التكامل

$$F(x) \xleftarrow{} f(x) \xleftarrow{\text{تكامل}} f'(x)$$

$$F(x) \xrightarrow{\text{أصلي}} f(x) \xrightarrow{\text{اشتق}} f'(x)$$

- التكامل هو عكس الاشتقاق وإيجاده يعني إيجاد تابع أصلي
- قواعد إيجاد نهايات تابع أصلي

	$f(x)$	$F(x)$
	0	c
ثابت	a	ax
متحول	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

ملاحظات للحل:

- الأمثال ليس لها علاقة بالتكامل (حيادية)
- كل ما شفت x مرفوع لقوة بالمقام نرفعه للبسط ونغير إشارة أسه

أوجد التكاملات الآتية:

$$f(x) = 3x^2 + 5x + x + 3$$

$$= 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 5\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 3x$$

$$\Rightarrow F(x) = x^3 + \frac{6x^2}{2} + 3x + c$$

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$

نرفع x للبسط ونغير الأس

$= 1 \cdot x^{-2}$

$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} \Rightarrow f(x) = -x^{-1}$

مبينا نرجع x إلى المقام

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$

- $f(x) = \frac{5}{x^3}$

$= 5 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = 5\,\frac{x^{-2}}{-2} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{2x^2}$

فكرة حساب تكامل الجذر

$x^{\frac{a}{b}}$ $a \rightarrow$ أس $b \rightarrow$ رتبة

نحول الجذر إلى قوة

$\Rightarrow \sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

نتخلص من الجذر حسب الخاصية السابقة ونحصل على مجهول له قوة نحل حسب القانون الثالث

أوجد تكاملات الآتية:

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}$

تكامل الاول

$= \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + c}$

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$

$F(x) = x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{3}{2}}$

$= \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}$

$= \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$

$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c}$

قاعدة الرفع x المشتقة

$$f' \cdot f^{n} \Rightarrow = \frac{f^{n+1}}{n+1}$$

Ex: • $3 \cdot (3x+1)^2$ مشتقة

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(3x+1)^3}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= 1 \cdot (x-1)^{-2}$$ مشتقة $$\Rightarrow F(x) = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{(x-1)}$$

• $$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

$$= (2x+1) \cdot (x^2+x)^{-2}$$ مشتقة

$$= \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{(x^2+x)}$$

.9] $$f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x}}$$

$f(x) = \frac{4x+2}{(x^2+x)^{\frac{1}{2}}}$

. نحول المقام إلا فكرة ، لجذور

$= 4x+2 \cdot (x^2+x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2(2x+1) \cdot (x^2+x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2 \quad \frac{(x^2+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ $\boxed{= 4(x^2+x)^{\frac{1}{2}}}$ او $\boxed{\frac{4}{\sqrt{(x^2+x)^{-1}}}}$

حالة $\frac{f'}{f}$

$\frac{f'}{f} \Rightarrow = \ln |f(x)| + C$

تابع كسري يحوي على مقام كاملاً درجة اولى وشتقه بالبسط نأخذ لوغا ريتم المقام بالقيمة المطلقة.

سؤال دورة :

$f(x) = \frac{5}{4x-3}$

1. اوجد تكامل على مجال $]\frac{3}{4}, +\infty[$ U $]-\infty, \frac{3}{4}[$

$= 5 \cdot \frac{1}{4x-3}$

نضرب بسطا ومقاماً بـ 4

$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{4x-3}$ → $= \frac{5}{4} \cdot \ln |4x-3| + C$

. فكرة لمعرفة القيمة المطلقة

• نعدم المقدار داخل القيمة المطلقة
• نشكل جدول إشارة
• إذا كان المجال موجب نبقيه كما هو
• إذا كان المجال سالب نضرب المقدار بـ (-) ليصبح موجب

$4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$

	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$\lvert 4x-3\rvert$	$-$	0	$+$
	$-(4x-3)$		$(4x-3)$

