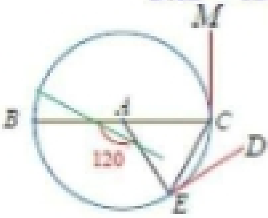
مسائل هامة في الدائـرة

1) $[BC]$ قطر في الدائرة φ مركزها A .
E نقطة من هذه الدائرة تحقق $\widehat{BAE} = 120°$
1 . احسب قياسات الزوايا الآتية
$\widehat{CBE}$ ، $\widehat{ECB}$ ، $\widehat{CAE}$
2 . احسب قياسات الزاوية المماسية $\widehat{CED}$ و قياس BCM



الحل :

1 .

* الزاوية $\widehat{CAE}$ مكملة للزاوية $\widehat{BAE}$ ومنه :

$\widehat{CAE} = 180 - 120 = 60°$

* الزاوية ECB محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية CAB بذات القوس فهي تساوي نصفها وبالتالي:

$ECB = \frac{1}{2}\ EAB = \frac{1}{2}\ 120 = 60°$

* الزاوية CBE محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية CAB بذات القوس في تساوي نصفها وبالتالي:

$ECB = \frac{1}{2}\ EAB = \frac{1}{2}\ 60 = 30°$

2 .

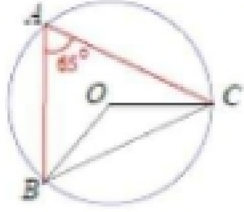
* الزاوية المماسية CED مشتركة مع الزاوية المحيطية CBE بذات القوس فهما زاويتان متساويتان وبالتالي :

$\widehat{CED} = 30°$

* الزاوية المماسية BCM تقاس بنصف قياس القوس BC وبما أن قياس القوس $BC = 180°$ إذاً :

$BCM = \frac{1}{2} \times 180 = 90°$

2) A و B و C ثلاث نقاط من دائرة مركزها O
نعلم أن $\widehat{BAC} = 65°$
احسب قياس كل من :
1 . $\widehat{BOC}$
2 . $\widehat{OBC}$
3 . $\widehat{OCB}$



الحل :

1 . الزاوية $\widehat{BOC}$ مركزية مشتركة مع الزاوية المحيطية $\widehat{BAC}$ بالقوس BC وبالتالي :

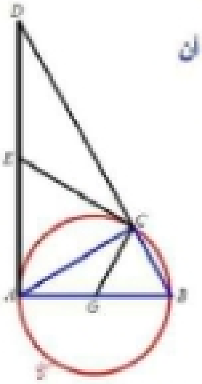
$\widehat{BOC} = 2\ BAC = 2 \times 65° = 130°$

2 . المثلث BOC متساوي الساقين ، زاوية الرأس $\hat{O} = 130°$

مجموع زوايا القاعدة $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180 - 130 = 50°$

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{50}{2} = 25°$

3) ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة φ فيه :
$AB = 12$ و $\widehat{BAC} = 30°$ ، مماس الدائرة φ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم BD في النقطة D .
1 . احسب مساحة المثلث ACD .
2 . لتكن E منتصف القطعة AD ، أثبت أن CE مماس للدائرة .
3 . لتكن G مركز الدائرة φ ، أثبت أن الرباعي AGCE هو دائري .



الحل :

1 . AB وتر المثلث القائم هو قطر للدائرة المارة برؤوسه .

نحسب أطوال المثلث ABC :

بما أن الزاوية $\widehat{BAC} = 30$

الطول $BC = 6$

(لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

نحسب AC حسب فيثاغورث :

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$(12)^2 = (6)^2 + AC^2$

$144 = 36 + AC^2$

$AC^2 = 144 - 36 = 108$

$AC = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$

* المستقيم AD مماس عمودي على نصف القطر .

وبالتالي : $\widehat{DAB} = 90°$ ومنه الزاوية

$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB}$

$= 90 - 30 = 60°$

* المثلث ACD قائم في C (لأن الزاوية $\widehat{DCA}$ مكملة للزاوية $\widehat{ACB}$)

نحسب CD :

$\tan\ DAC = \frac{CD}{AC}$

$\tan\ 60 = \frac{CD}{6\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = \frac{CD}{6\sqrt{3}}$

$CD = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 6 \times 3 = 18$

* نحسب مساحة المثلث ACD

$S_{(ACD)} = \frac{CD \times AC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 18}{2} = \frac{108\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$

2 . CE خط متوسط في المثلث القائم ACD يساوي نصف طول الوتر AD أي أن :

$CE = AE$ فالمثلث AEC متساوي الساقين

فيه الزاوية $A = 60°$

فالمثلث AEC فيه الزاوية $\widehat{ECA} = 60°$ متساوي الأضلاع

الزاوية $\widehat{GCA} = 30°$ في المثلث المتساوي الساقين AGC

(لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة)

$\widehat{ECG} = \widehat{ECA} + \widehat{ACG}$

$\widehat{ECG} = 60 + 30 = 90°$

3 .

الزاوية 90 = $\widehat{GCE}$ إثباتاً

الزاوية 90 = $\widehat{EAG}$ مماس عمودي على نصف القطر

$\widehat{GCE} + \widehat{EAG} = 90 + 90 = 180$

ومنه الرباعي AGCE دائري .

