البحث الثالث
الاشتقاق

العدد المشتق:

إذا ورد ادرس قابلية الاشتقاق

$$\Delta(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

↶ $=\infty$

نقول عن f أنه غير قابل للاشتقاق عند a

↶ = عدد

نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند a

⊛ **تدريب:** ادرس قابلية الاشتقاق لـ f عند $a=1$ حيث:

$$f(x)=x^2-2x$$

نشكل $\Delta(x)$

$$\Delta(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{(x^2-2x)-(1-2(1))}{x-1}$$

$$=\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$$=x-1$$

$$\lim_{x\to 1}\Delta(x)=1-1=0$$

f قابل للاشتقاق عند $a=1$

⊛ **تدريب:** ادرس قابلية اشتقاق f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x^2.\sqrt{x}$ عند $a=0$

$$\Delta(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sqrt{x}}{x}=x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\Delta(x)=0$$

f قابل للاشتقاق عند $a=0$

قواعد الاشتقاق:

⊗ $f(x)=a\Rightarrow f'(x)=0$

مشتق العدد الثابت $=0$

مثال:

$f(x)=3\Rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=5\Rightarrow f'(x)=0$

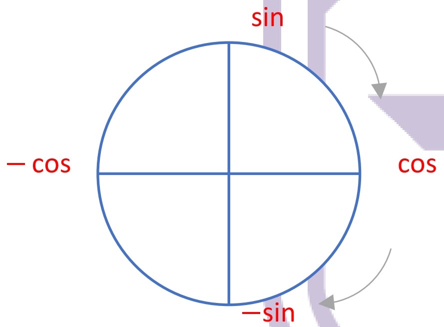
⊗ $f(x)=ax\Rightarrow f'(x)=a$

$f(x)=5x\Rightarrow f'(x)=5$

$f(x)=4x\Rightarrow f'(x)=4$

التابع المثلثي:

في الاشتقاق نمشي مع عقارب الساعة



⊗ $f(x)=\sin u\Rightarrow f'(x)=u'.\cos u$

⊗ $f(x)=\sin(x^2+2x)\Rightarrow$

$f'(x)=(2x+2)\cos(x^2+2x)$

⊗ $f(x)=\cos u\Rightarrow f'(x)=-u'\sin u$

⊗ $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$

⊗ $f(x)=\cos(x^2+2x)\Rightarrow$

$f'(x)=-(2x+2)\sin(x^2+2x)$

⊗ $f(x)=\tan u\Rightarrow f'(x)=u'[1+\tan^2 u]$

⊗ $f(x)=\tan 4x\Rightarrow f'(x)=4[1+\tan^2 4x]$

⊗ $f(x)=\tan(x^2+2x)\Rightarrow$

$f'(x)=(2x+2)(1+\tan^2(x^2+2x))$

التابع الكسري:

مشتق البسط ضرب المقام ناقص مشتق المقام ضرب البسط على مربع المقام

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'.h-h'.g}{h^2}$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{2-x}$$

$$f'(x)=\frac{2-x-(-1)(x+1)}{(2-x)^2}=\frac{2-x+x+1}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{3}{(2-x)^2}$$

تكرورية على السريع:

$$\frac{1}{x}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}-\frac{1}{x^2}$$

مشتق جداء تابعين مختلفين:

$$f(x)=g.h$$

$$\boxed{f'(x)=g'.h+h'.g}$$

الأول × مشتق الثاني + الثاني × مشتق الأول =

$$f(x)=x^2\sin 2x$$

$$f'(x)=2x.\sin 2x+2x^2\cos 2x$$

التابع الجذري:

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

$$f(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$ أو $$\frac{\text{مشتق ما داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{الجذر}}}$$

$$f(x)=\sqrt{x^3+3x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x}}$$

$$f(x)=\sqrt{x}.\cos x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sin x\left(\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos x-\sqrt{x}.\sin x$$

مشتق $(g)^n$:

$$f(x)=\left(g(x)\right)^n$$

$$f'(x)=n.g'(x).\left(g(x)\right)^{n-1}$$

⊗ مثال:

$$f(x)=(x^2+3x)^4$$

$$f(x)=4(2x+3)(x^2+3x)^3$$

$$=(8x+12)(x^2+3x)^3$$

$$f(x)=(2x^3+x^2)^3$$

$$f'(x)=3(6x^2+2x)(2x^3+x^2)^2$$

$$=(18x^2+6x)(2x^3+x^2)^2$$

تطبيقات الاشتقاق:

المماس:

يقترب من C ويمسه بنقطة واحدة (غير شريف)

معادلة المماس تحتاج إلى:

- نقطة التماس (x_0,y_0) $f(x_0)=y_0$
- ميل $f'(x_0)=m$

معادلته:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

أو:

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

حالات معادلة المماس:

- x_0 معلومة و m, y_0 مجهولين نعوض في التابع x_0 للحصول على y_0 ثم نشتق التابع ونعوض فيه x_0 نحصل على ميل m
- y_0 معلومة و x_0 , m مجاهيل، نضع $f(x) = y_0$ ونحل المعادلة للحصول على x_0 وبعد الحصول على x_0 نشتق التابع ونعوض x_0 في المشتق للحصول على الميل m
- m معلومة و y_0, x_0 مجاهيل، نشتق التابع ونضع $f'(x) = m$ ونحل المعادلة نحصل على x_0 ثم نعوض x_0 في التابع للحصول على y_0
- المستقيمان المتوازيان $m_1 = m_2$
- المستقيمان المتعامدان $m_1.m_2 = -1$

⊛ تدريب: فيما يأتي C_f هو الخط البياني للتابع f اكتب معادلة المماس في النقطة $x_0 = 4$

⊗ $f(x) = \frac{1}{x}$

$x_0 = 4\,, y_0 = ?\ , m = ?$

نعوض في التابع لحساب y_0

$f(4) = \frac{1}{4}$

$A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ نقطة التماس

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$m = f'(4) = -\frac{1}{16}$

معادلة المماس:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}(x - 4)$

$y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}$

⊗ $f(x) = x^2$

$x_0 = 4\,, y_0 = ?\,, m = ?$

$f(4) = 4^2 = 16 = y_0$

$A(4, 16)$ نقطة التماس

$f'(x) = 2x$

$f'(4) = 8 = m$

معادلة المماس:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 16 = 8(x - 4)$

$y = 8x - 16$

⊗ $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(4) = \sqrt{9} = 3$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(4) = \frac{1}{3} = m$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

التقريب التآلفي:

يستخدم إذا ورد أوجد القيمة التقريبية، يحتاج إلى:

- تابع $f(x)$
- عدد صحيح نقرب بالقيمة المعطاة a
- فرق التقريب h

$h = \text{القيمة المعطاة} - a$

قانونه:

$$\boxed{f(a + h) \simeq f(a) + f'(a).h}$$

⊛ **تدريب:** ليكن التابع f معرف وفق:

$$f(x) = x^2 + 2x - 5$$

أوجد القيمة التقريبية لـ f عند $x = 4.1$

$a = 4\,, h = 4.1 - 4 = 0.1 = \frac{1}{10}$

$f(4) = 16 + 8 - 5 = 19$

$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(4) = 10$

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a).h$

$$f(4.1) = 19 + 10 \times \frac{1}{10} = 20$$

التطبيق الثاني في الاشتقاق:

يوجد دائماً الطلب في مسألة 100 علامة وهو الأساس في المسألة

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

دراسة تغيرات تابع:

1) نوجد مجموعة التعريف ونكتبه على شكل مجالات أو اجتماع مجالات وأغلب الأحيان تكون موجودة مجموعة التعريف في نص السؤال

2) نوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف ونوجد الصور عند الأطراف المغلقة

3) نشتق التابع ثم نعدم المشتق $f'(x) = 0$ نحل المعادلة وينتج قيم لـ x أي قيمة $x =$ ∋ مجموعة التعريف ثم نعوض التابع القيمة العادمة للمشتق

4) نشكل جدول التغيرات

x	مجموعة التعريف + القيم العادمة		
f'	+	0	−
f	النهايات ↗	الصور	↘ النهايات

المستقر الفعلي

القيم الحدية:

x		a	
f'	+	0 أو ||	−
f	↗	b	↘

$f(a) = b$ قيمة حدية كبرى

x		a	
f'	−	0 أو ||	+
f	↘	b	↗

$f(a) = b$ قيمة حدية صغرى

الرسم:

1) مقاربات + معادلات تماس

2) نقاط جدول

3) نقاط مساعدة

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \boxed{}$ ∋ مجموعة التعريف

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

ونحل معادلة

⊛ **مثال:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x^2-x$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) عين المستقر الفعلي للتابع f.

