أولاً: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي وانقلها إلى ورقة إجابتك : (10 درجات لكل سؤال)

[1] نهاية التابع $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} + 2x$ عند $-\infty$ تساوي :

أ		ب		ج		د	
أ	$-\infty$	ب	0	ج	2	د	$+\infty$

بجوار $-\infty$ نكتب : $f(x) = -x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}} + 2x = x\left(-\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}} + 2\right)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

الجواب : أ ، $-\infty$

[2] المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$ تحقّق $u_n > 0$ ومتقاربة وبالتالي نهايتها :

أ		ب		ج		د	
أ	0	ب	1	ج	2	د	3

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{2}{1+x} = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

الحل المقبول $x = 1$

الجواب : ب ، 1

[3] إنّ المقدار $\ln\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + \ln\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$ يساوي :

أ		ب		ج		د	
أ	$\ln(2)$	ب	$2\ln(2)$	ج	$2\ln(3)$	د	$\ln(10)$

$$\ln\left(4+2\sqrt{3}\right) + \ln\left(4-2\sqrt{3}\right) = \ln\left[\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)\right] = \ln(16-12) = \ln(4)$$

الجواب : ب ، $2\ln(2)$

[4] f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e^{x^2} - 1\right)$ في حالة $x \neq 0$. عندئذٍ قيمة $f'(0)$:

أ		ب		ج		د	
أ	-1	ب	0	ج	1	د	2

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad ; \quad t = x^2$$

الجواب : ج ، 1

[5] العدد $\int_0^{\ln 3} \dfrac{1}{1+e^{-x}}\,dx$ يساوي :

أ		ب		ج		د	
أ	$-\ln(2)$	ب	$\ln(2)$	ج	$\ln(3)$	د	$\ln(4)$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx = \left[\ln\left(e^x + 1\right)\right]_0^{\ln 3} = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)$$

الجواب : ب ، $\ln(2)$

[6] في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقطتين $A\left(-1,-2,-1\right)$ ، $B\left(3,2,1\right)$

عندئذٍ معادلة الكرة التي تقبل $\left[AB\right]$ قطراً لها :

أ	$x^2+2x+y^2+z^2=9$	ب	$x^2+2x+y^2+z^2=8$
ج	$x^2-2x+y^2+z^2=9$	د	$x^2-2x+y^2+z^2=8$

مركز الكرة هو النقطة I منتصف $\left[AB\right]$: $I\left(1,0,0\right)$ ، نصف قطرها $r=AI=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

وبالتالي $\left(x-1\right)^2+y^2+z^2=9$ الجواب : د ، $x^2-2x+y^2+z^2=8$

[7] نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

يرتبط العددان العقديّان a و b الممثّلان للنقطتين A و B على الترتيب بالعلاقة : $a=b+i$

عندئذٍ النقطة B صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}$ يساوي :

أ	$-\vec{u}$	ب	$\vec{u}$	ج	$-\vec{v}$	د	$\vec{v}$

$$a=b+i\ \Rightarrow\ b=a-i$$

وبالتالي B صورة A وفق انسحاب ممثّل بالعدد العقدي $\left(-i\right)$ أي $\vec{w}=-\vec{v}$ الجواب : ج ، $-\vec{v}$

[8] بفرض $z=x+iy$ ، مجموعة نقاط المستوي $M\left(z\right)$ التي تحقّق $\mathrm{Im}\left(z^2\right)=0$ تمثل :

أ	اجتماع المحورين الإحداثيين	ب	نقطة وحيدة فقط	ج	دائرة نصف قطرها 1	د	اجتماع مستقيمين مائلين

$$z^2=\left(x+iy\right)^2=\left(x^2-y^2\right)+i\left(2xy\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(z^2\right)=0\ \Leftrightarrow\ xy=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \vee\ y=0$$

الجواب : أ ، اجتماع المحورين الإحداثيين

[9] عدد النتائج المختلفة لتوزيع 5 جوائز مختلفة على 4 طلاب بحيث يحصل كل طالب على جائزة واحدة على الأقل :

أ	10	ب	24	ج	120	د	240

$$\binom{5}{2}.4!=\left(10\right)\left(24\right)=240$$

الجواب : د ، 240

[10] مجموع آحاد وعشرات العدد 11^{33} يساوي :