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

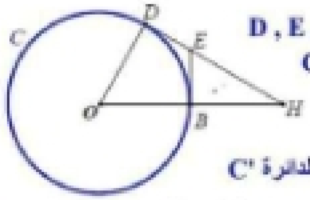
---

4) في الشكل المرسوم جانباً :

BE و DH مماسان للدائرة C (O , 6) في النقطتين B و D على التوالي $\widehat{BOD} = 60°$.

1 . احسب DH

2 . أثبت أن النقاط D , E , B , O واقعة على دائرة واحدة C' عين مركزها وارسمها



3 . احسب طول نصف قطر الدائرة C'

الحل :

1 .

بما أن DH مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن OD ⊥ DH وبالتالي المثلث DOH قائم الزاوية في D

$\hat{D} = 90°$ إثباتاً

$\hat{O} = 60°$ فرضاً

$\hat{H} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30°$

$\tan H = \frac{OD}{DH}$

$\tan 30° = \frac{6}{DH}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{DH} \Longrightarrow DH = \frac{6 \times \sqrt{3}}{1} = 6\sqrt{3}$

ويمكن أيضاً حسابه عن طريق فيثاغورث في المثلث القائم HDO

2 .

بما أن EB مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن EB ⊥ OB ومنه الزاوية $\hat{B} = 90°$

$\hat{D} + \hat{B} = 90 + 90 = 180°$

الرباعي ODEB رباعي دائري

لأنه (إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

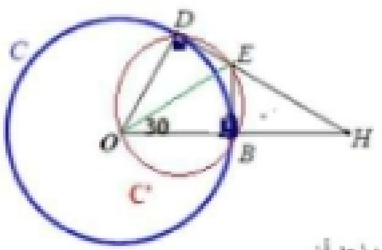
وبالتالي النقاط D , E , B , O تقع على دائرة واحدة C' مركزها منتصف الوتر المشترك OE

2 . نصل OE فيكون منصف للزاوية $\hat{O}$

وبما أن قياس الزاوية $\hat{O} = 60°$ فرضاً نجد أن :

قياس الزاوية $\widehat{DOE} = 30°$

المستقيم EC مماس للدائرة في C لأنه عمودي على نصف القطر GC .



في المثلث القائم ODE : نجد أن

$\cos(\widehat{DOE}) = \frac{OD}{OE}$

$\cos 30° = \frac{6}{OE}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{OE}$

$OE = \frac{2 \times 6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$

ومنه نصف القطر :

$R = \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

---

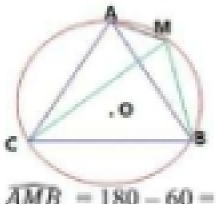
5) ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة C مركزها O ، M نقطة من الدائرة C

1 . احسب قياس كل من الزوايا :

1) $\widehat{AMC}$ 2) $\widehat{BMC}$ 3) $\widehat{AMB}$

2 . ماذا تسمي نصف المستقيم MC

الحل :



1 . بما أن المثلث متساوي الأضلاع فكل زاوية من زواياه تساوي $60°$

الزاوية AMB مكملة للزاوية ACB

أي أن :

$\widehat{AMB} = 180 - 60 = 120°$

الزاويتان $BMC = BAC = 60°$

(لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس)

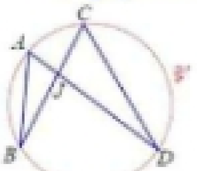
الزاويتان $AMC = CBA = 60°$

(لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس)

2 . MC منصف للزاوية AMB

6) D, C, B , A نقاط من دائرة C ، نعلم أن $\widehat{ABC} = 22°$
$\widehat{BAD} = 58°$ الوتران AD ، BC متقاطعان في J
احسب قياس كل من :

1- $\widehat{BCD}$
2- $\widehat{CDA}$
3- $\widehat{CJD}$



الحل :

1 $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 58°$

(لأنهما محيطيتان مشتركتان بذات القوس BD)

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 22$

(لأنهما محيطيتان مشتركتان بذات القوس AC)

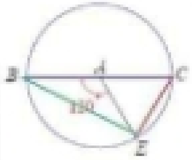
3- في المثلث CJD :

$\widehat{CJD} = 180 - (58 + 22) = 180 - 80 = 100°$

---

7) BC قطر في الدائرة C مركزها A ، E نقطة من هذه الدائرة تحقق $\widehat{BAE} = 120°$. F نقطة من C تختلف عن E, C, B احسب قياسات الزوايا الآتية :

1- $\widehat{CAE}$
2- $\widehat{ECB}$
3- $\widehat{CBE}$



الحل :

1 - الزاوية CAE مكملة للزاوية BAE أي أن :

$\widehat{CAE} = 180 - 120 = 60°$

2 $\widehat{ECB} = \frac{1}{2}\,\widehat{EAB}$

$\widehat{ECB} = \frac{1}{2} \times 120 = 60°$

(لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس EB)

3 - $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\,\widehat{CAE}$

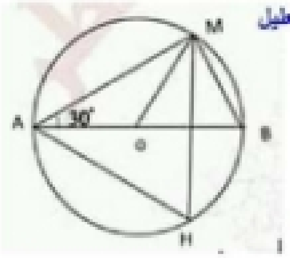
$\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \times 60 = 30°$

(لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس EC)

مسائل امتحانية

8) $[AB]$ قطر في دائرة C مركزها O ونصف قطرها يساوي 5 cm . النقطة M تقع على الدائرة بحيث يكون $\widehat{MAB} = 30$

1- احسب قياس الزاوية $\widehat{AMB}$ وقياس القوس AM
2 - ما نوع المثلث OMB مع التعليل
3- علل قياس الزاوية $\widehat{ABM}$ يساوي قياس الزاوية $\widehat{AHM}$



الحل :

1 $\widehat{AMB} = 90$

زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة .

المثلث AMB قائم وفيه

$\widehat{MAB} = 30$

وهي زاوية محيطية قياس القوس المقابل لها MB = 60

وبما أن AB قطر فالقوس AB = 180

وبالتالي قياس القوس AM :

AM = 180 – 60 = 120

2 – المثلث OMB متساوي الساقين .

(لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة .)

وفيه زاوية MBA = 60 فهو مثلث متساوي الأضلاع .

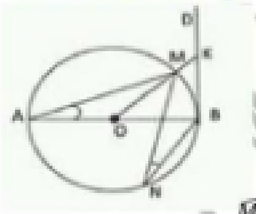
3 – $\widehat{AHM} = \widehat{ABM}$

زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس AM

---

9) دائرة مركزها (O) قياس 15 = $\widehat{MNB}$
BD مماس . نمدد OM ليقطع المماس K بحيث BK = 5

1 - احسب قياس القوس MB ، واستنتج قياس الزاوية $\widehat{KOB}$ وقياس الزاوية $\widehat{MAB}$
2 – احسب طول $[OK]$ ، ثم احسب OB نصف قطر الدائرة .



الحل :

1 – بما أن قياس الزاوية المحيطية

$\widehat{MNB} = 15$

فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها MB = 30

$\widehat{KOB} = 2\,\widehat{MNB} = 30$

(لأن الزاوية المركزية تساوي ضعفي الزاوية المحيطية المشتركة معها بذات القوس)

$\widehat{MNB} = \widehat{MAB} = 15$

(زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس)

2 - بما أن BD مماس للدائرة في B

BD ⊥ BO

فالمثلث KBO قائم

في الصفحة التالية

ومنه :

$\sin(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OK}$

$\sin 30 = \frac{5}{OK}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{OK} \Longrightarrow OK = \frac{5\times 2}{1} = \frac{10}{1} = 10$

$\tan(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OB}$

$\tan 30 = \frac{5}{OB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{OB} \Longrightarrow OB = \frac{5\times\sqrt{3}}{1} = \frac{5\sqrt{3}}{1} = 5\sqrt{3}$

---

10) في الشكل المرسوم جانباً :

$[BC]$ قطر في دائرة مركزها O ، H نقطة من الدائرة حيث

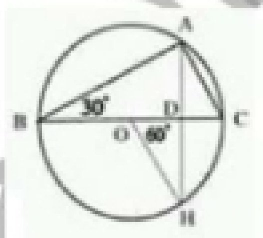
$\widehat{COH} = 60$ وقياس $\widehat{ABC} = 30$

والمطلوب:

1- أثبت أن AC // OH

2 - أثبت أن القوس AB = 2 CH

3- أثبت أن AH يعامد OC



الحل :

1 – المثلث ABC قائم في A

(لأن ضلعه BC قطر الدائرة المارة برؤوسه)

وفيه قياس الزاوية $\widehat{ABC} = 30$

وبالتالي قياس الزاوية $\widehat{ACB} = 60$

ومنه :

$\widehat{COH} = \widehat{ACB} = 60$ (زاويتان متبادلتان داخلاً)

ومنه : AC // OH

2 - بما أن قياس الزاوية المحيطية $\widehat{ACB} = 60$ فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها AB = 120

و بما أن قياس الزاوية المركزية $\widehat{COH} = 60$ تقاس بقياس القوس المقابل لها CH = 60

ومنه : قياس القوس AB = 2 CH

3 - لدينا قياس الزاوية المحيطية

$\widehat{CAH} = \frac{1}{2}\widehat{COH} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

(لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس)

فالمثلث ADC فيه :

$\widehat{ACB} = 60$ والزاوية $\widehat{CAH} = 30$

فيكون قياس الزاوية $\widehat{ADC} = 90$

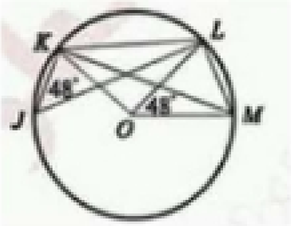
ومنه AH ⊥ OC

11) لتكن J , K , L , M نقاط من دائرة مركزها O

$\widehat{LOM} = \widehat{KJL} = 48$

1 – احسب قياسات الأقواس LK ، LM وقياس الزاوية $\widehat{LOK}$

2 – احسب قياسات زوايا المثلث KLM



الحل :

1 - بما أن قياس الزاوية المركزية $\widehat{LOM} = 48$

تقاس بقياس القوس المقابل لها LM = 48

- بما أن قياس الزاوية المحيطية $\widehat{KJL} = 48$

فقياس القوس المقابل يساوي ضعف قياسها LK = 96

قياس الزاوية $\widehat{LOK} = 96$

زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها LK = 96

2 – المثلث KLM فيه :

$\widehat{KJL} = \widehat{KML} = 48$

(زاويتان محيطيتان مشتركتان بذات القوس)

$\widehat{LKM} = \frac{1}{2}\ \widehat{LOM} = \frac{1}{2} \times 48 = 24$

(لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس LM)

ومنه :

$\widehat{KLM} = 180 - (48 + 24) = 180 - 72 = 108$

---

12) في الشكل المرسوم جانباً :

B, M , N , A نقاط من دائرة مركزها O

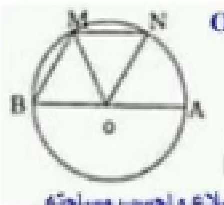
وطول قطرها AB = 8

فيه الأقواس BM = MN = NA

1 - احسب قياس الزاويتين $\widehat{ABM}$ ، $\widehat{AON}$

2 - استنتج أن BM // ON

3 – أثبت أن المثلث ONM متساوي الأضلاع واحسب مساحته .