3) ارسم الخط البياني للتابع.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=(-\infty)^2+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

لا يوجد مقاربات

نشتق التابع ثم نعدمه

$$f'(x)=2x-1$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\in D_f$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

قيمة حدية صغرة $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

المستقر الفعلي

$$\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[$$

الرسم:

لا يوجد مقاربات

نقاط الجدول:

$$(-\infty,\infty)\quad\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\quad(+\infty,+\infty)$$

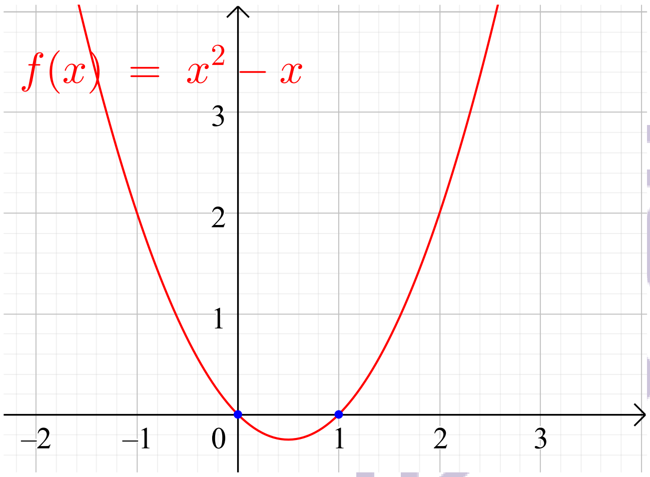
نقاط مساعدة:

$$x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$$

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$$

$$\Rightarrow x=1\Rightarrow(1,0)$$



⊛ **مثال:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، وعين ما للتابع من مقاربات أفقية وشاقولية

❷ أثبت أن $y=x$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي لـ C مع مقاربه.

❸ ارسم كل من المقاربات ثم ارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C، وC على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب.

الجـــزء الأول

$$f'(x)=\frac{2x(x)-1(x^2-1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2+1}{x^2}>0$$

f متزايد تماماً.

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2+1=0$$
$$\Rightarrow x^2=-1$$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لإثبات أن $y=x$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x}-x=0$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=x$ مقارب لـ C

في جوار $\pm\infty$

دراسة الوضع النسبي:

بما أن التابع لا يعدم، لدينا طريقتين:

ط1:

$$f(x)-y=-\frac{1}{x}$$
$$=\begin{cases}>0\Rightarrow y \text{ فوق } C\ ;x\in]-\infty,0[\\ <0\Rightarrow y \text{ تحت } C\ ;x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

ط2:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	$+$		$-$
الوضع النسبي	y فوق C		y تحت C

الرسم:

مقاربات:

$x=0$ مقارب شاقولي

$y=x$ مقارب مائل

$$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$$
$$x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow(1,1)$$

تكرورية هامة:

لرسم معادلة المستقيم
(المقارب المائل أو معادلة المماس):

إذا كان $y=ax$ نعوض:

$$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$$
$$x=1\Rightarrow y=a\Rightarrow(1,a)$$

إذا كان $y=ax+b$ نعوض:

$$x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow(0,b).$$
$$y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\Rightarrow\left(-\frac{b}{a},0\right)$$

إذا كان $y=ax$

نعوض:

$$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$$
$$x=1\Rightarrow y=a\Rightarrow(1,a)$$

إذا كان $y=ax+b$

نعوض:

$$x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow(0,b)$$
$$y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\Rightarrow\left(-\frac{b}{a},0\right)$$

نقاط الجدول:

$(-\infty,-\infty)$ $(0,+\infty)$
$(0,-\infty)$ $(+\infty,+\infty)$

نقاط مساعدة:

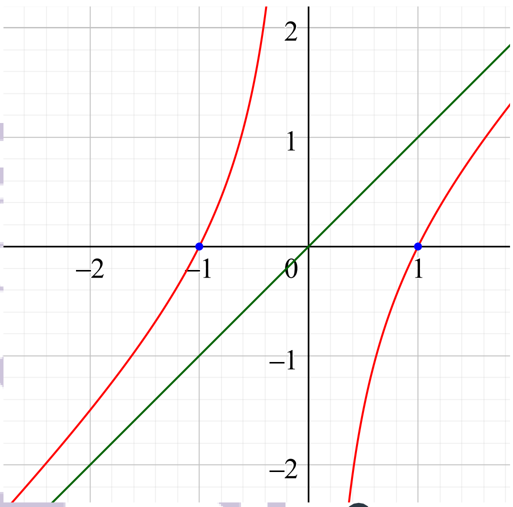
$x=0\notin D_f$

لا يمكن استخدامها

$$y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x}=0 \Rightarrow x^2-1=0$$

$$\Rightarrow x^2 \Rightarrow x=\pm 1$$

$A(1,0)\;\; B(-1,0)$



تكروريات هامة:

- إذا كان f اشتقاقياً عند a فإنه مستمر عند a وكان اشتقاقياً على I فهو مستمر على I
- $\cos x \,\&\, \sin x$ مستمران على $\mathbb{R}$
- كثيرات الحدود مستمرة واشتقاقية على $\mathbb{R}$
- التوابع الكسرية مستمرة واشتقاقية على أي مجال جزئي من مجموعة تعريفها

يرد سؤال في الامتحان:

أوجد أو ما عدد حلول المعادلة $f(x)=a$

كيف نوجد حلول المعادلة $f(x)=a$

1) ندرس التزايد أو التناقص لـ f على المجال I

2) إذا كانت a تنتمي إلى المستقر الفعلي عدداً من المرات كان عدد حلول المعادلة

دراسة $f(x)=0$

إما من الطريقة السابقة أو باستخدام

$\boxed{f(a).f(b)<0}$

كان للمعادلة حل وحيد $[a,b]$ طبعاً مع ضمان أن f متزايد أو متناقص على $[a,b]$

⊛ تدريب: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^3-3x+5$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ تحقق أن للمعادلة $f(x)=0$ جذراً يقع بين $]-3,-2[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\; \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0$$

$$3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

نوجد الصور

$$f(1)=1-3+5=3$$

$$f(-1)=-1+3+5=7$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

حلول المعادلة $f(x)=0$

f متزايد تماماً ومستمر على المجال $]-\infty,-1[$

$$f(]-\infty,-1[)=]-\infty,7[$$

$0\in]-\infty,7[$ يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-\infty,-1[$

f متناقص تماماً ومستمر على المجال $[-1,1]$

$$f([-1,1])=[3,7]$$

الجزء الأول

$[3,7] \not\ni 0$ لا يوجد حل للمعادلة في المجال $[-1,1]$

f متزايد ومستمر على المجال $]1,+\infty[$

$$f(\,]1,+\infty[\,) = \,]3\,,+\infty[$$

$]3,+\infty[\not\ni 0$ لا يوجد حل للمعادلة في المجال $]1,+\infty[$

ط2:

فقط في $f(x)=0$

الجذر α ينتمي للمجال $]-3,-2[$

نكتب: f متزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$

$$f(-3) = -27+9+5 = -13$$
$$f(-2) = -8+11 = 3$$
$$f(-3).f(-2) < 0 \Rightarrow -13\times 3 = -39 < 0$$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-3\,,-2[$

مسائل الوحدة المتعلقة بحل المعادلات ودراسة التغيرات:

4 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ تحقق ان للمعادلة $f(x)=0$ ثلاث جذور.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty^3 = +\infty$$

نشتق التابع ثم نعدمه:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,-1[$

$$f(\,]-\infty,-1[\,) = \,]-\infty,3[$$

$]-\infty,3[\ni 0$ يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-\infty,-1[$

f معرف ومستمر ومتناقص تماماً $[-1,1]$

$$f(\,[-1,1]\,) = [-1,3] \ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[-1,1]$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على $]1,+\infty[$

$$f(\,]1,+\infty[\,) = \,]-1,+\infty[\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,+\infty[$

