(x_n)_{n \geq 1}$

الطالب الثاني:

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n\sqrt{n^2 + 1} - 1}{n\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$= \frac{(n - \sqrt{n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})}{n\sqrt{n^2 + 1}(n + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 - 1}{n\sqrt{x^2 + 1}(n + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$= \frac{-1}{n\sqrt{n^2 + 1}(n + \sqrt{n^2 + 1})} \leq 0$$

إذاً:

$$x_n - y_n \leq 0 \rightarrow x_n \leq y_n$$

الطالب الثالث:

النتيجة $x_n \leq y_n$ أكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيد في حساب النهاية.

التعريف التاسع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

استنتج عنصراً راجحاً على u_n

الحل:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

نمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{3}$ وعدد الحدود n

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

تكافئ: $u_n \leq \frac{1}{2}$

إذاً العنصر الراجح هو كل عدد أكبر أو يساوي $\frac{1}{2}$

تمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ حدها الأول $\frac{2}{5}$ وعدد الحدود n

$$u_n \leq \frac{2}{5} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} \right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} \right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right)$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \leq \frac{2}{3}$$

إذا $\frac{2}{3}$ هو عنصر راجح على المتتالية u_n

التمرين الثالث عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالصيغة:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن

$$n \leq 2^n \text{ أيما كان العدد الطبيعي } n$$

دراسة المتتاليات المطردة:

مبرهنات:

- * كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى $+\infty$
- * كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى $-\infty$
- * كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة
- * كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نص السؤال: هل المتتالية متقاربة؟ أو هل يوجد للمتتالية نهاية حقيقية؟ نميز:

عدم وجود طلب محدودية وعدم وجود طلب إطار	وجود طلب محدودية فقط	وجود طلب محدودية وطلب إطار متتالية
* الأسلوب الأول: نوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ونميز: ناتج النهاية عدد حقيقي فالمتتالية متقاربة ناتج النهاية لا نهاية فالمتتالية متباعدة	ندرس إطار المتتالية حتى ولو لم يطلب ذلك نتابع باستخدام المبرهنات	نستخدم المبرهنات فوراً: * كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة * كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة
* الأسلوب الثاني: ندرس المحدودية وندرس إطار المتتالية.		

التمرين الأول:

ادرس تقارب كل من المتتاليات الآتية:

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$x_n = \frac{3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

بما أن: $1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

2. استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): n \leq 2^n$$

ثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$1 \leq 2^1 \rightarrow 1 \leq 2 \rightarrow \text{محقة}$$

فرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): n \leq 2^n \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات:

لدينا من الفرض (*):

$$n \leq 2^n$$

نضرب بـ (2):

$$2n \leq 2 \cdot 2^n$$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

$$2 \leq n+1 \leq 2n$$

إذا:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

محقة إذا الخاصة صحيحة

أيما كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{2}{3}$ حدها الأول $\frac{2}{3}$ وعدد الحدود n

$$u_n \leq \frac{2}{3} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3} \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \right]$$

$$u_n \leq 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

$$u_n \leq 2 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \leq 2$$

إذا 2 هو عنصر راجح على المتتالية u_n

التعريف الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

١. أثبت أنه أي كان $n \geq 1$ كان:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

٢. استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ وما نهايتها؟

الحل:

الطالب الأول:

$$\left(\begin{matrix} \text{عدد} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{أصغر} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) \leq u_n \leq \left(\begin{matrix} \text{أكبر} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{عدد} \\ \text{حد} \end{matrix} \right)$$

حيث:

$$\left(\begin{matrix} \text{عدد} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) + 1 = \left(\begin{matrix} \text{المتغير} \\ \text{الأول} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{المتغير} \\ \text{الأخير} \end{matrix} \right)$$

$$= n - 1 + 1 = n$$

$$\left(\begin{matrix} \text{أصغر} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

$$\left(\begin{matrix} \text{أكبر} \\ \text{حد} \end{matrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

نعوض:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) n \leq u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) n$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

الطالب الثاني:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

ومنه المتتالية متقاربة.

التعريف الثالث:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right]$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول وعدد الحدود $n - 1 + 1 = n$ ومنه:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$= 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لما كان: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

إذا المتتالية (u_n) متقاربة.

التعريف الرابع:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = \frac{3}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ وعند كل } n$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

١. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن:

$$1 \leq u_n \leq 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

٢. أثبت أن:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

٣. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة.

٤. أهني متقاربة؟

الحل:

الطالب الأول:

نرمز القضية وفق:

$$E(n): 1 \leq u_n \leq 2$$

نثبت صحة القضية من أجل $E(0)$:

$$1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$1 \leq u_n \leq 2 \dots (*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$1 \leq u_n^2 - 2u_n + 2 \leq 2$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

$$= u_n^2 - 2u_n + 1 - 1 + 2$$

$$= (u_n - 1)^2 + 1$$

مرحلة الحصر:

نتطلق من العلاقة الفرض (*):

$$1 \leq u_n \leq 2$$

نضيف (-1):

$$0 \leq u_n - 1 \leq 1$$

نربع:

$$0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$$

نضيف (1):

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

محققة.

الطالب الثاني:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{l_1} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 1)}{l_2}$$

$$l_1 = u_{n+1} - u_n$$

$$= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$

$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

$$= (u_n - 2)(u_n - 1) = l_2$$

محققة.

الطالب الثالث:

لدينا من الطلبات السابقة:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

مناقشة:

$$u_n - 2 \leq 0$$

$$u_n - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$$

إذا المتتالية (u_n) متناقصة.

الطالب الرابع:

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

طالب إضافي:

أوجد نهاية المتتالية (u_n) :

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

للإيجاد النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$x^2 - 2x + 2 = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

مرفوض $\rightarrow x = 2$ إما

مقبول $\rightarrow x = 1$ أو

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

واقفين بالخبيرة .. الخالمين الذين يريدون خلق شيء جديد في هذا العالم ..



التمرين الخامس:

$(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية

$$(u_n)_{n \geq 0}$$

أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}} \rightarrow 1 \leq 1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب ب $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

$$\text{نعلم أن: } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

محققة.

الطالب الثاني:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة سابقاً نجد أن:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

يكون:

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 وعدد الحدود n

نفرض صحة $E(n)$:

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

الإثبات لدينا من الفرض (*):

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نضيف $\frac{1}{(n+1)^2}$ للطرفين:

$$u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

إذاً

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

محققة إذاً الخاصة صحيحة أي كان $n \geq 1$

الطالب الثالث:

لدينا

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

تكافئ:

إذاً المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد (2) وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين السابع:

نضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة

2. اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

3. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن

$$u_{2n} \geq \frac{n}{2}$$

غير معدوم

4. هل للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

نهاية حقيقية؟

الحل:

الطالب الأول:

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$u_n \leq 1 + (1) \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq 1 + \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$\leq 1 + 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n \leq 3 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \leq 3$$

إذاً العدد 3 راجح على المتتالية u_n .