$F(x)=\frac{5}{4}\cdot\ln(-4x+3)+C \qquad]-\infty,\frac{3}{4}[$

$F(x)=\frac{5}{4}\cdot\ln(4x-3)+C \qquad]\frac{3}{4},+\infty[$

[o] $f(x)=\tan x \qquad]0,\frac{\pi}{2}[$

$=\frac{\sin x}{\cos x}$

$-\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$

$=-1\cdot\ln|\cos x|+C$

cos في الربع الأول
cos موجبة

$\Rightarrow f(x)=-\ln|\cos x|+C$

حالة الكسور

← اكبر او يساوي

• إذا كان لديك كسر درجة البسط $\geq$ درجة المقام فوراً نستخدم قسمة اقليدية

← أصغر او يساوي

• إذا كان لديك كسر درجة البسط $\leq$ درجة المقام فوراً نطلع باستخدام تفريق الكسور

ex 1] $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

نقسم اقليدياً

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + 3 \dfrac{1}{x-2}$ مشتقة

نكامل الآن

$\Rightarrow F(x) = x + 3 \ln|x-2|$

في المجال $]-\infty, 2[$

نعدم $x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow F(x) = x + 3 \ln(-x+2)$

تكاملات مميزة

$1 g'(x) \cdot e^{g(x)} \Rightarrow = e^{g(x)}$

13] $(\ln(x)+1)\, e^{x \cdot \ln(x)}$

$\Rightarrow F(x) = e^{x \cdot \ln(x)}$

14] $2x\, e^{x^2}$

$\Rightarrow F(x) = e^{x^2}$

$2\ e^{ax} \Leftrightarrow \frac{1}{a} e^{ax}$

15] $f(x) = e^{\frac{2}{5}x}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{2}{5}x}$

16] $f(x) = e^{(-3x)}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

إذا كان تابع جتا ع بالإصلاح

نضرب بـ (-)

17] $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$

$-(-\sin x) \cdot e^{\cos x}$

$\Rightarrow F(x) = -e^{\cos x}$

تمارين

نفرق

نوجد تكامل الآن

18] $\frac{3x+1}{2x}$

$\frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x}$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \ln|x|$

F] $x^2 - \frac{1}{x^3}$

$\frac{x^{3+1}}{3+1} - 1 \cdot x^{-2}$

$\frac{x^4}{4} - 1 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$

$\frac{1}{4} \cdot x^4 - 1 \cdot \frac{x^{-1}}{-1}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x}$

20] $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2}$

نستخدم خاصية الجذر،

$$x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 3\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 1\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}$$

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{3}{x}$$

$$\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x}$$

التكاملات المثلثية

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$1+\cot^2 x$	$-\cot x + C$
$1+\tan^2 x$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$

باستخدامات مباشرة

$$f(x) = g'\cos g \Rightarrow F(x) = \sin g(x)$$

$$f(x) = g'\sin g \Rightarrow F(x) = -\cos g(x)$$

دساتير ثابتة للجداء لتصحيح التابع قبل تكامله

- $\sin x^2 + \cos^2 = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2$
  $\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2$
- $\cos^2($زاوية$) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos($ضعف الزاوية$)$ نصف زاوية
- $\sin^2($زاوية$) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos($ضعف الزاوية$)$ نصف زاوية
- $\sin($زاوية$) \rightarrow 2\sin($نصف الزاوية$) \cdot \cos($نصف الزاوية$)$

. جداء النسب المثلثية :

. النسب متشابهة → قوس يحوي cos

- $\cos a \cdot \cos b$

$$\Rightarrow : \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

- $\sin a \cdot \sin b$

$$\Rightarrow : -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

. النسب مختلفة → قوس يحوي sin

- $\cos a \cdot \sin b$

$$\Rightarrow : \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

$\sin a \cdot \cos b$

$$\Rightarrow : \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

أوجد التكاملات الآتية :

R.

1] $f(x) = \cos^2 x$

قانون ضعف الزاوية

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

علماً أن $\cos(2x) = \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$

R.