5 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16$$
$$\sqrt{\Delta} = 4$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2(3)} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2(3)} = -\frac{1}{3}$$
$$f(1) = 1 - 1 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1-3+9}{27}+\frac{1}{2}=\frac{10+27}{54}$$
$$=\frac{37}{54}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

حلول المعادلة $f(x)=0$ نرسم المستقر الفعلي

f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty,-\frac{1}{3}[$

$$f\left(\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\right)=\left]-\infty,\frac{37}{54}\right[$$

$0\in -\infty,\frac{37}{54}[$ يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-\infty,-1[$

f معرف ومستمر ومتناقص تماماً على $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

$$f\left(\left[-\frac{1}{3},1\right]\right)=\left[-\frac{1}{2},\frac{37}{54}\right]$$

$$0\in\left[-\frac{1}{2},\frac{37}{54}\right]$$

يوجد حل وحيد للمعادلة في المجال $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على $]1,+\infty[$

$$f(]1,+\infty[)=]-\frac{1}{2},+\infty[\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,+\infty[$

ومنه $f(x)=0$ له ثلاث جذور

$\boxed{6}$ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$$

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 12x^3+12x^2-24x=0$$

نخرج عامل مشترك

$$12x(x^2+x-2)=0$$

$$12x(x+2)(x-1)=0$$

إما:

$$12x=0\Rightarrow x=0$$

أو:

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

أو:

$$x=-2$$

$$f(0)=4$$

$$f(1)=-1$$

$$f(-2)=-28$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

حلول المعادلة $f(x)=0$ نرسم المستقر الفعلي

f معرف ومستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty,-2[$

$$f(]-\infty,-2[)=]-28,+\infty[\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في $]-\infty,-2[$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً $[-2,0]$

$$f([-2,0))=[-28,4]\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في $[-2,0]$

f معرف ومستمر ومتناقص تماماً $]0,1[$

$$f(\,]0,1[\,)=\,]-1,4[\,\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في $]0,1[$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$

$$f(\,[1,+\infty[\,)=[-1,+\infty[\,\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[1,+\infty[$

التطبيق الثالث في الاشتقاق:

يرد في بعض التمارين أوجد a,b حتى قيمة حدية أو Δ مماس أو معطيات من الرسم حسب نص السؤال ونميز ثلاث حالات لحلها:

$$f(x_0)=y_0$$
$$f'(x_0)=m$$

الحالة الأولى:

إذا ذكر قيمة حدية أو ذكر مماس أفقي:

$$f(x_0)=y_0\,,f'(x_0)=m$$

الميل دائماً صفر في القيمة الحدية أو المماس الأفقي

الحالة الثانية:

إذا ذكر للتابع معادلة مماس $y=ax+b$ الميل هو أمثال x بعد عزل y ونعوض في

$$f(x_0)=y_0,\qquad f'(x_0)=m$$

الحالة الثالثة:

نقطة التماس هي النقطة المشتركة بين التابع والمماس أي تحقق (x_0,y_0): $f(x_0)=y_0$

$f'(x_0)=m$ لحساب الميل $m=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ هي نقطتان من المستقيم أحدهما نقطة التماس والأخرى نقطة يمر منها المماس.

⊛ **تدريب:** ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

حيث a,b عددان حقيقيان، أوجد a,b حتى يتحقق أن للتابع f قيمة حدية معدومة عند $x=-1$

الشرط f يمتلك قيمة حدية معدومة عند $x=-1$

<u>الشرط الأول:</u> $f(-1)=0$ لأن القيمة الحدية معدومة

<u>الشرط الثاني:</u> $f'(-1)=0$ لأن الميل عند القيمة الحدية صفر

$$f(-1)=0\Rightarrow\frac{a(-1)^2+b(-1)+1}{-1-1}=0$$
$$\Rightarrow\frac{a-b+1}{-2}=0$$
$$\Rightarrow a-b+1=0\qquad\ldots(1)$$

$$f'(-1)=0$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow\frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{(-1-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{4a-2b-a+b-1}{4}=0$$
$$\Rightarrow 3a-b-1=0\qquad\ldots(2)$$

بحل (1) و(2):

$$3a-b-1=0$$
$$\underset{+}{+a}\ \overset{+}{-b}\ \underset{-}{+1}=0$$

$$2a-2=0\Rightarrow 2a=2\Rightarrow\boxed{a=1}$$

نعوض في (1) للحصول على b:

$$1-b+1=0\Rightarrow\boxed{b=2}$$

نعوض في التابع:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

تكرويات هامة:

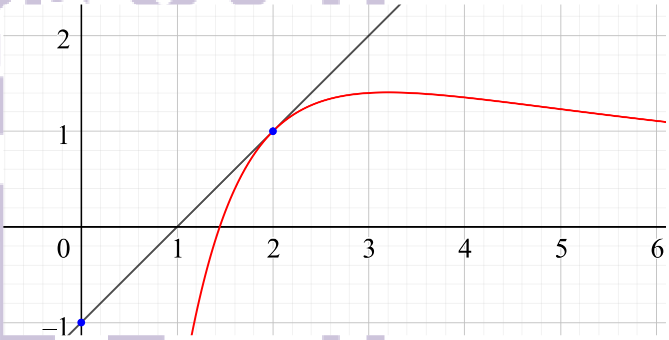
شرط القيمة الحدية توافق شرط المماس الأفقي

$f(x_0)=y_0$ الميل دائما معدوم $f'(x_0)=0 \Rightarrow$.

⊛ **تدريب:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$$

عين a,b علماً أن المستقيم Δ مماس في الشكل للخط C في النقطة A



<u>الشرط الأول</u>: لدينا من الرسمة نقطة تماس $A(2,1)$

$$f(2)=1$$

$$\frac{2a+b}{5}=1$$

$$2a+b=1 \qquad \dots(1)$$

<u>الشرط الثاني</u>:

في هذه الأسئلة نأخذه من الرسم.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

النقطة الأول نقطة التماس $A(2,1)$ والنقطة الثانية يمر منها المستقيم من الرسم $B(1,0)$

$$m=\frac{0-1}{1-2}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$f'(2)=1$$

نشتق ثم نعوض 2 في المشتق

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(2)=1$$

$$\frac{-4a-4b+a}{25}=1$$

$$3a-4b=25 \qquad \dots(2)$$

بحل جملة المعادلتين:

$$2a+b=5 \qquad \times 4$$
$$-3a-4b=25$$

$$8a+4b=20$$
$$-3a-4b=25$$

$$5a=45 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

نعوض في (1):

$$2(9)+b=5 \Rightarrow 18+b=5 \Rightarrow b=5-18 \Rightarrow b=-13$$

$$f(x)=\frac{9x-13}{x^2+1}$$

المماس الشاقولي:

إذا كانت

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$$

f غير قابل للاشتقاق عند a

$x=a$ مماس شاقولي

⊛ تدريب: ليكن التابع المعرف وفق:

$$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$$

❶ تحقق أن f معرف على المجال $[0,2]$

❷ ما نهاية التابع $\frac{f(x)}{x}$ عند الصفر؟ واستنتج أن f اشتقاق عند الصفر.

❸ ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عند 2؟ وهل f اشتقاق عند 2؟

❹ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. ارسم C ثم ارسم مماسي C

$$2x-x^2\geq 0$$

تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$$2x-x^2=0\Rightarrow x(2-x)=0$$

إما $x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2x-x^2$	$-$	0 $+$	0	$-$
المتراجحة	غير محققة	محققة		غير محققة

$$D_f=[0,2]$$

$$f'(x)=\sqrt{2x-x^2}+\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}.x$$

$$=\sqrt{2x-x^2}+\frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\frac{2x-x^2+x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\frac{-2x^2+3x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2(0)-0}$$

$$=0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{-(2-x)}=\lim_{x\to2}\frac{x\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{-(2-x)}$$

$$2-x=\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}$$

$$x=\sqrt{x}.\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x.\sqrt{x}.\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{0}=\infty$$

f غير قابل للاشتقاق عند ال 2

$x=2$ مماس شاقولي

f معرف ومستمر على $[0,2]$ واشتقاقي على $[0,2[$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=0$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+3x}{\sqrt{2x-x^2}}=0$$

$$-2x^2+3x=0\Rightarrow x(-2x+3)=0$$

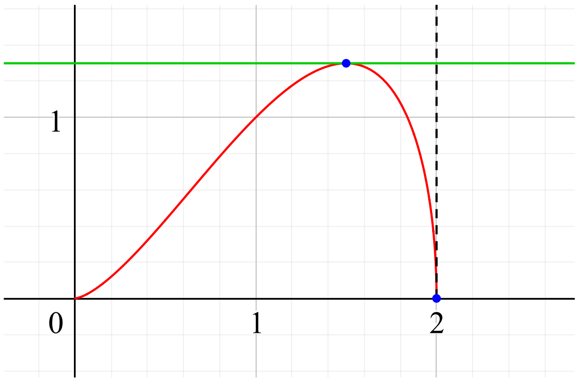
إما $x=0$ أو $-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}(2)-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3-\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
f'	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