الطالب الثالث:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين السادس:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

1. أثبت أن المتتالية u_n متزايدة

2. أثبت مستعملاً بالتدرج أن

$$u_n < 2 - \frac{1}{n} \quad n \geq 1$$

3. ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة إلى

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

الحل:

الطالب الأول:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$- \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة

الطالب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$u_1 = 1 \leq 2 - 1 \rightarrow 1 \leq 1$$

محققة

$$-\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} > 0$$

إذا المتتالية u_n متزايدة

الطالب الثاني:

$$u_{2n} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$- \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

استنتاج أن: $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

تمثل مجموع حدود أصغر حد $\frac{1}{2n}$ أكبر حد $\frac{1}{n+1}$ وعدد الحدود n ويتحقق:

$$\left(\frac{\text{أصغر}}{\text{حد}}\right) \left(\frac{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\right) \leq u_{2n} - u_n \leq \left(\frac{\text{أكبر}}{\text{حد}}\right) \left(\frac{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\right)$$

$$n \left(\frac{1}{2n}\right) \leq u_{2n} - u_n \leq n \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{2n} - u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

الطالب الثالث:

لتكون الخاصة:

$$E(n): u_{2^n} > \frac{n}{2}$$

ثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$u_{2^1} \geq \frac{1}{2} \rightarrow u_2 \geq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$$

محقة.

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n): u_{2^n} \geq \frac{n}{2} \dots (*)$$

ثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$$

الإثبات: لدينا من الفرض (*):

$$u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

لدينا من الطلب السابق:

$$u_{2^{2n}} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$u_n \leq u_{2^{2n}} - \frac{1}{2}$$

ولدينا: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$

$$u_{2 \cdot 2^n} - \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2}$$

$$u_{2^{n+1}} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

الطلب الرابع:

يقصد بالسؤال هل المتتالية متقاربة. المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى فهي متباعدة وبالتالي ليس للمتتالية (u_n) نهاية حقيقية

الطالب الثاني:

ثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$ محقة $u_1 = 1 > u_0 = -3$

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n :

$$u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

ثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ أي يجب إثبات صحة العلاقة:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$u_{n+1} > u_n$$

نضرب بـ $\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{1}{3} u_{n+1} > \frac{1}{3} u_n$$

نضيف العدد (2):

$$\frac{1}{3} u_{n+1} + 2 > \frac{1}{3} u_n + 2$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

العلاقة محقة من أجل $n+1$ فهي محقة أي كان العدد الطبيعي n

الطالب الثالث:

نفرض القضية:

$$E(n): u_n < 3$$

ثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$ محقة $u_0 = -3 < 3$

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n :

$$u_n < 3 \dots (*)$$

ثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ أي يجب إثبات صحة العلاقة:

$$u_{n+1} < 3$$

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$u_n < 3$$

نضرب بالعدد $\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{1}{3} u_n < 1$$

نضيف العدد (2):

$$\frac{1}{3} u_n + 2 < 3$$

$$\rightarrow u_{n+1} < 3$$

العلاقة محقة من أجل $n+1$ فهي محقة أي كان العدد الطبيعي n

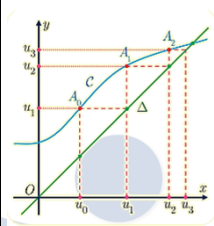
بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$:

$$\frac{1}{3}x + 2 = x \rightarrow \frac{1}{3}x - x = -2$$

$$-\frac{2}{3}x = -2 \rightarrow x = 3$$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 3$

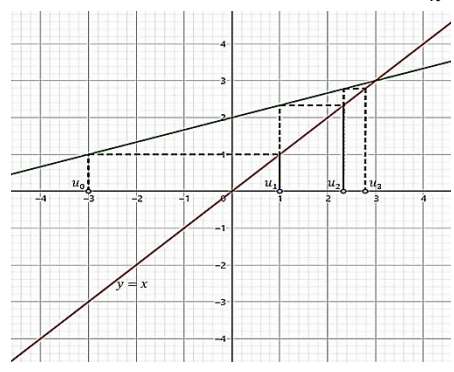
التمثيل الهندسي للحدود الأولى من متتالية معطاة بشكل تدريجي:



- 1 رسم الخط البياني C_f التابع f (الموافق)
 - 2 رسم المستقيم الذي معادلته $y = x$ المصنف Δ للربعين الأول والثالث
 - 3 نحدد u_0 (معطاة) على محور الفواصل
 - 4 نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد نقطة تقاطعه مع الخط البياني
 - 5 نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته (ترتيب $A = B$) $y = u_0$ ونحدد نقطة تقاطعه مع المصنف Δ
 - 6 فاصلة B هي u_1
- نكرر ما سبق

فوائد التمثيل الهندسي لحدود متتالية:

- * دراسة اطراف متتالية
 - * محدودية متتالية
 - * نهاية متتالية
- تمرين: لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة التدريجية:
- $$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \text{ و } u_0 = -3 \text{ والمطلوب:}$$
- 1 مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n ثم خفن جهة اطرافها ونهايتها المحتملة.
 - 2 ادرس اطراف المتتالية u_n
 - 3 أثبت أن العدد 3 راجح على المتتالية u_n ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.



الحل:
الطالب الأول:
نخمن أن المتتالية u_n متزايدة ونهايتها المحتملة هي 3

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت أن u_n تكتب بالشكل

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ أي كانت } n \geq 1$$

2. نعتبر المجموع

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

أثبت أن $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ ثم استنتج

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ واحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

الحل:

الطالب الأول:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n + 1}{n^2(n+1)^2} = u_n$$

الطالب الثاني:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

نستفيد من:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ لحساب المجموع.}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

استنتج نهاية u_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

حساب نهاية S_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

التعريف الثاني:

لكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \dots + \frac{e}{n!} \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2. استنتج أن العدد $3e$ راجح على المتتالية

$$u_n \text{ ثم استنتج تقارب المتتالية } u_n$$

الحل:

الطالب الأول:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}} \rightarrow 1 \leq 1 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ وفق:

$$\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

محققة أي كان العدد الطبيعي.

الطالب الثاني:

استنتج أن $3e$ راجح على المتتالية u_n :

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \dots + \frac{e}{n!}$$

$$= e \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right]$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

تكون:

$$u_n \leq e \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

$$u_n \leq e \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

تمثلنا مجموع أرقام من متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول وعدد الحدود } n - 1 \text{ ومنه:}$$

$$u_n \leq e \left(2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] \right)$$

$$u_n \leq e \left(2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$u_n \leq e \left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

$$u_n \leq 3e - e \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

تكافئ:

$$u_n \leq 3e$$

إذا $3e$ عنصر راجح على المتتالية u_n .

