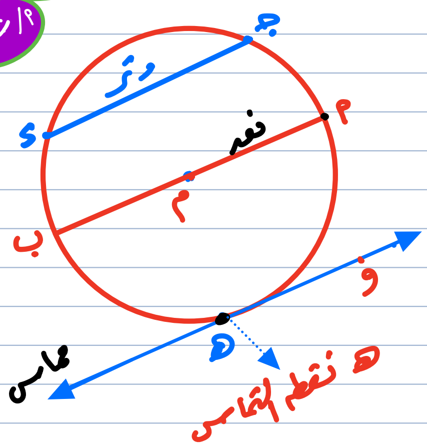
سر التفوق
في الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

10

أ/ شكري الجميعي

٦-١ (أ)



تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

م أ نصف قطر

أ ب قطر

و هـ مماس

نظرية (١)

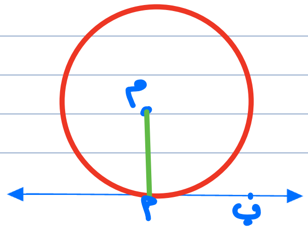
كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

امتحانات وزارة

موضوعي

- أي ثلاث نقاط تمر بها دائرة واحدة — أ — **ب**
- كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة . — **أ** — ب

مماس الدائرة



نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس

، $\overline{م أ}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{م أ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∴ ق(م أ̂ ب) = ٩٠°

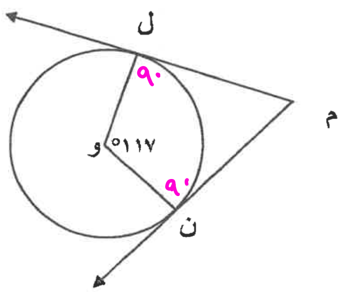
مثال (٢)

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل $\overleftarrow{م ل}$ ، $\overleftarrow{م ن}$ مماسان للدائرة التي مركزها و،

ق(ل و̂ ن) = ١١٧°

أوجد ق(ل م̂ ن) .



∵ $\overline{م ل}$ مماس ، $\overline{و ل}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{م ل} \perp \overline{و ل}$ ⟸ ق(م ل̂ و) = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overline{م ن}$ مماس ، $\overline{و ن}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{و ن}$ ⟸ ق(م ن̂ و) = ٩٠° (نظرية)

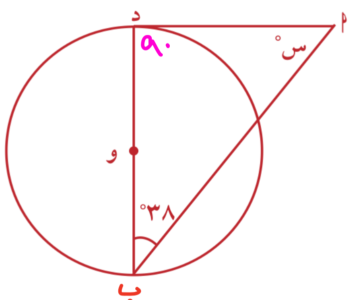
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(ل م̂ ن) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٧°) = ٦٣°

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و

أوجد قيمة س°.



∵ $\overline{أد}$ مماس ، $\overline{و د}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{أد} \perp \overline{و د}$ ⟸ ق(أ د̂ و) = ٩٠° (نظرية)

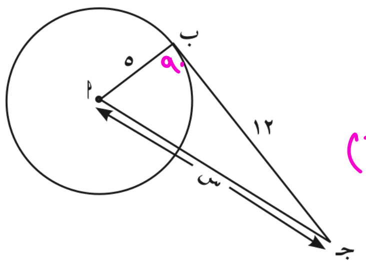
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٨°) = ٥٢°

∴ س° = ٥٢°

كراسة التمارين

(٩) ب جـ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.



∵ جـ ب مماس ، م ب نصف قطر التماس

∴ جـ ب ⊥ م ب ⇐ ق(∠ م ب جـ) = ٩٠° (نظرية)

∵ Δ م ب جـ قائم الزاوية ⇐ من فيثاغورث

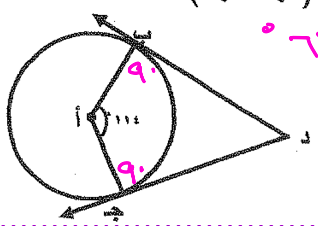
س = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣ سم .

إمتحانات وزارة

موضوعي

في الشكل المقابل : إذا كان د ب ، جـ د مماسان للدائرة ، ق (ب أ جـ) = ١١٤°

فإن ق (ب د جـ) = ٣٦٠ − (٩٠° + ٩٠° + ١١٤°) = ٦٦°



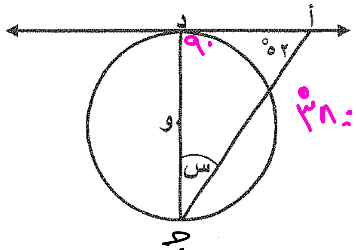
(أ) ٢٦° (ب) ٥٧°

(جـ) ٦٦° (د) ١١٤°

في الشكل المقابل :

إذا كان أ د مماس للدائرة عند د حيث و مركز الدائرة

، فإن قيمة س تساوي : س = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٢) = ٣٨°

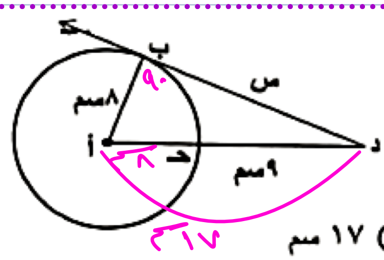


(أ) ٥٢° (ب) ٩٠°

(جـ) ٣٨° (د) ١٢٨°

في الشكل المقابل دائرة مركزها أ ونصف قطرها ٨ سم ،

إذا كان د ب مماس للدائرة عند ب ، د جـ = ٩سم ، فإن س =

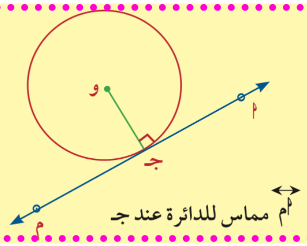


(أ) ٨ سم (ب) ٩ سم (جـ) ١٥ سم (د) ١٧ سم

من فيثاغورث س = $\sqrt{١٧^٢ - ٨^٢}$ = ١٥ سم .

نظرية (٣)

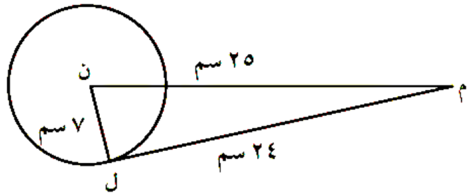
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



مثال (٤)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



من عكس فيثاغورث

(م ن)^2 = (٢٥)^2 = ٦٢٥ ، (م ل)^2 + (ن ل)^2 = (٢٤)^2 + (٧)^2 = ٦٢٥

∴ (م ن)^2 = (م ل)^2 + (ن ل)^2 ⟸ ∴ المثلث قائم الزاوية في (ل̂)

∴ ق(ل̂) = ٩٠° ⟸ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ن ل}}$

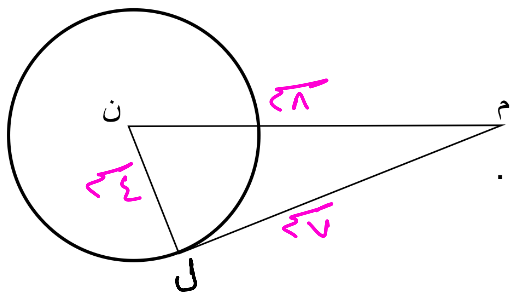
⟸ $\overline{\text{م ل}}$ مماس

حاول أن تحل رقم ٤ :

في الشكل المقابل دائرة مركزها ن

ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨ ،

فهل $\overline{\text{م ل}}$ مماس للدائرة ؟ فسر إجابتك .