الجـزء الأول



الاشتقاق من اليمين واليسار (تعريف نصف المماس):

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b_1$$

b_1 ميل نصف المماس من اليمين

f اشتقاقي من اليمين

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = b_2$$

b_2 ميل نصف المماس من اليسار

f اشتقاقي من اليسار

في حال كان $f'(a^+) = f'(a^-)$ نقول عن f' أنه اشتقاقي عند a

الاستخدامات:

نستخدم هذه الدراسة في التوابع الجذرية وتوابع القيمة المطلقة

أياً كان ما تفعله
افعله بإتقان
Whatever you do,
Do it well

⊛ **تدريب:** ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$$

❶ ادرس قابلية اشتقاق f من الصفر من اليمين ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين لخطه C_f في النقطة $A(0,2)$

❷ ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليسار لخطه C_f في النقطة $A(0,2)$

❸ ارسم نصفي المماسين وارسم C_f على المجال $[-2,2]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & ; x>0 \\ \dfrac{x+2}{-x+1} & ; x>0 \end{cases}$$

$: x > 0$

$$\Delta(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x-0}$$

$$= \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x} = \frac{-x}{x(x+1)}$$

$$= \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \Delta(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1 = m$$

f قابل للاشتقاق من اليمين عند الصفر

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -1(x - 0)$$

$$y = -x + 2$$

$x < 0$ من اليسار:

$$\Delta(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x-0}$$

$$= \frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x} = \frac{3x}{x(-x+1)}$$

$$= \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \Delta(x) = \frac{3}{0+1} = 3$$

الجـزء الأول

f قابل للاشتقاق عند الصفر

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 2$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-)$ أي أن f غير اشتقاقي عند الصفر

رسم الخط C على المجال $[-2\,,2]$

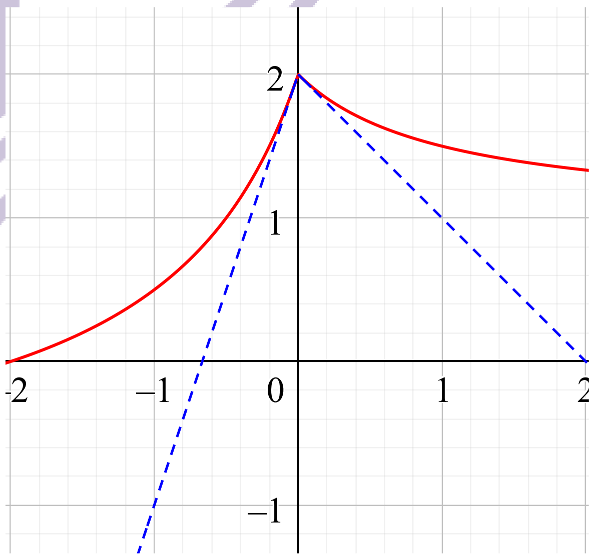
$$f(-2) = \frac{-2+2}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$$

$$f(2) = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1(x+1) - 1(x+2)}{(x+1)^2} & ; x > 0 \\ \dfrac{1(-x+1) - (-1)(x+2)}{(-x+1)^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} & ; x > 0 \\ \dfrac{3}{(-x+1)^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

x	-2		0		$+2$
f'		$+$		$-$	
f	0	↗	2	↘	$\frac{4}{3}$



تمارين ومسائل الوحدة

1 اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x \qquad , a = 0$

f أشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = -3$$
$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = -3(x-0) + 0$$
$$y = -3x$$

2. $f(x) = x\sqrt{x} \qquad a = 1$

f أشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x$$
$$f(1) = 1$$
$$f'(1) = \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 1$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad a = 0$

f أشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(0) = 1$$
$$f(0) = 0$$
$$y = 1(x-0) + 0$$
$$y = x$$

$\boxed{2}$ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}\qquad ;D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

1) اكتب معادلة المماس في C النقطة التي فاصلتها 1

2) هل يقبل C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$؟

3) هل يقبل C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$؟

$m=?,\quad y_0=?,\quad x_0=1$

حساب y_0:

$$f(1)=\frac{1-3+1}{2}=\frac{-1}{2}=y_0$$

$$f(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-1(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-3x+2x-3-x^2+3x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

$$f'(1)=m\Rightarrow f'(1)=\frac{1+2-4}{4}=\left(-\frac{1}{4}\right)=m$$

معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1)$$

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

المماس الموازي للمستقيم $y=-4x$

الميل هو أمثال x بعد عزل y: $m=-4$

بما أن المماس يوازي المستقيم $m_1=m_2=-4$

$$f'(x)=-4=m$$

4. $f(x)=\frac{x}{x-1}\qquad a=0$

f أشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-1}{+1}=-1$$

$$f(0)=0$$

$$y=-1(x-0)+0$$

$$y=-x$$

5. $f(x)=\cos x\qquad a=0$

$$f'(x)=-\sin x$$

$$f'(0)=0$$

$$f(0)=1$$

$$y=0(x-0)+1$$

$$y=1$$

6. $f(x)=x\cos x\qquad a=\frac{\pi}{4}$

$$f'(x)=1(\cos x)-(\sin x)x$$

$$=-x\sin x+\cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{-\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$y=\frac{-\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} = -4$$

$$x^2+2x-4 = -4(x+1)^2$$

$$x^2+2x-4 = -4(x^2+2x+1)$$

$$x^2+2x-4 = -4x^2-8x-4$$

$$5x^2+10x = 0$$

$$5x(x+2) = 0$$

إما: $5x = 0 \Rightarrow x = 0$

أو: $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

النقطة الأولى:

$y_0 =?\ ,\quad m = -4\ ,\quad x = 0$

$f(0) = 1 = y_0$

معادلة المماس الأول:

$$y-1 = -4(x-0)$$

$$y = -4x+1$$

بنفس الطريقة نوجد المماس الثاني

$y_0 =?\ ,\quad x = -2\ ,\quad m = -4$

حتى يقبل C مماساً موازياً $m_1 = m_2$

$$3x-2y = 0 \Rightarrow 2y = 3x$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

الميل هو أمثال x بعد عزل y: $m = \frac{3}{2}$

نضع

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2+2x-4}{x^2+2x+1} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2+4x-8 = 3x^2+6x+3$$

$$x^2+2x+11 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 4-44 = -40 < 0$$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

ليس للمعادلة جذر، أي لا يقبل C مماساً يوازي المستقيم

3 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

1) اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها 1

2) هل يقبل c مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{1}{4}x$

3) هل يقبل c مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)-2x(x)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{3-2}{9} = \frac{-1}{9}$$

$$f(1) = \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{9}(x-1)+\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{9}x+\frac{1}{9}+\frac{3}{9}$$

$$= -\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$$

7 في كل حالة من الحالات الآتية, احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتوابع الآتية:

1. $f(x) = x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$$f'(x) = 3x^2-x+1$$

$$f''(x) = 6x-1$$

$$f'''(x) = 6$$

2. $f(x) = x\sqrt{x} = x.x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{+\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}$$

8 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1) أثبت أن:

$$\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

2) ثم استنتج أن

$$(1+x^2).f''(x) + x.f'(x) - f(x) = 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$

$$\sqrt{1+x^2}.f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x$$

$$\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x) \quad \dots (*)$$

باشتقاق طرفي العلاقة $(*)$:

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.f'(x) + \sqrt{1+x^2}.f''(x) = f'(x)$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$:

$$x.f'(x) + (1+x^2).f''(x) - \sqrt{1+x^2}.f'(x) = 0$$

حسب $(*)$

$$x.f'(x) + (1+x^2)f''(x) - \sqrt{1+x^2}.f'(x) = 0$$

$$x.f'(x) + (1+x^2).f''(x) - f(x) = 0$$

9 في كل من الحالات الآتية , ادرس قابلية اشتقاق f عند (0)