استنتج تقارب المتتالية u_n :

ندرس اطراد المتتالية u_n وفق:

$$= e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$$

$$- \left(e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \dots + \frac{e}{n!} \right)$$

$$= \frac{e}{(n+1)!} > 0$$

إذ المتتالية u_n متزايدة تماماً.

ومن هنا بما أن المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التعريف الثالث:

لكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_0 = -\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$$

والمطلوب:

1. أثبت أن $-2 \leq u_n \leq -1$

أي كان العدد الطبيعي n

2. أثبت أن

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$$

أي كان العدد الطبيعي n

3. استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها

الحل:

الطالب الأول:

إثبات $-2 \leq u_n \leq -1$:

نستخدم الإثبات بالتدرج:

لكن الخاصة:

$$E(n): -2 \leq u_n \leq -1$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$-2 \leq u_0 = -\frac{3}{2} \leq -1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$-2 \leq u_n \leq -1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أي

يجب إثبات أن:

$$-2 \leq u_{n+1} \leq -1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$$

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 4 - 4 + 2$$

$$u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

مرحلة الحصر: لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$-2 \leq u_n \leq -1$$

نضيف (2):

$$0 \leq u_n + 2 \leq 1$$

نربع:

$$0 \leq (u_n + 2)^2 \leq 1$$

نضيف (-2):

$$-2 \leq (u_n + 2)^2 - 2 \leq -1$$

$$-2 \leq u_{n+1} \leq -1$$

محققة ومنه الخاصة محققة

أي كان العدد الطبيعي n .

الطالب الثاني:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{l_1} = \frac{(u_n + 1)(u_n + 2)}{l_2}$$

$$l_1 = u_{n+1} - u_n$$

$$= u_n^2 + 4u_n + 2 - u_n$$

$$= u_n^2 + 3u_n + 2$$

$$= (u_n + 1)(u_n + 2) = l_2$$

دراسة اطراف المتتالية u_n :

من الطالب السابقة لدينا:

$$-2 \leq u_n \leq -1$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$$

مناقشة:

$$* u_n + 1 \leq 0$$

$$* u_n + 2 \geq 0$$

$$* u_{n+1} - u_n \leq 0$$

ومنه نجد أن المتتالية u_n متناقصة.

بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

لحساب النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$x^2 + 4x + 2 = x$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0$$

$$\text{مقبول} \rightarrow x = -2 \text{ إما}$$

$$\text{مرفوض} \rightarrow x = -1 \text{ أو}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -2$$

التعريف الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \quad u_0 = 4 \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد

تماماً على المجال $[2, +\infty[$ ثم استنتج أن

العدد 2 حد قاصر على المتتالية u_n

2. أثبت أن المتتالية u_n متناقصة تماماً.

3. استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن التابع f متزايد تماماً على $[2, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

نعلم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{2x^2} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{مقبول} \rightarrow x = 2 \text{ إما}$$

$$\text{مرفوض} \rightarrow x = -2 \text{ أو}$$

نتعلم جدول الاطراف وفق:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+

إذا التابع f متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$

استنتاج أن العدد (2) حد قاصر على u_n :

نثبت صحة الخاصة: $u_n \geq 2$ باستخدام

الإثبات بالتدريج وفق:

نرمز الخاصة:

$$E(n): u_n \geq 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 = 4 \geq 2 \rightarrow \text{مدققة}$$

نفرض صحة الخاصة:

$$E(n): u_n \geq 2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

أي يجب إثبات:

$$u_{n+1} \geq 2$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$u_n \geq 2$$

بالاستفادة من تزايد التابع f نصور الأطراف.

$$f(u_n) \geq f(2)$$

$$u_{n+1} \geq 2$$

مدققة ومنه العدد (2) قاصر على المتتالية u_n

الطالب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$$

$$= \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{2u_n}$$

مناقشة:

لدينا من الطالب السابق: $u_n \geq 2$ فإن:

$$* 2 - u_n \leq 0$$

$$* 2 + u_n > 0$$

$$* 2u_n > 0$$

$$* u_{n+1} - u_n < 0$$

إذا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.

الطالب الثالث:

بما أن المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من

الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع المعرف على $[2, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

لليجاد النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 4}{2x} = x$$

$$x^2 + 4 = 2x^2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{مقبول} \rightarrow x = 2 \text{ إما}$$

$$\text{مرفوض} \rightarrow x = -2 \text{ أو}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

التعريف الخامس:

لتكن المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} \text{ و } x_0 = 2$$

المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ حيث: $y_n = x_n - 1$

1. أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية

يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم

اكتب عبارة y_n بدلالة n .

2. احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3. احسب بدلالة n المجموع:

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$

الحل:

الطالب الأول:

نشكل y_{n+1} وفق:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 1$$

$$= \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} - 1$$

$$= \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}}{x_n - 1} = \frac{\frac{1}{3}(x_n - 1)}{x_n - 1} = \frac{1}{3}$$

إذا المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$y_0 = x_0 - 1$$

$$= 2 - 1 = 1$$

كتابة y_n بدلالة n وفق:

المتتالية y_n هندسية إذا:

$$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{y_n}{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

الطالب الثاني:

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها

$$q = \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } y_0 = 1 \text{ وعدد}$$

الحدود $n + 1$ ومنه:

$$S_n = 1 \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

حساب النهاية:

$$\text{نعلم أن: } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ إذا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$
المتتالية x_n لا نعلم نوعها ومن أجل حساب
المجموع نلجأ إلى علاقة التفاضل:

$$y_n = x_n - 1$$

$$x_n = y_n + 1$$

لدينا:

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$= y_0 + 1 + y_1 + 1 + \dots + y_n + 1$$

$$= \underbrace{y_0 + y_1 + \dots + y_n}_{S_n} + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{1(n+1)}$$

$$S'_n = S_n + (n + 1)$$

لدينا من الطالب السابق:

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نعوض:

$$S'_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + n + 1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$$

حساب النهاية:

$$\text{نعلم أن: } 1 < \frac{1}{3} < -1 \text{ إذا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = +\infty$$

التعريف السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1} \text{ والمطلوب:}$$

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$
2. أثبت أن العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$
3. احسب نهاية المتتالية عند $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أي كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحل:

الطالب الأول:

دراسة اطراد المتتالية u_n وفق:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{2(n+1) - 1} - \frac{2n-1}{n+1}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2n+1} - \frac{2n-1}{n+1}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{n+2} - \frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n + 2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

إذا المتتالية u_n متزايدة تماماً.



نحتفي
صبراً جميلاً، إنما نصنع بالبناء التراكمي.

وبنسى يهدم التراكبات..

نشكك الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$$

$$= \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = -\frac{3}{n+1}$$

نلاحظ أن: $u_n - 2 \leq 0$ ومنه $u_n \leq 2$
إذا العدد (2) راجح على المتتالية (u_n) .