2] $f(x) = \sin^2 x$

قانون ضعف الزاوية

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

علماً أن

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos$$

3] $f(x) = \cot^2 x$

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x^2} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow F(x) = \ln(\sin x) + c}$$

4] $\cos^2(3x)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6x)$$

قانون جمعار

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sin(6x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin(6x)$$

5] $f(x) = 2\cos \cdot \sin^2 x$

$$\Rightarrow F(x) = 2\frac{\sin^3 x}{3}$$

6] $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$

نكتب قانون جداءات مثلثية

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(3x + x) + \cos(3x - x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$f\,]\ f(-x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$ قانون ضعف الزاوية

$f(x) = \dfrac{1}{2\sin x \cdot \cos x}$ من القانون

$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$

تابع كسري من درجات مختلفة لفرق مقام

$f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2\sin x \cos x} + \dfrac{\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$

$= \dfrac{\sin x}{2\cos x} + \dfrac{\cos x}{2\sin x}$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

$-\dfrac{1}{2}\ln|\cos x| + \dfrac{1}{2}\ln|\sin x|$

دراسة عا الربع $]-\frac{\pi}{2}, 2\pi[$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(\cos x) + \dfrac{1}{2}\ln(-\sin x)}$

التكامل المحدد

$I = \int_a^b \ldots\ldots . dx$

. يستخدم لحساب مساحات او سطوح في الخطوط البيانية :

. الخواص:

1] $\int_a^b f(x) . dx = [F(x)]_a^b \Rightarrow F(b) - F(a)$

2] $\int_a^b \lambda . f(x) . d(x) = \lambda \int_a^b f(x) . d(x)$ $a < b$ يوجد تابع أصلي F نوجد الفرق فقط

3] $\int_a^b f(x) . d(x) + \int_a^c f(x) . d(x) \Rightarrow = \int_a^c f(x) . d(x)$

حسب شال

4] $\int_a^b f(x) . d(x) = - \int_b^a f(x) . d(x)$

تمارين:

. 1] $I = \int_0^1 2(2x+1) . d(x)$

$I = \int_0^1 \left[\frac{(2x+1)^2}{2}\right]_0^1 d(x)$

$I = F(1) - F(0)$ نعوض

$I = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = 4$

2] $I = \int_0^2 \frac{2}{x-1}\, dx$

$\frac{2}{x-1} = 2 \cdot \frac{1}{x-1}$ $\frac{g'}{g}$

نوجد تابع اصلي

$\Rightarrow F(x) = 2 \cdot \ln|x-1|$

$F(1) - F(0)$ $\rightarrow F(x) = 2 \cdot \ln(x-1)$

نوجد ونعوض

$2\ln(2-1) - 2\ln(0-1)$ $\boxed{\Rightarrow = -2\ln(-1)}$

3] $I = \int_0^2 \frac{4x-5}{2x+1}\, dx$

اولاً نوجد تابع اصلي حسب قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} 4x-5 & 2x+1 \\ \mp 4x \mp 2 & 2 \\ \hline -7 & \end{array}$$

$f(x) = 2 + \frac{-7}{2x+1}$

نضرب بـ 2

ونقسم على 2

$= 2 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{2x+1}$

$\Rightarrow F(x) = 2x - \frac{7}{2} \ln(2x+1)$

$[F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$

$I = 4 - \frac{7}{2}\ln(5) - 0$

$\Rightarrow I = 4 - \frac{7}{2}\ln(5)$

ليكن لدينا

.4] $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3}$

أ. أوجد اعداد تحقق

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$

ب. ثم احسب تكامل الدالة

$I = \int_2^0 f(x) \cdot d(x)$

نقسم اقليديا

$$\begin{array}{r|l} & 4x - 17 \\ x+3 & 4x^2 - 5x + 1 \\ & \mp 4x^2 + 12x \\ \hline & -17x + 1 \\ & \overset{+}{-} 17x \overset{+}{-} 51 \\ \hline & 52 \end{array}$$