الحل :

1 - بما أن AB قطر يحصر نصف قوس الدائرة AB = 180

$BM = MN = NA = \frac{180}{3} = 60$

$\widehat{AON} = 30$ زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها NA

مجموع قياس القوسين MN + NA = 60 + 60 = 120

وبالتالي قياس الزاوية:

$ABM = \frac{1}{2}\ AM = \frac{1}{2} \times 120 = 60$

(زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

2 - $\widehat{NOA} = \widehat{MBA} = 60$ (زاويتان بوضع التناظر)

ومنه BM // ON

في الصفحة التالية

3 - المثلث OMN متساوي الساقين

(لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة)

وفيه قياس الزاوية $\widehat{MON} = 60$ ومنه المثلث متساوي الأضلاع

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

---

13) في الشكل المرسوم جانباً :

دائرة مركزها O قطرها AD

قياس القوس AB = 60

M منتصف BC

1- ما نوع المثلث DBA ، واحسب قياس زواياه .

2- أثبت أن OD يعامد CB

3 - احسب قياس الزاوية $\widehat{BOC}$

الحل :

1 – المثلث DBA قائم في B

(لأن ضلعه AD قطر الدائرة المارة برؤوسه)

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

(زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

$$\widehat{BDA} = 180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 60$$

2 -

في المثلث COB بما أن M منتصف BC فإن OM ⊥ BC

(لأن المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها يكون عمودياً على ذلك الوتر)

ومنه OD يعامد CB

3 –

المثلث COM متساوي الساقين

(لأن ضلعاه أنصاف أقطار في الدائرة)

وبالتالي الارتفاع OM هو منصف للزاوية $\widehat{COB}$

وقياس الزاوية $\widehat{BOD} = 60$

زاوية مركزية تقاس بقياس القوس المقابل لها BD

$$\widehat{COD} = \widehat{BOD} = 60$$

$$\widehat{BOC} = 120$$

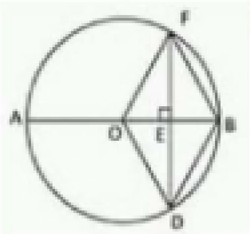
---

14) في الشكل المرسوم جانباً :

$[AB]$ قطر في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 5 فيها :

$[FD]$ يعامد $[AB]$ في النقطة E

القوس AF = 2BF



1 - أثبت أن قياس القوس BF = 60

2 - استنتج نوع المثلث BOF بالنسبة لأضلاعه .

3- احسب الأطوال EF ، EB ، FB

4- أثبت أن الرباعي FODB معين واحسب مساحته .

الحل :

1 - بما أن AB قطر يحصر نصف قوس الدائرة AB = 180

ولدينا القوس AF = 2BF ومنه :

$$AF + BF = 180$$

$$2\,BF + BF = 180 \Longrightarrow BF = \frac{180}{3} = 60$$

2 -

المثلث BOF متساوي الساقين (لأن ضلعاه أنصاف أقطار)

وفيه قياس الزاوية المركزية $\widehat{FOB} = 60$

ومنه المثلث BOF متساوي الأضلاع .

3-

بما أن المثلث BOF متساوي الأضلاع فإن:

$$OB = OF = FB = 5$$

الارتفاع FE هو متوسط ومحور ومنصف بآن واحد في المثلث المتساوي الأضلاع . ومنه :

$$EB = \frac{1}{2}\,BO = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$$

وكما تعلم أن الارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع يساوي :

$$EF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

4-

المثلث FOD متساوي الساقين (لأن ضلعاه أنصاف أقطار)

الارتفاع OE هو متوسط ومحور ومنصف بآن واحد في المثلث المتساوي الساقين .

فالرباعي FODB معين (لتناصف قطريه وتعامدهما)

مساحة المعين = $\frac{\text{جداء قطريه}}{2}$

القطر FD يساوي :

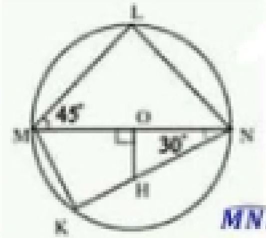
$$FD = 2 \times EF = 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{OB \times FD}{2} = \frac{5 \times \frac{10\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{50\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4}$$

15) في الشكل المرسوم جانباً :

K , M , L , N نقاط من دائرة مركزها O حيث MN قطر في الدائرة طوله 8 cm

$\widehat{KNM} = 30$ ، $\widehat{LMN} = 45$



1- ما نوع المثلث LMN بالنسبة لأضلاعه ، واستنتج قياس الزاوية $\widehat{MNL}$

2- احسب قياس كل من $\widehat{MKN}$ ، القوس LMK

3- احسب طول كلاً من ML ، MK ، KN

4- إذا كان HO ⊥ MN أثبت أن الرباعي OHKM دائري عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

