إيجاد نهاية تابع أُسي

تعويض في مجالات مفتوحة

- جواب مباشر
- مشكلة
  - مبرهنات
  - خواص رياضية

$\lim_{x \to -\infty}$	0
$\lim_{x \to +\infty}$	$+\infty$
$\lim \dfrac{e^x}{x}$	$+\infty$
$\lim \dfrac{x}{e^x}$	0
$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x$	0^+
$\left[\dfrac{e^x - 1}{x}\right]_{x \to 0}$	1
$\left[\dfrac{x}{e^x - 1}\right]$	

R

- $f(x) = e^{2x} - e^x$

$]-\infty, +\infty[$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{2(-\infty)} - e^{(-\infty)} = 0 - 0 \Rightarrow = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{2(+\infty)} - e^{(+\infty)} = +\infty - \infty$

ح.ع.ت

نعمل تحليل f بـ e^x عامل مشترك

$$f(x) = e^x\left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}\right)$$

$$f(x) = e^x(e^x - 1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(e^{+\infty} - 1) \Rightarrow = +\infty$$

• $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x}$

$R:]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2e^{-\infty}+1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

$y = 1$ مقارب افقي نحو x^- .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2e^{+\infty}+1}{1+e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$

ع.ع.ت

نسحب e^x من البسط والمقام عامل مشترك

$$f(x) = \frac{e^x\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^{x}} + 1\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

$y = 2$ مقارب افقي نحو x^+ .

• $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$

R

$]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} - e^{-\infty} + 3 = \Rightarrow = 3$

$y = 3$ مقارب افقي نحو x^- ٥

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} - e^{+\infty} + 3$
$= +\infty - \infty = +\infty - \infty$

ح.ع.ت

نسحب e^x عامل مشترك

$f(x) = e^x \left(e^x - 1 + \frac{3}{e^x}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} \left(e^{+\infty} - 1 + \frac{3}{e^{+\infty}}\right)$

$= \infty (\infty) \Rightarrow = \infty$

$f(x) = (x^2 - x) e^x$

R

$]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ((-\infty)^2 - (-\infty)) e^{-\infty}$

$= (\infty) \cdot 0$

ح.ع.ت

ننشر

$f(x) = \underbrace{x^2 \cdot e^x}_{\text{مبرهنة}} - \underbrace{x \cdot e^x}_{\text{مبرهنة}}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

$y = 0$ مقارب افقي نحو x^- ٥

$\bullet\ f(x) = \dfrac{2e^{x}+1}{e^{x}-1}$

مجموعة تعريف تابع أسي $e^x \in R$ ؛ نراعي شرط الأكبر

$\bullet\ f(x) = e^{x} - x$

$D_f :]-\infty, +\infty[$

تابع معرف على R كاملة

$\bullet\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} - (-\infty) = 0 + \infty \Rightarrow = +\infty$

$\bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} - (+\infty) = +\infty - \infty$

ح.ع.ت

نسحب x كعامل مشترك

$f(x) = x\left(\dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{x}{x}\right)$

$= x\left(\dfrac{e^{x}}{x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty(+\infty - 1) \Rightarrow = +\infty$

$\bullet\ f(x) = e^{x} - \ln(x)$

$]0, +\infty[$

$\bullet\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^{0} - \ln(0) = 1 - (-\infty) \Rightarrow = +\infty$

$\bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{+\infty} - \ln(\infty)$

$+\infty - \infty$

ح.ع.ت

بس x عامل مشترك

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (+\infty \cdot 0) \Rightarrow = +\infty$$

- $$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$\mathbb{R} \setminus \{$ أصفار المقام $\}$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow D_f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty} + 1}{e^{-\infty} - 1} = -1$$

- $$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} = \frac{2}{0} \quad \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$$

حسب إشارة 0

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty} + 1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

ح.ع.ت

نسحب e^x عامل مشترك للبسط والمقام

$$f(x) = \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\Rightarrow = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \left(\frac{1 + \frac{1}{e^\infty}}{1 - \frac{1}{e^\infty}}\right) \Rightarrow = 1$$

- $f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{2x}$

1) $D_f : \mathbb{R}^{*} = \left]-\infty , 0\right[\cup \left]0 , +\infty\right[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{e^{-\infty}-1}{2(-\infty)} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{e^{0}-1}{2(0)} = \dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

$f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{x}-1}{x}$ نباعد رياضياً

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}(1) = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

نسحب x عامل مشترك

$f(x) = \dfrac{x\left(\frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\frac{e^{\infty}}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{2} = +\infty$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$$

1) $D_f : R^* =]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{2(-\infty)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e^0 - 1}{2(0)} = \frac{0}{0}$$

ح.ع.ت

باعد رياضياً

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

ح.ع.ت

نخرج x عامل مشترك

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\frac{e^\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{2} = +\infty$$

