البحث الخامس
التابع اللوغاريتمي النيبري Ln

ندعو $\ln$ لوغاريتم

$\ln(g(x))$ تابع لوغاريتمي

إيجاد مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي:

معرف بشرط $g(x) > 0$

1) إما ندرس إشارة كسر

2) أو ندرس إشارة درجة ثانية

3) أو درجة أولى

تكرورية:

في التابع اللوغاريتمي المجالات مفتوحة في مجموعة التعريف .

⊛ تدريب: في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار معرفاً

1. $f(x) = ln(x^2)$

معرف بشرط $x^2 > 0$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

2. $f(x) = ln\,(-x+1)$

معرف بشرط $1 - x > 0$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow D_f =]-\infty\,,1[$

3. $f(x) = ln\,(x-3)$

معرف بشرط $x - 3 > 0$

$\Rightarrow x > 3 \Rightarrow D_f =]3\,,+\infty[$

4. $f(x) = \frac{1}{x}\,ln\,(1+x)$

معرف بشرط $\left.\begin{matrix} x > -1 \Leftarrow 1 + x > 0 \\ x \neq 0 \Leftarrow x \neq 0 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow D_f =]-1\,,0[\,\cup\,]0\,,+\infty[$

5. $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$

f معرف بشرطين:

الأول $\ln(x) > 0 \Leftarrow x \in]0\,,+\infty[$

الثاني $\ln x \neq 0 \Leftarrow x \neq 1 \Leftarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\Rightarrow D_f =]0\,,1\,[\,\cup\,]1\,,+\infty[$

6. $f(x) = ln(x^2 + 4x)$

معرف بشرط $x^2 + 4x > 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$

إما $x = 0$ أو $x = -4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow D_f =]-\infty, -4[\,\cup\,]0\,,+\infty[$

7. $f(x) = ln(x^2 - 3x + 2)$

f معرف بشرط $x^2 - 3x + 2 > 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$

إما $x = 2$ أو $x = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow D_f =]-\infty, 1\,[\,\cup\,]2\,,+\infty[$

8. $f(x) = ln|x+1| - ln|x-1|$

$|x+1| > 0 \Rightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$|x-1| < 0 \Rightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\,,-1\}$

$=]-\infty, -1[\,\cup\,]-1\,,1\,[\cup], +\infty[$

9. $f(x) = ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

f معرف بشرط $\frac{x-3}{2-x} > 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$			$-$		0	$+$	
$2-x$		$+$	0		$-$		
		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow D_f =]2\,,3[$

خواص اللوغاريتم:

1. $ln(0^+) = -\infty$
2. $ln(1) = 0$
3. $ln(2) \simeq 0.7$
4. $ln(x)^n = n.ln\,(x)$
5. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,a - ln\,b$
6. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\,ln\left(\frac{b}{a}\right)$
7. $ln(+\infty) = +\infty$
8. $ln(-\infty) =$ لا يوجد
9. $ln(e) = 1$
10. $(ln(x))^n = ln^n(x)$
11. $ln(a.b) = ln\,a + ln\;b$
12. $ln(3) \simeq 1.1$
13. $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln\,a$
14. $ln\,a \underset{\leq}{\overset{\geq}{<}} ln\,b \;\Leftrightarrow\; a \underset{\leq}{\overset{\geq}{<}} b$

نستخدم الخواص السابقة في حل المعادلات والمتراجحات اللوغاريتمية وتصنف إلى ثلاثة:

1) النوع الأول:

معادلات ومتراجحات من الشكل :

$\ln g > \ln h$ أو $\ln g = \ln h$

لحل المعادلات:

نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة تعريف h

ثم نوجد $E = D_g \cap D_h$

نطبق الخاصة $\ln g = \ln h \Leftarrow g = h$

نحل المعادلة الناتجة لنحصل على جذور نفرض ونقبل حسب E

لحل المتراجحات:

نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة h ثم نقاطعهما

$E = D_g \cap D_h$

نوجد حلول المعادلة الناتجة عن :

$\ln g > \ln h \Rightarrow g > h$

أو $\ln g < \ln h \Rightarrow g < h$

ولتكن حلول المتراجحة هي I عندئذ نوجد مجموعة حلول المتراجحة

$S = E \cap I$

⊛ تدريب: حل المعادلات الآتية:

1. $ln\,2x = ln(x^2 - 1)$

نوجد مجموعة تعريف الطرفين

$\ln(2x)$ معرف بشرط $2x > 0$

$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_1 =]0\,,+\infty[$

$\ln(x^2 - 1)$ معرف بشرط $x^2 - 1 > 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow D_2 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

التقاطع: $E = D_1 \cap D_2 =]1\,,+\infty[$

حسب الخاصة $\ln a = \ln b \Leftarrow a = b$ فإن:

$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$

$\Rightarrow 2x = x^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$= (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in E$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 - \sqrt{2} \notin E$ مرفوض

2. $ln(-3x) = ln(x^2 - 4)$

$-3x$ معرف بشرط $x < 0$

$\Leftarrow D_1 =]-\infty, 0[$

$x^2 - 4$ معرف بشرط $x = \mp 2$

$\Rightarrow D_2 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]-\infty, -2[$

$\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$

$\Rightarrow -3x = x^2 - 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$

إما $x = 1$ مرفوض $\not\ni E$ أو $x = -4$ مقبول $\ni E$

3. $ln(x-2) = ln(2)$

معرف عندما $x - 2 > 0 \Leftarrow x > 2$

$\Rightarrow E =]2, +\infty[$

$x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4 \in E$

4. $ln(x-2) = ln(x^2 - 2)$

معرف عندما $x - 2 > 0 \Leftarrow x > 2$

$D_1 =]2, +\infty[$

$x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$D_2 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]+\sqrt{2}, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]2, +\infty[$

حسب الخواص $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

$\ln(x-2) = \ln(x^2 - 2)$

$\Rightarrow x - 2 = x^2 - 2$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$

إما $x = 0$ أو $x = 1$ مرفوض

⊛ تدريب: حل المتراجحات الآتية:

1. $ln(x-2) \leq ln(2x-1)$

نوجد مجموعة تعريف المتراجحة E

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\Rightarrow D_1 =]2, +\infty[$

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow D_2 =]\frac{1}{2}, +\infty[$

$\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

$\Rightarrow x - 2 \leq 2x - 1$

$\Rightarrow x \geq -1$

$I =]-1, +\infty[$

$S = E \cap I \Rightarrow S =]2, +\infty[$

2. $ln\, 2x \geq ln(x^2 - 1)$

معرف على $2x > 0 \Leftarrow x > 0$

$\Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow D_2 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$

$\ln 2x \geq \ln(x^2 - 1)$

$2x \geq x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 \leq 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 4 - 4(1)(-1) = 8$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 + \sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 - \sqrt{2}$

$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
+	0 −	0	+

نريد المتراجحة أصفر أو تساوي الصفر لذلك نأخذ المجال السالب

$I = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

$S = E \cap I =]1, 1+\sqrt{2}]$

3. $ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq ln\, x$

نوجد مجموعة تعريف المتراجحة

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x} > 0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x+2$	−	0	+	+
x	−	−	0	+
$\frac{x+2}{x}$	+	0 −	‖	+

$D_2 =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]0, +\infty[$

$1 + \frac{2}{x} \geq x$

لا نضرب الوسطين بالطرفين هنا

المقدار متراجحة ليست معادلة، ننقل الجميع إلى طرف واحد وندرس إشارة كسر

$1 + \frac{2}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2}{x} \geq 0$

$\frac{x^2-x-2}{x} \leq 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$x = -1$, $x = 2$

$x = 0$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	−	0	+
x	−	−	0	+	+
$\frac{x^2-x-2}{x}$	−	0 +	‖ −	0	+

$I =]-\infty, -1] \cup]0, 2]$

$S = E \cap I =]0, 2]$

4. $\ln(x) \leq \ln(x^2 - 2x)$

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$x^2 - 2x > 0$

تربي + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0\ , x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_2 =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]2, +\infty[$

$x \leq x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x \geq 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$

$x = 0\ , \quad x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$I =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

$S = I \cap E = [3\ , +\infty[$

⊛ تدريب $\boxed{157}$:

❶ بسط كتابة الأعداد الآتية:

① $a = \ln 3 + \ln\frac{1}{3}$

$= \ln 3 + \ln 1 - \ln 3 = 0$

② $b = \ln\frac{1}{16}$

$= \ln 1 - \ln 16$

$= 0 - \ln 2^4 = -4\ln 2$

③ $c = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\ln 2$

❷ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة :

① $a = \ln 50$

$= \ln(25 \times 2)$

$= \ln 25 + \ln 2$

$= \ln(5)^2 + \ln 2$

$= 2\ln 5 + \ln 2$

② $b = \ln\frac{16}{25}$

$= \ln 16 - \ln 25$

$= \ln(2)^4 - \ln(5)^2$

$= 4\ln 2 - 2\ln 5$

③ $c = \ln 250$

$= \ln(125 \times 2)$

$= \ln 125 + \ln 2$

$= \ln(5)^3 + \ln 2$

$= 3\ln 5 + \ln 2$

❸ أثبت أن $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$

$L_1 = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$

$= \ln[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]$

$= \ln(4-3) = \ln(1) = 0 = L_2$

❹ في كل من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين y , x دون استعمال آلة حاسبة:

① $x = \ln 5 \qquad , \qquad y = \ln 2 + \ln 3$

$$\left.\begin{array}{l} x = \ln 5 \\ y = \ln 2 + \ln 3 = \ln(2.3) = \ln 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x < y$$

② $x = 2\ln 3 \qquad , \qquad y = 3\ln 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\ln 3 = \ln(3)^2 = \ln 9 \\ y = 3\ln 2 = \ln(2)^3 = \ln 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x > y$$

❺ فيما يلي بسط كتابة كل من :

① $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$

$a = \ln 567 + \ln\frac{1}{27} - \left(\ln 72 + \ln\frac{7}{8}\right)$

$= \ln\left(\frac{567}{27}\right) - \ln\left(72 \times \frac{7}{8}\right)$

$= \ln(21) - \ln(63)$

$= \ln\left(\frac{21}{63}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \ln 1 - \ln 3$

$= -\ln 3$

② $b = \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$

$b = \ln\sqrt{216} - \ln\sqrt{27} + \ln\sqrt{75} - \ln 15$

$= \ln\sqrt{\frac{216}{27}} + \ln\sqrt{25 \times 3} - \ln 15$

$= \ln\sqrt{8} + \ln 5\sqrt{3} - \ln 15$

$= \frac{1}{2}\ln 8 + \ln\left(\frac{5\sqrt{3}}{15}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(2)^3 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{3}{2}\ln 2 - \ln\sqrt{3}$