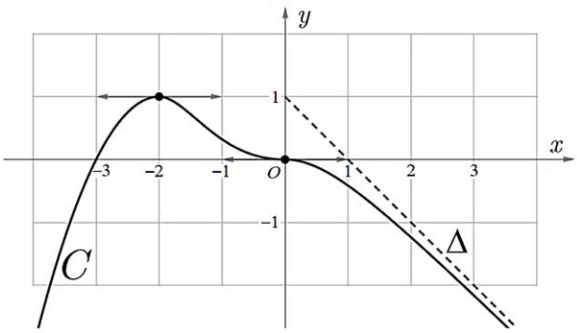
أ	1	ب	3	ج	4	د	6

$$11^{33}=\left(1+10\right)^{33}=\underbrace{\binom{33}{0}10^0+\binom{33}{1}10^1}_{\text{مجموعها } 331}+\underbrace{\binom{33}{2}10^2+\ldots+\binom{33}{33}10^{33}}_{\text{مجموعها لن يؤثر على الآحاد والعشرات}}$$

إذن مجموع رقمي الآحاد والعشرات يساوي 4 الجواب : ج ، 4

ثانياً: حل الأسئلة الثلاثة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمّل جانباً الخط البياني C لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$. **المطلوب:**



[1] ما عدد القيم الحديّة المحليّة للتابع f ؟

[2] اكتب معادلة المقارب المائل Δ للخط C .

[3] ما حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

[4] ما حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ ؟

---

[1] واحدة (وهي $f(-2) = 1$) .

[2] نختار نقطتين من المستقيم Δ ولتكن $A(0,1)$ ، $B(1,0)$

$$m_\Delta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \ , \ y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = (-1)(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 1 - x}$$

[3] $x_1 = -3$ ، $x_2 = 0$.

[4] $]-2,0[\cup]0,+\infty[$.

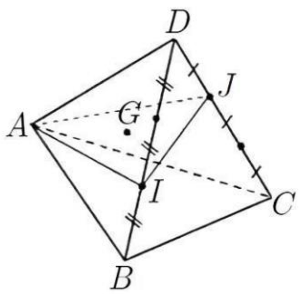
السؤال الثاني: صندوق يحتوي 6 بطاقات مرقمة $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$ نسحب من الصندوق ثلاث بطاقات على التتالي دون إعادة ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثّل مجموع الأرقام التي نحصل عليها في مرات السحب الثلاث .

المطلوب: احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{P}(X=1) = \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) \times 3 = \frac{1}{5} \ , \ \mathbb{P}(X=2) = \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) \times 3 = \frac{3}{5} \ , \ \mathbb{P}(X=3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{E}(X) = (1)\left(\frac{1}{5}\right) + (2)\left(\frac{3}{5}\right) + (3)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{5} = 2$$

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه



النقطتان I و J تقعان على الحرفين $[DB]$ و $[DC]$ كما في الشكل المجاور

النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,3)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

المطلوب: أثبت أنّ النقطة G هي مركز ثقل المثلث AIJ .

من الشكل $\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ ومنه I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$ و $(D,1)$

من الشكل $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ومنه J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,2)$

وبما أنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(D,2)$

حسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,3)$ و $(J,3)$ و $(A,3)$ إذن G هي مركز ثقل المثلث AIJ .

ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$. **المطلوب:**

[**1**] أثبت أنّ التابع f متناقص تماماً على $\mathbb{R}$ واحسب $f(]-1,0])$.

[**2**] علل لماذا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$ ؟

[**3**] اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ C و T .

[**1**] التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 < 0$$

المعادلة $f'(x) = 0$ مستحيلة الحل فالمشتق يحافظ على إشارته

وبما أنّ $f'(0) = -1 < 0$ نستنتج أنّ $f'(x) < 0$

فالتابع f متناقص تماماً على $\mathbb{R}$

$$f(]-1,0]) = \left[f(0), \lim_{x \to -1} f(x)\right[= [2,5[$$

[**2**] التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]1,2[$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = -4 \end{array}\right\} f(1).f(2) < 0$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$.

[**3**]

$$f(0) = 2 \quad , \quad f'(0) = -1$$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\boxed{T : y = -x + 2}$$

$$f(x) - y = -x^3 + x^2 = x^2(1 - x)$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	C فوق T				C تحت T		

ويشترك C مع T في النقطتين $(0,2)$ و $(1,1)$

التمرين الثاني: نعتبر المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتين وفق $x_n = \frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$ ، $y_n = x_n + \frac{1}{2^n}$. **المطلوب:**

[1] أثبت أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ محدودة .

[2] أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

[3] احسب نهاية المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$.

---

[1]

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$x_n = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$n \geq 1 :\ 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 0 > -\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq -\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 1 > 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{1}{3} \leq x_n < \frac{1}{2}}$$

[2]

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > 0$$

المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً .

$$y_{n+1} - y_n = \left(x_{n+1} - x_n\right) + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً .

$$\lim_{n\to+\infty}\left(y_n - x_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad ; -1 < \frac{1}{2} < 1$$

إذن المتتاليتان متجاورتان .