❶ $f(x) = x^2.\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2.\sqrt{x}}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} x.\sqrt{x} = 0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

❷ $f(x) = x.|x|$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x.|x|}{x} = \lim_{x\to 0}|x|$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x & ; x > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -x & ; x < 0 \end{cases} = 0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

3. $f(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$

$$f'(x) = -1(x-1)^{-2}$$
$$f''(x) = +2(x-1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -6(x-1)^{-4}$$

4. $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(2x)$$
$$f''(x) = -4\cos(2x) - 4\sin(2x)$$
$$f''(x) = 8\sin(2x) - 8\cos(3x)$$

5. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad D =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) = +\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{cosx(cos^2x) - 2cosx(-sinx).sinx}{cos^4x}$$

$$= \frac{\cos x(\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{cosx.cos^3x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$+\frac{4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^3 x - 3\cos^2 x(-\sin x)\cdot 2\sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

6. $f(x) = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$

$$f'(x) = -1(\sin x)^{-2}$$

❸ $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x}{x^2+1} & ;x\geq 0\\ \frac{x^2-x}{x^2+1} & ;x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2+x}{x^2+1}}{x}\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

f قابل للاشتقاق من اليمين عند الصفر

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2-x}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

f قابل للاشتقاق من اليسار عند الصفر

$$f'(0^-)\neq f'(0^+)$$

f غير قابل للاشتقاق عند الصفر

10 التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;x=0\\ x^2.\cos\frac{1}{x} & ;x\neq0\end{cases}$$

1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

2) احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2.\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x.\cos\frac{1}{x}==0.\cos\infty$$

إحاطة

$$-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq1$$

نضرب بـ $x>0$

$$-x\leq x.\cos\frac{1}{x}\leq x$$

$$\lim_{x\to0}-x=\lim_{x\to0}x=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}x.\cos\frac{1}{x}=0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر.

$$f'(x)=2x.\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\sin x\,.x^2$$

$$f'(x)=2x.\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

14 التابع f المعرف على المجال $]0,1[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

2) احسب $f'(x)$ على $]0,1[$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}}=0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}.\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$=\frac{3x^2-3x^3+x^3}{2(1-x)^2}.\frac{\sqrt{1-x}}{x.\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3x^2-2x^3}{2(1-x)(1-x)}.\frac{\sqrt{1-x}}{x.\sqrt{x}}$$

نعلم أن $x=\sqrt{x}.\sqrt{x}$

$$=\frac{x^2(-2x+3)}{2\sqrt{1-x}.\sqrt{1-x}(1-x)}.\frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(3-2x)}{2\sqrt{1-x}(1-x)}$$

$$=\sqrt{\frac{x}{1-x}}.\frac{3-2x}{2(1-x)}$$

هتْعدِّي!

الجـزء الأول

⊛ **تدريب:** باستخدام تعريف العدد المشتق، احسب نهاية $g(x)$ عند القيمة الموافقة:

1) $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\ ; a = 0$

نفرض

$$f(x) = \sqrt{x+4} \Rightarrow f(0) = 2$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{4}$$

2) $g(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ $\quad a = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} g(x) = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$g(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad a = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 + \tan^2\frac{\pi}{4} = 2$$

15 نتأمل التابع f على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

1) احسب التابع المشتق للتابع f

2) استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$$h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$k(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}, \quad l(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

$$g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= \frac{x - 2x - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h(x) = f(x^2)$$

$$h'(x) = f'(x^2)\,(x^2)'$$

$$= \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x$$

$$l(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$l'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$$

$$k(x) = f(\sin x)$$

$$k'(x) = f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$= \frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{(\sin x - 1)^2} \cdot \cos x$$

الجــزء الأول

16 أوجد $f'(x)$ للتوابع الآتية محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق

1. $f(x)=\cos^2 3x$ (f) اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$f'(x)=2\cos 3x\cdot 3(-\sin 3x)$

2. $f(x)=\sin^3 2x$

$f'(x)=3\sin^2 2x\cdot 2(\cos 2x)$

3. $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$

$f'(x)=-2(\sin 3x)^{-3}\cos^2 3x(3)$

17 نتأمل التابع f على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق :

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

(1 عيّن التابع المشتق f' للتابع f

(2 نرمز بالرمز g الى التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$ أثبت ان g اشتقاقي على I ثم أحسب $g'(x)$

(3 نرمز بالرمز h الى التابع المعرف على $I=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f(\sqrt{x})$ أثبت ان h اشتقاقي على I ثم أحسب $h'(x)$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}|\{+1\}$

$$f(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}.$$
$$=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

.2 $g(x)=\frac{2\sin x+3}{\sin x-1}$, g مركب لتابعين مرجعيين $f(x)$ و $\sin x$

كل منهما اشتقاقي على مجال تعريفهما

$$g(x)=\frac{2\sin x+3}{\sin x-1}\qquad \sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\notin I$$

على I ومشتقه :

$$g'(x)=f(\sin x)\cdot(\sin x)'$$
$$=\frac{-5}{(\sin x-1)^2}(\cos x)$$

.3 $h(x)=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$, h مركب لتابعين مرجعيين $f(x)$ و $\sqrt{x}$

كل منهما اشتقاقي على J فإن $h(x)$ اشتقاقي على J ومشتقه

$$h'(x)=f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'$$
$$=\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

19 b,a عددان حقيقيان هو الخط البياني للتابع c f المعرف على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عيّن b و a لتكون $y=4x+3$ معادلة للماس للخط c منه.

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه :

$$f'(x)=\frac{9x^2+a(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{9x^2+ax^2+a-6x^4-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-6x^4+9x^2-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$y=4x+3$ مماس

$\frac{a}{1}=4\Rightarrow a=4$

$f(0)=3 \Leftarrow A(0,3)\Leftarrow h=3.$

$\frac{0+0+b}{1}=3$ نعوّض

$\Rightarrow b=3$

$y=7\Leftarrow x=1$ عند

$y=11\Leftarrow x=2$ عند

20 عدد حقيقي و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق :

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$$

هل يمكن تعيين a ليكون للتابع قيمة حدية عند $x = 1$؟

قيمة حدية $\Leftarrow$ $f'(1) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$
$$f'(1) = 3a + 6 + 3$$
$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 9 = 0$$
$$\Rightarrow 3(a+3) = 0 \Rightarrow a = -3.$$

21 f تابع معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ إضافة الى ذلك

نفترض أن :

- $f(0) = 0$ & $f'(0) = 1$
- f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$
- ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$

ارسم خطاً بيانياً ل c يمكن ان يمثّل f

يوجد رسمة

$$T: y = 1(x - 0) + 0$$

$]0, +\infty[$ $\quad T: y = x$

f' متزايد $\Leftarrow$ $f''(x) > 0 \Leftarrow c$ فوق T

$]-\infty, 0[$

f' متناقص $\Leftarrow$ $f''(x) < 0 \Leftarrow c$ تحت T

f متزايد $\Leftarrow$ $f'(x) > 0$

f' متزايد $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$

22 في كل من الحالات الآتية , احسب في حالة وجودها نهاية f عند a المشار آليها

1. $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ $\qquad a = 0$

لدينا $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$g(0) = 1.$ $\qquad g'(x) = -\sin x$

$$g'(0) = 0$$
$$H(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\cos\ x - 1}{x} = f(x).$$
$$\lim_{x\to 0} H(x) = g'(0) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

2. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ $\qquad a = 0$

لدينا $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$g(x) = tanx$ $\qquad g(0) = 0$

$$f'(x) = 1 + \tan^2\ x$$
$$f'(0) = 1$$
$$H(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\tan\ x}{x} = f(x)$$
$$\lim_{x\to 0} H(x) = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ $\qquad a = 1$

$$f(x) = \frac{x + 1 - 2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}$ $\qquad a = 1$

لدينا $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$$f(x)=\frac{x^2+x+2-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$$

$$=\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+2}$$

$$\lim_{\to 1^+} f(x)=\frac{3}{4^+}$$

23 في كل من الحالات الآتية, أوجد عدد حلول المعادلة:

1. $x^5-x^3+x-5=0$

$f(x)=x^5-x^3+x-5=0$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$

$f'(x)=5x^4-3x^2+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-3x^2+1=0$

$\Delta=9-20=-11<0$

مستحيلة

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

للمعادلة حل وحيد

2. $x(2x+1)^2=5$

$x(4x^2+4x+1)=5$

$4x^3+4x^2+x-5=0$

$f(x)=4x^3+4x^2+x-5$ بأخذ

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$

$f'(x)=12x^2+8x+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2+8x+1=0$

$\Delta=64-48=16 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4$

$x_1=\frac{-8-4}{2\times 12}=\frac{-12}{24}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-8+4}{24}=\frac{-4}{24}=-\frac{1}{6}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{10}{9}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{10}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0\in f\left(\left]-\infty,-\frac{1}{6}\right[\right)=\left]-\infty,-\frac{10}{9}\right[$

$0\in f\left(\left]-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right[\right)=\left]0,\frac{10}{9}\right[$

$0\notin f\left(\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]0+\infty\right[$

كما أن f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{6}\right[$

$\Leftarrow$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\Leftarrow$ للمعادلة $x(2x+1)^2=5$

3. $x^4-\frac{1}{2}x+1=0$

$f(x)=x^4-\frac{1}{2}x+1$ بأخذ

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=4x^3-\frac{1}{2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-\frac{1}{2}=0$ حل وحيد

$\Rightarrow x^3=\frac{1}{8} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+1$

$=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}=\frac{1}{16}-\frac{4}{16}+\frac{16}{16}$

$=\frac{13}{16}$

x	-∞ +∞		$\frac{1}{2}$		
$f`(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{13}{16}$	↗	+∞

$$0 \notin f(\,]-\infty, \frac{1}{2}[\,) =]\frac{13}{16}, +\infty[$$

$$0 \notin f(\,]\frac{1}{2}, +\infty[\,) =]\frac{13}{16} + \infty[$$

لا يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ أي حل $\Leftarrow f(x) = 0$ مستحيلة

4. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$$

$$\lim_{x\to\mp(x)} = \mp\infty$$

$$f'(x) = x^4 - x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

اما $x = 0$ أو $x = -1$ أو $x = +1$

$$f(0) = 1 \qquad f(-1) = \frac{17}{15} \qquad f(+1) = \frac{13}{15}$$

x	-∞		-1		0		1		+∞
f'(x)		+	0	-	0	-		+	
f(x)	-∞	↗	$\frac{17}{15}$	↘	1	↘	$\frac{13}{15}$	↗	+∞

حل وحيد في $\mathbb{R}$

24 ليكن f التابع المعرف على المجال $[1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$$

1) ادرس تغيرات التابع f ثم أثبت أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً.

2) احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

f معرف ومستمر على $[1, +\infty[$

واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$f(1) = 1 + 0 - 4 = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

f متزايد تماماً

x	1		$+\infty$
f'		+	
f	-3	↗	$+\infty$

f معرف ومستمر ومتزايد على $[1, +\infty[$

$$f(\,[1, +\infty[\,) = [-3, +\infty[\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$

جبرياً:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x-1} - 4 = 0$$
$$\sqrt{x-1} = 4 - x$$

نربع الطرفين

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$
$$x - 1 = (4-x)^2$$
$$x - 1 = 16 - 8x + x^2$$
$$x^2 - 9x + 17 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 4(17) = 13 > 0$$

$x_1 = \frac{9+\sqrt{13}}{2} > 4$ مقبول

$x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2} < 4$ مرفوض

25 ليكن f التابع المعرف على $]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، واستنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

والتابع متناقص تماماً

x	1		$+\infty$
f'		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

f متناقص تماماً ومستمر على المجال $]1, +\infty[$

$$f(\,]1, +\infty[\,) =]-\infty, +\infty[\ni 0$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$

في المجال $]1, +\infty[$

لسا فيك نفس ..

26 ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 3}$$

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $\pm\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{6x+3}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{11}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1

الرسم:

مقاربات:

$y = 1$ مقارب أفقي

نقاط الجدول:

$$(-\infty, 1) \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{11}\right) \quad (+\infty, 1)$$

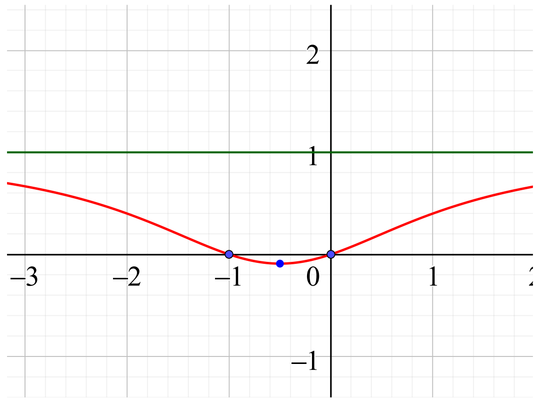
نقاط مساعدة:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$$

الجـزء الأول



27 ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

1) أوجد نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

2) أثبت أن d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C

3) ادرس نهاية f عند -1 وماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C؟

4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

5) أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر لـ C

6) ارسم مقاربات C ثم ارسم C

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=+\infty$$

لأن درجة البسط ≤ من المقام قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x \quad -1 \\ x+1 & 2x^2 \quad +x \quad +7 \\ & \mp 2x^2 \mp 2x \\ & \quad\quad -x \quad +7 \\ & \quad\quad \pm x \quad \pm 1 \\ & \quad\quad\quad\quad 8 \end{array}$$

$$f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1+\frac{8}{x+1}-(2x-1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x+1}$$
$$=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=2x-1$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{8}{0}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب.

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يمين المقارب.

$$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$

$2(x^2+2x+1)-8=0$

$2x^2+4x+2-8=0$

$2x^2+4x-6=0$

نقسم على 2

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

إما $x=-3$ أو $x=1$

$f(-3)=-11$

$f(1)=5$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

تكرورية:

لإثبات أن (x_0, y_0) مركز تناظر لـ C

$2x_0 - x \in D_f$

$.f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0$

$(-1,-3)$

$-2 - x \in D_f$

$x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

نضرب بـ -1

$-x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

نضيف -2:

$-2 - x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$f(x) + f(-2-x) = -6$

$$2x - 1 + \frac{8}{x+1} + 2(-2-x) - 1 + \frac{8}{-2-x+1}$$

$$= 2x - 1 + \frac{8}{x+1} - 4 - 2x - 1 + \frac{8}{-x-1}$$

$$= -5 + \frac{8}{x+1} + \frac{8}{-x-1} - 1$$

$$= -5 - 1 = -6$$

فإن $I(-1,-3)$ مركز تناظر لـ C

الرسم:

مقاربات:

$x = -1$ مقارب شاقولي

$y = 2x - 1$ مقارب مائل

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

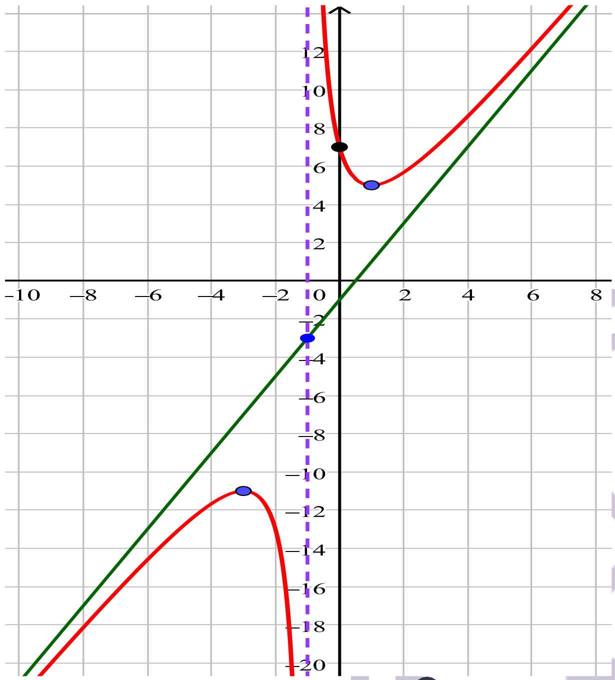
نقاط الجدول:

$(-\infty,-\infty)$ $(-3,-11)$ $(-1,-\infty)$

$(-1,+\infty)$ $(1,5)$ $(+\infty,+\infty)$

نقاط مساعدة:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 7$



تكروريات هامة:

1) $\cos x = \cos\theta$
$x = \theta + 2\pi k \qquad x = -\theta + 2\pi k$

2) $\sin x = \sin\theta$
$x = \theta + 2\pi k \qquad x = \pi - \theta + 2\pi k$

3) $\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

4) $\sin x = 0 \qquad x = \pi k$

5) $\cos(-x) = \cos(x)$

6) $\sin(-x) = -\sin(x)$

7) $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$

8) $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$

9) $2\sin x \cos(x) = \sin(2x)$

التابع الزوجي:

1) $\forall x \in Df; -x \in Df$
2) $f(-x) = f(x)$

متناظر بالنسبة لـ $y\acute{y}$ (محور التراتيب)

التابع الدوري:

1) $x + T \in Df$
2) $f(x + T) = f(x)$

الجـــزء الأول

30 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$

1) قارن كلاًّ من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$

استنتج انه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

2) أثبت أن

$f'(x)=6\cos\times\sin x(1-2\cos x)$ عند

كل عدد حقيقي a

3) ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$

4) ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi,2\pi]$

مهما تكن $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=3\sin^2(-x)+4\cos^3(-x)$$
$$=3\sin^2(x)+4\cos^3 x=f(x)$$

← f تابع زوجي

مهما تكن $x\in\mathbb{R}$ فإن $x+2\pi\in\mathbb{R}$

$$f(x+2\pi)=3\sin^2(x+2\pi)+4\cos^3(x+2\pi).$$
$$=3\sin^2(x)+4\cos^3 x=f(x)$$

← f دوري ودوره 2π

⇐ تكفي دراسته على $[-\pi,+\pi]$

كما ان f زوجي يكفي دراسته على $[0,+\pi]$

2. اشتقاق f على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=6\sin x\cdot\cos x+12\cos^2 x(-\sin x)$$
$$=6\sin x\cdot\cos x-12\cos^2 x\cdot\sin x$$
$$=6\sin x\cos x(1-2\cos x)$$

$$f'(x)=0\begin{cases}\sin x=0 \;\begin{smallmatrix}x=0\\ x=\pi\end{smallmatrix}\\ \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$f(0)=4$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}+\frac{2}{4}=\frac{11}{4}$

$f(x)=-4$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	0	-	0	+	0	-	0
f(x)	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4

31 ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=4\sin^3 x+3\cos x$$

1) اثبت أن: $f(x+2\pi)=f(x)$

2) تحقق أن: $\grave{f}(x)=3\sin x(2\sin(2x)-1)$

3) ادرس f على مجال طوله 2π وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi,2\pi]$

<u>الحل:</u>

1- $f(x+2\pi)=4\sin^3(x+2\pi)+3\cos(x+2\pi)$

$$=4\sin^3(x)+3\cos(x)=f(x)$$

- التابع دوري ودوره 2π

2- $\grave{f}(x)=12\cos x-\sin^2 x-3\sin x$

$$=3\sin x\left[2\frac{2\cos x\cdot\sin x-1}{\sin 2x}\right]$$
$$=3\sin x[2\sin 2x-1]$$

3- $[0,2\pi]$

$f(0)=0+3=3$

$f(2\pi)=0+3=3$

$f(x)=0$

إما $3\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$$x = \pi k$$

$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in$

$k = 1 \Rightarrow x = \pi \in$

$k = 2 \Rightarrow x = 2\pi \in$

أو $2\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin 2x = 1$

$$2\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$$

إما: $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \in$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi$

$x = \frac{13\pi}{12} \in$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2\pi \notin$

او $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi k$$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \in$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi$

$= \frac{5\pi}{12} + \frac{12\pi}{12} = \frac{17\pi}{12} \in$

$f(\pi) = 0 - 3 = -3$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \approx 2,96$

$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx -2,96$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \approx 4,38$

$f\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \approx 4,38$

32 ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ وفق:

$$f(x) = 4x - \tan^2 x$$

1) احسب التابع المشتق $f'(x)$, ضع $\tan x = t$

وتحقّق أن $f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$

2) استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I

3) أثبت للمعادلة $f(x) = -1$, في المجال I جذراً وحيداً α

$$f'(x) = 4 - 2\tan x(1 + \tan^2 x)$$
$$= 4 - 2\tan x - 2\tan^2 x$$

بفرض $t = \tan x$

$$f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$$
$$= (2-2t)(t^2+t+2)$$
$$= 2t^2 + 2t + 4 - 2t^3 - 2t^2 - 4t$$
$$= 4 - 2t - 2t^3$$

ومنه, $f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 2\pi - \left(\frac{1}{0}\right)^2 = -\infty$$

$t = 1 \rightarrow \tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$f'(x) = 0 \rightarrow t^2 + t + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ مستحيلة

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - 1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↗	π-1	↘	$-\infty$ 0

$-1 \notin f\left(]0, \frac{\pi}{4}[\right) =]\pi, -1[$

$-1 \in f\left(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\right) =]-\infty, \pi - 1[$

كما أن f مستمر ومتناقص تماماً على

$]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد α

29 في معلم متجانس $(0, i, j)$ هو الخط البياني التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$$

1) احسب نهاية f عند $-\infty , +\infty$ هل يقبل C متقارباً أفقياً.

2) تحقق أنه المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ متقارب للخط C.

3) نظم جدولاً تغيرات f.

الحل:

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$

لا يوجد مقارب أفقي.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ع.ت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)}{x+\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x^2-8}{x+\sqrt{x^2+8}}\right) = \frac{-8}{\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

2- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - y_0\right) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+8}-2x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+8-x^2}{-\sqrt{x^2+8}+4}\right) = \frac{8}{\infty} = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن:

$y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$$(a=b)(a+b) = a^2 - b^2$$

معادلة مقارب مائل (معادلة المماس)

$y = ax$

x	0	1
y	0	a

$y = ax + b$

x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0

حسبنا النهايات بالطلب (1):

3. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}$

$= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}} > 0$

f متزايد تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
f '	+	
f	$+\infty$ ↗	0

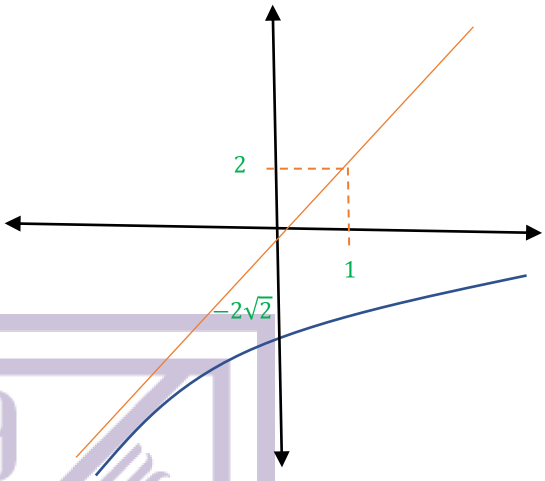
4. الرسم: مقاربات:

$y = 0$ مقارب أفقي

$y = 2x$ مقارب مائل

- نقاط الجدول: $(-\infty,-\infty)(+\infty,0)$
- نقاط مساعدة: $f(0) = 2\sqrt{2}$ $x =$ ⇨

$(0 , -2\sqrt{2})$ $y \neq 0$



28 في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$$

1) أوجد نهاية f عند حدود مجموعة تعريفه ثمّ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) أثبت انّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل.

3) ادرس الوضع النسبي للخطين $c\,,d$ ثم ارسم كلاً من $c\,,d$.