من عكس نظرية فيثاغورث

(م ن) = (٨)^2 = ٦٤

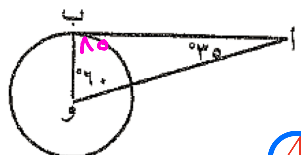
(ن ل)^2 + (ل م)^2 = (٤)^2 + (٧)^2 = ٦٥

٦٤ ≠ ٦٥ ⟸ ق(ل̂) ≠ ٩٠°

⟸ $\overline{\text{م ل}}$ ليس مماس

امتحانات وزارة
موضوعي

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يكون مماسًا للدائرة عند ب



ق(ب) = ٨٥° ≠ ٩٠°

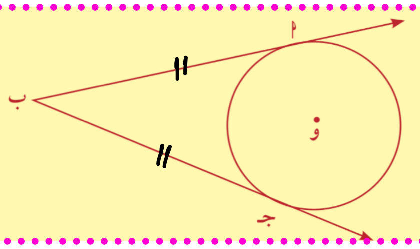
أ ب

مماس الدائرة
نظرية (٤)

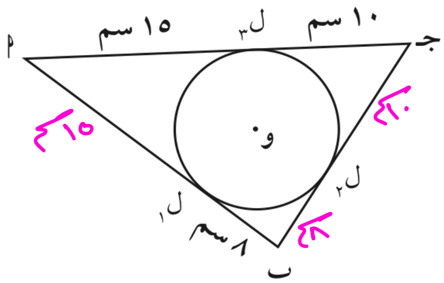
نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{أب} \cong \overline{جـ ب}$



مثال (٦) في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أب جـ.



∵ جـ ل٣ = جـ ل٢ = ١٠ سم (نظرية)

∵ أ ل٣ = أ ل١ = ١٥ سم (نظرية)

∵ ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم (نظرية)

∵ محيط △ = مجموع أطوال أضلاعه.

∴ المحيط = ١٠ + ١٠ + ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ = ٦٦ سم.

إمتحانات وزارة

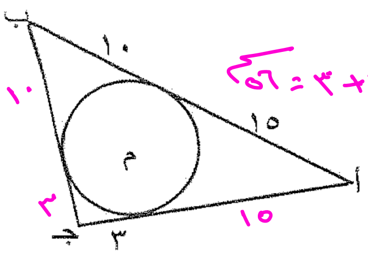
موضوعي

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م

محيط المثلث أ ب جـ يساوي: = ١٥ + ١٥ + ١٠ + ١٠ + ٣ + ٣ = ٥٦ سم

(أ) ٤٣ (ب) ٦٦

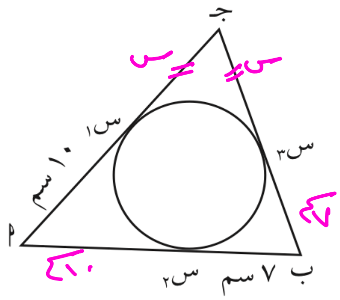
(ج) ٥٦ (د) ٧٠



Mr. Shokry

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أب جـ = ٥٠ سم،
فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



∵ ب س = ب س٢ = ٧ سم (نظرية)

∵ أ س١ = أ س٢ = ١٠ سم (نظرية)

∵ جـ س٣ = جـ س١ = س (نظرية)

∵ المحيط = ٥٠

س + س + ٧ + ٧ + ١٠ + ١٠ = ٥٠

٢س + ٣٤ = ٥٠

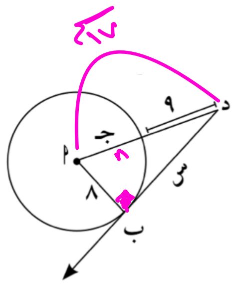
٢س = ٥٠ − ٣٤ = ١٦

س = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم.

∴ ب جـ = ٨ + ٧ = ١٥ سم.

كراسة التمارين

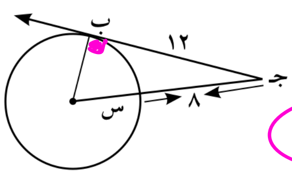
موضوعي



من فيثاغورث

(١٠) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ مماس للدائرة. فإن س = $\sqrt{١٧^2 - ٨^2}$ = ١٥ سم

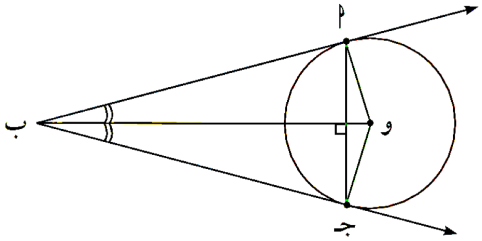
(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧



(١١) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

نتائج نظرية (٤)



Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

① $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ ب̂ جـ

② $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ و̂ جـ

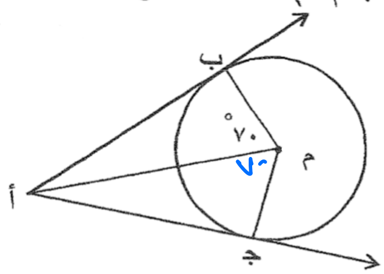
③ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أ نقطة خارج الدائرة حيث $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب ، ق (ب م̂ أ) = ٧٠° فأوجد :

١) ق (م جـ̂ أ)

٢) ق (جـ أ̂ ب)



∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{م جـ}}$ ⟸ ق(م جـ̂ أ) = ٩٠° (نظرية) .

∵ $\overline{\text{أ م}}$ ينصف (ب م̂ جـ) ، ق(ب م̂ أ) = ٧٠° . (من نتائج نظرية ٤)

∴ ق (ب م̂ جـ) = ٧٠° + ٧٠° = ١٤٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس ، $\overline{\text{ب م}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب م}}$ ⟸ ق(أ ب̂ م) = ٩٠° (نظرية) .

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٤٠°) = ٤٠° .

(تراعى الحلول الأخرى)

إمتحانات وزارة

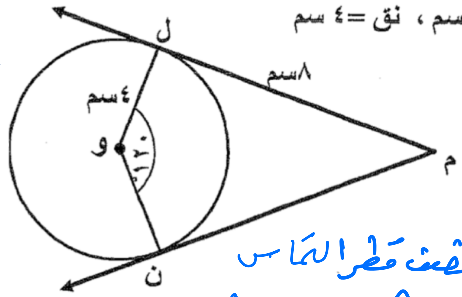
في الشكل المقابل م ل، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و

ق(ل و ن) = ١٢٠°، م ل = ٨ سم، نق = ٤ سم

أوجد مع ذكر السبب:

١- ق(ل م ن) .

٢- محيط الشكل ل م ن و.