الطالب الثالث:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n}\right) = 2$$

تعيين قيمة الـ n_0 :

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

تتحقق العلاقة:

$$|u_n - c| < r$$

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{2n-1-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| -\frac{3}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{|n+1|} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{n+1}{3} > 10$$

$$n+1 > 30$$

$$n > 29$$

$$\rightarrow n_0 = 29$$

التعريف السابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases} \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت بالتدريج أن $u_n > u_{n+1} > 1$ ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

2. نعرف المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n-1}$ والمطلوب:

3. أثبت أن v_n حسابية وعين أساسها وحدها الأول.

4. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{n+2}{n+1}$$

5. هل المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى

بالعدد 2؟ هل هي محدودة؟

6. أثبت أن $u_n < v_n$ أي كان العدد الطبيعي

$$n \geq 1$$

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): u_n > u_{n+1} > 1$$

ثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 > u_1 > 1$$

$$2 > \frac{3}{2} > 1$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n > u_{n+1} > 1 \dots (*)$$

ثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{u_n} + \frac{2u_n}{u_n}$$

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

مرحلة الإثبات:

نتطلق من العلاقة الفرض (*):

$$u_n > u_{n+1} > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} < 1$$

نضرب بـ (-1):

$$-\frac{1}{u_n} > -\frac{1}{u_{n+1}} > -1$$

نضيف (2):

$$2 - \frac{1}{u_n} > 2 - \frac{1}{u_{n+1}} > 1$$

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

محققة ومنه $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي

$E(n)$ صحيحة أي كانت $n \geq 0$

استنتج أن u_n متقاربة:

* وجدنا أن: $u_n > u_{n+1} > 1$

ومنها نجد أن $u_n > u_{n+1}$

وبالتالي u_n متناقصة تماماً.

* ونجد أيضاً $u_{n+1} > 1$ وبالتالي u_n

محدودة من الأدنى بالعدد 1

* وبما أن u_n متناقصة ومحدودة من

الأدنى فهي متقاربة.

الطالب الثاني:

إثبات أن v_n حسابية:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1+2u_n}{u_n} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1+2u_n - u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{u_n}{-1+2u_n - u_n}$$

$$= \frac{u_n}{u_n - 1}$$

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$$

ومن هنا حسابية أساسها $r = 1$ وحدها

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1 \text{ الأول}$$

الطالب الثالث:

عبارة v_n بدلالة n :

لدينا المتتالية v_n متتالية حسابية ومنه:

$$v_n - v_0 = (n - 0)r$$

$$v_n - 1 = n$$

$$v_n = n + 1$$

استنتج أن

$$u_n = \frac{n + 2}{n + 1}$$

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1 + n + 1}{n + 1} = \frac{n + 2}{n + 1}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

الطالب الرابع:

هل المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد (2)

$$u_n - 2 = \frac{n + 2}{n + 1} - 2 = \frac{n + 2 - 2n - 2}{n + 1} = \frac{-n}{n + 1} \leq 0$$

$$u_n - 2 \leq 0$$

$$u_n \leq 2$$

ومن هنا المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

هل المتتالية محدودة؟

من الطالب الأول وجدنا أن المتتالية محدودة

من الأدنى بالعدد (1).

ومن الطالب الرابع وجدنا أن المتتالية محدودة

من الأعلى بالعدد (2).

ومن هنا: $1 < u_n \leq 2$ أي أن u_n محدودة.

الطالب الخامس:

إثبات أن $u_n < v_n$:

$$u_n - v_n = \frac{n + 2}{n + 1} - (n + 1)$$

$$= \frac{(n + 2) - (n + 1)^2}{n + 1}$$

$$= \frac{n + 2 - n^2 - 2n - 1}{n + 1}$$

$$= \frac{-n^2 - n + 1}{n + 1} < 0$$

$$u_n - v_n < 0$$

$$u_n < v_n$$

التعريف الثامن:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases} \text{ والمطلوب:}$$

١. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً.

٢. استنتج أن $1 < u_{n+1} < u_n$ أيًا كانت n

لتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$v_n = \frac{2}{u_n - 1} \text{ والمطلوب:}$$

٣. أثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية

٤. عبّر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

الحل:

الطالب الأول:

إثبات أن f متزايد تماماً:

لدينا التابع f معرف ومستمر واشتقاقه

على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ومنه:

$$f'(x) = \frac{2(x) - (1)(2x - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 2x + 1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

إذا التابع f متزايد تماماً.

الطالب الثاني:

استنتج أن $1 < u_{n+1} < u_n$ أيًا كانت n :

لتكن الخاصة:

$$E(n): 1 < u_{n+1} < u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$1 < u_1 < u_0$$

$$1 < \frac{3}{2} < 2$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$1 < u_{n+1} < u_n \dots (*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أن:

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$1 < u_{n+1} < u_n$$

وبالاستفادة من تزايد التابع f نجد:

$$f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

محققة إذا القضية $E(n)$ صحيحة أيًا كان

العدد الطبيعي n .

الطالب الثالث:

إثبات أن المتتالية v_n حسابية:

نشكل الفرق وفق:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1} - 1} - \frac{2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{2}{\frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n}} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{2}{\frac{u_n - 1}{u_n}} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{2u_n}{u_n - 1} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2$$

إذا المتتالية v_n حسابية وأساسها $r = 2$

الطالب الرابع:

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n - v_0 = (n - 0)r$$

$$v_n = v_0 + nr$$

حيث:

$$v_0 = \frac{2}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

$$\rightarrow v_n = 2n + 2$$

كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$v_n = \frac{2}{u_n - 1}$$

$$u_n - 1 = \frac{2}{v_n}$$

$$u_n = \frac{2}{v_n} + 1$$

$$u_n = \frac{2 + v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{2 + 2n}{2 + 2 + 2n}$$

$$= \frac{4 + 2n}{2 + 2n} = \frac{2 + n}{n + 1}$$

التعريف التاسع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} \text{ والمطلوب:}$$

١. أثبت أن $0 < u_n < 1$ أيًا كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

بالعلاقة $v_n = \frac{1 - u_n}{u_n}$ متتالية هندسية.

٣. اكتب v_n بدلالة n

٤. عين تابعاً يحقق $u_{n+1} = f(u_n)$ أيًا

كانت $n \geq 0$ ثم جد نهاية التابع f عند

$+\infty$ ثم أعط عدداً A يحقق الشرط

إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال

$$]-0.8, -1.2[$$

الحل:

الطالب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 0 < u_n < 1$$

التعريف العاشر:

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

تكن لدينا المتتاليات: $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ و u_n والمطلوب:

1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N}^*

2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة على \mathbb{N}^*

3. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$

4. ماذا تستنتج مما سبق؟

الحل:

الدليل الأول:

إثبات أن u_n متزايدة.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\quad - \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

ومنه المتتالية u_n متزايدة تماماً على \mathbb{N}^*

الدليل الثاني:

إثبات أن v_n متناقصة:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

إذاً المتتالية v_n متناقصة تماماً على \mathbb{N}^*

الدليل الثالث:

نشكل $u_n - v_n$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= u_n - u_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \\ \text{نوجد النهاية:} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

الدليل الرابع:

لدينا المتتالية u_n متزايدة تماماً.

