الإهداء

إلى روح أخي الحبيب المرحوم محمد نور تكروري

أهدي هذا العمل بكل ما يحمل من جهدٍ وفكر، عرفاناً لمكانتك السامية في قلبي، ووفاءً لذكراك التي بقيت نبراساً يضيء الدرب، رغم غيابك عن هذه الدنيا.

لقد تركت أثراً لا يزول، وحضوراً يستمدّ منه القلب قوة وصبراً، وكأنك روحك ما تزال تحفّ خطواتنا بلطفها.

أسأل الله العظيم، ربّ العرش الكريم، أن يجعل هذا العمل نوراً يصل إليك، ورحمةً تُرفع في ميزان حسناتك، وأن يشرّف مقامك في جنات النعيم، حيث لا وجع ولا فراق.

سلامٌ عليك ما بقيت الذكرى، وما دام الدعاء يصل إلى السماء.

الفهرس

دورة 2017 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \, , u_0 = 1$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$

① أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، وأوجد أساسها.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عبارة u_n بدلالة n.

③ ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

عبر عن S_n بدلالة n، واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحل:

❶ لإثبات أن v_n هندسية

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3} = q$$

v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

❷ إيجاد الحد العام لـ v_n:

$$v_n = v_m . q^{n-m}$$

u_n بدلالة n

لدينا

$$v_n = u_n + 3$$

$$u_n = v_n - 3$$

$$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

❸ حساب مجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S_n مجموع متتالية هندسية لأن v_n هندسية

$$S_n = a\left[\frac{1 - q^n}{1 - q}\right]$$

$$a = v_0 = 4 \, , q = \frac{1}{3}$$

$$n = n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S_n = 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

استنتاج نهاية S_n

$$\lim_{n\to+\infty} S_n =$$

$$-1 < q = \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} 6\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 6$$

دورة 2017 الثانية:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق ما يأتي:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

① أثبت أن المتتالية u_n متناقصة.

② أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

❶ لإثبات أن u_n متناقصة

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$
$$u_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

نضرب بالمرافق

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

وهذا محقق لأن

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

للتوضيح: كل ما كبر المقام صغر الكسر

$$u_{n+1} < u_n$$

$\Leftarrow$ u_n متناقصة.

❷ نعلم أن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$

أياً كان $n \geq 0$:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0 \quad \ldots(*)$$

ونعلم أن $\sqrt{n+1} \geq 1$

ومنه $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$

نقلب $(*)$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1 \quad \ldots(**)$$

من * و ** نجد أن:

$$0 \leq u_n \leq 1$$

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

نهاية u_n:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

دورة 2018 الأولى:

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق:

$$u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية u_n متزايدة.

② أثبت أن المتتالية v_n متناقصة

③ هل المتتاليتان u_n, v_n متجاورتان؟ علل إجابتك

الحل:

❶ لإثبات أن u_n متزايدة.

$$u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

بما أن u_n تابع نفرض

$$u_n = f(x) = 5 - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

u_n متتالية متزايدة

❷ لإثبات أن v_n متناقصة

$$v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

بما أن v_n تابع نفرض

$$v_n = g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$$
$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

v_n متناقصة

❸ نعم، لأن u_n متزايدة و v_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0$$

دورة 2018 الثانية:

السؤال الرابع:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وفيها

$u_0 = 1$ والمطلوب:

① احسب u_3

② احسب المجموع :

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$$

الحل:

❶ بما أن u_n هندسية، نوجد الحد العام

لدينا $u_0 = 1 \,, q = 2$

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$
$$u_n = 2^n$$

حساب u_3:

$$u_3 = 2^3 = 8$$

❷ حساب S_n:

$$S_n = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$

بما أن S_n مجموع متتالية هندسية

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$a = u_3 = 8 \,, q = 2 \,, n = 7 - 3 + 1 = 5$$
$$S = 8\left(\frac{1-2^5}{1-2}\right) = 8\left(\frac{1-32}{-1}\right) = 8\left(-\frac{31}{-1}\right)$$
$$= 248$$

الجـزء الثاني

دورة 2019 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية S_n متزايدة تماماً.

② أثبت أن S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية S_n وبين أنها متقاربة.

الحل:

❶ لإثبات أن S_n متزايدة تماماً

$$S_{n+1} - S_n > 0$$

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

S_n متتالية متزايدة تماماً.

❷ S_n مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$a = 1\ ,\quad q = \frac{1}{3},\quad n = n+1$$

$$S_n = 1 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{3^n . 3}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

نعلم أن $0 \leq \frac{1}{3^n}$ منه $3 - \frac{1}{3^n} \leq 3$ منه

$$\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) \leq \frac{3}{2}$$

يعطي

$$S_n \leq \frac{3}{2}$$

فالعدد الراجح على المتتالية هو $\frac{3}{2}$

بما أن S_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

دورة 2019 الثانية

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

والمطلوب:

① ادرس اطراد المتتالية u_n.

② أثبت أن العدد 2 راجح على u_n

③ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n < n_0$ كان u_n في المجال $]1.9\,, 2.1[$

الحل:

❶ ندرس اطراد u_n

نفرض $u_n = f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

$\Leftarrow$ u_n متتالية متزايدة تماماً.

❷ لإثبات أن العدد 2 راجح على u_n

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = -\frac{3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0$$

$$u_n < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية u_n

❸ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

لإيجاد n_0 عدداً طبيعياً $]1.9\,, 2.1[$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9 + 2.1}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1 - 1.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$|u_n - c| < r$$

$$\left|-\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$n + 1 > 30$$

$$n > 29$$

$$n_0 = 29$$

الجـزء الثاني

دورة 2020 الأولى:

التمرين الأول:

تتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \;, u_0 = 3$$

عند كل $n \geq 0$ والمطلوب:

① أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$

② أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ استنتج أن المتتالية متقاربة، واحسب نهايتها.

الحل:

❶

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$x = 2$ مقبول

$x = -2$ مرفوض

$f'(x) < 0$ على المجال $[0, 2[$

$f'(x) \geq 0$ على المجال $[2, +\infty[$

منه $f(x)$ متزايد على المجال $[2, +\infty[$

❷ نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n);\;\; 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \simeq 2.15$$

$$2 \leq u_1 \leq u_0$$

$$2 \leq \frac{13}{6} \leq 3$$

محقق

فالقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \ldots (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

بالاستفادة من f متزايد

بأخذ f لـ*

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة من أجل $n + 1$ وبالتالي القضية صحيحة

❸ بما أن u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

لحساب نهايته نحل $f(x) = x$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 4$$

إما $x = -2$ مرفوض لأن $2 \leq u_{n+1} \leq u\_n$

أو $x = 2$ مقبول وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

دورة 2020 الثانية:

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

المطلوب:

① أثبت أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

② استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

③ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

الحل:

❶ نرمز للقضية $E(n)$

$$E(n):\ 2 \leq 2^n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$$1 \leq 2$$

والقضية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة القضية من أجل $n + 1$

$$n \leq 2^n \ *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$n + 1 \leq 2^{n+1}$$
$$n \leq 2^n \Rightarrow 2n \leq 2.2^n$$
$$2n \leq 2^{n+1}$$

باعتبار $n + 1 \leq 2n$

$$n + 1 \leq 2n \leq 2^{n+1}$$

فالقضية صحيحة من أجل $n + 1$

❷ من الطلب الأول نجد:

$$\frac{2}{e} \geq \frac{1}{e}\ ,\left(\frac{2}{e}\right)^2 \geq \frac{2}{e^2}\ ,\left(\frac{2}{e}\right)^3 \geq \frac{3}{e^3} \ \ldots$$
$$\left(\frac{2}{e}\right)^n \geq \frac{n}{e^n}$$

منه نجد:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots \frac{n}{e^n} \leq S_n$$
$$= \frac{2}{e} + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

S_n هي مجموع حدود لمتتالية هندسية $q = \frac{2}{e}$

$$n = n\ ,q = \frac{2}{e}$$

$$S_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}{1 - \frac{2}{e}}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{e - 2}\left[1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$$

نعلم أن

$$-\left(\frac{2}{e}\right)^n < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n < 1$$
$$\Rightarrow \frac{2}{e-2}\left[1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right] < \frac{2}{e-2}$$
$$S_n < \frac{2}{e-2}$$

منه

$$u_n \leq S_n < \frac{2}{e-2} \Rightarrow u_n < \frac{2}{e-2}$$

فالعدد $\frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية u_n

❸ لندرس اطراد u_n

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

u_n متزايدة تماماً

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{2}{e-2}$ فهي متقاربة.

دورة 2021 الأولى:

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \,, u_0 = 2$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_n + 6$$

والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية v_n هندسية، عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

② لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق $w_n = \ln(v_n)$، أثبت أن المتتالية w_n حاسبية، واحسب w_0 ثم احسب المجموع

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

الحل:

❶ لإثبات أن v_n هندسية يجب أن نبرهن:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} = 1$$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$، حدها الأول:

$$v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$$

لإيجاد الحد العام لـ v_n:

$$v_n = v_m . q^{n-m}$$

$$v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$w_n = \ln(v_n)$$

لإثبات أن w_n حسابية يجب أن نبرهن :

$$w_{n+1} - w_n = r$$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

$$w_{n+1} = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

نعلم أن $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$w_{n+1} = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} = w_n + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

المتتالية w_n حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

حدها الأول:

$$w_0 = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = \ln(8) = 3\ln(2)$$

حساب المجموع S:

$$S = \frac{(a+b)n}{2} \quad , \quad n = 6$$

$$a = w_0 = 3\ln(2)$$

$$b = w_5 = \ln(v_5) = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\ln(4)$$

$$b = -2\ln(2)$$

$$S = \frac{(3\ln(2) - 2\ln(2))6}{2} = 3\ln(2)$$

ابقَ قوياً

فقصتك لم تنتهِ بعد.