∵ م ل مماس، و ل نصف قطر التماس

∴ م ل ⊥ و ل ⇐ ق(م ل و) = ٩٠° (نظرية)

∵ م ن مماس، و ن نصف قطر التماس

∴ م ن ⊥ و ن ⇐ ق(م ن و) = ٩٠° (نظرية)

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(ل م ن) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ م ل = م ن = ٨ سم نظرية

∵ ل و = ن و = ٤ سم

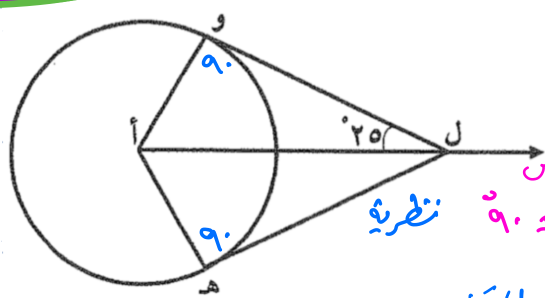
أنصاف أقطار متساوية

∴ محيط الشكل = ٨ + ٨ + ٤ + ٤ = ٢٤ سم

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل: دائرة مركزها أ ، إذا كانت ل هـ ، ل و تمسان الدائرة فأوجد :

(١) ق(أ هـ ل)   (٢) ق(ل أ و)



∵ ل هـ مماس، أ هـ نصف قطر التماس

∴ ل هـ ⊥ أ هـ ⇐ ق(أ هـ ل) = ٩٠° نظرية

∵ ل و مماس، و أ نصف قطر التماس

∴ ل و ⊥ و أ ⇐ ق(ل و أ) = ٩٠°

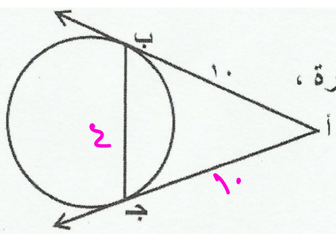
∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(ل أ و) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

(تراعى الحلول الأخرى)

إمتحانات وزارة
موضوعي

من الشكل المقابل : إذا كان أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة ،
محيط المثلث أ ب جـ = ٢٤ فإن ب جـ =



(أ) ٢   (ب) ٤

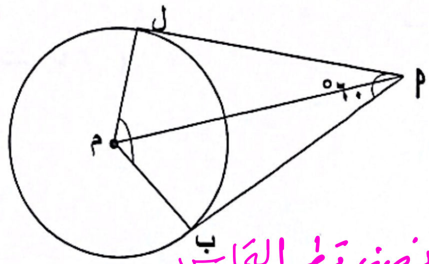
(جـ) ١٠   (د) ٦

Mr. Shokry

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ مماسان للدائرة من النقطة أ ،

ق (ل $\hat{\text{أ}}$ ب)= ٦٠° ، أوجد :



١) ق (ل $\hat{\text{م}}$ ب)

٢) ق (ل $\hat{\text{أ}}$ م)

∵ أل مماس ، م ل نصف قطر التماس

∴ أل ⊥ م ل ⟸ ق(ل) = ٩٠° (نظرية)

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر التماس

∴ أب ⊥ م ب ⟸ ق(ب) = ٩٠° (نظرية)

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(ل $\hat{\text{م}}$ ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

من نتائج نظرية (٤)

∵ أم ينصف (أ)

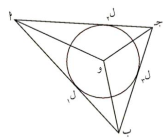
∴ ق(ل $\hat{\text{أ}}$ م) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

(تراعى الحلول الأخرى)

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

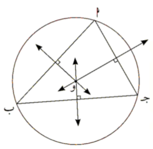
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر بروؤس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



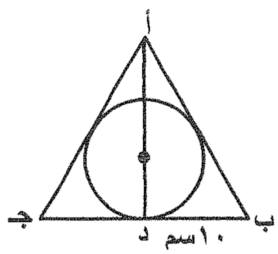
إمتحانات وزارة

موضوعي

مركز الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أ ب

مركز الدائرة الخارجة التي تمر بروؤس المثلث الثلاثة هي نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية أ ب

في الشكل المقابل : دائرة داخلة للمثلث أ ب جـ ،
إذا كان المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع ، ب د = ١٠ سم
فإن محيط المثلث أ ب جـ يساوي ٤٥ سم



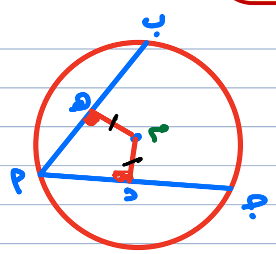
أ ب

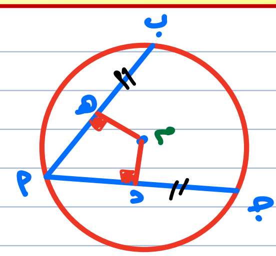
الأوتار والأقواس

نظرية (٢) :

① الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة .

② الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة .



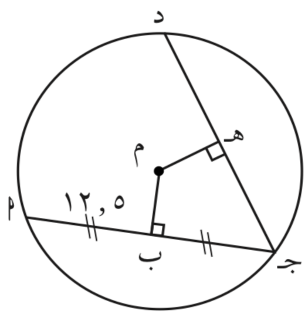


إذا كان أ ب = أ جـ أوتار متساوية — م د = م هـ أبعاد متساوية

فإن م د = م هـ أبعاد متساوية — أ ب = أ جـ أوتار متساوية

مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر



∵ أ ب = ب جـ = ١٢,٥ ⟸ أ جـ = ١٢,٥ + ١٢,٥ = ٢٥ سم .

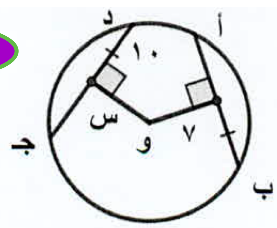
∵ م ب = م هـ أبعاد متساوية (معطى)

∴ أ جـ = جـ د أوتار متساوية (نظرية)

∴ جـ د = ٢٥ سم .

امتحانات وزارة — موضوعي

في الشكل المجاور دائرة مركزها و
إذا كان أ ب = جـ د فإن قيمة س هي :

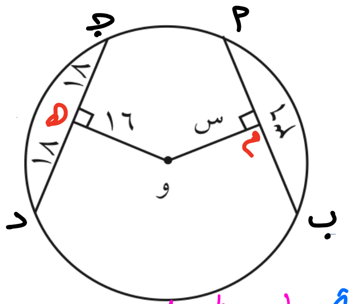


(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢ $\sqrt{١٤}$ (د) ٧

حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



∵ م ب = جـ د = ٣٦ سم أوتار متساوية (معطى)

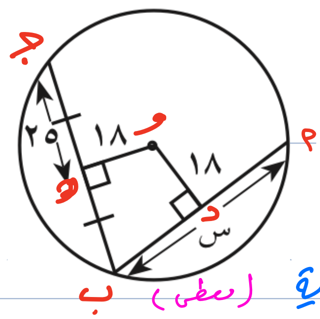
∴ وم = وهـ أبعاد متساوية . (نظرية)

∴ وم = ١٦ سم

س = ١٦ سم .

كراسة التمارين

أوجد قيمة س



∵ جـ هـ = هـ ب = ٢٥ سم

∴ جـ ب = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠ سم

∵ ود = وهـ = ١٨ أبعاد متساوية (معطى)

∴ م ب = جـ ب أوتار متساوية (نظرية)

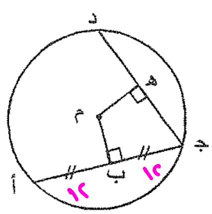
∴ م ب = ٥٠ سم .

امتحانات وزارة

موضوعي

في الشكل المقابل إذا كان م مركز الدائرة ، أب = ١٢ سم

م ب = م هـ ، فإن طول $\overline{\text{جـ د}}$ =

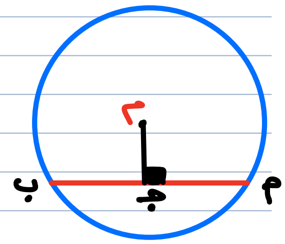


أ ٦ سم   ب ١٢ سم   جـ ٢٤ سم   د ٣٦ سم

Mr. Shokry

نظرية (٣) :

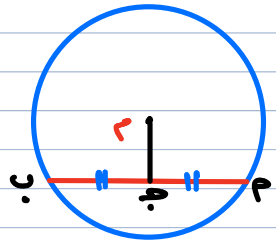
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه و ينصف كلاً من قوسيه .
٢ القطر الذي ينصف وتراً (ليس قطراً) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر .
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .



$\overline{مجـ} \perp \overline{اب}$

فإن

اجـ = جـ ب



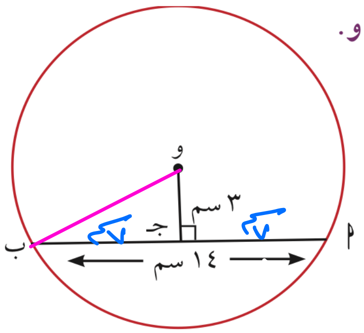
اجـ = جـ ب

فإن

$\overline{مجـ} \perp \overline{اب}$

ق(∠م جـ ا) = ٩٠°

مثال (٣) أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



العمل : نصل نصف القطر وليكن $\overline{وب}$

∵ $\overline{وجـ} \perp \overline{اب}$

∴ جـ منتصف $\overline{اب}$ نظرية

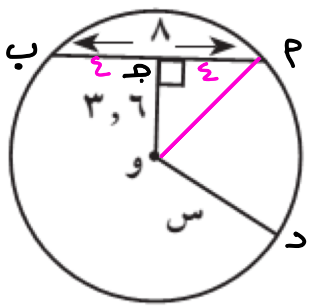
∴ اجـ = جـ ب = ٧ سم .

في المثلث القائم الزاوية وجـ ب

∴ من فيثاغورث

وب = نق = $\sqrt{٧^٢ + ٣^٢}$ ≃ ٧,٦ سم

كراسة التمارين في الشكل المقابل أوجد قيمة س



العمل : نصل $\overline{وا}$ = نق = س

∵ $\overline{وجـ} \perp \overline{اب}$ ∴ جـ منتصف $\overline{اب}$

∴ اجـ = جـ ب = ٤ سم

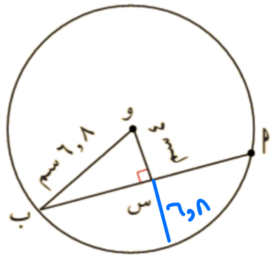
△ اجـ و قائم الزاوية ∴ من نظرية فيثاغورث

∴ او = $\sqrt{(٤)^٢ + (٣,٦)^٢}$ ≃ ٥,٤ سم .

∴ س = ٥,٤ سم

حاول أن تحل

في الشكل المقابل أوجد :



١) طول الوتر $\overline{مب}$.

٢) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{مب}$.

١) ∵ $\overline{وس} \perp \overline{مب}$ ∴ س منتصف $\overline{مب}$

△ وس ب قائم الزاوية ∴ من نظرية فيثاغورث

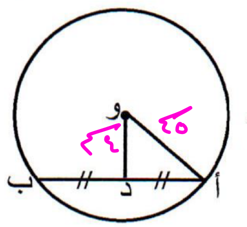
∴ $سب = \sqrt{(٦,٨)^٢ - (٤)^٢} \simeq ٥,٥$ سم

∴ $مب = ٥,٥ + ٥,٥ = ١١$ سم

٢) المسافة من منتصف الوتر = $٦,٨ - ٤ = ٢,٨$ سم .

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٥سم ، و د = ٤سم ، فأوجد طول $\overline{أب}$.



∵ د منتصف $\overline{مب}$ (معطى)

∴ $\overline{ود} \perp \overline{مب}$ (نظرية)

△ م د و قائم الزاوية

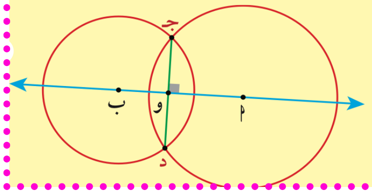
∴ من فيثاغورث

$مد = \sqrt{(٥)^٢ - ٤^٢} = ٣$ سم .

$مب = ٣ + ٣ = ٦$ سم .

نتيجة

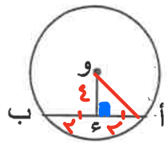
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



إمتحانات وزارة موضوعي

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، أب = ٦سم

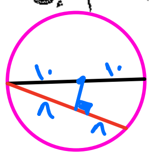
و ء = ٤ سم ،طول نصف قطر الدائرة يساوي نق: $\sqrt{٤^٢+٣^٢} = ٥$



(أ) ١٠سم (ب) ٦سم (ج) ٥سم (ء) ٤ سم

إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم و طول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة و هذا الوتر يساوي ١٠ سم (أ) (ب)

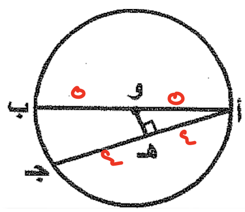
البعد: $\sqrt{١٠^٢-٨^٢} = ٦$ سم



في الشكل المقابل : إذا كان طول قطر دائرة يساوي ١٠سم ،

أجـ = ٨ سم فإن هـ و = ٣ سم . (أ) (ب)

هـ و: $\sqrt{٥^٢-٤^٢} = ٣$ سم



القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسبه. (أ) (ب)

(نظرية)

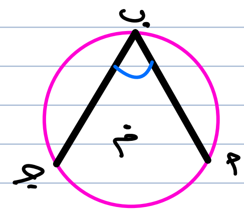
٦ـ٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

١ – الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

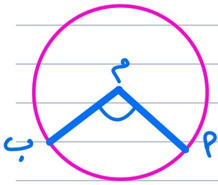
تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.



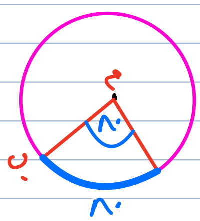
(أ بَ جـ)
زاوية محيطية



(أ مَ ب)
زاوية مركزية

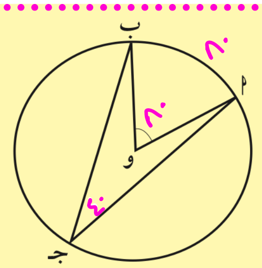
نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.



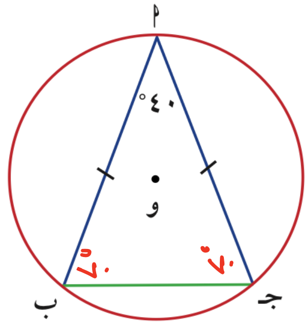
نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال (٣) إمتحانات وزارة



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أ^ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس أب⌒، ب جـ⌒، أ جـ⌒ .

∵ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين

أ ب = أ جـ ، ق(أ^) = ٤٠°

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق(ب^) = ق(جـ^) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

∵ ق(أ ب⌒) = ٢ ق(جـ^)

∴ ق(أ ب⌒) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠° .

∵ ق(ب جـ⌒) = ٢ ق(أ^)

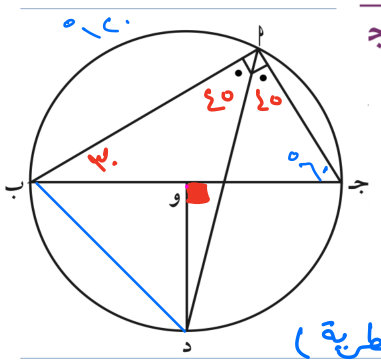
∴ ق(ب جـ⌒) = ٢ × ٤٠° = ٨٠° .