لدينا المتتالية v_n متناقصة تماماً.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

ومنه نستنتج أن المتتاليات u_n و v_n متجاورتان.

الفروض الرياضية تُصنف ك نوع من أنواع السعادة، مثلاً كيف خالك...
والله رياضيات، رياضيات جداً

الدليل الثالث:

كتابة v_n بدلالة n :

المتتالية v_n متتالية هندسية ومنه:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

سنعود بعد قليل..

$$q = 2$$

$$v_0 = \frac{1 - u_0}{u_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$$

عدنا..

$$\frac{v_n}{1} = (2)^n$$

$$v_n = (2)^n$$

كتابة u_n بدلالة n :

المتتالية u_n لا نعلم نوعها لذلك من علاقة

التعايش نجد أن:

$$v_n = \frac{1 - u_n}{u_n}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$\frac{1}{u_n} = v_n + 1$$

$$u_n = \frac{1}{v_n + 1}$$

$$u_n = \frac{1}{(2)^n + 1}$$

الدليل الرابع:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-1.2 - 0.8}{2} = -1$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-0.8 + 1.2}{2} = 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$|f(x) - c| < r$$

$$\left| \frac{x}{2-x} + 1 \right| < \frac{1}{5}$$

$$\left| \frac{2}{2-x} \right| < \frac{1}{5}$$

$$\frac{|2|}{|2-x|} < \frac{1}{5}$$

ندرس إشارة $|2-x|$ وفق:

$$2-x=0 \rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

ومنه:

$$\frac{2}{-2+x} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{-2+x} > 5$$

$$-2+x > 10$$

$$x > 12$$

$$A = 12$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$0 < u_n < 1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$0 < u_{n+1} < 1$$

الإثبات..

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الاقليدية نجد أن:

$$u_{n+1} = -1 + \frac{2}{2-u_n}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من العلاقة الفرض (*):

$$0 < u_n < 1$$

نضرب ب (-1) :

$$0 > -u_n > -1$$

نضيف (2):

$$2 > 2 - u_n > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2-u_n} < 1$$

نضرب ب (2):

$$1 < \frac{2}{2-u_n} < 2$$

نضيف (-1) :

$$0 < -1 + \frac{2}{2-u_n} < 1$$

$$0 < u_{n+1} < 1$$

إذاً محققة أي كان العدد الطبيعي n .

الدليل الثاني:

$$v_n = \frac{1 - u_n}{u_n}$$

نشكل v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{u_n}{2-u_n}}{\frac{2-u_n-u_n}{2-u_n}}$$

$$= \frac{\frac{2-u_n-u_n}{2-u_n}}{\frac{2-u_n}{2-u_n}}$$

$$= \frac{2-2u_n}{2(1-u_n)} = \frac{u_n}{1-u_n}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{2(1-u_n)}{u_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1-u_n}{u_n}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2$$

إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q = 2$

التعريف الحادي عشر:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$u_0 = \frac{5}{2} \text{ و } u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$$

أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أن: $2 \leq u_n \leq 3$ أيأ كان العدد الطبيعي n .

1. أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$
2. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة.
3. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطلب الأول:

نرمز الخاصة: $2 \leq u_n \leq 3$: $E(n)$
 نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$\text{مدققة } 2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$2 \leq u_n \leq 3 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

نتعلق من العلاقة $(*)$:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

المرحلة الأولى: مرحلة الإصلا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - 4u_n + 6 \\ &= u_n^2 - 4u_n + 4 - 4 + 6 \\ &= (u_n - 2)^2 + 2 \end{aligned}$$

المرحلة الثانية: مرحلة البناء:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$

$$0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$

$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

ومنه القضية أيأ كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{l_1} = \frac{(u_n - 3)(u_n - 2)}{l_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_{n+1} - u_n \\ &= u_n^2 - 4u_n + 6 - u_n \\ &= u_n^2 - 5u_n + 6 \\ &= (u_n - 3)(u_n - 2) = l_2 \end{aligned}$$

الطلب الثالث:

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة. نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$$

لدينا من الطلب السابق:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

$$u_n - 2 \geq 0 \rightarrow \text{موجب}$$

$$u_n - 3 \leq 0 \rightarrow \text{سالب}$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة.

الطلب الرابع:

التقارب: بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة. حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعروف وفق:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

ولتحديد المتتالية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$x^2 - 4x + 6 = x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

مرفوض $x = 3 \rightarrow$ إما

مقبول $x = 2 \rightarrow$ أو

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

التعريف الثاني عشر:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية حسابية تحقق العلاقات:

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ a + 3b + 2c = 30 \end{cases}$$

1. احسب كلاً من a و b و c ثم استنتج r

أساس المتتالية u_n

2. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_0 = a$

3. احسب المجموع:

$$S = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{24}$$

الحل:

الطلب الأول:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من

متتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$

نعوض في (1) :

$$2b + b = 15 \rightarrow 3b = 15 \rightarrow b = 5$$

نعوض قيمة b في كل من (1) و (2) :

$$\begin{cases} a + c = 10 \dots (1) \\ a + 2c = 15 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب (1) ب (-2) نجد:

$$\begin{cases} -2a - 2c = -20 \dots (1)' \\ a + 2c = 15 \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - 2c = -20 \dots (1)' \\ a + 2c = 15 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أن:

$$-a = -5 \rightarrow a = 5$$

نعوض في (1) نجد: $c = 5$

ومنه: $a = 5, b = 5, c = 5$

استنتج قيمة r :

$$r = b - a = 5 - 5 = 0$$

الطلب الثاني:

بما أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية فإن:

$$u_n - u_0 = (n - 0)r$$

$$u_n - 5 = 0$$

$$u_n = 5$$

الطلب الثالث:

$$S = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{24}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول } = u_2 = ?$$

$$u_2 - u_0 = (2 - 0)r$$

$$u_2 - 5 = 0 \rightarrow u_2 = 5$$

$$\text{الحد الأخير } = u_{24} = ?$$

$$u_{24} - u_0 = (24 - 0)r$$

$$u_{24} - 5 = 0 \rightarrow u_{24} = 5$$

$$\text{عدد الحدود} = \frac{24 - 2}{2} + 1$$

$$= 11 + 1 = 12$$

$$\text{المجموع} = \frac{12}{2} (5 + 5) = 60$$

النماذج الوزارية:

التعريف الأول:

تكن $(x_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 \text{ و } x_0 = 4$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة:

$$y_n = x_n - 8$$

1. أثبت أن $(y_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

2. واكتب x_n بدلالة n

3. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

التعريف الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$$\mathbb{R} \text{ بالصيغة } f(x) = x e^{-x}$$

1. احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2. احسب $f'(x)$ ، ادرس اطراد التابع f

ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته

الحدية ثم ارسم C

3. احسب مساحة السطح المحصور بين C

والمستقيمين اللذين معادلتها $x = 0$

$$\text{ و } x = 1$$

4. بين أنه في حالة عدد حقيقي m من

المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة

$$f(x) = m \text{ حلين مختلفين.}$$

تكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما

$$\text{ يأتي: } u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

$$0 < u_n \leq 1$$

وذلك مهما كان العدد الطبيعي n .