[3]

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2} \qquad ; -1 < \frac{1}{3} < 1$$

التمرين الثالث: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^3 - iz + 1 - i$. **المطلوب:**

[1] عيّن كثير حدود Q من الدرجة الثانية يحقّق $P(z) = (z+1)Q(z)$.

[2] جد الجذرين التربيعيّين للعدد $w = -3 + 4i$ ثم جد حلول المعادلة $P(z) = 0$ واكتبها بالشكل الأسي .

[3] بفرض A ، B ، C نقاط المستوي الممثّلة لحلول المعادلة $P(z) = 0$ أثبت أنّ المثلث ABC متساوي الساقين .

---

[1]
$$P(z) = z^3 + 1 - i(z+1) = (z+1)(z^2 - z + 1) - i(z+1)$$

$$P(z) = (z+1)(z^2 - z + 1 - i)$$

(أو بإجراء القسمة الإقليدية)

$$\Rightarrow \boxed{Q(z) = z^2 - z + 1 - i}$$

[2]
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & \dots\dots\dots \boxed{1} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 & \dots \boxed{2} \\ 2xy = 4 & \dots\dots\dots \boxed{3} \end{cases}$$

بجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أنّ $2x^2 = 2$ وبالتالي $x^2 = 1$ وبالتالي $x = \pm 1$ ، نعوّض في $\boxed{3}$ فنجد $y = \pm 2$

الجذران التربيعيّان هما $\boxed{u_1 = 1 + 2i}$ و $\boxed{u_2 = -1 - 2i}$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - z + 1 - i) = 0$$

إما $z + 1 = 0$ أي إنّ $z_1 = -1$ وبالشكل الأسي $\boxed{z_1 = e^{i\pi}}$

أو $z^2 - z + 1 - i = 0$ حساب المميز $\Delta = 1 - 4(1)(1-i) = -3 + 4i$ جذراه u_1 و u_2

$z_2 = \dfrac{-b + u_2}{2a} = \dfrac{1 - 1 - 2i}{2} = -i$ وبالشكل الأسي $\boxed{z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

$z_3 = \dfrac{-b + u_1}{2a} = \dfrac{1 + 1 + 2i}{2} = 1 + i$ وبالشكل الأسي $z_3 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

[3] $a = -1 \ , \ b = -i \ , \ c = 1 + i$

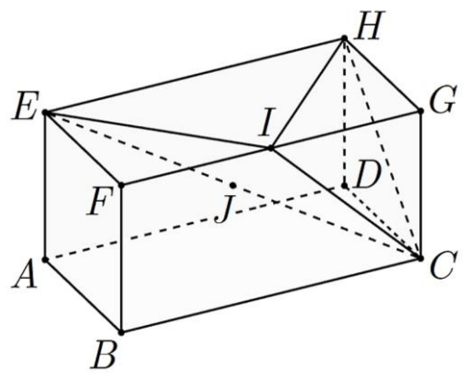
$$AB = |b - a| = |1 - i| = \sqrt{2} \quad , \quad AC = |c - a| = |2 + i| = \sqrt{5} \quad , \quad BC = |c - b| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

$\boxed{AC = BC}$ فالمثلث ABC متساوي الساقين رأسه C .

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AD = 4$ و $AB = AE = 2$

النقطة I هي منتصف $\left[FG\right]$ ، النقطة J هي منتصف $\left[EC\right]$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



[1] عيّن إحداثيات النقاط E ، C ، H ، I ، J .

[2] هل الأشعّة $\overrightarrow{JC}$ ، $\overrightarrow{JE}$ ، $\overrightarrow{IH}$ مرتبطة خطياً ؟ علّل إجابتك .

[3] اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (IJ) واكتب معادلة للمستوي (BED)

ثم جد إحداثيات M نقطة تقاطع المستقيم (IJ) مع المستوي (BED) .

[4] أثبت أنّ $(IJ)\perp(HE)$ و $(IJ)\perp(HC)$.

[5] أثبت أنّ المثلث ECH قائم ثم احسب حجم رباعي الوجوه $I-ECH$.

---

[1] $E(0,0,2)$, $C(2,4,0)$, $H(0,4,2)$, $I(2,2,2)$, $J(1,2,1)$

[2] J منتصف $\left[EC\right]$ وبالتالي $\overrightarrow{JC}=-\overrightarrow{JE}$ فالشعاعان $\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{JE}$ مرتبطان خطياً

فهما يرتبطان خطياً مع أي شعاع ثالث ، فالأشعة $\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{JE}$ و $\overrightarrow{IH}$ مرتبطة خطياً (لأنّ $\overrightarrow{JC}=-\overrightarrow{JE}+0\,\overrightarrow{IH}$)

[3] شعاع توجيه (IJ) : $\overrightarrow{IJ}(-1,0,-1)$ نعوّض إحدى النقطتين ولتكن I : $t\in\mathbb{R}$;
$$(IJ):\begin{cases}x=-t+2\\y=2\\z=-t+2\end{cases}$$