$f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$

$a = 4$ ، $c = 52$ ، $b = -17$

ب: حساب تكامل => نوجد تابع اصلي

$f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$

$= 4x - 17 + 52 \cdot \frac{1}{x+3}$

$\frac{4x^2}{2} - 17 + 52 \ln(x+3)$

$\Rightarrow F(x) = 2x^2 - 17 + 52 \ln(x+3)$

نعدل عن شكل تكامل

$\int_2^0 f(x) \cdot d(x) = -\int_0^2 f(x) \cdot d(x)$

$F(2) - F(0)$

ALADIB

$-26 + 52\ln(5) - 52\ln(3)$

$I: -26 + 52(\ln(5) - \ln(3))$

$\Rightarrow I = -26 + 32\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

5] $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

ليكن لدينا

• أثبت أن

$f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

• ثم احسب تكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$

• نوجد تابع أصلي

$f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

$\Rightarrow F(x) = x - \ln(1+e^x)$

نوجد الفرق

$F(1) - F(0)$

$1 - \ln(1+e) - (-\ln(2))$

$\Rightarrow I = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$

• نوجد تكامل I+J

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I + J \cdot dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx$$

نوجد تابع أصلي

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx$$

نوجد الفرق

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$$

$$1 \quad - 0$$

$$\Rightarrow = 0$$

• نستنتج I

$$I + J = 1$$

$$I + \frac{1}{2}\ln(3) = 1$$

$$\Rightarrow I = 1 - \frac{1}{2}\ln(3)$$

• 7] $F(x) = \int_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2 - 9} \cdot dx$

نوجد التابع الأصلي

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|x^2 - 9|$$

ننظم جدول الإشارة

x	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	
				$-(x^2-9)$			

$$\Rightarrow F(x) = 9 - x^2$$

$$F(2) - F(1)$$

$$\Rightarrow = 3$$

.10] $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos 2x} \cdot dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)} \cdot dx$ يحسب 2 عامل مشترك

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 x} \cdot dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cancel{\sqrt{4\sin}}\ 2|\sin x| \cdot dx$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x \cdot dx$

$\Rightarrow I = 2[\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$

$f(2\pi) - f(3\frac{\pi}{2})$ نوجد

$I = 2[(\cos 2\pi) - (\cos \frac{3\pi}{2})]$

$I = 2\ (1-0) \Rightarrow \boxed{= 2}$

.11] $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) \cdot dx$$

$\Rightarrow F(x) = -\ln|\cos x|$ $\rightarrow$ $= -\ln|\cos x|$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ نعوض

$$= \left(-\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right) - \left(-\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right)$$

$$\Rightarrow I = \ln 2 + \ln\sqrt{3} - \ln 2 = \ln\sqrt{3}$$

$$\bullet\ I = \int_{2}^{-1} (x-2)(x^2-4x+3) \cdot dx$$

نضرب بـ 2 ونقسم على 2

$$\int_{2}^{-1} \frac{1}{2} \cdot (2x-4)(x^2-4x+3)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_2^{-1} = \left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{4}\right]_2^{-1}$$

نعوض

$$= F(-1) - F(2)$$

$$\frac{1}{4} - \frac{64}{4} \Rightarrow I = -\frac{63}{4}$$

12] $\int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} \cdot dx$

نوجد التابع الاصلي => نقسم اقليديا:

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x-1 & 2x-1 \\ & \mp 2x \pm 2 \\ \hline & +1 \end{array}$$

$f(x) = \int_{-2}^{-1} 2 + \frac{1}{x-1}$

$= [2x + \ln|x-1|]_{-2}^{-1}$

$f(-1) - f(-2)$

نعوض

$= (2(-1) + \ln|2|) - (2(-2) + \ln 3)$

$(-2 + \ln 2) - (-4 + \ln(3))$

$\boxed{\Rightarrow I = 2 + \ln 2 - \ln 3}$

13] $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1} \cdot dx$

نوجد التابع الاصلي باستخدام خاصية الجذور

$= \int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot d(x)$

نضرب 2 ونقسم على 2

$= \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot d(x)$

$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$\Rightarrow \quad = \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$F(2) - F(0)$