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

ثم بين تقاربها واحسب نهايتها.

التعريف الثالث:

تكن $(x_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق:

$$\text{العلاقة } x_0 = 5 \text{ و } x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$$

1. احسب x_1 و x_2 و x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية

نعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$

2. أثبت أن $(y_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية.

3. اكتب y_n بدلالة n

4. ثم احسب $y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$

$$\text{ بدلالة قوة العدد } \frac{6}{5}$$

التعريف الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على

$$]0, +\infty[\cup]-\infty, 2[\text{ بالعلاقة}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1. احسب نهاية f عند كلا طرف من أطراف

مجموعة تعريفه D_f .

2. أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته

ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

3. ارسم الخط C في معلم متجانس.

لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^*
 وفق: $u_n = f(n)$
 نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 ٤. أثبت أن $S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

التعريف التاسع عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التكريرية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}, u_0 = \frac{1}{2}$$

١. أثبت أن $0 < u_n < 1$ أيًا كانت n من \mathbb{N}
 تعرف $(v_n)_{n \geq 0}$ حيث:

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

٢. أثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

واستنتج v_n بدلالة n

٣. اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التعريف السادس عشر: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$$u_0 = e^3 \text{ و } u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$$

v_n متتالية معرفة بالشكل:

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

١. أثبت أن v_n هندسية وعين q, v_0

٢. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

٣. أثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$

التعريف السابع عشر:

$$u_n = 4n + 1$$

أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها

واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

التعريف الثامن:

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$

المعرفتين وفق:

$$x_n = \frac{4n + 5}{n + 1}, y_n = \frac{4n + 1}{n + 2}$$

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان

التعريف التاسع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

١. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$

٢. أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

٣. عكس تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

واحسب نهايتها

التعريف العاشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة عند كل

عدد طبيعي n يحقق $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

١. أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

٢. أثبت أن $2 < u_n$ واستنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

التعريف الحادي عشر:

لتكن المتتالين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$

المعرفتين وفق:

$$u_n = -\frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

١. ادرس اطراد كلا من $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$

٢. أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$

متجاورتان.

التعريف الثاني عشر:

جد المجموع:

$$S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6$$

ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}}$ أثبت أن:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6 = 0$$

التعريف الثالث عشر:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرفة على

$$]0, +\infty[\text{ وفق: } f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

١. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

٢. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته

$$y = \frac{1}{2}x$$

٣. ادرس الوضع النسبي بين C_f ومقاربه d .

٤. حل المعادلة $f(x) = x$.

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً

بالشكل: $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ عند

كل $n \in \mathbb{N}$ والمطلوب:

٤. احسب u_1 و u_2 .

٥. استنتج من تزايد التابع f على المجال

$]2, +\infty[$ صحة الخاصية

$u_{n+1} < u_n < 2 < u_{n+1} < u_n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

٦. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة

واحسب نهايتها.

٧. ارسم مقاربات C_f والمستقيم $y = x$.

ثم ارسم C_f ومثل الحدود الأولى للمتتالية

$(u_n)_{n \geq 0}$ على الرسم نفسه.

التعريف الرابع عشر:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 4u_n} \text{ و } u_0 = 2$$

عند كل $n \in \mathbb{N}$.

١. أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$

أيًا كان العدد الطبيعي n .

٢. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

بالعلاقة v_n متتالية حسابية. ثم

اكتب عبارة v_n بدلالة n . ثم استنتج

عبارة u_n بدلالة n .

ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

٣. اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التعريف الخامس عشر:

ليكن f التابع المعرف على المجال

$]0, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة على \mathbb{N}^*

حيث $u_n = g(n)$ مقصور التابع f

على المجال $]1, +\infty[$.

١. ادرس تغيرات f على المجال $]0, +\infty[$

ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل

مقارب وجدته

٢. ارسم الخط C على المجال $]0, \infty[$.

٣. أثبت أن النقطة $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ هي مركز

تناظر للخط C . ثم استنتج رسم الخط

البياني للتابع f

نضع $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

٤. أثبت أن $s_n = -\ln(n+1)$

٥. جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$

وما نهاية $(s_n)_{n \geq 1}$

التعريف السادس عشر:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

١. اثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

٢. استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

أيًا كان العدد الطبيعي n

٣. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

التعريف السابع عشر:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n, u_0 = 4$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$

بالعلاقة: $y_n = u_n - 8$

أثبت أن u_n متتالية هندسية واكتب

y_n بدلالة n واحسب نهاية y_n

الاختبارات:

التعريف الأول:

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \text{ و } u_0 = 0$$

التعريف الثاني:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي:

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}, u_0 = 1$$

١. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ أيًا كان العدد

الطبيعي n

٢. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n > 0}$ متزايدة.

التعريف الثالث:

لتكن المتتاليات $(u_n)_{n>1}$ و $(v_n)_{n>1}$ المعرفتان كما يأتي:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$
 أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

التعريف الرابع:

تعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 1}{u_n + 2}, \quad u_0 = \frac{1}{2}$$
 1. باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4
 2. ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n>0}$ وتقارباها.
 تعرف المتتالية $(v_n)_{n>0}$ بالعلاقة:

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$$
 3. بين أن $(v_n)_{n>0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول.
 4. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n .