∵ ق(أ جـ⌒) = ٢ ق(ب^)

∴ ق(أ جـ⌒) = ٢ × ٧٠ = ١٤٠°

(يراعى الحلول الأخرى)

مثال (٤)



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

إذا كان ق(أ ب^ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ د^ ب) .

أولاً ∵ من هندسة الشكل د أ ينصف (جـ أ^ ب)

∴ ق(جـ أ^ د) = ق(ب أ^ د) = $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٤٥°

∵ ق(جـ و^ د) المركزية = ٢ ق(جـ أ^ د) المحيطية (نظرية)

∴ ق(جـ و^ د) = ٢ × ٤٥° = ٩٠° ⟸ ∴ $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

ثانياً نصل $\overline{ب د}$

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب جـ = ١٨٠°

∴ ق(أ جـ^ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∴ ق(أ ب⌒) = ٢ × ق(جـ^) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

∴ ق(أ د^ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ ب⌒) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠° .

موضوعي **إمتحانات وزارة**

$\frac{1}{2}$

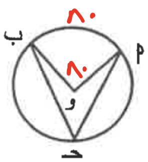
قياس الزاوية المحيطية يساوي قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس   (أ)   (ب)

ضعف

قياس الزاوية المركزية يساوي نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس   (أ)   (ب)

٤٠

في الشكل المقابل : إذا كان ق (⌒أ ب) = ٨٠° فإن ق (أ ^جـ ب) = ٨٠°

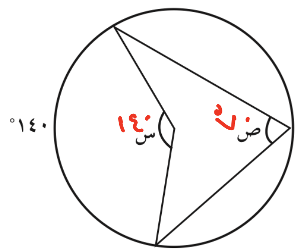


(أ)   (ب)

في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

(أ) ٢٨٠°، ١٤٠°   (ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠°   (د) ١٤٠°، ٧٠°

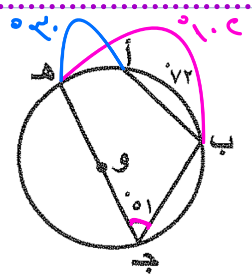


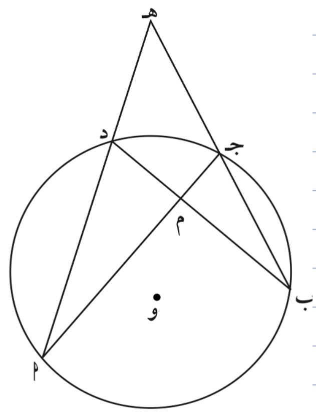
من الشكل المقابل : إذا كان ق(⌒أ ب) = ٧٢° ،

ق (ب ^جـ هـ) = ٥١° فإن ق(⌒هـ أ) =

(أ) ٣٠°   (ب) ٦٨°

(جـ) ٧٢°   (د) ١٠٢°



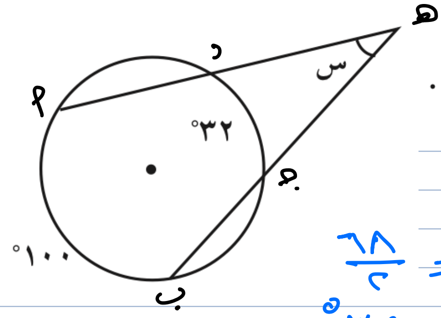


معلومة هامة

ق(ب مٌ أ) = (ق(أب) + ق(هـ د)) / ٢

ق(هـ) = (ق(أب) − ق(هـ د)) / ٢

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

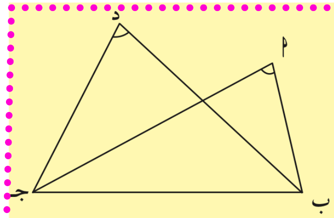


س = ق(هـ) = (ق(أ ب) − ق(جـ د)) / ٢

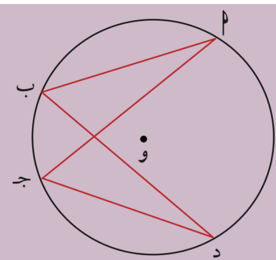
= (١٠٠ − ٣٢) / ٢ = ٦٨ / ٢

= ٣٤°

٦ـ٣ نتائج

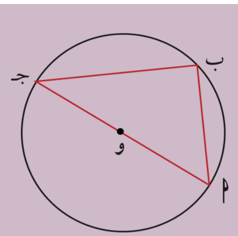


1. كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
2. كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
3. كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
4. في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



أبد ، أجـد تحصران أد

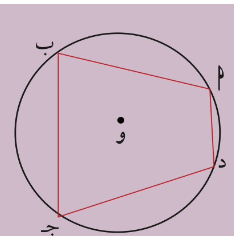
∴ ق(أبد) = ق(أجـد)



أبجـ تحصر أجـ (نصف دائرة)

∴ ق(أبجـ) = ٩٠°

(أبجـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

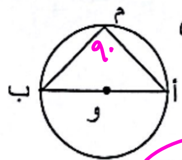


ق(أ) + ق(جـ) = ١٨٠°

ق(ب) + ق(د) = ١٨٠°

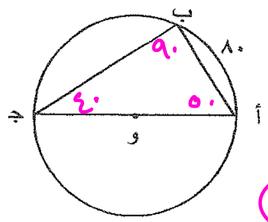
كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان . ✓

في الشكل المقابل : أب قطرفي الدائرة التي مركزها و ، ق(أ م ب) يساوي



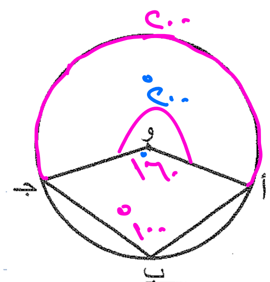
(أ) ٤٥° (ب) ١٨٠° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، إذا كان ق (أب) = ٨٠°
فإن ق (ب أ جـ) = ١٨٠° − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°



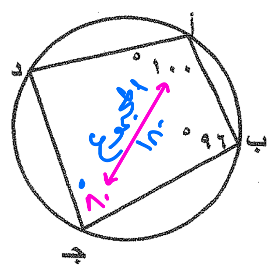
(أ) ٨٠° (ب) ٤٠° (جـ) ١٠٠° (د) ٥٠°

في الشكل المقابل إذا كان ق (أ و جـ) = ١٦٠° فإن ق (ب) =



(أ) ٦٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٢٠°

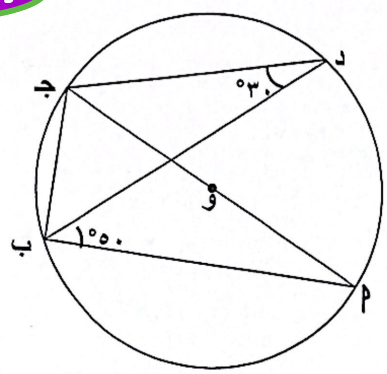
في الشكل المقابل : فإن ق (ب جـ د) =



(أ) ١٦٠° (ب) ٨٤° (ج) ٨٠° (د) ١٠٠°

امتحانات وزارة

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أ جـ قطر فيها ، إذا كان ق (جـ د̂ ب) = ٣٠° ق (م ب̂ د) = ٥٠° . فأوجد كلا من :