الجزء الثاني

دورة 2021 الثانية:

التمرين الأول:

تتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة، وأياً كان العدد الطبيعي n:

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2 \,, u_0 = \frac{5}{2}$$

المطلوب:

① أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن المتتالية u_n متناقصة.

③ استنتج تقارب المتتالية u_n وجد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

❶ نرمز للقضية $E(n)$

$E(n)\colon\ 2 \leq u_n \leq 3$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$2 \leq u_n \leq 3 \ldots *$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$
$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

من * نجد:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

نطرح 2:

$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$

نربع الأطراف

$$0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$

نضيف 2

$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

محقق والقضية صحيحة من أجل $n+1$

❷ لإثبات أن u_n متناقصة يجب أن نبرهن:

$$u_{n+1} < u_n$$

نرمز للقضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 < u_0$$
$$u_1 = (u_0 - 2)^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2$$
$$u_1 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$$

$\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$ محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$u_{n+1} < u_n \ldots **$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$
$$\ell_2 = (u_{n+1} - 2)^2 + 2 < (u_n - 2)^2 + 2$$

من ** نجد:

$$u_{n+1} < u_n$$

نطرح 2

$$u_{n+1} - 2 < u_n - 2$$

نربع الطرفين

$$(u_{n+1} - 2)^2 < (u_n - 2)^2$$

نضيف 2

$$(u_{n+1} - 2)^2 + 2 < (u_{n2} - 2)^2 + 2$$
$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

بالاعتماد على الاستقراء الرياضي نستنتج أن u_n متناقصة.

❸ بما أن المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

لحساب نهايته نحل $f(x) = x$

دورة 2022 الأولى:

التمرين الأول:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = \frac{5}{2} \ , u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$$

المطلوب:

① أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$

③ استنتج أن المتتالية u_n متناقصة.

④ بين أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

❶

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 2$$
$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$$

نفس الطلب الأول دورة 2021 الثانية

ط2: يمكن الحل على تزايد f.

❷

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 5u_n + 6$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 2)$$

❸ من الطلب السابق:

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

منه:

$$u_n - 2 \geq 0$$

ومنه

$$u_n - 3 \leq 0$$

ومنه:

$$(u_n - 3)(u_n - 2) \leq 0$$
$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

❹ بما أن u_n متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بـ 2 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

نحل المعادلة $f(x) = x$

دورة 2022 الثانية:

التمرين الأول:

ليكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 1}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \ , \quad u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

والمطلوب:

① أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة.

② استنتج أن المتتاليتين u_n, v_n متجاورتان.

③ أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الحل:

❶

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^1} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

u_n متزايدة تماماً.

لنثبت أن v_n متناقصة

$$v_{n+1} - v_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{2^{n+1} - 5^{n+1}}{(5^{n+1})(2^{n+1})} < 0$$

v_n متناقصة

دورة 2023 الأولى:

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 1}, u_0 = 2$، المطلوب:

① أثبت أن $2 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n \geq 0$

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً، واستنتج تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

❶ نرمز للقضية $E(n): 2 \leq u_n \leq 5$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$2 \leq u_0 \leq 5$$

$$2 \leq 2 \leq 5$$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2 \leq u_n \leq 5 \qquad (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 5$$

$$2 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$$

من $(*)$ نجد: $2 \leq u_n \leq 5$

نطرح 1

$$1 \leq u_n - 1 \leq 4$$

نجذر

$$1 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 2$$

نضيف 3:

$$2 < 4 \leq 3 + \sqrt{u_n - 1} \leq 5$$

والقضية $E(n)$ صحيحة من أجل $n + 1$

$$2 \leq u_n \leq 5$$

أياً كان العدد الطبيعي n

❷ من الطلب السابق وجدنا u_n متزايدة و v_n متناقصة فالشرط الأول محقق

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

نهاية فرق المتتاليتان هو صفر، فالشرط الثاني محقق وبالتالي المتتاليتان متجاورتان.

❸ u_n مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ حدها الأول $\frac{1}{5}$.

$$u_n = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$a = \frac{1}{5}\,, \qquad q = \frac{1}{5}\,, \qquad n = n$$

$$u_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{5^n}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{5^n}\right] = \frac{1}{4}$$

لأن $-1 < q = \frac{1}{5} < 1$

نعلم أن

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$$

وجدنا

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$$

الجزء الثاني

❷ لإثبات أن المتتالية u_n متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $u_{n+1} > u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

نرمز للقضية: $E(n): u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 > u_0$$

$$u_1 = 3 + \sqrt{u_0 - 1} = 3 + 1 = 4$$

$$4 > 2$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} > u_n \qquad (**)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

$$u_{n+2} = 3 + \sqrt{u_{n+1} - 1}$$

$$3 + \sqrt{u_{n+1} - 1} > 3 + \sqrt{u_n - 1}$$

من $(**)$ نجد: $u_{n+1} > u_n$

نطرح 1 من الطرفين

$$u_{n+1} - 1 > u_n - 1$$

نجذر الطرفين

$$\sqrt{u_{n+1} - 1} > \sqrt{u_n - 1}$$

نضيف 3 للطرفين

$$3 + \sqrt{u_{n+1} - 1} > 3 + \sqrt{u_n - 1}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

أي أن القضية محققة، ومنه $u_{n+1} > u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية متزايدة تماماً.

دراسة التقارب:

بما أن المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بـ 5 فهي متقاربة من العدد ℓ حيث $\ell \leq 5$ وحد البدء $u_0 = 2$ وبالتالي

$$2 < \ell \leq 5$$

بما أن التابع $f(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$ مستمر على المجال $[1, +\infty[$ فهو مستمر عند ℓ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Rightarrow 3 + \sqrt{x - 1} = x \Rightarrow x - 3 = \sqrt{x - 1}$$

نربع الطرفين

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 5)(x - 2) = 0$$

$x = 5$ مقبول

$x = 2$ مرفوض

وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

دورة 2023 الثانية:

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

① أثبت أن $f(x)=\frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث $g:x\to f(\sin x)$

② لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق:

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

أثبت أن $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\leq u_n\leq\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ أياً كان $n\geq1$

③ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶ $\ell_2=\frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$

$$=\frac{x}{2}(1+x^4)\frac{2x\sqrt{x^4+1}-\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}(x^2)}{\sqrt{(x^4+1)^2}}$$

$$=\frac{x}{2}\times\frac{2(x^5-x-x^5)}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$=f(x)=\ell_1$$

ومنه نجد:

$$f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}\times\frac{2}{x(1+x^4)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}(1+x^4)}$$

$$g'(x)=f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$=\frac{2\sin x.\cos x}{\sqrt{\sin^4x+1}(1+\sin^4x)}$$

$$=\frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^4x+1}(1+\sin^4x)}$$

❷ u_n هو مجموع n حد، أكبرها $M=\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

وأصغرها $m=\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ ويكون

$$n.m\leq u_n\leq n.M$$

ومنه نجد $n.\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\leq u_n\leq n.\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ وبالتالي نجد:

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

❸ أياً كان $n\geq1$ كان $n^4-1<n^4$ ومنه $n^2<$

$\sqrt{n^4-1}$ وبالتالي نجد

$$u_n=\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

فالمتتالية u_n محدودة من الأعلى.

الجـــزء الثاني

دورة 2024 الأولى:

السؤال الخامس:

تتأمل كلاً من المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n \leq s_n$ المعرفتين تدريجياً وفق:

$$t_0 = 1 \text{ و } s_0 = 10 \text{ و } t_{n+1} = \frac{t_n+4s_n}{5} \text{ و } s_{n+1} = \frac{t_n+s_n}{2}$$

① أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $w_n = s_n - t_n$ هندسية، واحسب نهايتها.

② أثبت أن المتتاليتين $(s_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

الحل:

❶
$$t_{n+1} = \frac{t_n+4s_n}{5} \quad , \quad s_{n+1} = \frac{t_n+s_n}{2}$$
$$t_n \leq s_n \quad , \quad t_0 = 1 \quad , \quad s_0 = 10$$
$$w_n = s_n - t_n$$
$$w_{n+1} = s_{n+1} - t_{n+1} = \frac{t_n+s_n}{2} - \frac{t_n+4s_n}{5}$$
$$= \frac{5t_n+5s_n-2t_n-8s_n}{10} = \frac{1}{10}(3t_n - 3s_n)$$
$$= -\frac{3}{10}(t_n - s_n)$$
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{-\frac{3}{10}(-t_n+s_n)}{s_n - t_n} = -\frac{3}{10} = q$$

المتتالية w_n هندسية أساسها $q = -\frac{3}{10}$

$$w_0 = s_0 - t_0 = 10 - 1 = 9 \quad ; \quad w_n = w_0 . q^{n-0}$$
$$w_n = 9\left(-\frac{3}{10}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \quad \left(\text{لأن } -1 < q = -\frac{3}{10} < 1\right)$$

❷
$$s_{n+1} - s_n = \frac{t_n+s_n}{2} - s_n = \frac{t_n+s_n-s_n}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(t_n - s_n) \leq 0 \quad (\text{لأن } t_n \leq s_n)$$

ومنه s_n متناقصة.

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n+4s_n}{5} - t_n = \frac{t_n+4s_n-5t_n}{5}$$
$$= \frac{4}{5}(s_n - t_n) \geq 0$$

ومنه t_n متزايدة

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} s_n - t_n$، t_n و s_n متجاورتان.