$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$

الجـــزء الأول

⑨ حل كل متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

1. $2\,ln(x) = ln(2x^2 + 8x)$

نوجد مجموعة التعريف للطرفين

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$2x^2 + 8x > 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(2x+8) = 0$

$x = 0\,, 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$ $\quad -4 \quad 0 \quad$ $+\infty$
$2x^2 + 8x$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$\Rightarrow D_2 =]-\infty, -4[\cup]0\,, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]0, +\infty[$

$2\ln x = \ln x^2$

$\ln(x^2) = \ln(2x^2 + 8x)$

$\Rightarrow x^2 = 2x^2 + 8x$

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

$x = 0 \notin E\,, x = -8 \notin E$ مرفوضين

2. $2\,ln\,x = ln(x+4) + ln\,(2x)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$

$\Rightarrow D_2 =]-4, +\infty[$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_3 = D_1$

$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0, +\infty[$

$\ln(x+4) + \ln(2x) = \ln(2x(x+4))$

$\ln(x^2) = \ln(2x^2 + 4x)$

$x^2 = 2x^2 + 8x \Rightarrow x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

$x = 0 \notin E\,, x = -8 \notin E$ مرفوضين

3. $ln(x+11) = ln(x+3) + ln(x+2)$

$x + 11 > 0 \Rightarrow x > -11$

$\Rightarrow D_1 =]-11\,, +\infty[$

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$\Rightarrow D_2 =]-3\,, +\infty[$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$\Rightarrow D_3 =]-2\,, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]-2, +\infty[$

$\ln(x+11) = \ln((x+2)(x+3))$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

$x = -5 \notin E$ مرفوض, $x = 1 \in E$ مقبول

4. $ln(x+11) = ln\big((x+3)(x+2)\big)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة:

$x + 11 > 0 \Rightarrow x > -11$

$\Rightarrow D_1 =]-11\,, +\infty[$

$(x+3)(x+2) > 0$

متراجحة جداء تحتاج دراسة إشارة

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad -2 \quad$ $+\infty$
$(x+3)(x+2)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

$D_2 =]-\infty, -3[\,\cup\,]-2, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2$

$E =]-11\,, -3[\cup]-2, +\infty[$

$x + 11 = x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

$x = 1 \in E\;,\; x = -5 \in E$ مقبولين

5. $ln\,4 + ln\,2 = ln(x-6) + ln(x+1)$

$x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$

$\Rightarrow D_1 =]6, +\infty[$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\Rightarrow D_2 =]-1\,, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]6, +\infty[$

$\ln(4 \times 2) = \ln\big((x-6)(x+1)\big)$

$8 = x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x-7)(x+2) = 0$

$x = 7 \in E\;,\; x = -2 \notin E$

6. $\frac{1}{2}ln\,2x = ln(3-x) - ln\sqrt{x+1}$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0$

$D_1 =]0\,, +\infty[$

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

$D_2 =]-\infty, 3[$

$\sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$D_3 =]-1\,, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

$\frac{1}{2}\ln 2x + \frac{1}{2}\ln x + 1 = \ln(3-x)$

$\frac{1}{2}\ln\big(2x(x+1)\big) = \ln(3-x)$

$\ln(2x^2 + 2x) = 2\ln(3-x)$

$2x^2 + 2x = (3-x)^2$

$2x^2 + 2x = 9 + x^2 - 6x$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

$x = -9 \notin E$ مرفوض $x = 1 \in E$ مقبول

7. $\ln 3 \le \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$

$D_1 =]-\infty, 5[$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$D_2 =]1, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]1, 5[$

$\ln 3 \le \ln\big((5-x)(x-1)\big)$

$3 \le -x^2 + 6x - 5$

$x^2 - 6x + 8 \le 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

$x = 4 \ , x = 2$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x-4)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$I = [2, 4]$

$S = E \cap I = [2, 4]$

8. $\ln(3x^2 - x) \le \ln x + \ln 2$

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$3x^2 - x > 0$

$3x^2 - x = 0 \Rightarrow x(3x-1) = 0$

$x = 0 \ , x = \frac{1}{3}$

$D_2 =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{3}, +\infty[$

$3x^2 - x \le 2x$

$3x^2 - 3x \le 0$

$x^2 - x \le 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 1 \ , x = 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$I = [0, 1]$

$S = E \cap I = \left]\frac{1}{3}, 1\right]$

9. $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2 - x - 2)$

$6x + 4 > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{6}$

$D_1 =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$3x^2 - x - 2 > 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$3x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(-2) = 25$

$x_1 = \frac{1+5}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_2 =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$

$6x + 4 \le 3x^2 - x - 2$

$3x^2 - 7x - 6 \ge 0$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\Delta = 49 - 4(3)(-6) = 121$

$x_1 = \frac{7+11}{6} = 3 \ , \ x_2 = \frac{7-11}{6} = \frac{-2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		3		$+\infty$
$(x+3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$I =]-\infty, \frac{-2}{3}[\cup]3, +\infty[$

$S = E \cap I =]3 , +\infty[$

10. $3\ln x > \ln(3x-2)$

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$

$D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 =]\frac{2}{3} , +\infty[$

$\ln x^3 > \ln(3x-2)$

$x^3 > 3x - 2$

$x^3 - 3x + 2 > 0$

متراجحة درجة ثالثة تحتاج جدول إشارة حيث ترد إلى درجة ثانية بالحلول التجريبية

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

⇐ نقسم على $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 2 \\ \hline x - 1 & x^3 - 3x + 2 \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & x^2 - 3x + 2 \\ & \mp x^2 \pm x \\ \hline & -2x + 2 \\ & \pm 2x \mp 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$

$(x-1)(x+2)(x-1) = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$			$-$		0	$+$	
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2+x-2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$I =]-2 , 1[\cup]1 , +\infty[$

$S = E \cap I =]\frac{2}{3} , 1[\cup]1, +\infty[$

الجـزء الأول

⑩ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس مجموعة النقاط المحققة للشرط المشار إليه:

① $\ln x = \ln(y+1)$

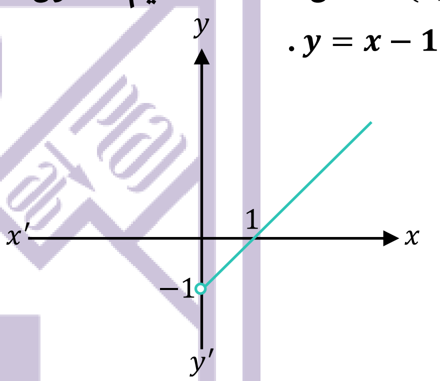
شرط الحل:

$y+1>0$	$x>0$
$y>-1$	$x \in]0,+\infty[$
$y \in]-1,+\infty[$	

$$\ln x = \ln(y+1)$$

$$x = y+1 \Rightarrow \boxed{y = x-1}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل نصف مستقيم محمول على المستقيم $y = x-1$.



② $\ln y = 2\ln x$

شرط الحل:

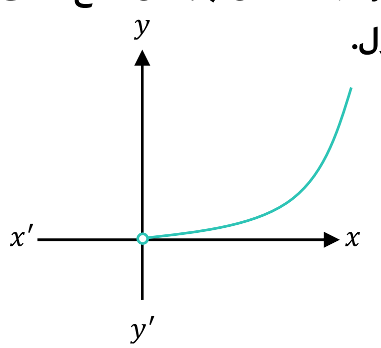
$x>0$	$y>0$
$x \in]0,+\infty[$	$y \in]0,+\infty[$

$$\ln y = 2\ln x$$

$$\ln y = \ln x^2$$

$$\boxed{y = x^2}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل جزء من قطع مكافئ موجود في الربع الأول.



③ $\ln x + \ln y = 0$

شرط الحل:

$y>0$	$x>0$
$y \in]0,+\infty[$	$x \in]0,+\infty[$

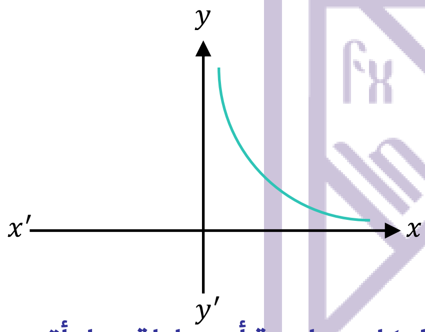
$$\ln x + \ln y = 0$$

$$\ln(x.y) = \ln 1$$

$$x.y = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

النقاط $M(x,y)$ تمثل فرع القطع الزائد الموجود في الربع الأول.



⊛ تدريب: حل كل متراجحة أو معادلة مما يأتي:

1. $ln(1-x) = -2$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$\Rightarrow E =]-\infty, 1[$

بأخذ e الطرفين

$1 - x = e^{-2} \Rightarrow x = 1 - e^{-2} \in E$

2. $ln(x-2) - ln(x+1) = 2$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$D_1 =]2,+\infty[$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$D_2 =]-1,+\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 =]2,+\infty[$

$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$

$\Rightarrow \frac{x-2}{x+1} = e^2$

$x - 2 = e^2 x + e^2$

$-e^2 x + x = e^2 + 2$

$x(-e^2 + 1) = e^2 + 2$

$e \simeq 2.7$

$x = \frac{e^2+2}{1-e^2} \notin D$

مشتق التابع اللوغاريتمي:

$$f(x)=\ln(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

أي أن مشتق تابع لوغاريتمي = $\frac{\text{مشتق ماداخل اللوغاريتم}}{\text{ماداخل اللوغاريتم}}$

⊛ تدريب: أوجد مشتق التوابع الآتية:

1. $f(x)=ln(x) \quad ; x\in D_f$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

2. $f(x)=ln(3x-4)$

$$f'(x)=\frac{3}{3x-4}$$

3. $f(x)=ln\left(\frac{x}{x-4}\right)$

$$f(x)=\ln x-\ln(x-4)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}$$

4. $f(x)=ln\left(\frac{x}{2x-3}\right)^2$

$$f(x)=2[\ln x-\ln(2x-3)]$$

$$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{4}{2x-3}$$

⊛ تدرب $\boxed{\frac{2}{154}}$: f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=2+\ln x$$

بين أن f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$

واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها $x_0=1$

f معرف على $\mathbb{R}_+^*$ فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

معادلة المماس:

$x=1 \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1=m$

$y_0=f(1)=2+\ln 1=2$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-2=x-1 \quad \Rightarrow y=x+1$

3. $(ln\,x)^2=16$

$x>0 \Rightarrow D=]0\,,+\infty[$

بفرض $\ln x=t \Leftarrow$

$\Rightarrow t^2=16 \Rightarrow t=\pm 4$

$\ln x=4 \Rightarrow x=e^4 \in D$

$\ln x=-4 \Rightarrow x=e^{-4} \in D$

4. $(ln\,x-1)(ln\,x+2)=0$

$x>0 \Rightarrow E=]0,+\infty[$

معادلة جداء صفري

إما: $\ln x-1=0 \Rightarrow \ln x=1$

$\Rightarrow x=e\in E$

أو: $\ln x+2=0 \Rightarrow \ln x=-2$

$x=e^{-2}\in E$

5. $ln(2-x)\geq 1$

$2-x>0 \Rightarrow x<2$

$E=]-\infty,2[$

$\ln(2-x)\geq 1$

$\Rightarrow 2-x\geq e$

$\Rightarrow x\leq 2-e$

$\Rightarrow I=]-\infty,2-e[$

$S=I\cap E=]-\infty\,,2-e[$

6. $ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$

$\frac{1}{x}>0 \Rightarrow x>0$

$\Rightarrow E=]0,+\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$

$\frac{1}{x}>e^2$

$\Rightarrow x<\frac{1}{e^2}$

حيث e^2 و $\frac{1}{x}$ مقداران موجبان فيمكن قلب المتراجحة

$I=]-\infty,\frac{1}{e^2}[$

$S=I\cap E=]0\,,\frac{1}{e^2}[$

بس حبيت أذكرك..