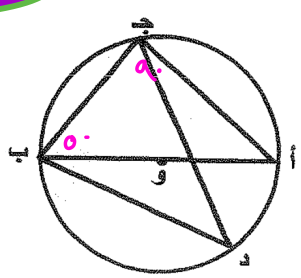


١) ق (جـ م̂ ب)
٢) ق (م ب̂ جـ)
٣) ق (م⁀د)

① ∵ ق(جـ د̂ ب) = ق(ب م̂ جـ) زاوايا محيطية على نفس القوس ب جـ
∴ ق (جـ م̂ ب) = ٣٠°
② ∵ م جـ قطر
∴ ق(م ب̂ جـ) = ٩٠° زاوية محيطية مرسومة على نصف دائرة .
③ ق م⁀د = ٢ ق (م ب̂ د)
∴ ق م⁀د = ٢×٥٠ = ١٠٠°

امتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان ق (جـ ب̂ أ) = ٥٠°
أوجد كلاً مما يلي مع ذكر السبب :

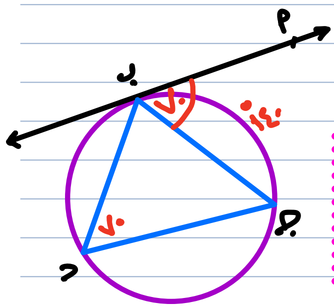


(١) ق (أ جـ̂ ب)
(٢) ق (جـ أ̂ ب)
(٣) ق (جـ د̂ ب)

(١) ∵ م ب قطر
∴ ق(م جـ̂ ب) = ٩٠° زاوية محيطية مرسومة على نصف دائرة .
(٢) ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°
∴ ق(جـ م̂ ب) = ١٨٠° − (٩٠ + ٥٠) = ٤٠° .
(٣) ∵ ق(جـ د̂ ب) = ق(جـ م̂ ب) زوايا محيطية مرسومين على نفس القوس جـ ب
∴ ق (جـ د̂ ب) = ٤٠° .

Mr. Shokry

٦–٣ الزاوية المماسية



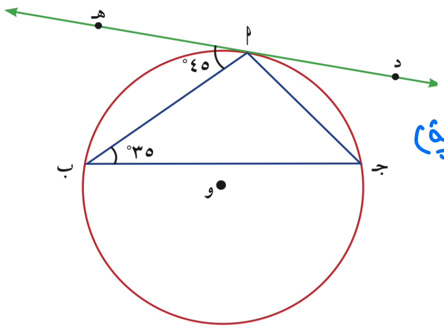
نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

مثال (٧) في الشكل المقابل إذا كان د هـ مماسًّا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ ب)

إمتحانات وزارة



∵ د هـ مماس ، ق(هـ أ ب) = ٤٥°،

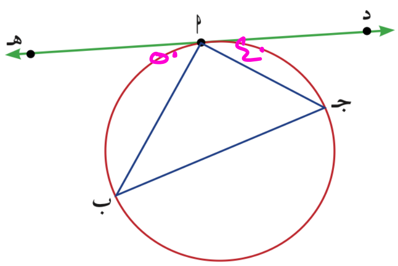
∵ ق(هـ أ ب) المماسية = ق(جـ) المحيطية (نظرية)

∴ ق(جـ) = ٤٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°) = ١٠٠°،

حاول أن تحل **إمتحانات وزارة**



٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ ب) = ٥٠°

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن جـ ب قطر للدائرة.

أ) ∵ د هـ مماس ،

∵ ق(د أ جـ) المماسية = ق(ب) المحيطية (نظرية) ∴ ق(ب) = ٤٠°

∵ ق(هـ أ ب) المماسية = ق(جـ) المحيطية (نظرية) ∴ ق(جـ) = ٥٠°

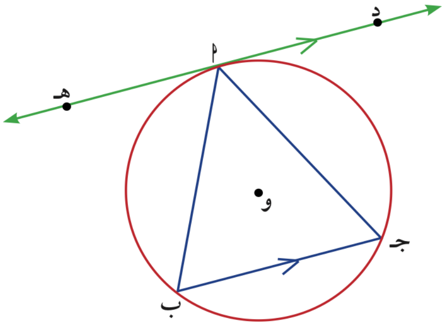
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٤٠°) = ٩٠°،

ب) ∵ ق(جـ أ ب) = ٩٠° زاوية محيطية مرسومة على نصف دائرة

∴ جـ ب قطرًا .

مثال (٩) إمتحانات وزارة



في الشكل المقابل، دهـ مماس للدائرة عند النقطة أ
ب جـ وتر في الدائرة موازٍ للمماس دهـ.
أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.

∵ دهـ مماس للدائرة عند النقطة أ

∴ ق(د أ جـ) المماسية = ق(ب) المحيطية ← ① (نظرية)

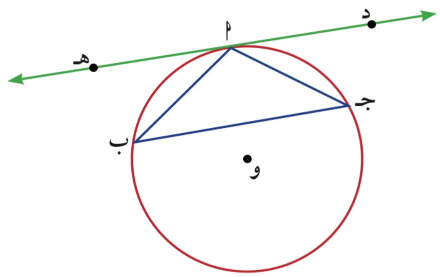
∵ دهـ // ب جـ

∴ ق(د أ جـ) = ق(جـ) ← ② بالتبادل والتوازي

∴ من ①، ② نستنتج أن ق(ب) = ق(جـ)

∴ أ ب = أ جـ ⟸ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

حاول أن تحل



٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا دهـ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).
أثبت أن دهـ // ب جـ

∵ △ أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

∴ ق(جـ) = ق(ب) ← ①

∵ ق(د أ جـ) المماسية = ق(ب) المحيطية (نظرية) ← ②

∴ من ①، ② نستنتج أن

ق(د أ جـ) = ق(جـ) وهما في وضع تبادل

∴ دهـ // ب جـ

إمتحانات وزارة

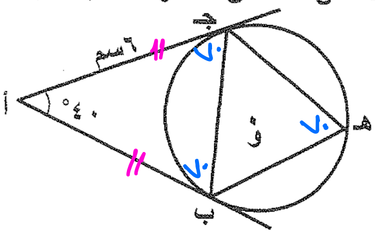
في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب

، ق(∠أ) = ٤٠° ، أجـ = ٦ سم

أوجد (١) أب

(٢) ق(∠أجـب)

(٣) ق(∠جـهـب)



① ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان من نقطة أ خارج الدائرة (نظرية)

∴ أب = أجـ

∴ أب = ٦ سم.

② ∵ △ أبجـ متطابق الضلعين أب = أجـ

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠أبجـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°.

③ ∵ ق(∠أجـب) المماسية = ق(∠جـهـب) المحيطية نظرية

∴ ق(∠جـهـب) = ٧٠°

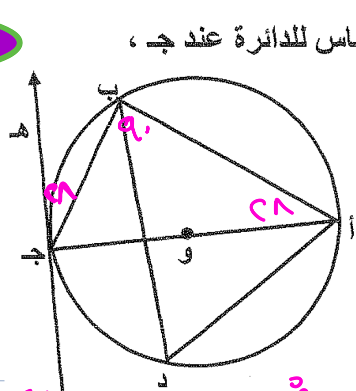
إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{هـجـ}$ مماس للدائرة عند جـ ،

ق(∠بجـهـ) = ٢٨° ،

أوجد كل من :

ق(∠أبجـ) ، ق(∠بأجـ) ، ق(∠أدب)



① ∵ أجـ قطراً ⟸ ق(∠أبجـ) = ٩٠° زاوية محيطية مرسومة في نصف دائرة

② ∵ $\overleftrightarrow{هـجـ}$ مماس

∴ ق(∠بجـهـ) المماسية = ق(∠بأجـ) المحيطية (نظرية)

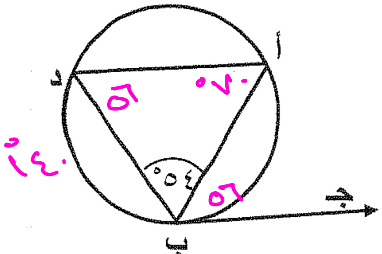
∴ ق(∠بأجـ) = ٢٨°.