الدورات:

دورة 2017 الاولى 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \text{ و } u_0 = 1$$
 ولتكن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$
 1. أثبت لن v_n متتالية هندسية وأوجد أساسها
 2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
 3. عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية S_n

دورة 2017 الثانية 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
 1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة
 2. أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

دورة 2017 فصل نصف 60 درجة:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}, \quad u_0 = 1$$
 1. أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أي كان العدد الطبيعي n
 2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$
 بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n

دورة 2018 الاولى 60 درجة:

لتكن المتتاليات $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفتان وفق:

$$u_n = 5 - \frac{1}{n}, \quad v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$
 1. أثبت أن u_n متزايدة
 2. أثبت أن v_n متناقصة
 3. هل المتتاليات متجاورتان؟ عك إجابتك؟

دورة 2018 الثانية 40 درجة:

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وفيها $u_0 = 1$ والمطلوب:
 احسب u_3 واستنتج قيمة المجموع:

$$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$

دورة 2018 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x^2 - \ln(x)$$
 1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
 2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
 3. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$
 4. في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C

5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = e$ و $x = 1$
 تعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ حيث:

$$u_n = n^2 - \ln(n)$$
 6. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة

دورة 2019 الاولى 60 درجة:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$
 1. أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً
 2. أثبت أن S_n تكتب بالشكل:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n} \right)$$
 3. ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية S_n وبين أنها متقاربة

دورة 2019 الثانية 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$
 1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$
 2. أثبت أن العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$
 3. احسب نهاية المتتالية عند $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أيأ كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

دورة 2020 الاولى 80 درجة:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدرجية وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$
 عند كل $n \geq 0$ والمطلوب:
 1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$
 2. أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أيأ كان العدد الطبيعي n
 3. استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

دورة 2020 الثانية 80 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$$
 1. أثبت أن $n \leq 2^n$
 أيأ كان العدد الطبيعي $n \geq 1$
 2. استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$
 3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة

دورة 2021 الاولى 70 درجة:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$
 ولتعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_n + 6$$
 1. أثبت أن المتتالية v_n هندسية عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n
 لتعرف المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$w_n = \ln(v_n)$$
 2. أثبت أن المتتالية w_n حسابية واحسب w_0 ثم احسب المجموع:

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

دورة 2021 الثانية 70 درجة:

نتأمل المتتالية المعرفة وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ وأيأ كان العدد الطبيعي n :

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$
 1. أثبت أيأ كان العدد الطبيعي n :

$$2 \leq u_0 \leq 3$$
 2. أثبت أن المتتالية u_n متناقصة
 3. استنتج تقارب المتتالية u_n واحسب نهايتها

لا بأس في التعب .. إن كان لك حلم لا بأس في التعب .. إن كان لك حلم

دورة 2022 الاولي 70 درجته:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \\ u_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

أياً كان العدد الطبيعي n

2. أثبت أن:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$$

3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

4. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة

واحسب نهايتها

دورة 2022 الثانية 70 درجته:

لتكن المتتاليات $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

1. أثبت أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة و

$(v_n)_{n \geq 1}$ متتالية متناقصة

2. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n \geq 1}$

و $(v_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان

3. أثبت أن $u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ثم احسب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ واستنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

دورة 2023 الاولي 60 درجته:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} \text{ والمطلوب:}$$

1. أثبت أن $2 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n \geq 0$

2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً

واستنتج تقاربها ثم احسب نهايتها.

دورة 2023 الثانية 70 درجته:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على \mathbb{R} وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. أثبت أن $f(x) = \frac{x}{2} (1 + x^4) f'(x)$ ثم

استنتج $g'(x)$ حيث: $g: x \mapsto f(\sin x)$

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

2. أثبت أن $\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}$

أياً كان $n \geq 1$

3. استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

واحسب نهايتها.

عقد عزماً وأخفى عهداً ليُجاهد نفساً، ثم رددَ دوماً:

"إنَّ الأذى يختارهم الله نخبَةً كانوا يَكْتُمُونَ سِرّاً ويعملون ألفاً"



نخبَةٌ

شهرسهر بحث المتتاليات ونهاية متتالية:

1. أشكال المتتالية:

صريح - تدرجي - تعاريفي - مجموع

2. أنواع المتتالية:

* حسابية - هندسية

* إثبات نوع متتالية

* علاقة بين حدان كيفيان

* علاقة الحد العام

* حساب مجموع حدود من متتالية

* ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية.

3. الإثبات بالتدرج

4. اطراد متتالية

5. نهاية متتالية

6. متتاليتان متجاورتان

7. محدودية متتالية والحد الراجح والحد القاصر

8. تقارب متتالية

9. التمثيل الهندسي

للحدود الاولي لمتتالية معطاة بشكل تدرجي

ELITE M A P H

إن لي نفساً تثبت بالثعب..

لا توقفها العثرة، ولا تطفئها الخثرة، تبحث عن القلّة، تتنفس الفداولة، تؤمن أن جهاد النفس راحتها، وجهد الغرس ساحتها، والآخرة ميدانها، يُبنى الإنسان في تفاصيله، وتقوى روحه داخل سِرّه، يصقل نفسه الصّدق، ويرتّب قلبه للإخلاص! يعيش لله ويموت سائراً إليه.

إن الصادق ليجد في السرّ مكانه الأيمن. ♥

شيفرة الـ 600 فف الأهاف

3	العمفالف على الرمز ∞
3	قواعد إفجاد الأهاف "الأبع الصفء والفسرف"
5	أالف عدم الأعمفب
10	الأهاف الأمأففة
17	مرفهاف الإأاف والمقارفة
20	مأأوففة أابع
20	سلوك أابع
21	الأبع المرأ
22	الأهافة بأسأأاف الأعمرف
24	المقاربال
32	الأسأمرار
35	الأسأمرار على مآال
35	أسأمرار أابع الفروع على \mathbb{R}
36	أابع الأء الصفء
38	مقصور أابع
39	أابع الأقالب العكسف

شففره الـ 600 فف الأاشأاف

61	قرأفة أأول الأفراف	41	الرمز وقواعد الأاشأاف
67	مرفهفة القففة الوسأف	42	معافلة المسأقم
68	أصر ألول معافلة	44	المعاسر
69	الصفاأ الأافرففة	47	الأقرفب الألفف
70	أأافب الأواب	48	قابلفة الأاشأاف عند نقأة
73	رسم المسأقماف والأأول البفافة	54	قابلفة الأاشأاف على مآال
74	أسأأاف رسم الأأول البفافة	56	أسأأاف مسأف
75	المناقشة البفافة	57	المسأماف من مرافب علفا
77	مسائل شاملفة	59	أطراف أابع
81	قرأفة الأأول البفافة	60	أرافة أفراف أابع

شففره الـ 600 فف الأابع اللوغارفأفمف

106	أرافة أفراف أابع مسأمف الأول ألفط	89	أعمفب
107	أرافة أابع لأل مأراأة مأألأة	89	شرط أعمرف الأابع اللوغارفأفمف
109	أرافة أابع لأرافة الوضع النسبف	89	أواصر الأابع اللوغارفأفمف
109	المعاسر المأشأرأ	91	المعافلال اللوغارفأفمفة
111	بفب الماضف والأأصر	95	المأراأاف اللوغارفأفمفة
116	مسائل شاملفة	99	مأموفة أعمرف الأابع اللوغارفأفمف
129	الأوراف للأمأاففة	100	أهاف الأابع اللوغارفأفمف
130	الأعاف الوزارفة	103	أسأأاف الأابع اللوغارفأفمف
130	أأأاراف الأاب	104	أرافة أفراف الأابع اللوغارفأفمف
		105	أرافة أابع لأل معافلة مأألأة