إنو بالأخير سيغلبنّ لطفه خوفك

⊛ تدرب $\boxed{\frac{3}{154}}$: f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$$

1. أثبت أن f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق.
2. نظم دولاً يبين جهة اطراد f.
3. استنتج من الجدول السابق أن $f(x)\geq 1$ أياً يكن $x\in I$

f معرف على $\mathbb{R}_+^*$ فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -1+x=0\Rightarrow x=1$$

$$f(1)=1$$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

من جدول الاطراد نلاحظ أن $f(x)\geq 1$ محققة مهما كان $x\in]0,+\infty[$ وهو حلول المتراجحة

نهايات التابع اللوغاريتمي:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

نعلم أن $\ln x<x$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}(x.\ln x)=0$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

8) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1$

إزالة عدم التعيين:

1) إخراج عامل مشترك:

$$\left[x\,,\sqrt{x}\,,\frac{1}{x}\,,\frac{1}{x+1}\right]$$

2) تفريق البسط على المقام

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$$

3) اعتماداً على خواص اللوغاريتم

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$$

$$\ln(a.b)=\ln a+\ln b$$

4) فرض متحول

⊛ تدرب $\boxed{\frac{1}{165}}$: جد كلاً من النهايات الآتية:

1. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $\qquad a=+\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}.\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{\infty}.0=0$$

2. $f(x)=(x^2-x)\ln x$ $\qquad a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=(0-0)\ln(0^+)=0(-\infty)$$

عدم تعيين

$$f(x)=x(x-1)\ln x=x.\ln x\,(x-1)$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0(0-1)=0$$

3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $\qquad a=+\infty$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}^2}=\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}(+\infty)=+\infty$$

⊛ تدرب $\boxed{\frac{2}{165}}$: فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه:

1. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$\ln x\rightarrow x>0$

$\frac{1}{x}\rightarrow x\neq0$

$$D_f=]0\,,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ حسب المبرهنة

2. $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{0-\ln0^+}{0^+}=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{+\infty-\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x-\ln x}{x}=\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}=1-\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$$

3. $f(x)=x-\ln x$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0+\infty=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

الجـــزء الأول

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

4. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$

$D_f =]0\,,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty+\infty = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\infty}-\ln(+\infty) = -\infty$

5. $f(x)=\frac{x.\ln x}{x+1}$

$\ln x \to x>0$

$\frac{1}{x+1} \to x\neq -1$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ حسب المبرهنة

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$f(x)=\frac{x.\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$

6. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

$\ln x \to x>0$

$\frac{1}{\ln x} \to \ln x\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

7. $f(x)=x(1-\ln x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0(1-\ln 0) = 0(\infty)$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x - x.\ln x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-\infty) = -\infty$

8. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$\frac{x+1}{x-4}>0$

x	$-\infty$ -1 4 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$
$x-4$	$-$ 0 $+$
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$ 0 $-$ $\|\|$ $+$

$D_f =]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to-1} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$

$\lim_{x\to4^+} f(x) = \ln(+\infty) + \infty$

9. $f(x)=\frac{1}{x}[\ln x-1]$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+}(\ln 0^+ - 1)$

$= +\infty(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\infty}(\ln(+\infty)-1)$

$= 0(\infty)$ عدم تعيين

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0-\frac{1}{\infty} = 0$

10. $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0+1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1+1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$f(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+0 = +\infty$

11. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0+0-(-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty+\infty-\infty$ عدم تعيين

$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

⊛ تدرب $\boxed{\frac{3}{165}}$: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

1. هل المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C؟
2. ادرس الوضع النسبي للخط d, C

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

بالتالي المستقيم d مقارب لـ C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
x		$+$	$+$	$+$	
الفرق		$+$	0	$-$	

عندما $x \in]0,1[$:

$f(x) - y > 0$ بالتالي يكون C فوق d

عندما $x \in]0,+\infty[$

$f(x) - y < 0$ بالتالي يكون C تحت d

عندما $x = 1$:

$f(x) = y$ نقطة تقاطع C مع d

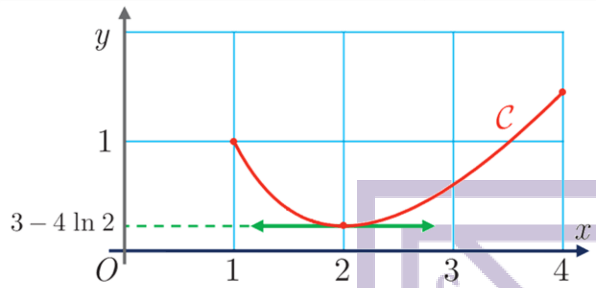
مسائل الوحدة الخامسة

$\boxed{1}$ في الشكل المجاور f معرف على $I = [1,4]$ وفق:

$$f(x) = ax + b + c.\ln x \quad ; \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

❶ أثبت أن f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$.

❷ عين a,b,c واكتب عبارة $f(x)$.



f معرف بشرط $x > 0 \Leftarrow D_f =]0,+\infty[$

فهو اشتقاقي على D_f وبالتالي f اشتقاقي على $I = [1,4]$

$$f'(x) = a + c\left(\frac{1}{x}\right)$$

$A(1,1)$ نقطة تنتمي للتابع f فهي تحقق معادلته

$$1 = a(1) + b + c.\ln(1)$$

$\Rightarrow 1 = a + b \quad ...(1)$

$B(2, 3 - 4\ln 2)$ نقطة تنتمي للتابع f فهي تحقق معادلته

$3 - 4\ln 2 = 2a + b + c.\ln 2 \;...(2)$

نلاحظ أن لـ f مماس أفقي عند B أي $f'(2) = 0$

وبالتعويض بالمشتق

$0 = a + \frac{c}{2} \Rightarrow c = -2a \;...(3)$

من (1) نجد أن $b = 1 - a$

نعوض (3) و (1) في (2)

$$3 - 4\ln 2 = 2a + 1 - a - 2a\ln 2$$
$$3 - 4\ln 2 - 1 = a - 2a.\ln 2$$
$$2 - 4\ln 2 = a(1 - 2\ln 2)$$
$$a = \frac{2 - 4\ln 2}{1 - 2\ln 2} = \frac{2(1 - 2\ln 2)}{1 - 2\ln 2} = 2$$

نعوض قيمة a في (1) و (3):

$$b = 1 - 2 = -1$$
$$c = -2(2) = -4$$
$$f(x) = 2x - 1 - 4\ln x$$

2 ليكن a, b عددين حقيقيين، C هو الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=a.x+b+\frac{1}{x}.\ln x$$

النقطة $A(1,0)$ من التابع والمماس للتابع في A يوازي المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=3x+2$

عين a, b

$A(1,0)$ نقطة من التابع فهي تحقق معادلته:

$$0=a+b+\frac{1}{1}(0)\Rightarrow a+b=0\quad ...(1)$$

$$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}(-\ln x+1)$$

المماس يوازي Δ بالتالي حسب شرط التوازي

$$y=3x+2\Rightarrow m=3$$

و $f'(1)=3=m$

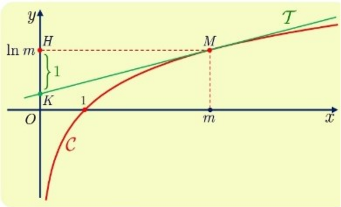
$$3=a+\frac{1}{1^2}(1)\Rightarrow a=2$$

نعوض في (1)

$$2+b=0\Rightarrow b=-2$$

$$f(x)=2x-2+\frac{1}{x}\ln x$$

3 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، رسمنا C هو الخط البياني للتابع $\ln$ لتكن M نقطة من C فاصلتها m.



❶ جد بدلالة m معادلة للمماس T للخط C في النقطة M.

$$x=m\ :\ f(m)=\ln(m)\ :\ M(m,\ln m)$$

$$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(m)=\frac{1}{m}$$

معادلة المماس من الشكل:

$$\boxed{y-y_m=\text{ميل}(x-x_m)}$$

$$y-\ln m=\frac{1}{m}(x-m)\Rightarrow y=\frac{x}{m}-1+\ln m$$

❷ لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس T مع هذا المحور.

a) أثبت أن ترتيب النقطة K يساوي $\ln(m)-1$ أياً يكن $m>0$.

K نقطة تقاطع المماس مع yy' أي $x=0$ نعوض في معادلة المماس:

$$y=0-1+\ln(m)\Rightarrow y=\ln m-1$$

$$K(0,\ln(m)-1)$$

b) استنتج أنَّ: $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$

$$\overrightarrow{KH}=(x_H-x_K)\vec{i}+(y_H-y_K)\vec{j}$$
$$=(0-0)\vec{i}+(\ln(m)-\ln(m)+1)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{KH}=\vec{j}$$

c) استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط C من نقطة كيفية منه.

بفرض M نقطة ما من C خذ مسقطها على محور التراتيب وليكن H، ثم نأخذ صورة H وفق انسحاب $-\vec{j}$ ولتكن K فيكون المماس للخط C في النقطة M هو المستقيم (MK).