الحل :

1- المثلث LMN قائم الزاوية

(لأن ضلعه MN قطر الدائرة المارة برؤوسه)

وفيه $\widehat{LMN} = 45$ فهو مثلث متساوي الساقين

قياس الزاوية $\widehat{LNM} = 45$

2- الزاوية $\widehat{MKN} = 90$ (محيطية تحصر قوس نصف الدائرة)

قياس القوس LM = 90 (مقابل للزاوية المحيطية $\widehat{LNM}$)

قياس القوس MK = 60 (مقابل للزاوية المحيطية $\widehat{MNK}$)

ومنه قياس القوس LMK = 90 + 60 = 150

3 –

في المثلث القائم MNL نجد :

$$\cos \widehat{LMN} = \frac{ML}{MN}$$

$$\cos 45 = \frac{ML}{MN}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ML}{8} \Longrightarrow ML = \frac{8 \times \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

في المثلث القائم KMN نجد :

$$KM = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

(لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

في المثلث القائم KMN نجد :

$$\cos \widehat{MNK} = \frac{KN}{MN}$$

$$\cos 30 = \frac{KN}{MN}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{KN}{8} \Longrightarrow KN = \frac{8 \times \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

4 – الرباعي OHKM

$\widehat{MOH} = 90$ لأن HO ⊥ MN

$0\widehat{MKN} = 90$ (محيطية تحصر قوس نصف الدائرة)

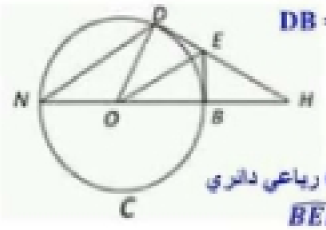
(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك MH بين المثلثين MHO , MHK

16) في الشكل المرسوم جانباً :

C دائرة مركزها O و [NB] قطر فيها و D نقطة من الدائرة بحيث القوس $ND = \frac{2}{3} NB$ و (BE) ، (DH) مماسان للدائرة في النقطتين B و D على التوالي .

المطلوب :



1 - أثبت أن قياس القوس DB = 60

2 – احسب قياسات زوايا المثلث HOD

استنتج أن $OB = \frac{1}{2} OH$

3 - أثبت أن الرباعي ODEB رباعي دائري واستنتج قياس الزاوية $\widehat{BED}$

4- أثبت أن المثلث OEH متساوي الساقين واحسب قياس الزاوية $\widehat{BOE}$

5 - أثبت أن DN // OE

الحل :

1 – بما أن NB قطر للدائرة فقياس القوس NB = 180

نعوض $ND = \frac{2}{3} NB = \frac{2}{3} \times 180 = \frac{360}{3} = 120$

ومنه قياس القوس : DB = 180 – 120 = 60

2 –

بما أن DH مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث ODH مثلث قائم فيه D = 90

قياس الزاوية $\widehat{DOH} = 60$ (مركزية مقابلة للقوس BD)

$\hat{H} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$

$DO = \frac{1}{2} OH$ (الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

لدينا OD = OB (أنصاف أقطار في الدائرة)

ومنه : $OB = \frac{1}{2} OH$

3 –

بما أن EB مماس للدائرة فالمثلث EBO قائم في B

$\hat{D} + \hat{B} = 90 + 90 = 180$

الرباعي ODEB رباعي دائري

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

بما أن قياس الزاوية $\widehat{BOD} = 60$

$\widehat{BED} = 180 - 60 = 120$

4 –

لدينا $OB = \frac{1}{2} OH$ فإن B منتصف OH

ومنه نجد EB متوسط وارتفاع بآن واحد في المثلث OEH

ومنه المثلث OEH متساوي الساقين رأسه E

$\widehat{BOE} = \widehat{DHO} = 30$ (زوايا القاعدة)

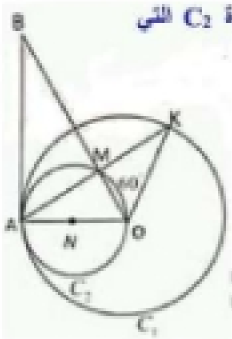
5 – لدينا $\widehat{DNB} = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

(زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

ومنه الزاويتان $\widehat{EOB} = \widehat{DNB} = 30$ (وهما في وضع التناظر)

ومنه DN // OE

17) في الشكل المرسوم جانباً :



C_1 دائرة مركزها O و AO قطر للدائرة C_2 التي مركزها N

الدائرتان C_1 و C_2 متماستان داخلاً في النقطة A حيث $AO = 4$ ، $BO = 8$

قياس القوس $OM = 60$

BA مماس مشترك للدائرتين في النقطة A

المطلوب:

1 - أثبت أن $BA = 4\sqrt{3}$

2 - احسب قياس القوس AM ثم استنتج قياسات زوايا المثلث AMO

3- احسب طول كل من OM ، AM ، BM

4- أثبت أن الرباعي BAOK دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

الحل:

1 - بما أن BA مماس فهو عمودي على نصف القطر فالمثلث BAO قائم حسب فيثاغورث:

$$BO^2 = AB^2 + AO^2$$
$$(8)^2 = AB^2 + (4)^2$$
$$64 = AB^2 + 16$$
$$AB^2 = 64 - 16 = 48$$
$$AB = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