دورة 2024 الثانية:

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]-\infty, 3]$ وفق:

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

① ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 3$، واستنتج معادلة لمماس الخط C في النقطة $A(3,0)$.

② ادرس اطراد التابع f على I.

③ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$، أثبت أنَّ $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$، أياً كان العدد الطبيعي n.

④ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل:

❶
$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$
$$g(x) = \frac{x\sqrt{3-x} - 0}{x-3} = \frac{x\sqrt{3-x}}{-\sqrt{(3-x)}^{\,2}}$$
$$= \frac{x}{-\sqrt{3-x}}$$
$$\Rightarrow \frac{\lim_{x\to3} g(x) = 3}{0^-} = -\infty$$

f غير اشتقاقي عند $x = 3$

لا يقبل في النقطة A مماساً شاقولياً معادلته $x = 3$

❷
$$f'(x) = \sqrt{3-x} + x.-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$
$$= \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

x	$-\infty$		2		3
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	

❸ $u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad u_0 = 1$

القضية $E(n)$: $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

1) لنثبت $E(0)$: $u_1 = \sqrt{2}$ ، $u_0 = 1$

محققة $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$

2) بفرض $E(n)$ صحيحة أياً كانت n أي:

$u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

3) لنثبت $E(n+1)$ أي لنثبت أن:

$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

لأن: $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

بأخذ صورة الأطراف وفق f المتزايد على

$]-\infty, 2]$ نجد: $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

$E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ صحيحة

في N .

4 بما أن $u_n \leq u_{n+1}$ فالمتتالية متزايدة

ولأن $u_n \leq 2$ فهي محدودة من الأعلى بالعدد (2)

فهي متقاربة.

لحساب نهايتها:

نربع $f(x) = x \Rightarrow x\sqrt{3-x} = x$

$x^2(3-x) = x^2$

$x^2(3-x-1) = 0$

مرفوض $x = 0$ إما $x^2(2-x) = 0$

مقبول $x = 2$ أو

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 2$

كل يوم

ممكن يكون

بداية

دورة 2017 الأولى:

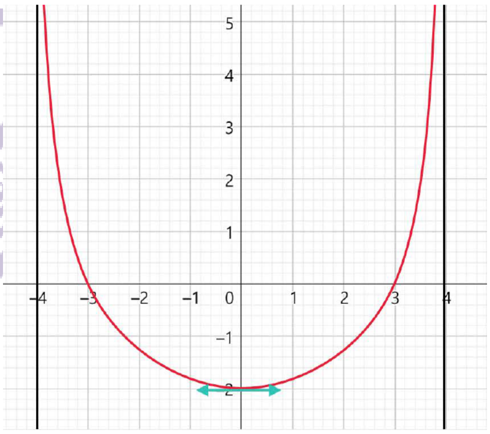
السؤال الأول:

تأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$

❶ احسب $\lim_{x\to -4^+} f(x)$, $\lim_{x\to +4^-} f(x)$ واستنتج معادلة كل مقارب للخط C.

❷ احسب $f'(0), f(0)$

❸ جد حلول المعادلة $f(x)=0$



❶ $\lim_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to -4^+} f(x)=+\infty$

❷ $f'(0)=0$, $f(0)=-2$

❸ حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:

$x=-3$, $x=3$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، المطلوب:

❶ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$، وادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C

❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=-\infty-1=-\infty$$

لأن $|x|=-x$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$=+\infty+1=+\infty$

❷ يجب أن نبرهن أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right)=1-1$$

$=0$

لأن $|x|=x$ في جوار $+\infty$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$$

C تحت y لأن:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1 \Rightarrow x=\sqrt{x^2+1}$$

$\Rightarrow x^2=x^2+1$ مستحيلة

دورة 2017 الثانية:

السؤال الأول:

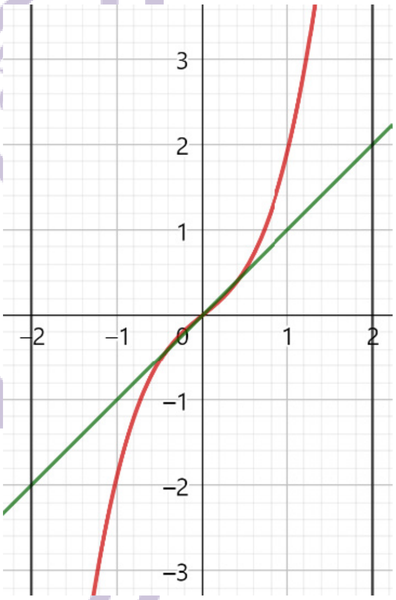
تأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2,+2[$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

❷ أوجد $f'(0), f(0)$

❸ هل التابع f فردي أم زوجي؟

❹ اكتب معادلة المماس Δ



❶ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

❷ $f'(0) = 1\ ,\ f(0) = 0$

❸ التابع فردي.

❹ من الرسم نلاحظ أن المماس Δ يمر من المبدأ والنقطة $(1,1)$ هو منصف الربعين الأول والثالث معادلته: $y = x$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

❶ اكتب التابع f بالشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x+3}$$

❷ أثبت أن المستقيم $y = ax + b$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

❶

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+3 & x^2 \ +2x \ -2 \\ & \underset{-}{+}x^2 \ \underset{-}{+}3x \\ \hline & -x \ -2 \\ & \overset{+}{-}x \ \overset{+}{-}3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

❷ $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+3} - (x-1)\right) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن

$y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الجـــزء الثاني

دورة 2018 الأولى:

السؤال الأول:

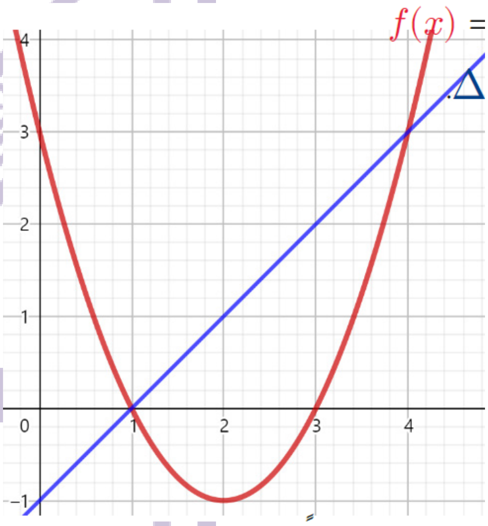
تأمل الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$، والمطلوب:

❶ دلّ على القيمة الحدية الصغرى للتابع ب

❷ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❸ ما حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$؟

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ



❶ $f(2) = 1$

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

❸ $x = 1\,, x = 4$

❹ المستقيم Δ مار من $(1,0)$ وميله 1، وبالتالي:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x-1}$$

السؤال الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$$

❶ اثبت محدودية f

❷ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+\cos x}$

❶ نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$

نضيف 3:

$$2 \le 3+\cos x \le 4$$

نقلب:

$$\frac{1}{2} \ge f(x) \ge \frac{1}{4}$$

❷

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+\cos x} \ge \frac{1}{4}$$

نضرب بـ $x^2 \ge 0$

$$\frac{x^2}{2} \ge \frac{x^2}{3+\cos x} \ge \frac{x^2}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+\cos x} = +\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة (3)

دورة 2018 الثانية:

السؤال الأول:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع f.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟

❹ دلّ على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

❷ $y=2$ في جوار $-\infty$

❸ حلين

❹ $f(2)=-1$

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=4-x+\sqrt{x-2}$$

❶ ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً.

❸ اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3

θ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$$

x	2		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ -2	$\nearrow$	$+\infty$

❶ f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

$$f(]2,+\infty[)=]-2,+\infty[\ni 0$$

بالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً $x\in]2,+\infty[$

❷ $x=0\Rightarrow f(x_0)=y_0$

$$f(3)=0$$

$$f'(x_0)=m\Rightarrow f'(3)=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}(x-3)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$$

الجزء الثاني

دورة 2019 الأولى:

السؤال الأول:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C.

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C.

❸ دلّ على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

❹ احسب $f(\,]-1,2[\,)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

❷ $y = 3$ في جوار $+\infty$

❸ $f(-1) = -2$ قيمة حدية صغرى

❹ $f(\,]-1,2[\,) = \,]-2,4[$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$$

والمطلوب:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم Δ.

يجب أن نبرهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + 3 - \frac{1}{x^2} - x - 3\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن

$y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

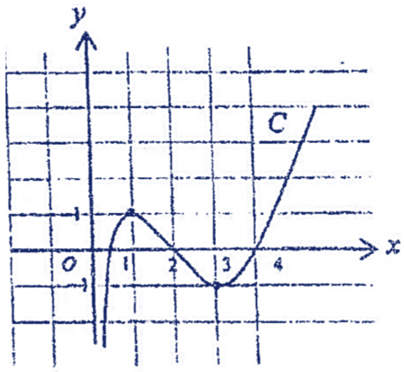
$$f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0$$

C تحت y

دورة 2019 الثانية:

السؤال الأول:

في الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب:



❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to v0} f(x)$

❷ دلّ على القيم الحدية مبيناً نوعها.

❸ جِد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

❹ جد $f(\,[1,3]\,)$

❶ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❷ $f(3) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f(1) = 1$ قيمة كبرى محلية

❸ $[1,3]$

❹ $]-1,1[$

الجزء الثاني

السؤال الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x.\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$$

❶ جد نهاية التابع f عند الصفر.

❷ عين قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر.