الجـــزء الأول

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان؟

$\Delta = b^2 - 4a.c = 4 - 4\ln(m+1)$

حتى يكون للمعادلة جذران مختلفان يجب أن يكون $\Delta > 0$

$4 - 4\ln(m+1) > 0$

المتراجحة بشرط $m+1 > 0 \Leftarrow m > -1$

$m \in]-1, +\infty[$

$4\ln(m+1) < 4$

$\ln(m+1) < 1$

$m + 1 < e$

$m < e - 1 \Rightarrow m \in]-\infty, e-1[$

بالمقاطعة مع الشرط

$m \in]-1, e-1[$

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

❶ أوجد نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 1 = 0$$

❷ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n$

a) أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

باستخدام خواص اللوغاريتم

$= \ln\left[2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}\right]$

$S_n = \ln(n+1)$

b) ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

6 أثبت أن المستقيم الذي معادلته: $\Delta: y = x - 1$ مقارب للخط البياني للتابع

$$f(x) = x - x.\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[x - x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x + 1\right]$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[-x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 1\right]$

بفرض $\frac{1}{x} = t \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$\lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{t}\ln(1+t) + 1\right] = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{\ln(1+t)}{t} + 1\right] =$
$-1 + 1 = 0$

وبما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

7 ليكن التابع المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x)\ ; x > 0 \\ 0\ ;\ \ x = 0 \end{cases}$$

احسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ واستنتج أن f اشتقاقي عند الصفر.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2[1-\ln x]}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+}[x - x.\ln(x)] = 0 - 0 - 0$

وبما أن النهاية تساوي عدد حقيقي فإن f اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

8 التوابع الآتية معرفة على $I=\mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كل منها وارسم خطه البياني.

1. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\frac{\infty}{0^+}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-1.\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0$

$\Rightarrow \ln(x)=1\Rightarrow x=e$

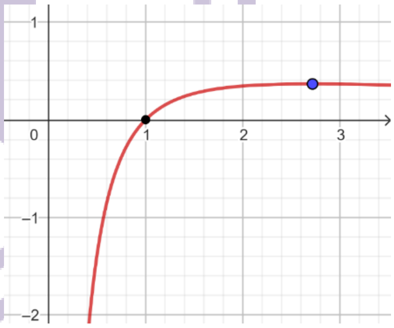
$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

نقاط مساعدة:

$y=0\Rightarrow \frac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow \ln(x)=0$

$\Rightarrow x=1\Rightarrow (1,0)$



2. $f(x)=x-\ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0-(-\infty)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)\right]$$

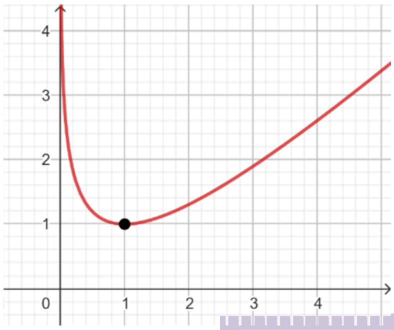
$=+\infty[1-0]=+\infty$

$f'(x)=1-\frac{1}{x}\Rightarrow 1-\frac{1}{x}\Rightarrow \frac{1}{x}=1$

$\Rightarrow x=1$

$f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



3. $f(x)=x.\ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$f'(x)=1\times\ln(x)+\frac{1}{x}.x=\ln(x)+1$

$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)=-1$

$\Rightarrow x=e^{-1}$

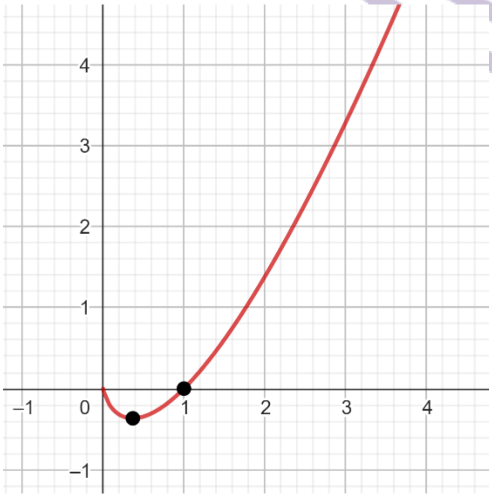
$f(e^{-1})=e^{-1}.\ln(e^{-1})=-\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert\ 0$	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

نقاط مساعدة:

$y=0\Rightarrow x.\ln(x)=0$

$\Rightarrow \ln(x)=0\Rightarrow x=1$



الجـزء الأول

4. $f(x) = \frac{1-ln(x)}{x}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$

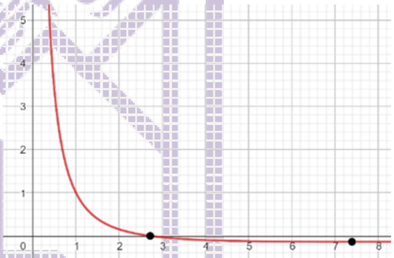
$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}.x-1(1-\ln(x))}{x^2} = \frac{\ln(x)-2}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) - 2 = 0 \Rightarrow x = e^2$

$f(e^2) = -\frac{1}{e^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1}{e^2}$	$\nearrow$	0



5. $f(x) = x - x.ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} [x(1-\ln(x))]$

$= +\infty(1-\infty) = -\infty$

$f'(x) = 1 - \left[\ln(x) + \frac{1}{x}.x\right]$

$= -\ln(x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

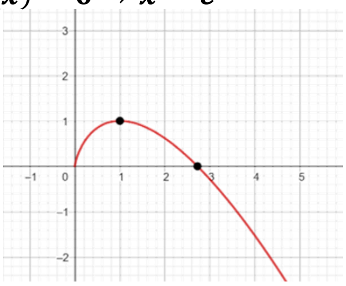
$f(1) = 1 - \ln(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

نقطة مساعدة:

$y = 0 \Rightarrow x(1-\ln(x)) = 0$

$\Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e$



6. $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6.ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + 6(-\infty) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$ ويكون C على يمين المقارب.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\left(x - 8 + \frac{8}{x} + 6\frac{\ln(x)}{x}\right)\right]$

$= +\infty$

$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8 + \frac{6}{x} = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$

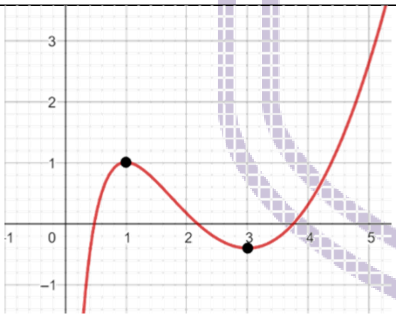
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 8 + 8 = 1$

$x = 3 \Rightarrow$

$f(3) = 9 - 24 + 8 + 6.\ln(3)$

$= -7 + 6\ln(3)$

x	0		1		3		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$



9 فيما يأتي أثبت أن f اشتقاقي على I ثم احسب $f'(x)$

1. $f(x) = ln[ln(ln(x))]$, $I =]e+\infty[$

معرف بشرط $\ln(\ln(x)) > 0$

$\Rightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow x > e$

$x \in]e,+\infty[$

وبالتالي f اشتقاقي على $]e,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))}[\ln(\ln(x))]'$$

$$= \frac{1}{\ln(ln(x))}.\frac{1}{\ln(x)}.[\ln(x)]'$$

$$= \frac{1}{\ln(\ln(x))}.\frac{1}{\ln(x)}.\frac{1}{x}$$

الجزء الأول

2. $f(x) = ln\left[\frac{x+1}{ln(x)}\right]$, $\quad I =]1, +\infty[$

معرف بشرط $\frac{x+1}{\ln(x)} > 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0			$+$			
$\ln x$					$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{\ln x}$					$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

اشتقاق f على $x \in]1, +\infty[$

$f(x) = \ln(x+1) - \ln[ln(x)]$

$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x.\ln(x)}$

10 حساب لوغاريتمي:

نفرض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b

يحققان $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)$ ، احسب $\frac{a}{b}$.

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln(a \times b)}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(a \times b)$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln(a \times b)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{a \times b}$$

$$\frac{a+b}{3} = \sqrt{a \times b}$$

$$\frac{(a+b)^2}{9} = a.b$$

$$(a+b)^2 = 9a.b$$

$$a^2 + 2a.b + b^2 = 9a.b$$

$$a^2 - 7a.b + b^2 = 0 \qquad \div (a.b) \neq 0$$

$$\frac{a}{b} - 7 + \frac{b}{a} = 0 \qquad \text{نفرض } \left(\frac{a}{b} = t\right)$$

$$t - 7 + \frac{1}{t} \qquad (\times t)$$

$$t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{5}$$

$$t_1 = \frac{a}{b} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} > 0$$

$$t_2 = \frac{a}{b} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} > 0$$

11 حل جملة معادلتين:

a عدد حقيقي موجب تماماً، حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x.y = a^2 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 \end{cases}$$

نأخذ $\ln$ الطرفين لـ (1):

$\ln(x.y) = \ln(a^2)$

$\Rightarrow \ln(x) + \ln(y) = 2.\ln(a)$

نضع $\ln(x) = X$, $\ln(y) = Y$, $\ln(a) = A$

$X + Y = 2A \quad ...(3)$

$X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}A^2 \; ...(4)$

من (3) نجد أن (5) ... $Y = 2A - X$

نعوض (5) في (4):

$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2}A^2$

$X^2 + 4A^2 - 4A.X + X^2 - \frac{5}{2}A^2 = 0$

$2X^2 - 4A.X + \frac{3}{2}A^2 = 0$

نقسم على 2

$X^2 - 2A.X + \frac{3}{4}A^2 = 0$

نضيف $\frac{1}{4}A^2$ إلى الطرفين

$X^2 - 2A.X + A^2 = \frac{1}{4}A^2$

$(X - A)^2 = \frac{1}{4}A^2$

بالجذر

$X - A = \mp\frac{1}{2}A$

إما

$X - A = \frac{1}{2}A$

$\Rightarrow X = \frac{1}{2}A + A = \frac{3}{2}A$

$\ln(x) = \frac{3}{2}.\ln(a)$

$\ln(x) = \ln\sqrt{a^3} \Rightarrow x = \sqrt{a^3}$

من (5) نعوض $X = \frac{3}{2}A$

$Y = 2A - \frac{3}{2A} = \frac{1}{2}A$

$\ln(y) = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\ln(y) = \ln(\sqrt{a}) \Rightarrow y = \sqrt{a}$

أو:

$X - A = -\frac{1}{2}A$

$$\Rightarrow X = -\frac{1}{2}A + A = \frac{1}{2}A$$
$$\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(a)$$
$$\ln(x) = \ln\sqrt{a} \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

نعوض في (5) $X = \frac{1}{2}A$

$$Y = -2A - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A$$
$$\ln(y) = \frac{3}{2}\ln(a)$$
$$\ln(y) = \ln\left(\sqrt{a^3}\right) \Rightarrow y = \sqrt{a^3}$$

ومنه جملة حلول المعادلات السابقة هي:

$$S = \{(a.\sqrt{a}, \sqrt{a}), (\sqrt{a}, a.\sqrt{a})\}$$

12 مسألة وجود: أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحققان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

تدلنا هذه المساواة إلى وجود تابع معرف على $]0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، لندرس تغيراته:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على xx' عند $+\infty$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

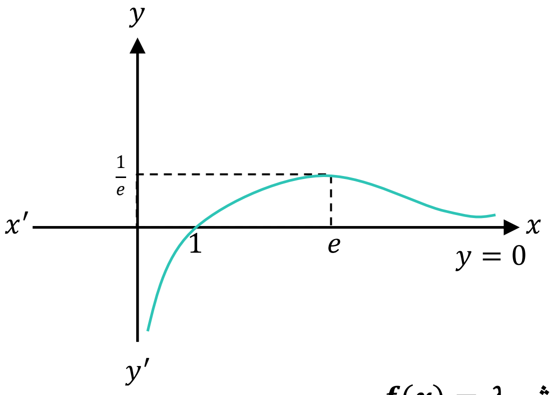
$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{x = e} \ : f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

نقطة مساعدة: C يقطع xx' $\Leftarrow$ $y = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

C يقطع xx' في $(1, 0)$



لنناقش $f(x) = \lambda$

$\lambda \in]-\infty, 0[$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda = 0$ للمعادلة حل وحيد.