2 –

بما أن AO قطر للدائرة C_2 فأن قياس القوس $AO = 180$

ومنه قياس القوس $AM = 180 - 60 = 120$

المثلث AMO قائم في M (لأن ضلعه قطر للدائرة المارة برؤوسه)

فيه : $\hat{M} = 90$

$$\widehat{MAO} = \frac{1}{2} \times AM = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

(زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس المقابل لها)

ومنه قياس الزاوية :

$$\widehat{MOA} = 180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 30$$

3 –

في المثلث القائم AMO نجد :

$$OM = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

(لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

حساب AM حسب فيثاغورث

$$AO^2 = AM^2 + MO^2$$
$$(4)^2 = AM^2 + (2)^2$$
$$16 = AM^2 + 4$$
$$AM^2 = 16 - 4 = 12$$
$$AM = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

حساب BM :

$$BM = BO - OM = 8 - 2 = 6$$

4- المثلث AOK فيه :

$OA = OK$ (أنصاف أقطار في الدائرة في الدائرة)

فالمثلث متساوي الساقين

$\widehat{KAO} = \widehat{AKO} = 30$ (زوايا القاعدة)

المثلث ABO قائم فيه :

$$\widehat{AOM} = 60$$

(زاوية محيطية تقاس بنصف قياس القوس AM المقابل لها)

ومنه قياس الزاوية :

$$\widehat{ABO} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$$

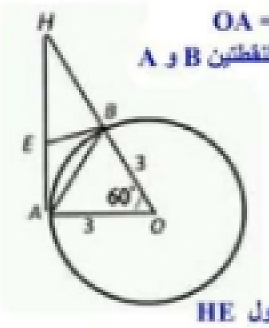
ولدينا $\widehat{AKO} = 30$

فالرباعي BAOK دائري لتساوي زاويتان بجهة واحدة بالنسبة للقطعة المستقيمة AO .

مركز الدائرة هو منتصف الوتر BO للدائرة المارة برؤوسه .

---

18) في الشكل المرسوم جانباً :



دائرة مركزها O ونصف قطرها $OA = 3$

HA ، EB مماسان للدائرة في النقطتين B و A على الترتيب . $\widehat{BOA} = 60$.

المطلوب:

1 – احسب قياس كلاً من الزاويتين $\widehat{BAH}$ ، $\hat{H}$

2- أثبت أن $OH = 6$ ثم احسب طول AH

3- احسب $\cos \widehat{EHB}$ واستنتج طول HE

4 – أثبت أن النقاط A, E , B , O تقع على دائرة واحدة . ثم عين مركزها .

الحل:

1 - بما أن HA مماس فهو عمودي على نصف القطر فالمثلث AOH قائم في A

فيه قياس الزاوية $\widehat{BOA} = 60$

$$\hat{H} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$$

لدينا قياس الزاوية : $\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

(الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس AB) .

2 –

بما أن المثلث AOH قائم في A فيه :

$$AO = \frac{1}{2} OH$$
$$3 = \frac{1}{2} OH \Longrightarrow OH = 2 \times 3 = 6$$

(في المثلث القائم الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

$$\sin \hat{O} = \frac{AH}{OH}$$
$$\sin 60 = \frac{AH}{6}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6} \Longrightarrow AH = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

في الصفحة التالية

-3

$\cos \widehat{EHB} = \frac{HB}{HE}$

$\cos 30 = \frac{3}{HE}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{HE} \Longrightarrow HE = \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

-4

EB مماس للدائرة فهو عمودي على نصف القطر

أي أن قياس الزاوية $\widehat{EBO} = 90$

ولدينا $\widehat{EAO} = 90$

$\widehat{EBO} + \widehat{EAO} = 180$

الرباعي AEBO رباعي دائري

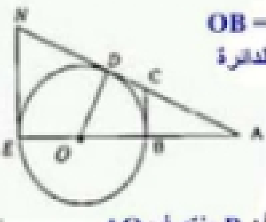
(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OE

بين المثلثين OEA , OEB

---

19) في الشكل المرسوم جانباً :



دائرة مركزها O ونصف قطرها OB = 4

ثلاثة مماسات للدائرة EN , NA , BC

في النقاط E , D ,B على الترتيب

وقياس الزاوية $\widehat{A} = 30$

المطلوب :

1- أثبت أن DOB = 60 ، واستنتج أن B منتصف AO

2- أثبت أن النقاط O , D , C , B تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها .

3- أثبت أن $AD = 4\sqrt{3}$

4- احسب $\cos \widehat{A}$ واستنتج أن $2EA = \sqrt{3}\,AN$

الحل :

1- بما أن HA مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث ADO قائم في D

فيه قياس الزاوية $\widehat{A} = 30$

$\widehat{DOB} = 180 - (90 + 30) = 180 - 120 = 60$

(الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر) $OB = \frac{1}{2} OA$

لدينا OD = OB (أنصاف أقطار في الدائرة)

ومنه : $OB = \frac{1}{2} OA$

وبالتالي B منتصف AO

-2

بما أن CB مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث CBO قائم في B

أي أن قياس الزاوية $\widehat{CBO} = 90$

ولدينا $\widehat{CDO} = 90$

$\widehat{CBO} + \widehat{CDO} = 180$

الرباعي ODCB رباعي دائري

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OC

بين المثلثين ADO , CBO

-3

حساب AD : حسب فيثاغورث في المثلث القائم ADO

$AO^2 = AD^2 + DO^2$

$(8)^2 = AD^2 + (4)^2$

$64 = AD^2 + 16$

$AD^2 = 64 - 16 = 48$

$AD = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

-4

$\cos \widehat{A} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... (1)