③ ∵ ق(∠بجـأ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٨°) = ٦٢°

∵ ق(∠بجـأ) = ق(∠أدب) زوايا محيطية على نفس القوس $\overset{\frown}{أب}$

∴ ق(∠أدب) = ٦٢°.

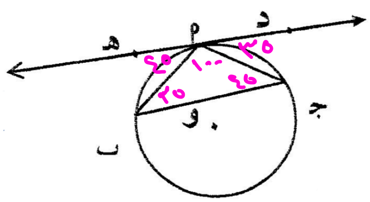
في الشكل المقابل إذا كان ق (⌒ب د) = ١٤٠° فإن ق (أ ب̂ ج) = ٥٦



(أ) ٧٠° (ب) ٥٠°

(ج) ٥٦° (د) ١٢٤°

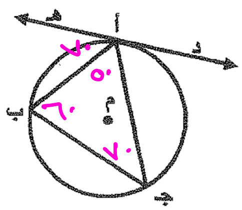
في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، د ه ↔ مماس لها عند النقطة م ، ق(ه م̂ ب) = ٤٥° وق(م ب̂ ج) = ٣٥° فإن ق(ج م̂ ب) =



(م) ٧٠° (ب) ٨٠°

(ج) ٩٠° (د) ١٠٠°

في الشكل المقابل : إذا كان د ه ↔ مماساً للدائرة عند أ ، ق (ه أ̂ ب) = ٧٠° ، ق (ج ب̂ أ) = ٦٠° فإن ق (ج أ̂ ب) = ٥٠°

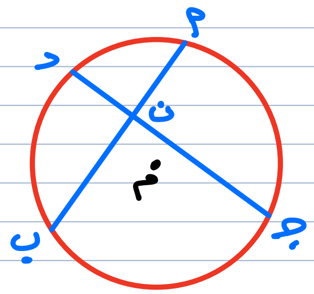


أ ٥٠° ب ٦٠°

جـ ٧٠° د ١٣٠°

الأوتار المتقاطعة، المماس

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

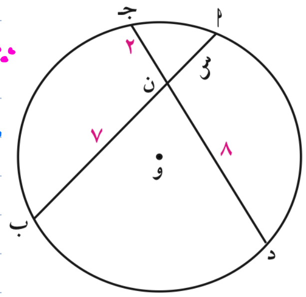


∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{جد}$ وتران متقاطعين داخل الدائرة

∴ أن × ن ب = جن × ن د

مثال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س



∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{جد}$ وتران متقاطعان داخل دائرة

∴ أن × ن ب = جن × ن د

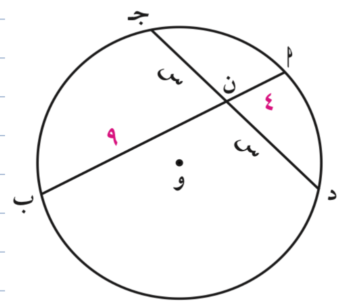
∴ س × ٧ = ٢ × ٨

٧ س = ١٦

س = $\frac{١٦}{٧}$

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



$\overline{أب}$ ، $\overline{جد}$ وتران متقاطعان داخل دائرة

∴ أن × ن ب = جن × ن د

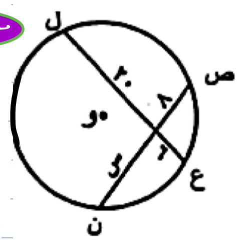
∴ ٤ × ٩ = س × س ⇐ س^2 = ٣٦

⇐ س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

امتحانات وزارة

موضوعي

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overline{ص ن}$ ، $\overline{ع ل}$ وترين متقاطعين فيها كما هو موضح في الشكل فإن قيمة س =

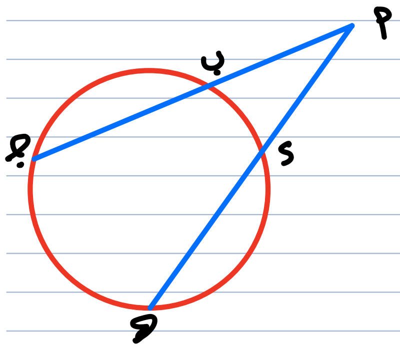


٨ × س = ٦ × ٢٠

س = $\frac{٦ × ٢٠}{٨}$ = ١٥

(أ) ٢٢ (ب) ١٥ (ج) ٨ (د) ١٢

٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة



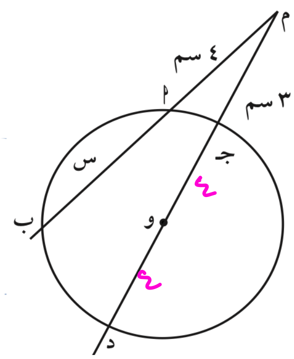
جب ، هـ ء وتران متقاطعان خارج الدائرة

فإن ٩ب × ٩جـ = ٩ء × ٩هـ

حاول أن تحل

إمتحانات وزارة

٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.
أوجد قيمة س.



∵ دجـ ، ب م وتران متقاطعان خارج دائرة

∴ م ٩ × م ب = م جـ × م د

٤ × م ب = ٣ × ١١

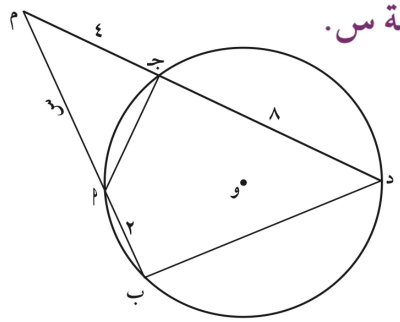
٤ م ب = ٣٣

م ب = $\frac{٣٣}{٤}$ = ٨,٢٥

س = ٨,٢٥ − ٤ = ٤,٢٥ .

مثال (٣) إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



∵ $\overline{جد}$ ، $\overline{مب}$ وتران متقاطعان خارج الدائرة .

∴ م أ × م ب = م جـ × م د

س × (س + ٢) = ٤ × (١٢)

س² + ٢س = ٤٨

س² + ٢س − ٤٨ = ٠

(س + ٨) (س − ٦) = ٠

س + ٨ = ٠ | س − ٦ = ٠

س = −٨ مرفوض | س = ٦

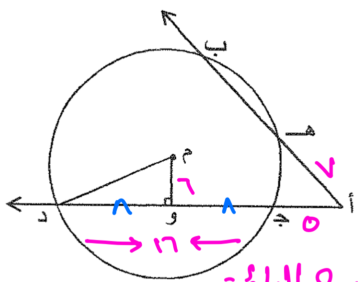
في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أ هـ = ٧ سم ، أ جـ = ٥ سم ، م و = ٦ سم

جـ د = ١٦ سم ، $\overline{م و}$ ⊥ $\overline{جـ د}$

إمتحانات وزارة

أوجد : ١) طول $\overline{هـ ب}$

٢) طول $\overline{م د}$



∵ $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران متقاطعان خارج الدائرة

أ هـ × أ ب = أ جـ × أ د

٧ × أ ب = ٥ × ٢١

أ ب = $\frac{٥ \times \cancel{٢١}^{٣}}{\cancel{٧}_{١}}$

أ ب = ١٥ سم .