$\lambda \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ للمعادلة حلين مختلفين.

$\lambda = \frac{1}{e}$ للمعادلة حل وحيد.

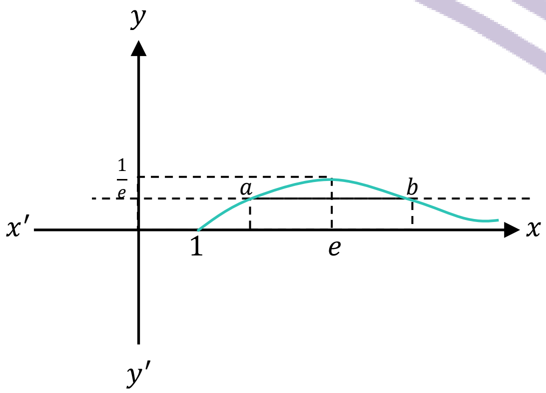
$\lambda \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ المعادلة مستحيلة الحل.

ومنه الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x) = \lambda$ حلان مختلفان

يجب أن يكون $0 < \lambda < \frac{1}{e}$، وبما أن $\lambda \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$.

فإن أحد الجذرين موجود في المجال $]0, e[$ والجذر الآخر موجود في المجال $]e, +\infty[$

$$f(a) = f(b) = \lambda$$
$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$
$$\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$$



الجزء الأول

14 حل كلاً من المعادلات الآتية:

❶ $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$|x-2| > 0$
$x - 2 \neq 0$
$x \neq 2$
$D_2 = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$|x+2| > 0$
$x + 2 \neq 0$
$x \neq -2$
$D_1 = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$$D = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$
$$\ln(|x+2|.|x-2|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = 0$$
$$\ln(|x^2-4|) = \ln 1$$
$$|x^2-4| = 1$$

أو

$x^2 - 4 = 1$
$x^2 = 5$
$\boxed{x = +\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x = -\sqrt{5}} \in D$ (مقبول)

إما

$x^2 - 4 = -1$
$x^2 = 3$
$\boxed{x = +\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x = -\sqrt{3}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة:

$$S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$$

❷ $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$x + 4 > 0$
$x > -4$
$D_2 =]-4, +\infty[$

$|x-2| > 0$
$x \neq 2$
$D_1 = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$$D = D_1 \cap D_2 =]-4, +\infty[\backslash\{2\}$$
$$=]-4, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$$
$$\ln[|x-2|(z+4)] = \ln 2^3$$
$$\ln[|x-2|(z+4)] = \ln 8$$
$$|x-2|(x+4) = 8$$

إما

$(x-2)(x+4) = 8$
$x^2 + 2x - 8 = 8$
$\Delta = 4 - 4(1)(-16) = 68 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17}$
$x_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{17}}{2} = \boxed{-1 + \sqrt{17}}$ (مقبول)
$x_2 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{17}}{2} = \boxed{-1 - \sqrt{17}}$ (مرفوض)

أو

$(x-2)(x+4) = -8$
$x^2 + 2x - 8 = -8$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x+2) = 0$
إما $\boxed{x = 0}$ (مقبول)
أو $\boxed{x = -2}$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة:

$$S = \{-2\,, 0\,, 1, +\sqrt{17}\}$$

❸ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$|x| > 0$
$x = 0$
$D_3 = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$|x-1| > 0$
$x - 1 \neq 0$
$x \neq 1$
$D_2 = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$|2x+3| > 0$
$2x + 3 \neq 0$
$x \neq -\dfrac{3}{2}$
$D_1 = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$

$$D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3}{2}, 0, 1\right\}$$
$$= \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, 0\right[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$$
$$\ln(|2x+3||x-1|) = \ln|x|^2$$
$$\ln(|2x^2+x-3|) = \ln x^2$$
$$|2x^2+x-3| = x^2$$

إما

$2x^2 + x - 3 = -x^2$
$3x^2 + x - 3 = 0$
$\Delta = 1 + 36 = 37 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{37}$
$\boxed{x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{6}} \in D$ (مقبول)

أو

$2x^2 + x - 3 = x^2$
$x^2 + x - 3 = 0$
$\Delta = 1 + 12 = 13 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$
$\boxed{x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)
$\boxed{x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}} \in D$ (مقبول)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة:

$$S = \left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

الجـــزء الأول

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

1. $x^2 + y^2 = 10$
$ln(x) + ln(y) = ln(3)$

شرط الحل $x > 0 , y > 0$

من المعادلة الثانية:

$\ln(x) + \ln(y) = \ln(3)$
$\Rightarrow \ln(x.y) = \ln(3)$
$\Rightarrow x.y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$

نعوض قيمة y في المعادلة الأولى:

$x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 10$
$x^2 + \frac{9}{x^2} - 10 = 0$

نضرب بـ x^2

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$

إما:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$
$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$
$\Rightarrow x = -1$ مرفوض

أو:

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$
$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow x = -3$ مرفوض

مجموعة الحلول:

$S = \{(1,3),(3,1)\}$

2. $2\,ln(x) + ln(y) = 7$
$3\,ln(x) - 5\,ln(y) = 4$

شرط الحل $x > 0 , y > 0$

$2\ln(x) + \ln(y) = 7 \quad \times 5$
$3\ln(x) - 5\ln(y) = 4 \quad \times 1$

بالجمع:

$13\ln(x) = 39$
$\Rightarrow \ln(x) = 3$
$\Rightarrow x = e^3$

نعوض قيمة x في المعادلة الأولى:

$2(3) + \ln(y) = 7$
$\Rightarrow \ln(y) = 1$
$\Rightarrow y = 3$

مجموعة الحلول:

$S = \{(e^3, e)\}$

3. $ln(x).ln(y) = -12$
$ln(x.y) = 1$

شرط الحل: $x > 0 , y > 0$

من المعادلة الثانية:

$\ln(x) + \ln(y) = 1$
$\Rightarrow \ln(y) = 1 - \ln(x)$ ...(1)

نعوض قيمة $\ln(y)$ في المعادلة الأولى

$\ln(x)\,(1 - \ln(x)) = -12$
$\ln(x) - \ln^2(x) + 12 = 0$
$\ln^2(x) - \ln(x) - 12 = 0$
$[\ln(x) - 4][\ln(x) + 3] = 0$

إما:

$\ln(x) = 4 \Rightarrow x = e^4$

نعوض في (1)

$\Rightarrow \ln(y) = 1 - 4 \Rightarrow y = e^{-3}$

أو:

$\ln(x) = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

نعوض في (1)

$\Rightarrow \ln(y) = 1 + 3 \Rightarrow y = e^4$

مجموعة الحلول:

$S = \{(e^4, e^{-3}),(e^{-3}, e^4)\}$

الجـزء الأول

16 حل كلاً من المعادلات:

$\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 = 0$

$\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 \geq 0$

شرط الحل: $x > 0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$

$\ln^2 x - 2.\ln(x) - 3 = 0$

$[\ln(x) - 3].[\ln(x) + 1] = 0$

إما

$\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

أو:

$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

المتراجحة:

$t^2 - 2t - 3 \geq 0$

$t = 3 \,, t = -1$

t	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة هي

$t = \ln(x) \in]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

$\Rightarrow x \in]-\infty,\frac{1}{e}] \cup [e^3,+\infty[$

17 ليكن

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

❶ تحقق أن $P(-1) = 0$

❷ استنتج أن $P(x) + (x+1).Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

❸ حل المتراجحة $P(x) \leq 0$

❹ استفد مما سبق لحل المتراجحة الآتية:

$2.\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$P(-1) = 2(-1) + 5(-1)^3 - 1 - 2$

$P(-1) = 0$

⇐ نقسم $P(x)$ على $(x+1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x - 2 \\
\hline
x+1 & 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \\
 & \mp 2x^3 \mp 2x^2 \\
\hline
 & 0 \quad + 3x^2 + x - 2 \\
 & \mp 3x^2 \mp 3x \\
\hline
 & 0 - 2x - 2 \\
 & \pm 2x \pm 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

بالتالي كثير الحدود $P(x)$ يكتب بالشكل:

$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$

$P(x) \leq 0$

$P(x) = 0$

$(x+1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$

إما:

$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

أو:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = 9 + 16 = 25$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$				$-$	0	$+$			
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

بالتالي:

$x \in]-\infty,-2] \cup [-1,\frac{1}{2}]$

$2.\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

معرفة بشرط

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0,+\infty[$

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow D_2 =]-\frac{5}{2},+\infty[$

$2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

$\Rightarrow D_3 =]-\infty,2[$

$E =]0,2[$

$\ln(x^2) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$x^2(2x+5) \leq 2 - x$

$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$

وجدنا سابقاً حلولها $I =]-\infty,-2] \cup [-1,\frac{1}{2}]$

وبالمقاطعة مع E يكون:

$S = E \cap I =]0,\frac{1}{2}]$

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

❶ أثبت أن f فردي.