❶ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x.\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{0}{0}$ عدم تعيين

نضرب ونقسم على x

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}\times\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}=\lim_{x\to0}\sqrt{x^2+1}+1$$
$$=2$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=2\times1=2$$

❷ لتعيين قيمة m لدينا أن f مستمر عنج الصفر هذا

يعني $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\boxed{m=2}$$

قاوم

دورة 2020 الأولى:

السؤال الأول:

نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع المعرف على $\mathbb{R}$،

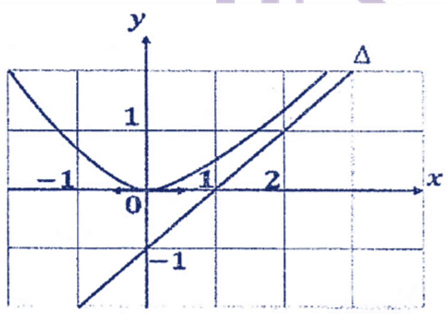
والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

❷ اكتب معادلة المستقيم Δ

❸ جد $f'(0)\,,f(0)$

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$



❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

❷ المستقيم Δ مار من $(1,0)$ $(0,-1)$ وميله 1

بالتالي

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$\Rightarrow y-0=1(x+1)\Rightarrow y=x+1$$

❸ $f(0)=0$

❹ $f'(0)=0\,,]-\infty,0[$

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x - E(x)$$

المطلوب:

❶ اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

❷ جد $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

❶ $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0,1[\\ x-1 & ; x \in [1,2[\end{cases}$

❷ $x - 1 < E(x) \le x$

نضرب بـ -1

$$-x + 1 > -E(x) \ge -x$$

نضيف x

$$1 > x - E(x) \ge 0$$

نقسم على $x^2 > 0$

$$\frac{1}{x^2} > \frac{x - E(x)}{x^2} \ge 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

التمرين الثالث:

f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ , f(0) = 0$$

في حالة $x \neq 0$ المطلوب:

❶ أثبت أن f اشتقاق عند $x = 0$.

❷ احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

❸ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❶ $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^2.\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0} x.\sin\frac{1}{x} = 0.\sin\infty$$

تحتاج إحاطة

ويجب اختبار $x < 0 , x > 0$

نعلم أن:

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \qquad (*)$$

نضرب بـ $x > 0$

$$-x \le x.\sin\frac{1}{x} \le x$$

$$\lim_{x\to0^+} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1): $\lim_{x\to0^+} x.\sin\frac{1}{x} = 0$

نضرب $(*)$ بـ $x < 0$

$$-x \ge x.\sin\frac{1}{x} \ge x$$

$$\lim_{x\to0^-} -x = \lim_{x\to0^-} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1): $\lim_{x\to0} x.\sin\frac{1}{x} = 0$

وبالتالي: $\lim_{x\to0} x.\sin\frac{1}{x} = 0$

والتابع f اشتقاق عند الصفر.

❷ $f'(x) = 2x.\sin\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)x^2$

$$= 2x.\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

❸ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2.\sin\frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = +\infty(1) = +\infty$$

$$; \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

دورة 2020 الثانية:

السؤال الأول:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$، خطه البياني C، المطلوب:

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ دلّ على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟

❹ جد حلول المتراجحة $f'(x)>0$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

❷ $f(0)=2$ قيمة صغرة محلية، $f(4)=6$ قيمة كبرى محلية

❸ حل وحيد

❹ $]0,4[$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

المطلوب:

❶ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

❷ ادرس الوضع النسبي بين Δ, C.

❶ يجب أن نبرهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$
$=+\infty-\infty$ عدم تعيين

نضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

ومنه $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❷ دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$$

نعلم أن $x^2<x^2+1 \Rightarrow |x|<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2+1}-x>0$$

بالتالي C فوق Δ

السؤال الخامس:

نتأمل التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-\sin x$$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أثبت أن التابع f متزايد

❶ نعلم أن $-1\le \sin x\le 1$

نضرب بـ -1

$$1\ge -\sin x\ge -1$$

نضيف x

$$x+1\ge x-\sin x\ge x-1$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة (3):

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sin x)=+\infty$$

❷ $f'(x)=1-\cos x\ge 0$

$\Leftarrow$ f متزايد

الجـزء الثاني

دورة 2021 الأولى:

السؤال الأول:

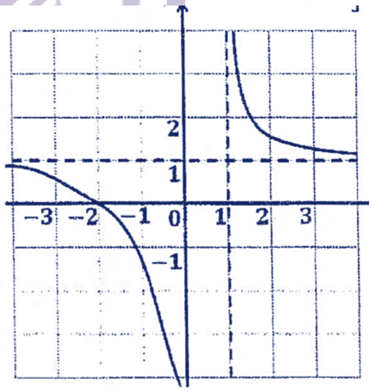
تتأمل الخط البياني C للتابع f المعرف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$، والمطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to0} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب أفقي ومعادلة كل مقارب شاقولي لـ C

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

❹ جد حل العادلة $f(x)=0$



❶ $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

❷ $x=1$ مقارب شاقولي

$x=0$ مقارب شاقولي

$y=1$ مقارب أفقي

❸ $]-\infty,0[$

❹ $x=-2$

السؤال الخامس:

ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

المطلوب: عيّن العددين الحقيقيين b,a لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع f.

الشرط f يمتلك قيمة حدية معدومة عند $x=-1$

الشرط الأول: $f(-1)=0$ لأن القيمة الحدية معدومة

الشرط الثاني: $f'(-1)=0$ لأن الميل عند القيمة الحدية صفر

$$f(-1)=0\Rightarrow \frac{a(-1)^2+b(-1)+1}{-1-1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a-b+1}{-2}=0$$

$$\Rightarrow a-b+1=0 \qquad \dots(1)$$

$$f'(-1)=0$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow\frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{(-1-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{4a-2b-a+b-1}{4}=0$$

$$\Rightarrow 3a-b-1=0 \qquad \dots(2)$$

بحل (1)و (2):

$$3a-b-1=0$$
$$\underline{\overset{-}{+}a\ \overset{+}{-}b\ \overset{-}{+}1=0}$$

$$2a-2=0\Rightarrow 2a=2\Rightarrow \boxed{a=1}$$

نعوض في (1) للحصول على b:

$$1-b+1=0\Rightarrow\boxed{b=2}$$

نعوض في التابع:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

دورة 2022 الأولى:

السؤال الأول:

تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C، المطلوب:

❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C.

❸ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟

❹ ما هي حلول المتراجحة $f'(x)<0$؟

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ 2

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

❷ $x=1$ مقارب شاقولي.

$y=2$ مقارب أفقي

❸ حلان

❹ $]-\infty,1[\,\cup\,]1,2[$

السؤال الرابع:

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x+1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

المطلوب: أثبت أن المستقيم الذي معادلته $d: y=x+1$ مقارب للخط البياني للتابع f عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$=\sin\infty$$

تحتاج إحاطة

نعلم أن

$$-1\le \sin x\le 1$$

نقسم على $\sqrt{x}$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0=\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $d: y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

السؤال السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$$

والمطلوب: عيّن العددين b,a ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0)=4$.

لدينا $f(0)=3$, $f'(0)=4$

$$f(0)=3\Rightarrow a(0)+\frac{b}{1}=3\Rightarrow b=3$$

$$f'(x)=a-\frac{b}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(0)=4\Rightarrow a-b$$

$$=4\Rightarrow a=7$$

$$\Rightarrow f(x)=7x+\frac{3}{x+1}$$

الجزء الثاني

دورة 2022 الثانية:

السؤال الأول:

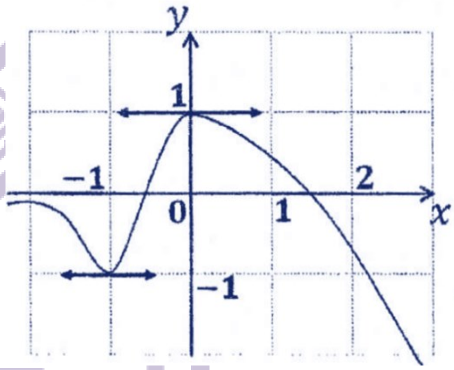
تتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$، المطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

❷ اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.

❸ اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

❹ عين القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.



❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

❷ $y = 0$ مقارب أفقي

❸ $]-1, 0[$

❹ $f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى

$f(0) = 1$ قيمة حدية كبرى.