شيفرة الـ 600 في التابع الأسّي

145	دراسة تغيرات تابع مشتقه الأول خليط	132	تمهيد
146	دراسة تابع لحق متراجحة مختلفة	132	شرط تعريف التابع الأسّي
146	دراسة تابع لدراسة الوضع النسبي	132	خواص التابع الأسّي
147	المعاسر المشترك	134	المعادلات الأسية
148	المعادلات التفاضلية	137	المتراجحات الأسية
150	التابع الأسّي الذي أساسه a	139	مجموعة تعريف التابع الأسّي
152	بين العاضّي والحاضر	139	نهايات التابع الأسّي
154	مسائل شاملة	142	النهايات المميزة
165	الدورات الامتحانية	143	اشتقاق التابع الأسّي
166	التماذج الوزارية	143	دراسة تغيرات التابع الأسّي
166	اختبارات الكتاب	144	دراسة تابع لحق معادلة مختلفة

شيفرة الـ 600 في التكامل والتتابع الأصلية

168	إثبات أن التابع F تابع أصلي
168	كيفية إيجاد تابع أصلي
168	خواص التكامل
168	قواعد التكامل
174	التكامل المحدد
176	التكامل بالتجزئة
178	تطبيقات التكامل
180	تمارين شاملة

شيفرة الـ 600 في المتتاليات

193	العلاقة بين ثلاثة حدود متوالية من متتالية	183	تعريف المتتالية
196	الإثبات بالتدرج	183	أشكال المتتالية
196	نمط المساواة	184	المتتالية الحسابية والهندسية
197	نمط المضاعفات	184	التعريف
198	نمط المتراجحات	185	إثبات نوع متتالية
200	إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدرجي	186	العلاقة بين حدان كفيان
202	اطراد متتالية	186	علاقة الحد العام "كتابة u_n بدلالة n "
204	دراسة اطراد متتالية معطاة بشكل تدرجي	188	مجموع حدود متوالية من متتالية

شيفرة الـ 600 في نهايات متتالية

212	محدودية متتالية	207	تمهيد
215	دراسة المتتالية المطردة	207	إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل صريح
218	التعميل الهندسي للحدود الأولى من متتالية معطاة بشكل تدرجي	208	إيجاد نهاية n (عدد)
219	تمارين شاملة	209	إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل مجموع
224	التماذج الوزارية	209	إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل تدرجي
225	اختبارات الكتاب	209	حصر متتالية في مجال
226	الدورات الامتحانية	210	المتتاليتان المتجاورتان

و هكذا نكون قد وصلنا للختام ..

بعد أيام من التعب والجهد والمحاولة، ومكابدة الأفكار، وإسقاطها على التمارين، وترتيب العقول بما فيها!
اللهم لك الحمد..

امتنان عظيم لكل من ثبت وثبت معنا، لكل من اجتهد على نفسه ولم يتركنا في المنتصف، لكل من سهر
الليالي وتعب طول الأيام في التدريب والعمل..

نبلغكم أنها كانت رحلة عظيمة مليئة بالتعب والصبر والفكر، بفضل الله..

يا نخبة.. 😊❤️

لا تنسوا ساعة، أننا اجتمعنا لله، وأن كل محاولاتنا العظيمة، لله!

وأن كل شخص تعرفنا عليه هنا هو جزء منا لا ينفصل، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلوبنا والكثير من حبنا
وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السجّادات، لا تتركوا يداً وقلوباً، شدوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك

شغف، هناك 600 ❤️❤️❤️❤️❤️

الحمد لله على نعمة العلم والعمل ❤️

#شيفرة_ال_600 🏆

#مسك_الختام 😊

#ختام_المسك ❤️

Elite_Math# 🏆❤️

ELITE MATH

في وداع طلابي / طالباتي

لقد جرت العادة أن يشكر الطلاب معلمهم أن كان معهم ، ولكني اليوم أجد نفسي شاكرًا ربي أولاً ثم طلابي وطلاباتي ثانياً أن كنت معلمهم ، ولربما ملهمهم بما قذف الله في قلبي من إسقاطات وأفكار . هي محبة من الله وحرقة تعتري القلب أخذت بزمام قلبي ليكون رابط الجأش ليسطر هذه الكلمات التي هي أعلى من ماء العيون.

فعلاً ، أشكركم يا من كنتم خير مثال لحملة العلم والأخلاق ، فأنتم ورثة الأنبياء ، بما سلكتم من طريق تلمسون فيه علماً ، وتهلون به معرفة.

قد كانت أياما لا تنسى ، وعلى فراقها يؤسى يؤساً ، ذكريات أكاديمية وأخوية قد خلدت نفسها لتترك بصمة أبدية على جبين الدهر ، فيمر من بعدكم فينال عبق تلك الذكرى العطرة ، فينهل منها ، ويقف لها إجلالاً وإكباراً. وحيث إنني لا أحب لحظات الوداع، فهي ترهق النفس، وتدمي القلب لأناس قدروا مخاطبهم، وأذهلوا معلمهم.

أتمسر منكم -أحبتني- أن تسامحوني إن قسوت يوماً، فو الذي نفسي بيده ما كانت إلا رحمة بكم كالباب الذي ورد في الكتاب "باطنه فيه الرحمة وظاهره من قبله العذاب". فإن من خوفك حتى تلقى الأمن خير ممن أمنك حتى تلقى الخوف، فالأعمال بخواتيمها، سائلاً المولى تعالى أن يكون ختامها مسكاً وبركة ونوراً وهدى.

سأبقى مخلصاً لكم بدعائي وصلاتي، وجهري وسري، فأنتم أمانة في عنقي، وعهددة في رقبتي، وإخوة في قلبي.

سأحدث عنكم القاصي والداني، سأروي حكايتكم للأجيال القادمة، فأنتم جيد التحدي الذي ثبت ثبات الجبال، لأنه وطن قلبه بذكر الله والتوكل عليه، "ومن يتوكل على الله فهو حسبه".

وإني من مقامي هذا، أرى نور توفيق الله لكم، أراكم بأعلى المراتب وقد أشرقت مستقبلكم، وزالت آلامكم، فأبشروا بما قدمتم لأنفسكم، "وآتوا حقه يوم حصاده"، فعليكم بزكاة العلم أن تعملوا لأخرتكم، "والآخرة خير وأبقى".

اذكرونني (^)

محبكم خالد عامر وفريقه

2024



الـ 600

شيفرة

1

أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيغ المحتملة لورودها وفقاً للتوصيف الوزاري و خطوات الإجابة عنها

2

مخططات وجداول لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة

3

مسائل امتحانية جزئية و شاملة محلولة

ELITE MATH