بما أن EN مماس فهو عمودي على نصف القطر

فالمثلث NEA قائم في E

$\cos A = \frac{EA}{NA}$ .... (2)

من (1) و (2) نجد أن :

$\frac{EA}{NA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه : $2\,EA = \sqrt{3}\,NA$

---

20) في الشكل المرسوم جانباً :

$[AB]$ قطر في الدائرة C(O , R) ، نرسم المماس للدائرة C في النقطة A ونعين عليه النقطة D بحيث $[BD]$ يقطع الدائرة C في النقطة H ، فإذا كانت النقطة E منتصف $[AD]$.

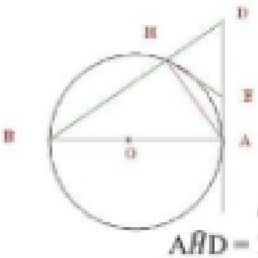
- فبرهن أن المثلث AHB قائم الزاوية ، وأن المثلث AEH متساوي الساقين .

الحل :

الزاوية $A\widehat{H}B$ محيطية تحصر نصف قوس الدائرة

$H = \frac{1}{2} \times 180 = 90$

فالمثلث AHB قائم الزاوية في H .



الزاويتان $A\widehat{H}D$, $A\widehat{H}B$ متكاملتان

$A\widehat{H}D = 180^\circ - A\widehat{H}B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

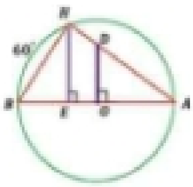
لدينا HE متوسط في المثلث القائم AHD

وبما أن طول المتوسط في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر فإن :

HE = AE

فالمثلث AEH متساوي الساقين .

21) في الشكل المرسوم جانباً :



$C(0,6)$ دائرة $[HE] \perp [AB]$

$[DO] \perp [AB]$

وقياس القوس HB يساوي 60°

والمطلوب :

1- احسب قياسات زوايا المثلث HAB وأطوال أضلاعه.

2- احسب HE ثم AE .

3- برهن أن المثلثين HEA ,DOA متشابهان ، احسب OD

4- برهن أن الرباعي ODHB دائري ،ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

الحل:

1- المثلث HAB قائم في H

(لأن ضلعه MN قطر الدائرة المارة برؤوسه)

$AB = 2R = 2 \times 6 = 12$

الزاوية المحيطية تقاس بنصف القوس BH أي :

$H\hat{B}A = 60^\circ \Longleftarrow H\hat{A}B = 30^\circ$

وبما أن الضلع المقابلة للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف طول الوتر فإن :

$HB = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

حساب HA

$\cos 30^\circ = \frac{HA}{AB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HA}{12} \Longrightarrow HA = \frac{12\times\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

2- حساب HE

في المثلث القائم HEA فيه $\hat{A} = 30^\circ$

بما أن الضلع المقابلة للزاوية 30° تساوي نصف طول الوتر فإن

$HE = \frac{1}{2} HA = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

حساب AE

وحسب فيثاغورث في المثلث القائم HEA فإن :

$(HA)^2 = (HE)^2 + (AE)^2$

$(6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{3})^2 + (AE)^2$

$36 \times 3 = 9\times3 + (AE)^2$

$(AE)^2 = 108 - 27 = 81 \Longrightarrow AE = 9$

3 - حساب OD

- DO // HE لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان

المثلثان DOA , HEA متشابهان حسب النظرية الأساسية .

$\begin{cases} ODA \\ EHA \end{cases} \quad \frac{OD}{EH} = \frac{DA}{HA} = \frac{OA}{EA}$

بأخذ النسبتين (3) , (1) ونعوض :

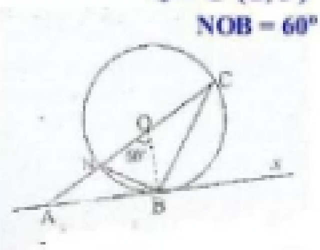
$\frac{OD}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{9} \Longrightarrow OD = \frac{6\times3\sqrt{3}}{9} = \frac{18\sqrt{3}}{9} = 2\sqrt{3}$

4- الرباعي ODHB فيه زاويتان H , O قائمتان وهما متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك BD بين المثلثين DOB , DHB

22) في الشكل المرسوم جانباً $C\ (O, 5)$ دائرة

(Ax) مماس لها في B قياس $NOB = 60^\circ$



المطلوب :

1) أوجد قياس كل من $N\hat{B}A , N\hat{C}B$

2) ما نوع المثلث CBN واحسب BC , NB

3) برهن أن المثلث ANB متساوي الساقين ، واستنتج Sin BAC .