دورة 2023 الأولى:

السؤال الأول:

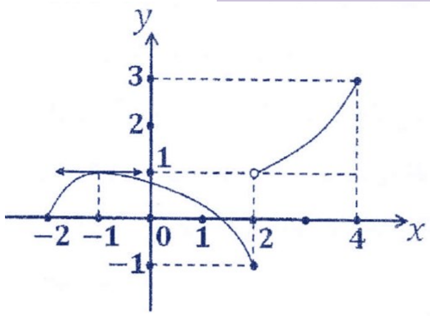
في الشكل المجاور، C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2, 4]$، المطلوب:

❶ ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

❷ احسب $f'(-1), f(2)$

❸ ما حلول المتراجحة $f(x) > 1$؟

❹ جد $f([-2, -1])$



❶ 4

❷ $f(2) = -1$, $f'(-1) = 0$

❸ $]2, 4]$

❹ $[0, 1]$

السؤال الثاني:

f تابع معرف على المجال $[0, 2[$ وفق:

$$f(x) = x + 2 - E(x)$$

المطلوب:

❶ اكتب $f(x)$ بصورة مستقلة عن $E(x)$

❷ ادرس استمرار f عندما $x = 1$، هل f مستمر على $[0, 2[$؟

❶ $$E(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1[\\ 1 & ; x \in [1, 2[\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \in [0, 1[\\ x + 1 & ; x \in [1, 2[\end{cases}$$

❷ حتى يكون f مستمراً عند 1 يجب أن يكون

$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x + 2 = 3$$

$$f(1) = 2$$

$$3 \neq 2$$

f غير مستمر عند 1 فهو غير مستمر على المجال $[0, 2[$

دورة 2023 الثانية:

السؤال الأول:

ليكن لدينا جدول تغيرات التابع f المعرف على $]-\infty,3]$، والمطلوب:

❶ جد $f(3)$, $f(\,]-\infty,3]\,)$

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$؟

❸ جد حلول المتراجحة $f'(x)>0$

❹ اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C_f

❺ اكتب القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.

x	$-\infty$		0		1		3
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

❶ $f(\,]-\infty,3[\,)=[-1,5]$, $f(3)=-1$

❷ ثلاثة حلول

❸ $f'(x)>0 \Rightarrow x\in\,]0,1[$

❹ $y=5$ مقارب أفقي

❺ $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى

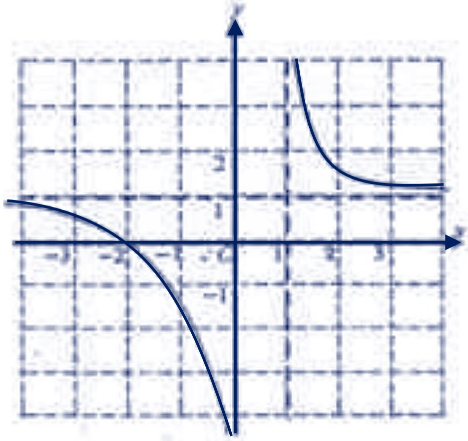
$f(1)=2$ قيمة حدية كبرى

$f(3)=-1$ قيمة حدية صغرة

دورة 2024 الأولى:

السؤال الأول:

في الشكل المجاور، C الخط البياني للتابع f المعرف على $D=\mathbb{R}$، و Δ مقارب أفقي للخط C.



❶ جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ جد حل المعادلة $f(x)=1$.

❸ ما حلول المتراجحة $f'(x)<0$؟

❹ جد $f(D)$ مجموعة قيم التابع f.

❺ ما حلول المتراجحة $f(x)\geq 1$؟

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

❷ $f(x)=1 \Longrightarrow x=-\frac{3}{2}$

❸ $f'(x)<0 \Longrightarrow x\in\,]-2,0[$

❹ $f(D)=f(]-\infty,+\infty[)=[-1,2]$

❺ $f(x)\geq 1 \Longrightarrow x\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

الجزء الثاني

دورة 2024 الثانية:

السؤال الأول:

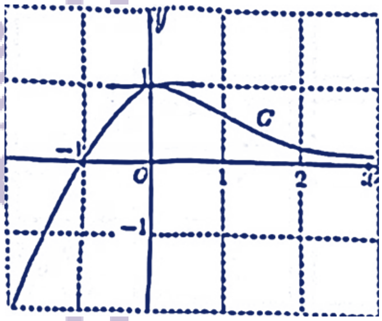
في الشكل المجاور، C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ اكتب معادلة للمقارب الأفقي للخط C.

❸ عيّن القيمة الحدّية محليّاً للتابع f، مبيناً نوعها.

❹ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) < 0$؟



❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

❷ $y = 0$

❸ $f(0) = 1$ قيمة حدية محلياً كبرى.

❹ $S =]0, +\infty[$

السؤال الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 26}$$

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ اكتب ثلاثي الحدود $x^2 - 10x + 26$ بالصيغة القانونية (بالإتمام إلى مربع كامل).

❸ استنتج معادلة للمقارب المائل للخط C عند $+\infty$.

❶ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

❷ $$x^2 - 10x + 25 - 25 + 26$$
$$= (x-5)^2 + 1$$

❸ $$f(x) = \sqrt{\underbrace{(x-5)^2}_{y = |x-5|} + 1}$$

$-\infty$: $y = -x + 5$ $+\infty$: $y = x - 5$

إذاً $y = x - 5$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ لأن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-5)^2+1} - (x-5)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-5)^2+1} + (x-5)}\right) = 0$$

أنت قدها

الجزء الثاني

دورة 2017 الأولى:

السؤال الثاني:

حل المعادلة $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ في $\mathbb{R}$

الحل:

$$(3^2)^x + 3^x.3^1 - 4 = 0$$

نعلم أن $(a^n)^m = a^{n.m}$

$$3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0$$
$$(3^x + 4)(3^x - 1) = 0$$

إما $3^x = -4 < 0$ مرفوض

أو $3^x = 1$

$$\Rightarrow e^{x.\ln 3} = e^0$$
$$x.\ln 3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الافقي والشاقولي.

❷ ادرس تغيرات التابع f ، ونظم جدولاً بها، ثم دلّ على القيمة الحدية محلياً.

❸ جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x = 1$.

❹ ارسم كل مقارب وجدته، وارسم المماس Δ ثم ارسم C.

❺ احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x = e$.

الحل:

① $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{0} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C، ويكون C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}.\frac{1}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

② f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x.\ln(x)}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{x - 2x.\ln(x)}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$
$$f'(x) = 0$$
$$1 - 2\ln(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \in$ مجموعة التعريف

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\ln(e)}{e^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{2e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ قيمة كبرى محلياً

③ معادلة المماس تحتاج:

$$f'(1) = m$$
$$f(1) = y_0$$
$$f(1) = 0 = y_0$$
$$f'(1) = 1 = m$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Delta: y = x - 1$$

④ الرسم:

مقاربات + معادلة المماس

$x = 0$ مقارب شاقولي

$y = 0$ مقارب أفقي

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

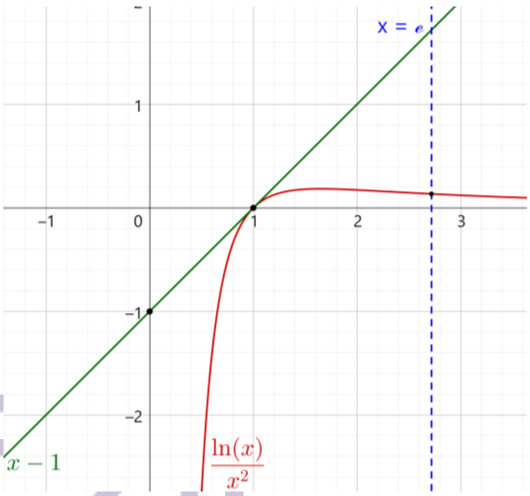
نقاط الجدول:

$$(0, -\infty)\ ,\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)\ \ (+\infty, 0)$$

نقاط مساعدة:

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$



⑤ السطح ملزوق بـ xx' من فوق

$$S = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$S = \int \frac{1}{x^2} . \ln x \; dx$$

تجزئة

$$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x} . \frac{1}{x}\,dx$$

$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$S = \left[-\frac{1}{x} . \ln(x)\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - 0 - \frac{1}{e} + 1$$

$$S = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{-2 + e}{e} > 0$$

دورة 2017 الثانية:

السؤال الثالث:

حل المعادلة التفاضلية الآتية: $2y' + 3y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln(4)\,,1)$.

الحل:

$$2y' + 3y = 0$$

نعزل y'

$$y' = -\frac{3}{2}y$$

حلها من الشكل $f(x) = k.e^{ax}$

$$f(x) = k.e^{-\frac{3}{2}x}$$

نعوض إحداثيات $A(\ln(4)\,,1)$ في $f(x)$

$$1 = k.e^{-\frac{3}{2}\ln(4)}$$

$$1 = k.e^{-\frac{3}{2}2\ln(2)}$$

$$1 = k.e^{-3\ln(2)}$$

$$1 = k.e^{3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$1 = k.e^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}$$

نعلم أن $e^{\ln(g(x))} = g(x)$

$$1 = \frac{1}{8}k \Rightarrow k = 8$$

$$f(x) = 8.e^{-\frac{3}{2}x}$$

الجــزء الثاني

المسألة الأولى:

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + x(\ln x)^2$$

وليكن $g(x) = (\ln(x) + 1)^2$ والمطلوب:

❶ أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$

❷ أثبت أن $f'(x) = g(x)$

❸ حل المعادلة $g(x) = 0$

❹ نظم جدول بتغيرات f

❺ اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C.

الحل:

① $f(x) = x + x(\ln x)^2$

$$f(x) = x + (\sqrt{x})^2 \left[\ln(\sqrt{x})^2\right]^2$$

$$f(x) = x + \left[\sqrt{x}.\ln(\sqrt{x})^2\right]^2$$

$$f(x) = x + \left[2\sqrt{x}.\ln(\sqrt{x})\right]^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

لأن $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}.\ln\sqrt{x} = 0$

② $f'(x) = 1 + (\ln(x))^2 + 2\ln(x).\frac{1}{x}.x$

$$f'(x) = 1 + (\ln(x))^2 + 2\ln(x)$$

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 1$$

جذر إشارة جذر للتربيع

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)^2 = g(x)$$

③ $g(x) = 0$

$$(\ln(x) + 1)^2 = 0$$

$$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{e}$$

④ f معرف ومستمر واشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 = m$

ومنه معادلة Δ: $y = \frac{2}{e}$

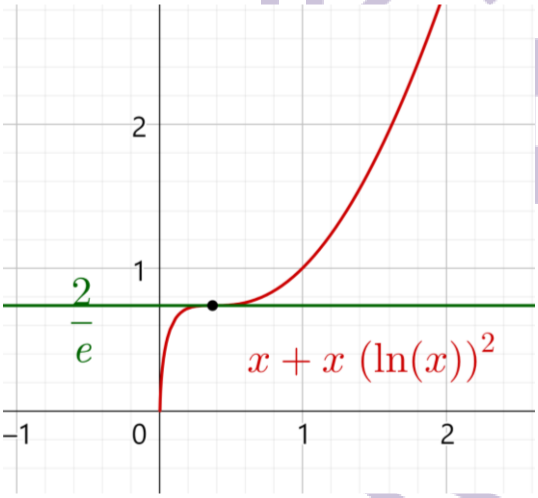
الرسم:

مقاربات + معادلات المماس

$y = \frac{2}{e}$ مماس أفقي

نقاط الجدول:

$(0, 0)$ $\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$ $(+\infty, +\infty)$



دورة 2018 الأولى:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

❶ جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

❷ أثبت أن $f(x) = -x + \ln(e^{x} + 1)$

❸ أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

❹ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❺ ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C.