❷ أثبت أن f اشتقاقي على I وادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$

❸ ارسم الخط البياني C_f على I

تكرورية:

إثبات التابع فردي:
$x \in I \Rightarrow -x \in I$
$f(-x) = -f(x)$
متناظر بالنسبة للمبدأ

$$x \in]-1,1[\Rightarrow -x \in]-1,1[$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

$\Leftarrow$ f تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

معرف بشرط $\frac{x+1}{1-x} > 0$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow D_1 =]-1,+\infty[$$

$$1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow D_2 =]-\infty,1[$$

$$D =]-1,1[$$

f معرف على D فهو اشتقاقي على D

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,1[$

$$f(0) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

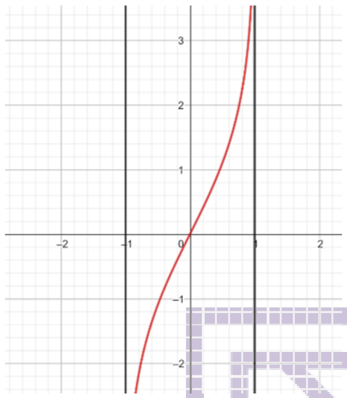
$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(x+1)(1-x)} = \frac{2}{(x+1)(1-x)} > 0$$

بما أن f فردي فإن C_f متناظر بالنسبة للمبدأ وبالتالي له مقارب شاقولي $x = -1$

x	0		1
f'	‖	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$



19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع على المجال وارسم خطه البياني:

❶ $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $I =]1,+\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy' و C على يمين المقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على xx' عند $+\infty$

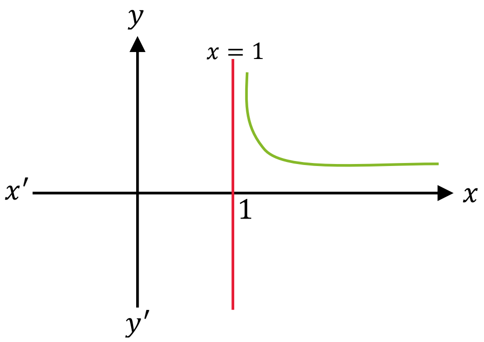
$$f'(x) = \frac{-\left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right)}{x^2\ln^2 x} = \frac{-\ln x - 1}{x^2\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\ln x - 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1$$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \notin I$$

$f'(x)$ لا ينعدم والبسط سالب والمقام موجب أي أن $f'(x) < 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0



❷ $f(x)=\ln(1+x^2)$ $\quad ,I=\mathbb{R}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

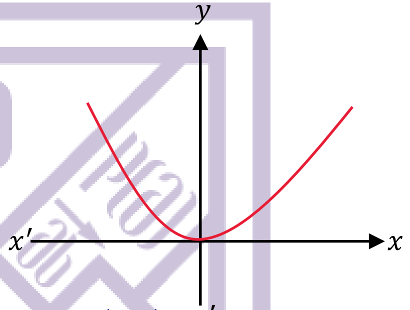
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}\,;f(0)=\ln(1)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



❸ $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $\quad ,I=]0,+\infty[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على yy' و C يقع على يمين المقارب عند $-\infty$

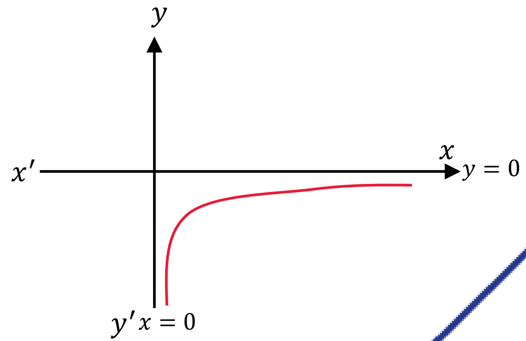
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ مقارب أفقي منطبق على xx' عند $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$f'(x)$ لا ينعدم والبسط موجب والمقام موجب حسب مجموعة التعريف أي أن: $f'(x)>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0



20 ليكن التابعان $g(x),f(x)$ المعرفان على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\ln(x+1)\ ,g(x)=\frac{x}{x+1}$$

❶ أثبت أن $g(x)\le f(x)$ أياً يكن x من I

❷ أثبت أن C_g,C_f يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

❸ ادرس تغيرات كل من g,f وارسم الخطين C_g,C_f مستفيداً من رسم المماس المشترك.

$g(x)\le f(x)\Rightarrow g(x)-f(x)\le 0$

$\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\le 0$

نسمي الفرق بين f,g بالتابع $h(x)$

$h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

h معرف ومستمر واشتقاقي على $I=]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)=-\frac{1}{0^+}-\ln(0^+)=\infty-\infty$

عدم تعيين

$h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

$h(x)=\frac{x-(x+1).\ln(x+1)}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)=\frac{-1-0}{0^+}=-\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1-\infty=-\infty$

$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1-x-1}{(x+1)^2}=\frac{-x}{(x+1)^2}$

$h'(x)=0\Rightarrow x=0$

$h(0)=0-0=0$

x	-1		0		$+\infty$
h'	‖	$+$	0	$-$	
h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

من السطر الثالث لجدول التغيرات نلاحظ أن $h(x)\le 0$ محققة أياً كان $x\in]-1,+\infty[$

إذاً

$g(x)-f(x)\le 0$

$\Rightarrow g(x)\le f(x)$

وبالتالي C_g تحت C_f

ندرس تغيرات f

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} > 0$

x	-1		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

معادلة المماس:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$
$f'(0) = m = 1$
$y - 0 = 1(x - 0)$
$y = x$

ندرس تغيرات g:

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\dfrac{1}{0^+} = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$

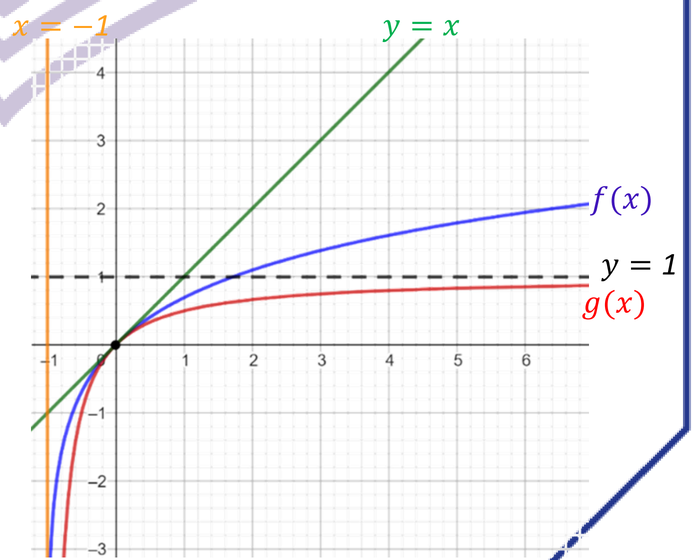
$y = 1$ مقاب أفقي في جوار $+\infty$

$g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$

x	-1		$+\infty$
g'	‖	$+$	
g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

معادلة المماس

$x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$
$g'(0) = m = 1$
$y - 0 = 1(x - 0)$
$y = x$



21 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + 1 + 2.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه.

❹ ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 + 1 + 2.\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + 2.\ln 1 = +\infty$

لا يوجد مقارب أفقي لكن يمكن وجود مقارب مائل.

$f(x) = x + 1 + 2.\ln x - 2.\ln(x-1)$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1}$

$= \dfrac{x^2 - x + 2x - 2 - 2x}{x(x-1)}$

$= \dfrac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}$

$= \dfrac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ مرفوض

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 2 + 1 + 2.\ln(2) = 3 + \ln(4)$

x	1		2		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$3 + \ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - y_\Delta] =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x + 1 + 2.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - (x+1)\right]$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \left[2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = 2\ln(1) = 0$

$\Leftarrow y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الجـــزء الأول

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

لأن $\frac{x}{x-1} > 0$

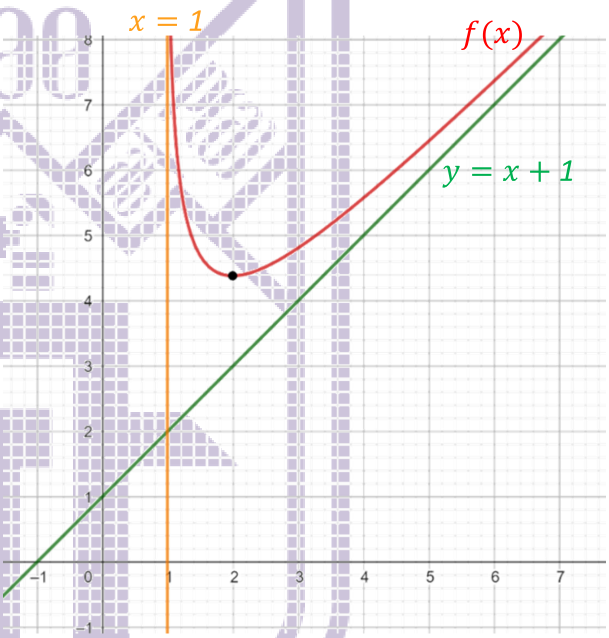
$\Leftarrow$ C فوق Δ

الرسم:

$y = x + 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$

$y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1,0)$



22 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

❶ أثبت أن f متزايد تماماً على I.

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

❸ ادرس الوضع النسبي للخط C مع مقاربه.

❹ ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

$f(x) = x - 4 + \ln(x) - \ln(x+1)$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = \frac{x^2+x+x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$

f متزايد تماماً على $]0, +\infty[$ لأن:

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] =$

$\lim_{x\to+\infty} \left[x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - (x-4)\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$

$\Leftarrow$ $y = x - 4$ مقارب مائل

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

لأن $\frac{x}{x+1} < 1$ $\Leftarrow$ C تحت y

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -4 + \ln\left(\frac{0^+}{0^+ + 1}\right) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$

$f'(x) > 0$

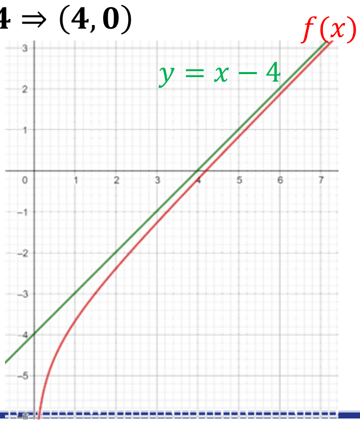
x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:

$y = x - 4$

$x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (0, -4)$

$y = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$



الجزء الأول

23 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي مع مقاربه.

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

❹ ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - \ln\left(2+\frac{1}{0^+}\right) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \ln(2+0) = +\infty$$

لا يوجد مقارب أفقي.

$$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2x^2+x} = \frac{2x^2+x+1}{2x^2+x} > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+x+1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 1 - 8 = -7 < 0$$

مستحيلة الحل

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_\Delta] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) - x + \ln(2)\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(2) - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

Δ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$\ln\left(\frac{2}{2+\frac{1}{x}}\right) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{2+\frac{1}{x}} < 1$$

Δ تحت C

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

$$f(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$$

$$0 \in]-\infty,+\infty[$$

$\Leftarrow$ $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]0,+\infty[$

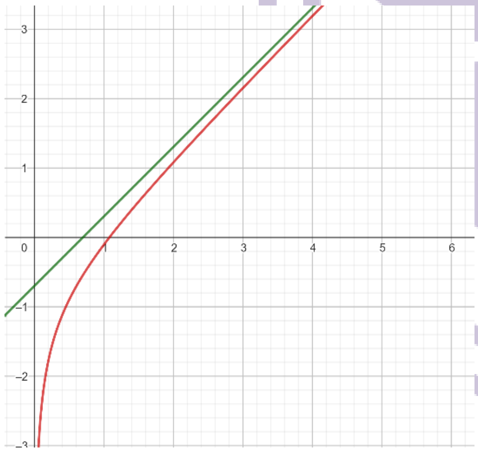
x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:

$$y = x - \ln(2)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\ln(2) \Rightarrow (0, -\ln(2))$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \ln(2) \Rightarrow (\ln(2), 0)$$



24 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

❶ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط C ثم ادرس الوضع النسبي.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم d ثم الخط البياني C.