الحل:

1) بما أن $N\hat{O}B = 60^\circ$ زاوية مركزية $\Longleftarrow N\hat{C}B = 30^\circ$

لأن (الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بذات القوس)

$N\hat{B}A = 30^\circ$ زاوية مماسية تساوي نصف القوس المقابلة

2) المثلث قائم CBN في B

(لأن المماس عمودي على نصف القطر)

$NB = 5$ (لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

حسب فيثاغورث في المثلث القائم CBN

$BC^2 = CN^2 - NB^2$

$BC^2 = 100 - 25 = 75 \Longrightarrow BC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

3)

المثلث ONB متساوي الأضلاع فيه :

قياس الزاوية $\widehat{ONB} = 60$

ومنه قياس الزاوية

$\widehat{ANB} = 180 - 60 = 120$

(زاوية $\widehat{ONB}$ مكملة للزاوية $\widehat{ANB}$) ولدينا قياس الزاوية

$\widehat{NBA} = \frac{1}{2}\ \widehat{NOB} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

(لأن قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المشتركة معها بذات القوس)

فيكون قياس الزاوية :

$\widehat{NAB} = 180 - (120 + 30) = 180 - 150 = 30$

$\widehat{NAB} = \widehat{NBA} = 30$

فالمثلث ANB متساوي الساقين

$\sin\widehat{BAC} = \sin 30 = \frac{1}{2}$

23) في الشكل المرسوم جانباً :

$C(O , R)$ دائرة حيث $AB = 4$

(AB) مماس للدائرة ، $BD = 5$

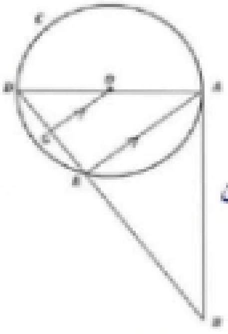
في A و $AE // OG$

1) احسب طول نصف قطر الدائرة C

2) برهن تشابه المثلثين OGD , AED

3) احسب AE , ED

4) برهن أن الرباعي $OABG$ دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه .



الحل:

1) المثلث BAD قائم في A

(لأن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس)

حسب فيثاغورث في المثلث القائم BAD

$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$

$(5)^2 = (4)^2 + (AD)^2$

$(AD)^2 = 25 - 16 = 9 \Longrightarrow AD = \sqrt{9} = 3$

$R = \frac{3}{2} = 1.5$

2) بما أن $AE // OG$ فرضاً

حسب المبرهنة الأساسية في التشابه المثلثان OGD , AED متشابهان .

3) **حساب AE**

المثلث AED قائم في $\widehat{AED}$

(لأن الزاوية المحيطة التي تحصر قوس نصف الدائرة قائمة)

في المثلث القائم BAD : $\sin B = \frac{AD}{BD}$

و في المثلث القائم BEA : $\sin B = \frac{AE}{AB}$

بالمقارنة نجد أن :

$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{AE}{4} \Longrightarrow AE = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$

حساب ED

حسب فيثاغورث في المثلث القائم AED :

$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2$

$(3)^2 = (\frac{12}{5})^2 + (ED)^2$

$(ED)^2 = 9 - \frac{144}{25} \Longrightarrow (ED)^2 = \frac{225}{25} - \frac{144}{25} = \frac{81}{25}$

$ED = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$

4)

بما أن $B\hat{A}O = B\hat{G}O = 90$ فهما متكاملتان

(اذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

ومنه $OABG$ رباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OB بين المثلثين BAO , BGO

24) في الشكل المرسوم جانباً :

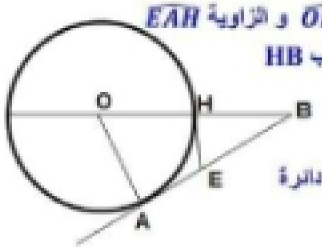
$C (O , 6)$ دائرة فيها AB , EH مماسان لها في النقطتين H , A على الترتيب وقياس القوس $AH = 60$

1- احسب قياس الزاوية $\widehat{OBA}$ و الزاوية $\widehat{EAH}$

2- احسب $\tan \widehat{AOB}$ واحسب HB

3- اثبت أن $AE = \frac{1}{2} EB$

4- برهن أن النقاط A , O , H , E تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها .



الحل:

1- المثلث OBA قائم الزاوية في A

(لأن المماس عمود على نصف القطر)

$\widehat{HOA} = 60$ (زاوية مركزية مقابلة للقوس AH)

$\hat{B} = 180 - (90 + 60) = 180 - 150 = 30$

حساب $\widehat{EAH}$:

$\widehat{EAH} = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \times 60 = 30$

(قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

2 −

حساب $\tan \widehat{AOB}$:

$\text{Tan } \widehat{AOB} = \text{Tan } 60 = \sqrt{3}$

حساب HB :

في المثلث OBA القائم في A :

$AO = \frac{1}{2} OB$

$6 = \frac{1}{2} OB \Longrightarrow OB = 2 \times 6 = 12$

(لأن الضلع المقابلة للزاوية 30 تساوي نصف طول الوتر)

لدينا $AO = OH = 6$ (أنصاف أقطار)

ومنه : $HB = OB - OH = 12 - 6 = 6$

3 −

حساب AB :

$\cos \hat{B} = \frac{AB}{OB}$

$\cos 30 = \frac{AB}{OB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{12} \Longrightarrow AB = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

حساب EB : من المثلث القائم EHB :

$\cos \hat{B} = \frac{HB}{EB}$

$\cos 30 = \frac{HB}{EB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{EB} \Longrightarrow EB = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$AE = AB - EB = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

أي أن : $AE = \frac{1}{2} EB$

4 −

بما أن $\widehat{EHO} = \widehat{OAE} = 90$ فهما متكاملتان

(إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري)

ومنه $AOHE$ رباعي دائري .

مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر المشترك OE بين المثلثين EHO , EAO