الحل:

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) = \ln[e^{-x}(1 + e^{x})]$

نعلم أن $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

② $f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^{x})$

$f(x) = -x + \ln(1 + e^{x})$

③ يجب أن نبرهن:

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-x + \ln(1 + e^{x}) + x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(1 + e^{x})) = \ln(1) = 0$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر، فإن $y = -x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

④ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0$$

f متناقص تماماً

x	0	$+\infty$
f'	$-$	
f	$+\infty$ $\searrow$	0

⑤ الرسم:

مقاربات + معادلات مماس

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$y = -x$ مقارب نائل في جوار $-\infty$

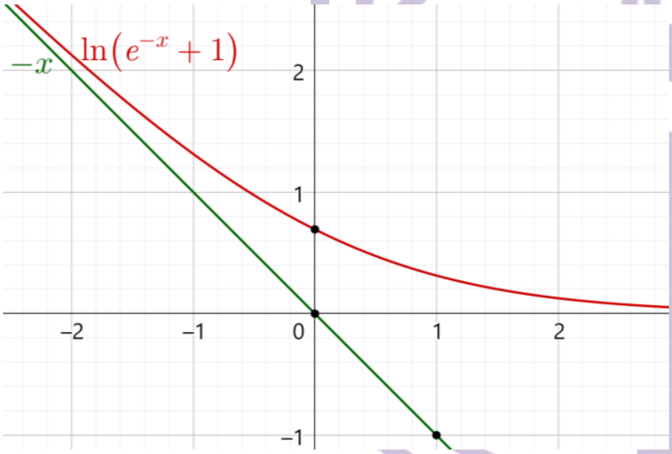
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$
$x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (1,-1)$

نقاط الجدول:

$(-\infty, +\infty)$ $(+\infty, 0)$

نقاط مساعدة:

$x = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = \ln(2) \Rightarrow (0, \ln(2))$



دورة 2018 الثانية:

التمرين الثالث:

ليكن C الحط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^x - 1$$

والمطلوب:

❶ جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le 0$.

❷ احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

الحل:

① $e^x - 1 \le 0$

$e^x \le 1 \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0]$

② $\int_0^{\ln(2)} (e^x - 1)\,dx = [e^x - x]_0^{\ln(2)}$

$= 2 - \ln(2) - 1 = 1 - \ln(2)$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x^2 - \ln x$$

والمطلوب:

❶ جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

❹ في معلم متجانس، ارسم المماس T والخط البياني C.

❺ احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = e, x = 1$

❻ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ حيث $u_n = n^2 - \ln(n)$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

الحل:

① $D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C و C يمين المقارب.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right] = +\infty(1 - 0) = +\infty$

② f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

$f'(x) = 0$

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

إما $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض أو $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مقبول

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

③ $f(1) = 1, f'(1) = 1$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

$$T: y-1 = 1(x-1)$$
$$T: y = x$$

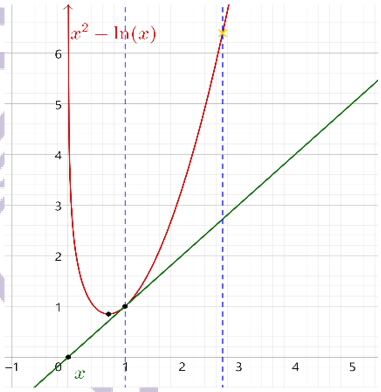
④ الرسم:

مقاربات:

$$T: y = x$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$$

نقاط الجدول

$$(0,+\infty) \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right) \quad (+\infty,+\infty)$$



⑤

$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x^2 - \ln(x))dx$$
$$= \int_1^e x^2\,dx - \int_1^e \ln(x)\,dx$$
$$= I - J$$
$$I = \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3-1}{3}$$
$$J = \int_1^e \ln(x)\,dx$$

تجزئة

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$
$$J = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e x$$
$$J = e - e + 1 = 1$$
$$S = I - J = \frac{e^3-1}{3} - \frac{3}{3}$$
$$S = \frac{e^3-4}{3}$$

⑥ من خلال جدول التغيرات نجد $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$ فالتابع $f(x)$ متزايد تماماً فالمتتالية u_n المعرفة بالعلاقة $n \geq 1$ متتالية متزايدة تماماً.

دورة 2019 الأولى:

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$$

والمطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9\,,1.1[$.

❷ احسب $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\ln(x)\left[\frac{2}{\ln(x)}+1\right]}{\ln(x)\left[\frac{1}{\ln(x)}+1\right]}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

تعيين A عدداً حقيقياً

$$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{1.1-0.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$
$$|f(x)-1| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)} - 1\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{2+\ln(x)-1-\ln(x)}{1+\ln(x)}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{1}{1+\ln(x)}\right| < \frac{1}{10}$$
$$1+\ln(x) > 10$$
$$\ln(x) > 9 \Rightarrow x > e^9$$
$$A = e^9$$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

نفرض $f(x) = X$

$$\lim_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

الجزء الثاني

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{4}{1+e^x}$$

والمطلوب:

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته.
2. ادرس تغييرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C, T.
4. في معلم متجانس، ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C.
5. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}$ ، استنتج الخط البياني C' للتابع g.

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{4}{1+e^{-x}}=4$$

$y=4$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{4}{\infty}=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}<0$$

f متناقص تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	4	$\searrow$	0

$f(0)=2-y_0$
$f'(0)=-1$
$T: y-y_0=m(x-x_0)$
$y-2=-1(x-0)$
$T: y=-x+2$

دراسة الوضع النسبي:

$$g(x)=f(x)-y_T=\frac{4}{1+e^x}+x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$
$$g'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}\geq 0$$
$$g'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$$
$$g(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي	C يقع تحت T			C يقع فوق T	

الرسم:

المقاربات:

$y=4$, $y=0$ مقاربين أفقيين

$y=-x+2$

$x=0\Rightarrow y=2\Rightarrow(0,2)$
$y=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2,0)$

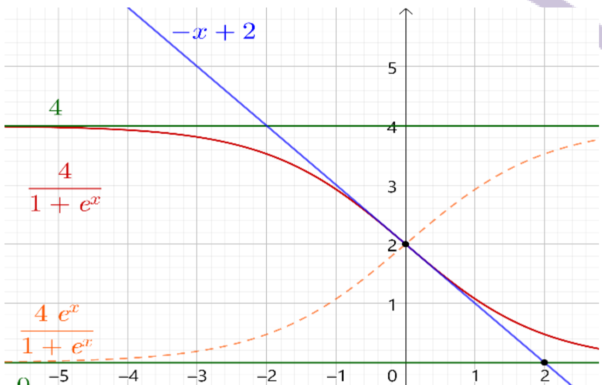
نقاط الجدول:

$(-\infty,4)$, $(+\infty,0)$

نقاط مساعدة:

$x=0\Rightarrow f(0)=2$

$(0,2)$ نقطة المماس



$$g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}=\frac{4e^x}{e^x(e^{-x}+1)}$$
$$g(x)=\frac{4}{1+e^{-x}}=f(-x)$$

C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

الجـــزء الثاني

دورة 2019 الثانية:

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$$

والمطلوب:

❶ عين العددين الحقيقيين b, a إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته: $y = 3x$.

❷ من أجل $a = 4$, $b = -4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل:

$$f(1) = 0$$
$$a + b = 0$$
$$f'(x) = a - \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

الميل هو أمثال x بعد عزل y

$$f'(1) = 3$$
$$a - 1 = 3$$
$$a = 4 \,, b = -4$$
$$f(x) = 4x - 4 - \frac{\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(4x - 4 - \frac{\ln(x)}{x} - 4x + 4\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$

بما ان نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = 4x - 4$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln(x)}{x}$$
$$-\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖		$+$		
$\frac{-\ln x}{x}$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	تحت C		فوق C	

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

والمطلوب:

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ في معلم متجانس، ارسم الخط C.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.

❺ استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق $g(x) = 2xe^x$.