❸ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله يساوي 1.

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y_\Delta] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) - (5-2x)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = 3\ln(1) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = 5 - 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

C فوق Δ لأن $\frac{x+1}{x-4} > 1$

دراسة التغيرات

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]4, +\infty[$

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = 5 - 8 + 3\ln\left(\frac{5}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = 4$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty + 3\ln(1) = -\infty$$

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln(x+1) - 3\ln(x-4)$$

$$f'(x) = -2 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+6x+8+3x-12-3x-3}{(x+1)(x-4)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+6x-7}{(x+1)(x-4)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4(-2)(-7) = 36 - 56 < 0$$

$$f'(x) \neq 0$$

x	4	$+\infty$
f'	‖	$-$
f	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

f مستمر ومتناقص تماماً على $]4, +\infty[$

$f(]4, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

$\alpha \in]4, +\infty[$

$f(5) = 5 - 2(5) + 3\ln(6)$

$= -5 + 3\ln(6)$

$f(5) = -5 + 3[\ln(2) + \ln(3)]$

$f(5) = -5 + 3(1.8) = 0.4 > 0$

$f(6) = 5 - 2(6) + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

$f(6) = -7 + 3(1.25)$

$= -7 + 3.75 = -3.25 < 0$

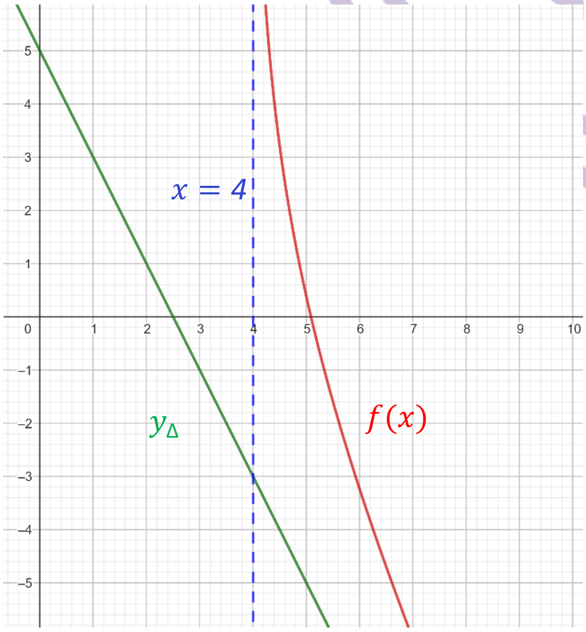
$\Rightarrow \alpha \in [5, 6]$

الرسم:

$y = 5 - 2x$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (0, 5)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2.5 \Rightarrow (2.5, 0)$



25 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

❶ أثبت أن f متزايد تماماً على I.

❷ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α

❸ أثبت أن $1 < \alpha < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0$

وبالتالي f متزايد تماماً

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1 + (-\infty) = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$

x	1		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,+\infty[$

$f(\,]1,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$

$0 \in]-\infty,+\infty[$

وبالتالي $f(x) = 0$ معادلة لها حل وحيد

$\lim\limits_{x\to\sqrt{1+\frac{1}{e}}} f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} + \ln\left(1+\frac{1}{e}-1\right)$

$= \sqrt{1+\frac{1}{e}} - \ln(e) = \sqrt{1+\frac{1}{e}} - 1 > 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty < 0$

$\alpha \in]1, \sqrt{1+\frac{1}{e}}[$

26 ليكن C الخط البياني للتابع f المعطى وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

❶ تحقق أن D_f هي $]-\infty,0[\cup]1+\infty[$

❷ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة التعريف.

❸ أثبت أن f متناقص تماماً على كل من مجالي D_f

❹ ارسم في معلم متجانس الخط البياني C.

f معرف بشرط $\frac{2x}{x-1} > 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0			$+$	
$x-1$		$-$			0	$+$	
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\Rightarrow D_f =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$

$y = \ln(2)$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty,+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \ln\left(\frac{0}{0-1}\right) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln\left(\frac{2}{1-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) = \ln(2x) - \ln(x-1)$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$

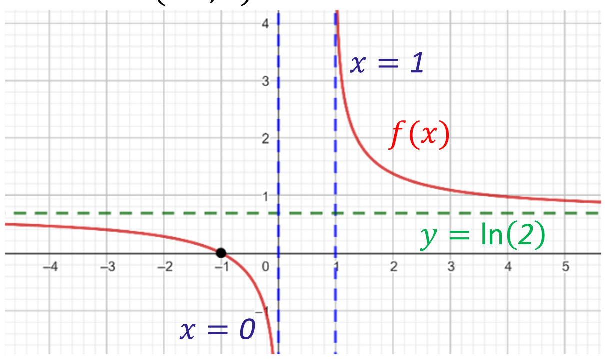
f متناقص تماماً على D_f

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
f'		$-$	‖	‖	$-$	
f	$\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$

الرسم:

$y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x = x - 1$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1,0)$



27 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

❶ تحقق أن مجموعة تعريفه هي $]1,3[$

معرف بشرط $\frac{x-1}{3-x}>0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$D=]1,3[$

❷ أثبت أن $(4-x)\in D \quad \forall x\in D$

$x\in]1,3[$

نضرب بـ -1

$\Rightarrow -x\in]-3,-1[$

نضيف 4

$4-x\in]1,3[$

$\Rightarrow 4-x\in]1,3[$

❸ احسب المقدار $f(4-x)+f(x)$ واستنتج أن النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C

$f(4-x)+f(x)=$

$$\ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)=\ln(1)=0$$

لإثبات أن $A(2,0)$ مركز تناظر لـ C يجب أن يتحقق

$4-x\in D_f$ محقق من الطلب الثاني

$f(4-x)+f(x)=0$ محقق من الطلب الثالث

بالتالي $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C.

❹ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم كلاً من المقاربات و C

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1,3[$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\ln\left(\frac{0}{2}\right)=\ln(0^+)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3-x}$$

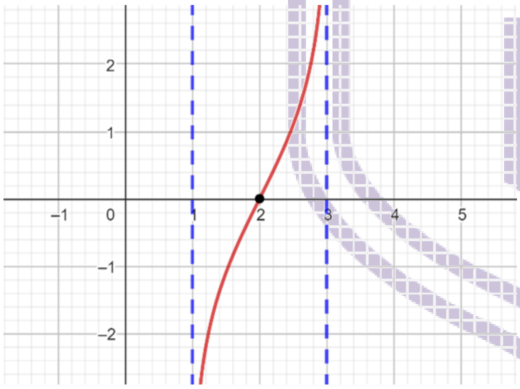
$$f'(x)=\frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}=\frac{2}{(x-1)(3-x)}>0$$

x	1		3
f'	$\Vert$	$+$	$\Vert$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

الرسم:

$y=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)=0 \Rightarrow \frac{x-1}{3-x}=1$

$x-1=3-x \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$



28 ليكن التابع المعرف على $D=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

❶ احسب نهاية f عند $+\infty, 0^+$

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(1+0)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{0^+}\right)-1=+\infty$$

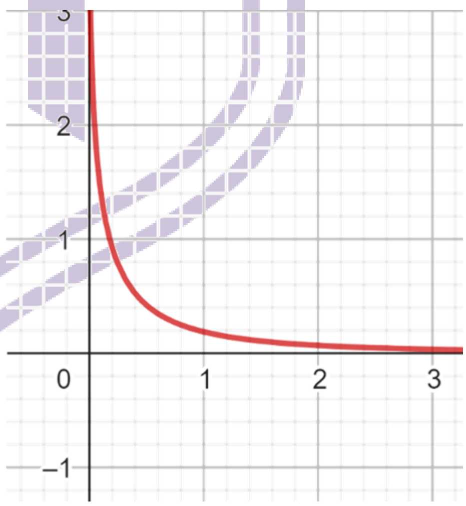
$x=0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2}\neq 0$$

x	0			$+\infty$
f'	‖		$-$	
f	‖ $+\infty$		↘	0



29 في كل من الحالتين الآتيتين: ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$ وارسم خطه البياني C

❶ $f(x)=(x+1)\ln x$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب منطبق على yy' عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x+1)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

(لمعرفة إشارة f' ندرس تغيراته):

$$f'(x)=g(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$$

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=?$ (حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$)

$$g(x)=\frac{1}{x}(x\ln x+x+1)$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty(0+0+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1} : g(1)=2$$

x	0				$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن $f'(x)=g(x)$ موجب تماماً أياً كان $x\in]0,+\infty[$

وبالتالي يصبح جدول تغيرات f كما يلي:

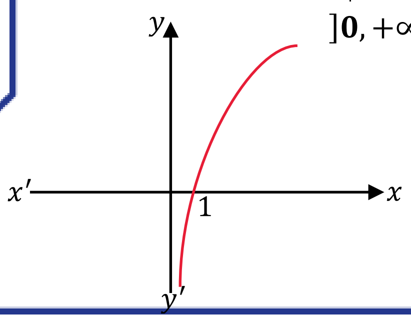
x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

نقطة مساعدة: نقطة التقاطع مع المحور xx'

$$f(x)=0\Rightarrow(x+1)\ln x=0$$

$\ln x=0$	$x+1=0$
$x=1$	$x=-1\in I$

نقطة التقاطع مع x': $]0,+\infty[$



الجزء الأول

❷ $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$

f معرف واشتقاق على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$x=0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$ و C يقع على يمين المقارب

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+\infty=+\infty$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+x.\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1$

(لمعرفة إشارة ندرس تغيراته):

$f'(x)=g(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1$

g معرف واشتقاق على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=-\infty-\infty=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g'(x)=\frac{-(-2x)}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{2+x^2}{x^3}>0$

$g'(x)$ لا ينعدم، والبسط موجب والمقام موجب حسب مجموعة التعريف، أي أن $g'(x)>0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من جدول تغيرات $g(x)$ وجود قيمة $x\in I$ تحقق $g(x)=0$

وبملاحظة أن $x=1$ هو حل للمعادلة أي

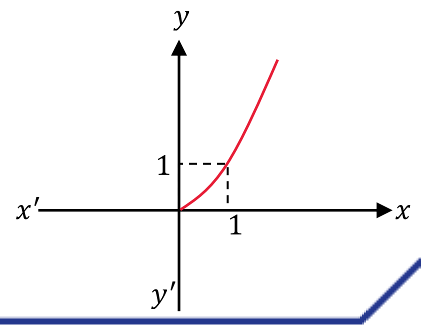
$g(1)=-1+0+1=0$

وهو حل وحيد للمعادلة كون متزايد تماماً على I

$f'(1)=g(1)=0\ ,x=1:f(1)=1$

فيكون جدول تغيرات f كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



30 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

❶ احسب $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ما مقاربات الخط C.