- $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$

1) $D_f : \mathbb{R}^* : \ ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{e^{-\infty} - 1}{2(-\infty)} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{e^0 - 1}{2(0)} = \dfrac{0}{0}$ ح.ع.ت

قاعدة رياضية

$f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}(1) = \dfrac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

نخرج x عامل مشترك

$f(x) = \dfrac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\frac{e^\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{2} = +\infty$

/ /

• $f(x) = |x^2 - 2x| e^x$

$D_f = \mathbb{R}$ $]-\infty, +\infty[$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = (0)(\infty)$ ح.ع.ت

$f(x) = x^2 \cdot e^x - e^x \cdot 2x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (\infty$

• $f(x) = e^{2x} - x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$ $]-\infty, +\infty[$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} - (-\infty) + 3 = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ ح.ع.ت

نسحب e^x عامل مشترك

$f(x) = e^x \left(e^x - \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$

• $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad]-\infty, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2(-\infty) - 1 + e^{-(-\infty)} = -\infty + \infty$ ع.ت

نعدل على شكل الدالة

$f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{e^{x}}$

نوحد مقامات

مبرهنة

$f(x) = \dfrac{2x \cdot e^{x} - e^{x} + 1}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{0 - 0 + 1}{0^{+}} = +\infty$

2 • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2(\infty) - 1 + e^{-(\infty)} = \cancel{\infty}$ ~~[illegible]~~

• $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - 1 + e^{-2(-\infty)} = -\infty + \infty$ ع.ت

نعدل على شكل تالي

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^{2x}}$

/ /

$f(x) = \frac{xe^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}$

أحياناً يكون تابع الاس لو تابع آخر وليكن g نتبع الخطوات الآتية f

• نوجد $\lim g$ على حد

- نعوض تابع بنهاية الاس

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

18/1/2026

• $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} - x$

$D_f :]-\infty, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{e^{x^2}+1} - x$ نعتبر

نوجد نهاية

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow e^{+\infty} \to = +\infty$

نعوض ع.

ع تابع الاس

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$

ح. ع. ت

نضرب بالمرافق

$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)\cdot(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = e^0 = 1$

• $f(x) = -x + \ln(e^{x} + 1)$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

نفرض $g(x) = \ln(e^{x} + 1)$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -(-\infty) + 0$

$= +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty + \infty$

ح.ع.ت

• $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$D_f = \mathbb{R} :]-\infty, +\infty[$

نفرض $g(x) = (1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty + \infty$ ح.ع.ت

نسحب e^{-x} عامل مشترك

$g(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} - 1 + e^{-x}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty(\infty) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2x + \ln(\infty)$

النهاية المميزة

ص ٩١:

• $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (1)^{\infty}$

نهاية مميزة

- نفرض

$1+t = 1+\frac{1}{x}$

- نعزل t

$\Rightarrow t = \frac{1}{x}$

- نعزل x

$\Rightarrow x = \frac{1}{t}$

عندما كان $x \to +\infty$: $t \to 0$

• نأخذ ln او سوا

$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}$

$f(t) = e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$

• نستخدم خاصية تباعد

$f(t) = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \Rightarrow e^{\ln\frac{(1+t)}{t}} = e^{\ln(1)}$

$f(t) = e^{0} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$

> $(1)^{\infty}$
>
> • نفرض متحول جديد
>
> ومضمون قوس= $(1+t)$
>
> • نعزل t • نعزل x
>
> • نوجد مجال جديد وذلك لتعويض مجال قديم في علاقة t
>
> • نكتب تابع f بدلالة t
>
> • بعد الحلولات نكتب $\frac{1}{t}$
>
> لأننا خاصية $a^{x} = e$

ص ٩١.٥

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (1)^{\infty}$

نهاية مميزة

نفرض

$1+t = 1+x$

عبارة t $\quad t = x$

عبارة x $\quad x = t$

عندما $x \to 0 : t \to 0$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

- نأخذ e, ln معاً

$$f(t) = e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

- نستخدم خاصة

$$f(t) = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$f(t) = e^{\ln(1)} \Rightarrow f(t) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{t \to 0} f(t) = 1$$

• $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\qquad a : +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (1)^{\infty}$$

لنا صيرة

$$1+t = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow t = \frac{-3}{x+1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3}{t} - 1$$

لما $x \to +\infty : t \to 0$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{-\frac{3}{t}-1+1}{3}} = (1+t)^{\frac{-\frac{3}{t}}{3}} \Rightarrow = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

• نأخذ e, ln معاً

$$f(t) = e^{\ln(1+t)^{-\frac{1}{t}}}$$

نستخدم الخاصية

$$f(t) = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

ط: ه

$$f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = (1)^{\infty}$$

نهاية مميزة

$$1+t = 2-x$$

$$\Rightarrow t = 1-x$$

$$\Rightarrow x = 1-t$$

لما كان $x \to 1 : t \to 0$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{3}{1-t-1}} = (1+t)^{-\frac{3}{t}}$$