بعوض

$\Rightarrow = \frac{1}{3}\left((5)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow I = \frac{1}{3} 5\sqrt{5} - \frac{1}{3}}$$

• 14] $I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot d(x)$

$= \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_0^1$

• 15] $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$= \int_0^3 \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} \cdot d(t)$

$= \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(t)$

$= \left[\frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^3 = \left[2(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$

$= 2 [\sqrt{1+t}]_0^3$

نعوض من

$F(3)-F(0)$

$2(\sqrt{4})-(\sqrt{1}) \Rightarrow \boxed{= 2}$

16] $\int_0^1 t\, e^{t^2-1} \cdot dx$

نضرب بـ 2 ونقسم على 2

$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t\, e^{t^2-1}$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 2t\, e^{t^2-1} \Rightarrow \frac{1}{2} [e^{t^2-1}]_0^1$

$F(1)-f(0)$

$\frac{1}{2}((e^0)-(e^{-1})) \Rightarrow \boxed{= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}}$

* التكامل بالتجزئة

• الأسئلة مختلفة

$\int e^x$

$$\begin{cases} x^2 \text{ مع } \sin x \\ 2x \text{ مع } e^x \\ x^2 \text{ مع } \ln|x| \end{cases}$$

إذا وردت هذه التوابع مع بعضها في تكامل عندها نستخدم تكامل بالتجزئة وفق فرضيات

نفرض تابع جميع u ونشتقه u'
نفرض تابع الآخر v' ونكامله v
تشكل الفرضية الآتية

$$I = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \cdot d(x)$$

أحسب تكاملات الآتية

1] $I = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx$

تابعين من صنفين مختلفين ← نستخدم التكامل بالتجزئة

$u = x \xrightarrow{\text{نشتق}} u' = 1$
$v' = e^x \xrightarrow{\text{نكامل}} v = e^x$

$$I = [u \cdot v]_0^1 - \int_0^1 u' \cdot v \cdot d(x)$$

$$[x \cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \cdot dx$$

$$\Rightarrow I = [x \cdot e^x] - [1 \cdot e^x]_0^1$$

$= F(1) - F(0) - [F(1) - F(0)]$

$= [1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0] - [e^1 - 1]$

$= [1 \cdot e - 0 \cdot 1] - [e - 1]$

$= [e] - [e - 1]$

$\Rightarrow I = 1$

$\cdot 2]\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \sin 2x \cdot d(x)$

تابع كثير الحدود — تابع مثلثي

$u = 2x \xrightarrow{\text{نشتق}} u' = 2$

$v' = \sin 2x \xrightarrow{\text{نكامل}} v = -\frac{\cos 2x}{2}$

نكتب الفرضية.

$I = \left[2x \cdot \frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \frac{-\cos 2x}{2} \cdot dx$

$I = \left[-x \cdot \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot d(x)$

نكامل

$\left[-x \cdot \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

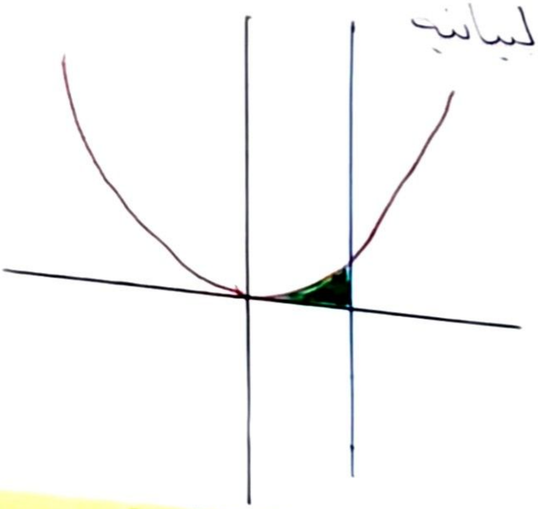
نعوض.