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$

$x=0$ مقارب منطبق على yy' عند $-\infty$ و C يقع على يمين المقارب.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$ حالة عدم تعيين من الشكل$\left.\right)$

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ مقارب منطبق على xx' عند $+\infty$.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C.

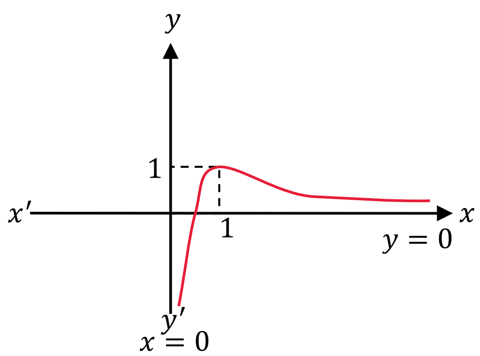
f معرف واشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x)-(1)(1+\ln x)}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow \ln x=0$

$\boxed{x=1}\ :f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



الجـزء الأول

❸ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرفة كما يأتي:
M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل.
M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.
M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

a) احسب فواصل هذه النقاط.

- M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل أي $f(x) = 0$

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow \frac{1+\ln x_1}{x_1} = 0$$
$$1 + \ln x_1 = 0$$
$$\ln x_1 = -1$$
$$x_1 = e^{-1} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{e}}$$

- M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات،

نكتب معادلة المماس في النقطة M_2.
نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 فيكون:

$$f(x_2) = \frac{1+\ln x_2}{x_2}$$

فتكون نقطة التماس: $M_2\left(x_2, \frac{1+\ln x_2}{x_2}\right)$

ميل المماس: $m = f'(x_2) = \frac{-\ln x_2}{x_2^2}$

معادلة المماس T_{M_2}: $y - f(x_2) = m(x - x_2)$

$$y = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(x - x_2)$$

المماس T_{M_2} يمر من المبدأ $(0,0)$ نعوض في المعادلة:

$$0 = \frac{1+\ln x_2}{x_2} - \frac{\ln x_2}{x_2^2}(0 - x_2)$$
$$0 = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x_2}{x_2} + \frac{\ln x_2}{x_2}$$
$$0 = \frac{1}{x_2} + 2\frac{\ln x_2}{x_2}$$
$$2\frac{\ln x_2}{x_2} = -\frac{1}{x_2}$$
$$\ln x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

- M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_3 بالرمز x_3.

ميل المماس $m = f'(x_3) = 0$

$$\frac{-\ln x_3}{x_3^2} = 0$$
$$\ln x_3 = 0$$
$$\boxed{x_3 = 1}$$

- M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

نقطة التماس: نرمز إلى فاصلة M_4 بالرمز x_4.

$$f'(x_4) = \frac{-1+2\ln x_4}{x_4^3}$$
$$f'(x_4) = 0 \Rightarrow -1 + 2\ln x_4 = 0$$
$$\ln x_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_4 = \sqrt{e}}$$

b) أثبت أن تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ما أساسه .

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad , \quad x_3 = 1 \quad , \quad x_4 = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \sqrt{e}$$
$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e}$$
$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$$

فواصل النقاط هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\sqrt{e}$.

الجـــزء الأول

31 ليكن التابع المعرف على $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

وليكن C خطه البياني في معلم متجانس.

❶ a) أثبت أن $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f.

$$f(1-x) = -\frac{1-x}{2} + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{-(x)}{-(x-1)}\right|$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

$$f(x) + f(1-x) = \frac{-x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

$$= \ln\left[\left|\frac{x-1}{x}\right| . \left|\frac{x}{x-1}\right|\right] - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(1-x) = -\frac{1}{2} \qquad (\div 2)$$

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$$

b) استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C.

الشرط الأول:

بفرض $\left(a - h = \frac{1}{2} - h\right) \in D = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$\frac{1}{2} - h \neq 0$	$\frac{1}{2} - h \neq 1$
$h \neq \frac{1}{2}$	$h \neq -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} + h \neq 1$	$\frac{1}{2} + h \neq 0$

إذاً نجد $\left(a + h = \frac{1}{2} + h\right) \in D = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وبالتالي الشرط الأول محقق.

وبالاستفادة من الطلب الأول وبفرض $x = \frac{1}{2} + h$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) + f\left(1 - \left(\frac{1}{2} + h\right)\right)}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) + f\left(\frac{1}{2} - h\right)}{2} = -\frac{1}{4}$$

وبالتالي الشرط الثاني محقق أي $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$

ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C.

❷ ادرس تغيرات على مجموعة تعريفه.

أولاً ندرس إشارة المقدار $u = \frac{x-1}{x}$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ; x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ f_2(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ; x \in]0, 1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} f_1(x) = \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} f_2(x) = \ln\left(\frac{-1}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على yy'

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f_1(x) = -\frac{1}{2} + \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f_2(x) = -\frac{1}{2} + \ln(0) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy'

التابع $f(x)$ معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$f'_1(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1.x - (x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}.\frac{x}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{-1.x - (-x+1)}{x^2}}{\frac{-x+1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{-1}{x^2}.\frac{x}{-x+1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{-1}{x(-x+1)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - x} \\ f'_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - x} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-1}{x^2 - x}$$

$$x^2 - x = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

إما $\boxed{x = 2} \Rightarrow f_1(2) = -1 + \ln\frac{1}{2} = -1 - \ln 2$

أو $\boxed{x = -1} \Rightarrow f_1(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$

الجزء الأول

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

❸ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه d

$$f(x) - y_d = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{2}x = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$f(x) - y_d = \begin{cases} f_1(x) - y_d = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\\ f_2(x) - y_d = \ln\left(\frac{-x+1}{x}\right) & ; x \in]0, 1[\end{cases}$$

وبالتالي نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x\to-\infty} (f_1(x) - y_d) = \ln 1 = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x\to+\infty} (f_1(x) - y_d) = \ln 1 = 0$$

وبالتالي المستقيم $d : y = -\frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$ و $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x) - y_d$

$$f(x) - y_d = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Rightarrow e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|} = e^{\ln 1}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1$$

إما $\frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = x \Rightarrow -1 = 0$

(مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$)

أو $\frac{x-1}{x} = -1 \Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

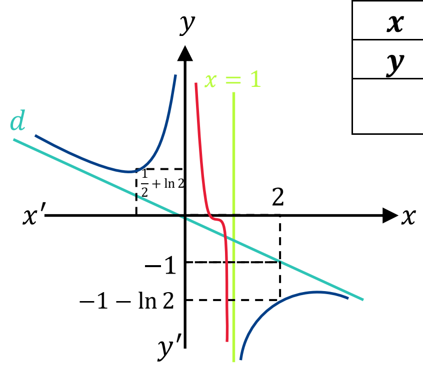
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right| = -\frac{1}{4} + \ln(1) = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x) - y_d$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
الوضع النسبي		C فوق d	‖	C فوق d	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$	C تحت d	‖	C تحت d	

❹ ارسم في معلم واحد d ثم C.

$$d : y = -\frac{1}{2}x$$

x	0	2
y	0	-1
	$(0,0)$	$(2,-1)$



32 ليكن التابع المعرف وفق $D = \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

وليكن C خطه البياني في معلم متجانس

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x} . \frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x.\ln(x)}{x^4}$$
$$= \frac{x(1-2.\ln(x))}{x^4} = \frac{1-2.\ln(x)}{x^3}$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2.\ln(x) = 0$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$
$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2e}$$

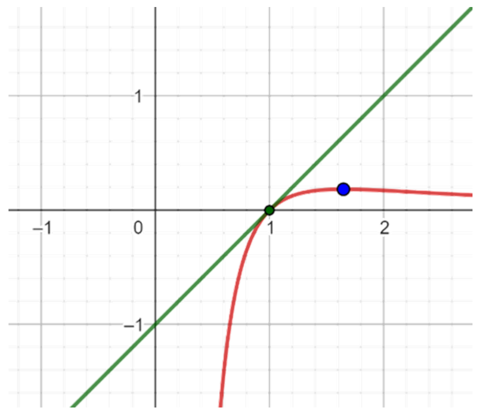
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

❷ ليكن A نقطة من C فاصلتها $x = 1$ أوجد معادلة المستقيم T_A مماس C في A وارسم T_A ومقاربات C ثم C.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0 = y_0$$
$$m = f'(1) = \frac{1-2\ln(1)}{1^3} = 1$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Rightarrow y = x - 1$$

الرسم:

$$y = x - 1$$
$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$



تكرورية خطيرة:

إذا طلب إثبات صحة المتراجحة:
ننقل الأطراف إلى طرف ≥ 0
نفرض $f(x) =$
ندرس تغيرات $f(x)$ ونحدد صحة العلاقة من الجدول.

تدرب:

أثبت صحة المتراجحة:

$ln(x) < 2\sqrt{x}$; $x \in]0, +\infty[$

ننقل الأطراف

$2\sqrt{x} - \ln(x) > 0$

$f(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x) > 0$

أصبحت المتراجحة $f(x) > 0$

ندرس تغيرات $f(x)$

$f(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$f(x) = \sqrt{x}\left[2 - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right]$

$= \sqrt{x}\left[2 - \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}}\right]$

$= \sqrt{x}\left[2 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]$

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left[2 - 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]$

$= +\infty(2 - 2(0)) = +\infty$

$f'(x) = 2.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2\sqrt{1} - \ln(1) = 2$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن

$f(x) \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$; $x \in]0, +\infty[$

ننقل الأطراف

$2\sqrt{x} - 2 - \ln(x) \geq 0$

نفرض $f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

أي سنثبت أن $f(x) \geq 0$

ندرس تغيرات $f(x)$

$f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2(0) - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left[2 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right] = +\infty$

$f'(x) = 2.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

$\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2\sqrt{1} - 2 - \ln(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن $f(x) \geq 0$

كرم الله لا يتأخر
إنما يأتيك
في وقته المناسب 😊

الإهداء

إلى روح أخي الحبيب المرحوم محمد نور تكروري

أهدي هذا العمل بكل ما يحمل من جهدٍ وفكر، عرفاناً لمكانتك السامية في قلبي، ووفاءً لذكراك التي بقيت نبراساً يضيء الدرب، رغم غيابك عن هذه الدنيا.

لقد تركت أثراً لا يزول، وحضوراً يستمدّ منه القلب قوة وصبراً، وكأنك روحك ما تزال تحفّ خطواتنا بلطفها.

أسأل الله العظيم، ربّ العرش الكريم، أن يجعل هذا العمل نوراً يصل إليك، ورحمةً تُرفع في ميزان حسناتك، وأن يشرّف مقامك في جنات النعيم، حيث لا وجع ولا فراق.

سلامٌ عليك ما بقيت الذكرى، وما دام الدعاء يصل إلى السماء.