لدينا $B(2,0,0),E(0,0,2),D(0,4,0)$ وبالتالي $(BED):\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$

$$\boxed{(BED):\ 2x+y+2z-4=0}$$

نعوّض معادلات (IJ) في معادلة المستوي (BED) : $2(-t+2)+(2)+2(-t+2)-4=0$ وبالتالي $\boxed{t=\frac{3}{2}}$

نعوّض في المعادلات الوسيطية للمستقيم (IJ) : $M\left(-\frac{3}{2}+2,2,-\frac{3}{2}+2\right)$ وبالتالي $\boxed{M\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)}$

[4] $\overrightarrow{IJ}(-1,0,-1)$, $\overrightarrow{HE}(0,-4,0)$, $\overrightarrow{HC}(2,0,-2)$

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HE}=0-0-0=0 \quad\Rightarrow (IJ)\perp(HE)$$
$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HC}=-2+0+2=0 \ \Rightarrow (IJ)\perp(HC)$$

[5] $CE^2 = 4+16+4 = 24 \ , \ HE^2 = 0+16+0 = 16 \ , \ HC^2 = 4+0+4 = 8$

$HE^2 + HC^2 = CE^2$ فالمثلث ECH قائم في H

$$V = \frac{1}{3} S_{ECH}.h$$

$$S_{ECH} = \frac{1}{2} HC.HE = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(4\right) = 4\sqrt{2}$$

ارتفاع الهرم $I-ECH$ هو $IJ = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$ لأنّ $\left(IJ\right) \perp \left(ECH\right)$ حسب الطلب [4]

$$V = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}$$

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f\left(x\right) = \ln\left(e^{2x}+1\right) - x$. **المطلوب:**

[1] أثبت أنّ التابع f زوجي ، واستنتج الصفة التناظرية للخط C .

[2] أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ .

[3] ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها .

[4] في معلم متجانس ارسم Δ ثم ارسم C .

[5] استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\right)$.

---

[1] $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(-x\right) \in \mathbb{R} \ \ldots\left(1\right)$

$$\begin{aligned} f\left(-x\right) = \ln\left(e^{-2x}+1\right) + x &= \ln\left(e^{-2x}\left(1+e^{2x}\right)\right) + x \\ &= \ln\left(e^{-2x}\right) + \ln\left(1+e^{2x}\right) + x \\ &= \ln\left(e^{2x}+1\right) - x \quad \Rightarrow \quad f\left(-x\right) = f\left(x\right) \ \ldots\left(2\right) \end{aligned}$$

من $\left(1\right)$ و $\left(2\right)$ نستنتج أنّ f تابع زوجي ، خطه البياني C متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

[2] $f\left(x\right) - y = \ln\left(e^{2x}+1\right) - 2x = \ln\left(e^{2x}+1\right) + \ln\left(e^{-2x}\right) = \ln\left(1+e^{-2x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f\left(x\right) - y\right] = \ln\left(1\right) = 0$$

فالمستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$e^{-2x} > 0 \Rightarrow 1+e^{-2x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1+e^{-2x}\right) > 0 \Rightarrow f\left(x\right) - y > 0$$

الخط C يقع دوماً فوق Δ

[3] f مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

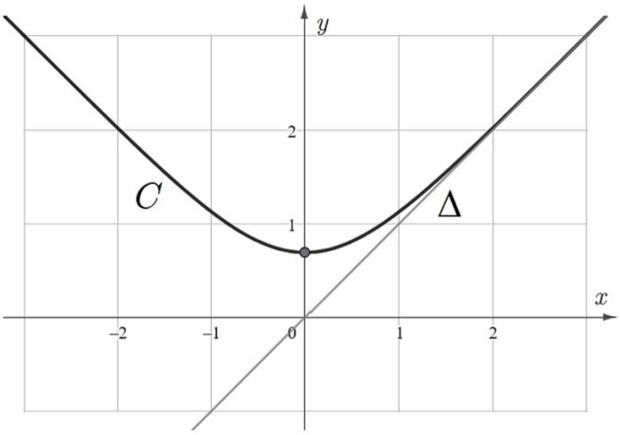
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{2x}+1\right) - x \\ &= \ln\left(e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)\right) - x \\ &= \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1+e^{-2x}\right) - x \\ &= x + \ln\left(1+e^{-2x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1 = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow \boxed{x=0}\ ,\ f(0) = \ln 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

[4]



[5]

$$g(x) = \ln\left(e^{x}\right) - \ln\left(e^{2x}+1\right) = x - \ln\left(e^{2x}+1\right)$$

$$\boxed{g(x) = -f(x)}$$

C' هو نظير الخط C بالنسبة إلى محور الفواصل .

- انتهى الحل -