$I = \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \cos(0))\right] + \left[\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin 2(0)}{2}\right]$

$I = \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi - 0\right] + \left[\frac{0}{2} - \frac{0}{2}\right]$

$\Rightarrow I = +\frac{\pi}{2}$

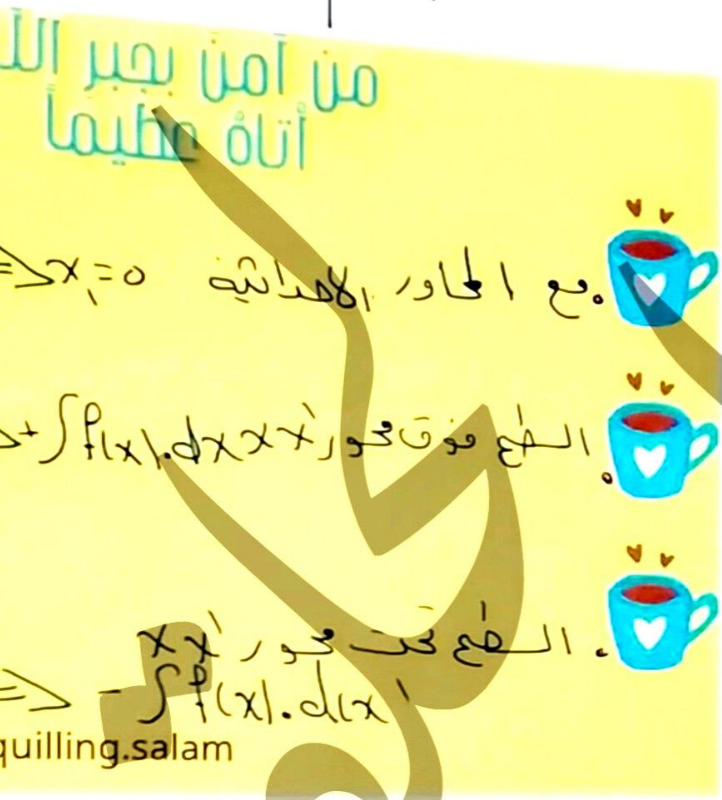
* حساب مساحات السطوح المحدودة بالخطوط البيانية



ليكن C خط بياني للتابع

$f(x) = x^2$ $]0, +\infty[$

أحسب مساحة السطح بين C ومحور الاحداثيات والمستقيم $x=1$



الحل:

$S = \int_a^b f(x).d(x)$

$S = \int_0^1 x^2 . dx$

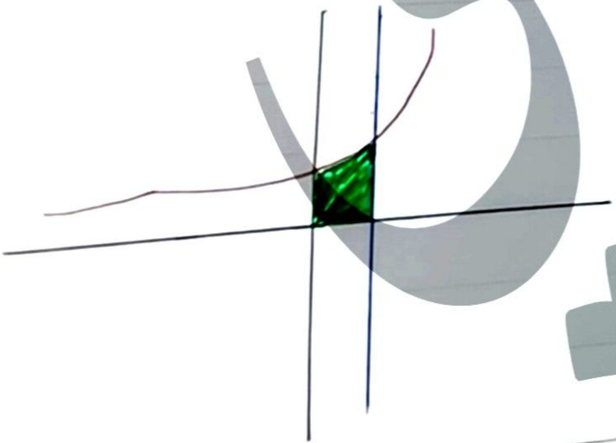
تكامل

$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$F(1) - f(0)$

$S \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$

$\Rightarrow S = \frac{1}{3}$



ليكن لدينا

$f(x) = e^x$

اوجد مساحة سطح محصور بين C ومحاور الاحداثيه مع المستقيم $x = 1$

$S = \int_0^1 e^x \cdot dx$

$S = [e^x]_0^1$

$S = F(1) - F(0)$

$S = e^1 - e^0 \Rightarrow \boxed{S = e - 1}$

BAC 2026

@YALLAMATHHALAKY