❻ أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 2e^{-x}$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}}$$
$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{e^x}$$
$$f'(x) = 0$$
$$2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f(1) = \frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

الرسم:

مقاربات:

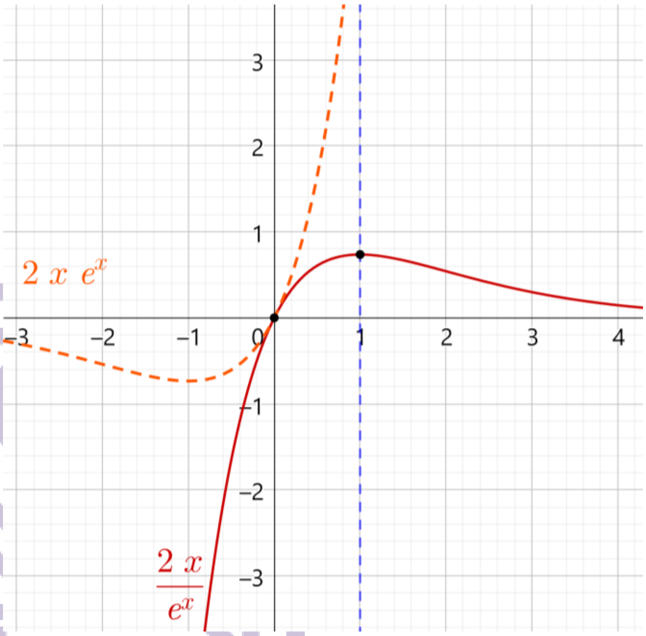
$y = 0$ مقارب أفقي

نقاط الجدول:

$(-\infty,-\infty)\ \left(1,\frac{2}{e}\right)\ (+\infty,0)$

نقاط مساعدة:

$x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$



$$S=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$S=\int_0^1 2x.e^{-x}\,dx$$

تحتاج تجزئة

$u=2x\Rightarrow u'=2$

$v'=e^{-x}\Rightarrow v=-e^{-x}$

$S=[-2x.e^{-x}]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}\,dx$

$S=[-2x.e^{-x}]_0^1-[2e^{-x}]_0^1$

$S=\dfrac{2e-4}{e}$

$f(x)=2x.e^{-x}$

$\Rightarrow f(-x)=-2xe^{x}$

$\Rightarrow=f(-x)=2x.e^{x}$

ومنه $g(x)=-f(-x)$

C' نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

$y=f(x)=\dfrac{2x}{e^x}$

$y'=f'(x)=\dfrac{2-2x}{e^x}$

$y'+y=\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{2-2x}{e^x}=\dfrac{2}{e^x}$

$y+y'=2e^{-x}$

دورة 2020 الأولى:

السؤال الرابع:

أثبت أن $\ln(x+1)<\sqrt{x+1}$

أياً كان $x>-1$

الحل:

$\ln(x+1)-\sqrt{x+1}<0$

نفرض $f(x)=\ln(x+1)-\sqrt{x+1}$

$f(x)<0$

ندرس اطراد f على المجال $]-1,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$

$f'(x)=0$

$2-\sqrt{x+1}=0$

$2=\sqrt{(x+1)}$

$4=x+1\Rightarrow x=1$

$f(3)=\ln(4)-2<0$

x	-1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\ln(4)-2$	$\searrow$	

من جدول التغيرات نجد

$f(x)\le\ln(4)-2<0$

$f(x)<0$

منه

$\ln(x+1)-\sqrt{x+1}<0$

محققة $x>-1$

الجـــزء الثاني

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

والمطلوب:

1. أثبت أن f تابع فردي.
2. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.
3. اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ، واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$
4. في معلم متجانس ارسم الخط البياني C.
5. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$

الحل:

$\forall x\in]-2,2[\Rightarrow -x\in]-2,2[$

الشرط الأول محقق

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$=-\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$
$$=-f(x)$$

f تابع فردي

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,2[$

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي للخط و C على يسار المقارب.

$$f'(x)=\frac{4}{4-x^2}>0$$

متزايد تماماً

معادلة المماس:

$$f(0)=0=y_0$$
$$f'(0)=1=m$$
$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$T: y=x$$

القيمة التقريبية:

$$f(a+h)\simeq f(a)+f'(a).h$$
$$f(0.1)\simeq f(0)+(0.1)(1)=0+0.1=0.1$$

الرسم:

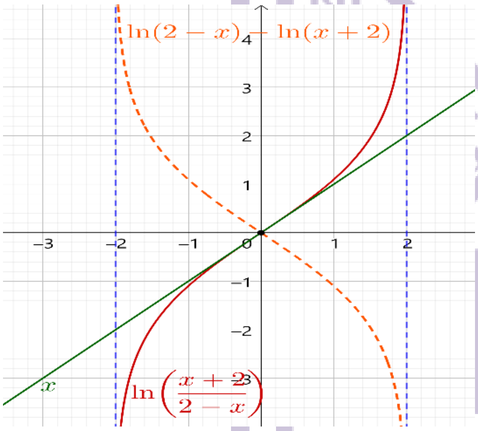
مقاربات:

$x=2$ مقارب شاقولي

$y=x$ معادلة المماس

نقاط الجدول:

$(0,0)$ $(2,+\infty)$



$$g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$$
$$f(x)=\ln(x+2)-\ln(2-x)$$
$$g(x)=-f(x)$$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

دورة 2020 الثانية:

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

والمطلوب:

❶ احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

❹ في معلم متجانس ارسم الخط C.

❺ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع:

$$g(x) = \frac{1 - x + \ln x}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\infty}{0} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C و يكون C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$ حسب المبرهنة

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

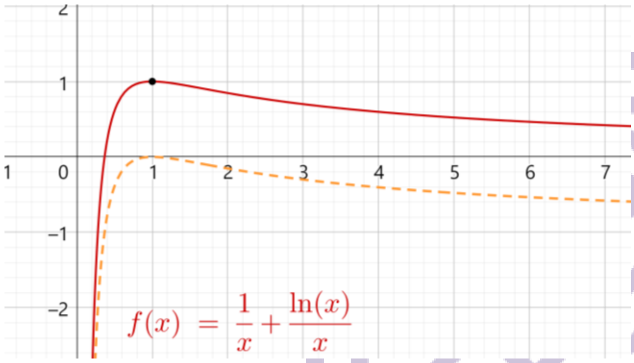
f معرف ومستمر ومتزايد على المجال $]0,1[$ فهو متزايد تماماً على $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 3 - 3\ln(3) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2) > 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

بالتالي $f(x) = 0$ لها حل وحيد على المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$



$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 1 = f(x) - 1$$

C' ينتج عن C وفق انسحاب الشعاع $\vec{u}(0,-1)$

دورة 2021 الأولى:

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

❶ أثبت أن f تابع متزايد تماماً على I ، واستنتج $f(I)$

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

❸ ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d.

الحل:

$$f(x) = x - 4 + \ln(x) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

ومنه f متزايد تماماً على I

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

ومنه

$$f(\,]0, +\infty[\,) =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x-4}\right) - (x-4)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)\right) = \ln(1) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = x - 4$ مقارب في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

لأن $x < x + 1$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f العرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

والمطلوب:

❶ احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

❷ أثبت أن $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

❸ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودلّ على القيم الحدية مبيناً نوعها.

❹ ارسم C في معلم متجانس.

❺ استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x) = (x-1)^2 e^x$.

❻ جد مجموعة تعريف التابع $h(x) = \ln(f(x))$

الحل:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) = (x^2 + 2x = 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x^2)$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = 0 \;, e^{-x} > 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{4}{e}$$

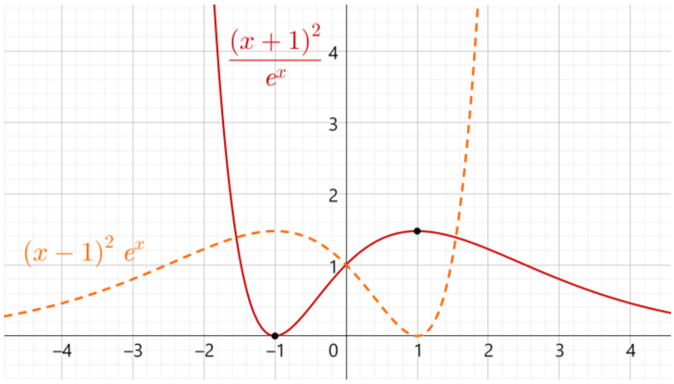
$$f(-1) = 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(-1) = 0$ قيمة حدية صغرة

الجزء الثاني

$f(1)=\frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى



$$g(x)=(x-1)^2e^x=(-x+1)e^x$$
$$=(-x+1)^2e^x=f(-x)$$
$$g(x)=f(-x)$$

وبالتالي C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب.

من خلال جدول تغيرات $f(x)$ نلاحظ أن $f(x)>0$ أياً كانت $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

ومنه:

$$h(x)=\ln\big(f(x)\big)$$

معرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

"وَأَنْ لَيْسَ لِلإِنسَانِ إِلَّا مَا سَعَى"

دورة 2021 الثانية:

التمرين الثالث:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}$$

المطلوب:

❶ احسب قيمة كل من b,a إذا علمت أن $f(-1)=e$ قيمة حدية للتابع.

❷ لتكن المعادلة التفاضلية $y'+y=\lambda e^{-x}$ ، عين قيمة λ إذا علمت أن $f(x)=(x+2)e^{-x}$ حلاً لها.