4) حدد هندسياً عدد حلول المعادلة:

$$x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$$

الحل:

1) $]-\infty,+1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1-3+10-11}{0}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط c و c على يمين ويسار المقارب

دراسة تغيرات: f معرف ومستمر واشتقاق

$$]-\infty,+1[\cup]1,+\infty[$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6x+10)(x-1)^2-2(1)(x-1)(x^2-3x^2+10x-11)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)[(x-1)(3x^2-6x+10)-2(1)(x^2-3x^2+10x-11)]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0$$

$$x^3-3x^2-4x+12=0$$

تكرورية:

كل معادلة من الدرجة الثالثة نحلها على التجريب نستخدم القسمة الإقليدية

$x=0 \qquad 12\neq0$

$x=1 \Rightarrow \quad 1-3-4+12\neq0$

$x=-1 \Rightarrow \quad -1-3+4+12\neq0$

$\boxed{x=2} \qquad 8-12-8+12=0$

$x-2$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x-6 \\ \hline x-2 & x^3-3x^2-4x+12 \\ & \mp x^3\pm2x^2 \\ \hline & 0-x^2-4x+12 \\ & \mp x^2\mp2x \\ \hline & 0-6x+12 \\ & \pm6x\mp12 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

الجـــزء الأول

$(الناتج)(المقسوم عليه) = 0$

$$(x-2)(x^2-x-6)=0$$

إما: $x = 2 \qquad x-2=0 \Rightarrow$

أو: $x^2-x-6=0$

أو: $\boxed{x=-2}$ إما: $\boxed{x=3}$

$$f(2)=\frac{(2)^3-3(2)^2+20-11}{1}=\frac{8-12+20-11}{1}=5$$

$$f(3)=\frac{27-27+30-11}{4}=\frac{19}{4}$$

$$f(-2)=\frac{-8-12-20-11}{9}=\frac{-51}{9}=\frac{-17}{3}$$

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
f '	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$ ↗	$\frac{-17}{3}$	↘ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗ $+\infty$

$$2-\ \lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_d)=0$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+10x-8}{(x-1)^2}-\frac{(x-1)}{1}\right)$$

$$(x-1)^2$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+10x-11-(x-1)^3}{(x-1)^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+10x-11+x^3+3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{7x-10}{(x-1)^2}\right)=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=x-1$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$

$$f(x)-y_d=\frac{7x-10}{(x-1)^2}$$

$$7x-10=0\Rightarrow 7x=10\Rightarrow x=\frac{10}{7}$$

$$(x-1)^2=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$\frac{10}{7}$		$+\infty$
$7x-10$		$-$			0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$			
$\frac{7x-10}{(x-1)^2}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
		تحت c		تحت c		فوق c	

الرسم: -1 مقاربان + معادلة مماس

$x+1$ مقارب شاقولي

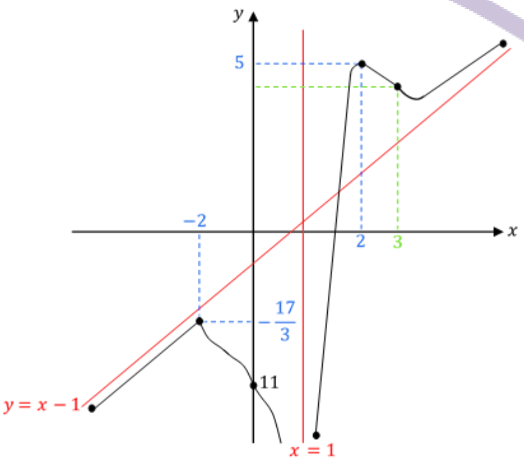
$y=x-1$ مقارب مائل

-2 نقاط الجدول: فرع ∞: $(-\infty,-\infty)$ $\left(-7,-\frac{17}{3}\right)$

$(1,-\infty)$

فرع 2: $\left(3,\frac{19}{4}\right)$ $(2,5)$ $(1,-\infty)$ $(+\infty,+\infty)$

-3 نقاط مساعدة: $x=0\Rightarrow f(0)=-11$



$$x^2-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$$

$$x^3-mx^2-3x^2+2mx+10x-11-m=0$$

$$x^3-3x^2+10x-11=mx^2-2mx+m$$

$$x^3-3x^2+10x-11=m(x^2-2x+1)$$

$$\frac{x^3-3x^2+10x-11}{x^2-2x+1}=m$$

$f(x)=m \to$ عدد $y=m$

ثلاث حلول $m \in \left]-\infty,-\frac{17}{3}\right[$

حلين $m=-\frac{17}{3}$

حل وحيد $m \in \left]-\frac{17}{3},\frac{19}{4}\right[$

حلين $m=\frac{19}{4}$

ثلاث حلول $m \in \left]\frac{19}{4},5\right[$

حلين $m=5$

حل وحيد $m \in]5,+\infty[$

33 ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=x\cos x$$

(1 احسب عند كل x من R $f'(x), f''(x), f'''(x)$

(2 أثبتت أن مستخدماً البرهان بالتدريج أن مهما تكن $n \geq 1$

$$f^n(x)=n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

<u>الحل:</u> $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$

-1 $f'(x)=\cos x-x\sin x$

$$f'(x)=\cos x-x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=-\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=3\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)-x\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

-2 نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n)=f(x)^n=n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=1$

محقق $f'(x)=\cos x+x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$E(n): f^n(x) = n\cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2} + x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right) \;\ldots\ldots *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)\cos\left(x + \frac{(n)\pi}{2} + x\cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right)$$

من * نجد: يجب أن نشتق *

$$f^{(n+1)}(x) = -n\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x + \frac{n\pi}{3}\right)$$

$$= n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)$$

$$= (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

34 ليكن f التابع المعّرف على $R \,/\, \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

1) أوجد عددين حقيقين b, a يحقق

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2) بالاستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}_{(x)}$ في حالة $n \geq 1$

$$\underset{(1)}{\frac{2x}{x^2-1}} = \underset{(x+1)}{\frac{a}{x-1}} + \underset{(x-1)}{\frac{b}{x+1}}$$

$$2x = ax + a + bx - b$$

$$2x = (a+b)x + a - b$$

$$2 = a + b \;\ldots\ldots 1$$

$$\underline{0 = a - b \;\ldots\ldots 2 \;+}$$

$$2 = 2a$$

$$a = 1 \qquad\qquad b = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x-1)(-1)}{(x-1)^4} - \frac{2(x+1)(-1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6(x-1)^2}{(x-1)^6} - \frac{6(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} - \frac{6}{(x+1)^4}$$

$$f^n_{(x)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

35 نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها،

ويحقق :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad f(0)=0$$

وليكن C خطه البياني في معلم متجانس(لن نبحث عن عبارة $(f(x)$

1) ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

a. تحقّق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$, واحسب $g'(x)$

b. احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي

2) ليكن h التابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$$

a. تحقق أن h اشتقاقي على I واحسب $h'(x)$ على I

b. أثبت أن $h(x)=2f(1)$ أياً يكن x من I

c. استنتج أن نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$

d. ماذا تستنتج بشأن الخط البياني c

3) ليكن k التابع المعرف على

$*$ $\quad g(x)=f(x)+f(-x)\ ....(*)$

g مجموع لتابعين مرجعيين $f(x)$ و $f(-x)$ كل منهما أشتقاقي على R فهو اشتقاقي على R

$$g'(x)=f'(x)+f'(-x)\cdot(-1)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}=0$$

ومنه $\Leftarrow$ g تابع ثابت

$$g(0)=f(0)+f(0)=0$$

ومنه $g(x)=0$ مهما تكن x

من (*) نجد :

$$f(x)+f(-x)=0$$

$$f(x)=-f(-x)$$

f فردي

$$h(x)=f(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2+1}=0$$

$$h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$$

f مجموع ومركب لتابعين $\frac{1}{x}$ و $f(x)$ كل منهما اشتقاق على R فهو اشتقاق على R

$$h'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2+1}=0$$

h تابع ثابت

$$h(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$$

منه $h(x)=2f(1)$ مهما تكن x

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+f(0)=2f(1)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2f(1)$$

$y=2f(1)$ مقارب لـ c في جوار $+\infty$

الجزء الأول

الإهداء

إلى روح أخي الحبيب المرحوم محمد نور تكروري

أهدي هذا العمل بكل ما يحمل من جهدٍ وفكر، عرفاناً لمكانتك السامية في قلبي، ووفاءً لذكراك التي بقيت نبراساً يضيء الدرب، رغم غيابك عن هذه الدنيا.

لقد تركت أثراً لا يزول، وحضوراً يستمدّ منه القلب قوة وصبراً، وكأنك روحك ما تزال تحفّ خطواتنا بلطفها.

أسأل الله العظيم، ربّ العرش الكريم، أن يجعل هذا العمل نوراً يصل إليك، ورحمةً تُرفع في ميزان حسناتك، وأن يشرّف مقامك في جنات النعيم، حيث لا وجع ولا فراق.

سلامٌ عليك ما بقيت الذكرى، وما دام الدعاء يصل إلى السماء.