∴ هـ ب = ١٥ − ٧ = ٨ سم .

∵ $\overline{م و}$ ⊥ $\overline{جـ د}$

∴ و منتصف $\overline{جـ د}$

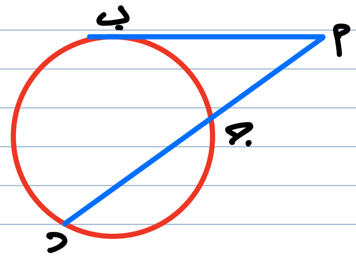
∴ جـ و = و د = ٨ سم . (نظرية)

△ م و د قائم الزاوية

من فيثاغورث

م د = $\sqrt{٨^٢ + ٦^٢}$ = ١٠ سم .

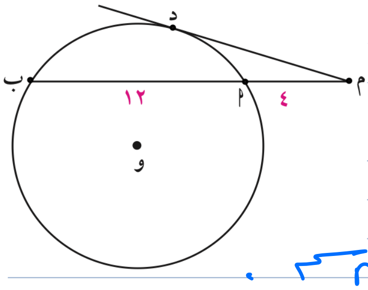
٣ – تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة



$\overline{أب}$ مماس عند نقطة ب

$(أب)^2 = أجـ \times أد$

مثال (٤)



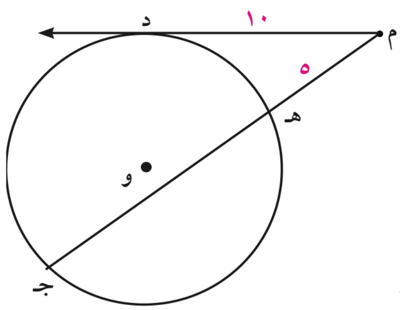
في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{م د}$ علمًا بأن: م أ = ٤ سم ، أ ب = ١٢ سم.

∵ $\overline{م د}$ مماس

∴ $(م د)^2 = م أ \times م ب$

$(م د)^2 = ٤ \times ١٦ = ٦٤ \Leftarrow م د = \sqrt{٦٤} = ٨$ سم.

حاول أن تحل — إمتحانات وزارة



٤ في الشكل المقابل، $\overline{م د}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥.

أوجد طول $\overline{هـ جـ}$.

∵ $\overline{م د}$ مماس

∴ $(م د)^2 = م هـ \times م جـ$

$١٠٠ = ٥ \times م جـ$

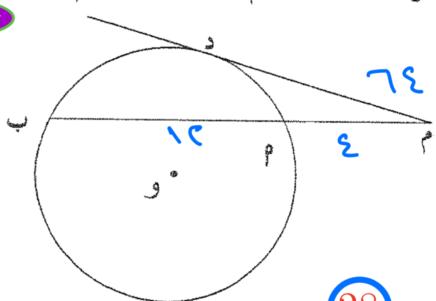
$م جـ = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$

∴ $هـ جـ = ٢٠ - ٥ = ١٥$ سم.

إمتحانات وزارة — موضوعي

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overrightarrow{م ب}$ يقطع الدائرة ، م أ = ٤سم ، أ ب = ١٢سم ، $\overline{م د}$ قطعة مماسية عند نقطة د

فإن طول $\overline{د م}$ =



$(م د)^2 = ٤ \times ١٦ = ٦٤$

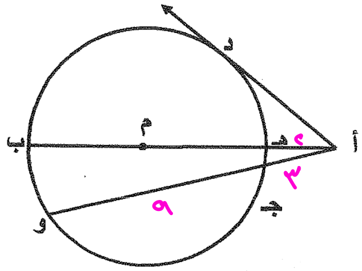
$م د = \sqrt{٦٤} = ٨$

(أ) ٦ سم (ب) ٨ سم

(جـ) ١٢ سم (د) ١٠ سم

إمتحانات وزارة

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة عند النقطة د ، أ جـ = ٣ سم
أ هـ = ٢ سم ، جـ و = ٩ سم
أوجد كلاً من : أ د ، هـ م



∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس عند د

∴ $(\text{أد})^2 = \text{أجـ} \times \text{أو}$

$(\text{أد})^2 = ٣ \times ١٢ = ٣٦$

∴ $\text{أد} = \sqrt{٣٦} = ٦$

$(\text{أد})^2 = \text{أهـ} \times \text{أب}$

$(\text{أد})^2 = ٢ \times \text{أب}$

$٣٦ = ٢ \times \text{أب}$

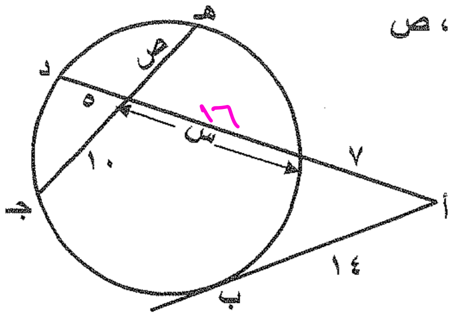
$\text{أب} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨$

$\text{هـب} = ١٨ - ٢ = ١٦$

$\text{هـم} = \frac{١٦}{٢} = ٨$ سم.

إمتحانات وزارة

من الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



∵ $\overline{\text{أب}}$ مماس

∴ $(\text{أب})^2 = ٧ \times \text{أد}$

$(١٤)^2 = ٧ \times \text{أد} \Leftarrow \text{أد} = \frac{(١٤)^2}{٧} = ٢٨$ سم

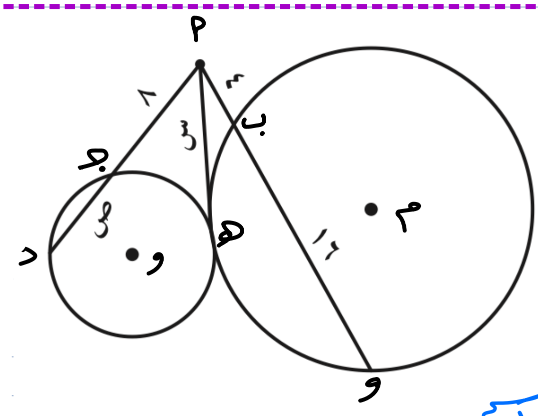
∴ $\text{س} = ٢٨ - (٧ + ٥) = ١٦$ سم .

∵ $\text{ص} \times ١٠ = ١٦ \times ٥$

$\text{ص} = \frac{١٦ \times ٥}{١٠} = ٨$ سم .

كراسة التمارين

من الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



في الدائرة التي مركزها م

∵ $(\text{أهـ})^2 = \text{أب} \times \text{أو} = ٤ \times ٢٠ = ٨٠$

$\text{أهـ} = \sqrt{٨٠} = ٤\sqrt{٥}$ سم

$\text{س} = ٤\sqrt{٥}$

في الدائرة التي مركزها و

∵ $(\text{أهـ})^2 = \text{أجـ} \times \text{أد}$

$٨٠ = ٨ \times \text{أد} \Leftarrow \text{أد} = \frac{٨٠}{٨} = ١٠$ سم .

∴ $\text{ص} = ١٠ - ٨ = ٢$ سم .