الحل:

لدينا $f(-1)=e$ قيمة حدية

$x_0=-1\ ,y_0=e\ ,m=0$

لأنها قيمة حدية

$$f(-1)=e\ ,f'(-1)=0$$
$$-a+b=1\ \dots(1)$$
$$f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$
$$f'(x)=e^{-x}(a-ax-b)$$
$$f'(-1)=0$$
$$2a-b=0\dots(2)$$

بجمع (1) و (2):

$$a=1\ ,b=2$$
$$f(x)=(x+2)e^{-x}$$

$$f'(x)+f(x)=\lambda e^{-x}$$
$$e^{-x}(-1-x)+(x+2)e^{-x}$$
$$=e^{-x}(-1-x+x+2)=e^{-x}$$
$$\Rightarrow\lambda=1$$

الجـزء الثاني

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

والمطلوب:

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.
2. بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$.
3. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.
4. أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
5. مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
6. في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

الحل:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{0^+} - (-\infty) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C و يكون C على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 - 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2} < 0$$

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	$-$	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	0

g معرف ومستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$g(\,]0, +\infty[\,) =]-\infty, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[$

$g(x) = 0$ حل وحيد هو $x = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1(1 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0(\infty)$$ عدم تعيين

نغير شكل التابع

$$f(x) = e^{-x} + \frac{\ln(x)}{e^x} = e^{-x} + \ln(x).e^{-x}$$

نضرب بـ x ونقسم على x

$$f(x) = e^{-x} + \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x^x}{e}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + (0 \times 0) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

المشتق:

$$f'(x) = e^{-x}(1 + \ln(x)) + \left(\frac{1}{x}e^{-x}\right)$$

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln(x)\right)$$

$$f'(x) = e^{-x}.\,g(x)$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

باعتبار $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x > 0$

$f'(x) > 0$ عندما $g(x) > 0$

عندما $x \in]0, 1[$

$f'(x) < 0$ عندما $g(x) < 0$

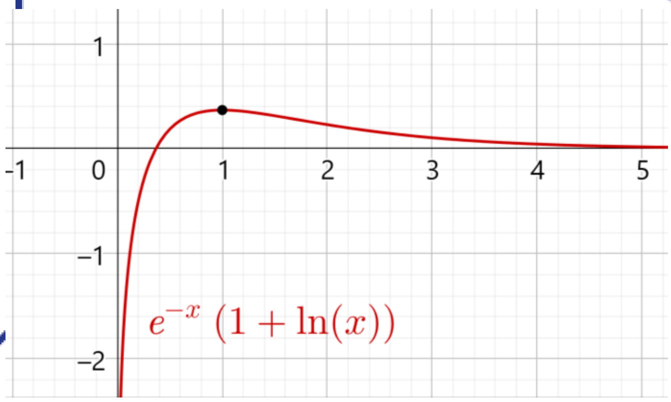
عندما $x \in]1, +\infty[$

$f'(x) = 0$ عندما $g(x) = 0$

عندما $x = 1$

ومنه $f(1) = \frac{1}{e}$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



دورة 2022 الأولى:

التمرين الثاني:

ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & ; \ x>0\\ 0 & ; \ x=0\end{cases}$$

المطلوب:

1. أثبت أن f مستمر عند الصفر.
2. ادرس قابلية اشتقاق التابع عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً.
3. بين أن الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته.
4. اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 1 واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل:

حتى يكون f مستمر عند الصفر يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$
$$f(0)=0$$
$$0=0$$

f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x-\ln(x))}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-x.\ln(x)}=0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

حيث $f'(0)=0$

C يقبل مماساً أفقياً في النقطة $(0,0)$ معادلته $y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f(1)=1$$
$$f'(x)=\frac{-\ln(x)+1}{(x-\ln(x))^2}$$
$$f'(1)=1$$
$$T: y=x$$

نعوض في معادلة المماس $f(1.1)\simeq 1.1$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=e^{-2x}+2x-2$$

المطلوب:

1. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C,Δ
3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، ثم بين أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1,0]$.
4. ارسم C,Δ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x=1$.
5. استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=-e^{2x}+2x+2$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(e^{-2x}(1+2x.e^{2x})-2)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}+2x-2-(2x-2)\right)=0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر

فإن $y=2x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=e^{-2x}>0$$

C يقع فوق Δ

f معرف ومستمر واشتقاق على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x)=-2e^{-2x}+2$$
$$f'(x)=0$$
$$-2e^{-2x}+2=0$$
$$e^{-2x}=1\Rightarrow x=0$$
$$f(0)=-1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f معرف ومستمر ومتناقص على المجال $]-\infty,0[$

$f(\,]-\infty,0[\,) =]1,+\infty[$
$0 \in]1,+\infty[$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-\infty,0[$

f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$
$f(\,[0,+\infty[\,) = [-1,+\infty[$
$0 \in [-1,+\infty[$
وبالتالي $f(x)=0$ لها حلان مختلفان في $\mathbb{R}$
$f(0) = -1 < 0$
$f(-1) = e^2 - 4 > 0$
$f(0).f(-1) < 0$
وبالتالي أحد حلول المعادلة $f(x)=0$ يقع ضمن $]-1,0[$

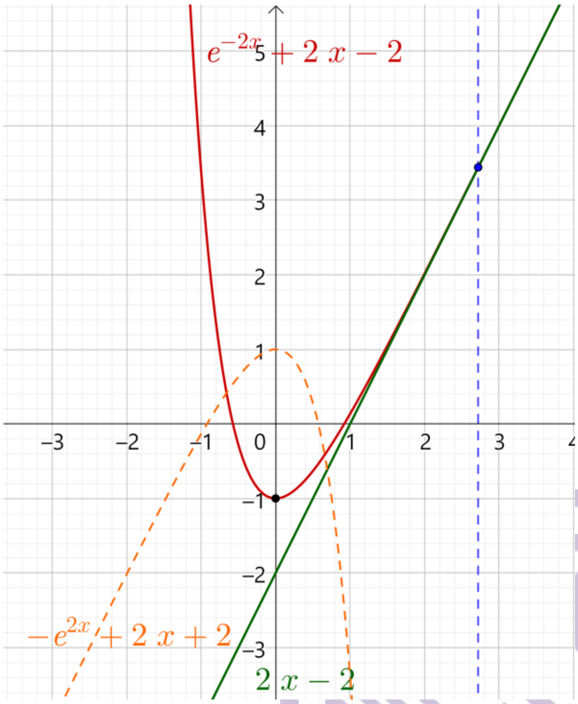
الرسم:

مقاربات: $y = 2x - 2$

$x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0,-2)$
$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

نقاط الجدول:

$(-\infty,+\infty)\ (0,-1)\ (+\infty,+\infty)$



مساحة السطح المحصور

$$S = \int_0^1 (f(x) - y_\Delta)\,dx$$
$$S = \int_0^1 e^{-2x}dx$$
$$S = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$
$$S = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2e^2}$$
$$g(x) = -\left[e^{-2(-x)} + 2(-x) - 2\right]$$
$$g(x) = f\big(f(-x)\big)$$

C' نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

دورة 20222 الثانية:

السؤال الثالث:

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق
$g(x) = \ln(2 + \sin x)$

المطلوب:

❶ احسب $g'(0), g'(x)$

❷ استنتج $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$

الحل:

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$
$$g'(0) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+\sin x) - \ln 2}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+\sin x) - \ln(2)}{x} = g'(0) = \frac{1}{2}$$

السؤال الرابع:

$x > 0\ , y > 0$

من (1) نجد

$$\ln(x.y) = \ln(6)$$
$$x.y = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{y}$$
$$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$$
$$(5 - y)y = 6$$
$$5y - y^2 = 6$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$(y - 3)(y - 2) = 0$$

إما $y = 2$ أو $y = 3$

$$y = 2 \Rightarrow x = 3$$
$$y = 3 \Rightarrow x = 2$$

الحلان مقبولان

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1 - x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

والمطلوب:

❶ ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

❷ تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty, 1[$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ اكتب معادلة للمستقيم المماس T في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

❹ في معلم متجانس، ارسم المستقيم T ، ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

الحل:

g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = -e^x + e^x(1 - x) = -x.e^x$$
$$g'(x) = 0$$
$$e^x \neq 0$$
$$-x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول اطراد $g(x)$ نجد $g(x) \leq 0$

f معرف واشتقاقي على مجموعة تعريفه

$$f'(x) = e^x - 1(1 - x) = \frac{e^x(1 - x) - 1}{1 - x}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{1 - x}$$

باعتبار $1 - x > 0$ على المجال $]-\infty, 1[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

منه $f'(x) \leq 0$

تكافؤ عندما $x=0$ يعطى $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C و C على يسار المقارب.

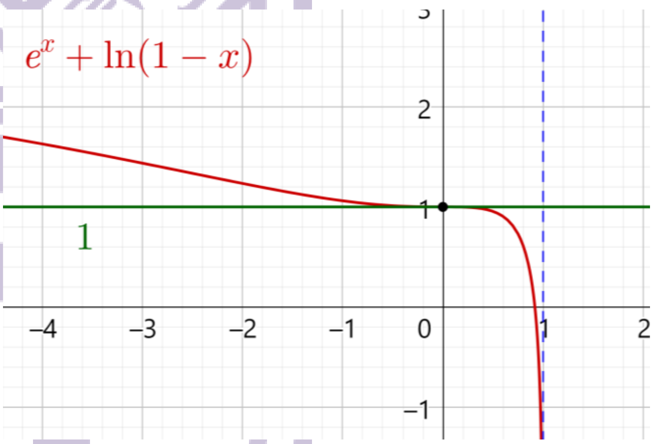
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		0		1
f'		$-$	0	$-$	‖
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	‖

معادلة المماس

$f(0)=1\,, f'(0)=0$

مماس أفقي: $T: y=1$



دورة 2023 الأولى:

السؤال الرابع:

f معرف على $D =]-1,+\infty[$ وفق ما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} & ; x \in D\backslash\{0\} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر، ثم احسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر.

$$f'(x) = \frac{2x.\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.x^2}{\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{\frac{2x(x+1)\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x^2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{(2x^2+2x)\ln(x+1) - x^2}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$$

المطلوب:

❶ عين a,b ليمر التابع بالنقطة $A(1,6)$ ويقبل مماساً في النقطة A وميله يساوي 3.

❷ من أجل $a=4$, $b=2$ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=4x+2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب.

❸ احسب $\int_1^2 f(x)\,dx$

الحل:

① لتعيين a,b لدينا:

$f(1) = 6\,,\qquad f'(1) = 3$

$f(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6 \qquad \dots(1)$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = a - \frac{1 - 1\ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 3 \Rightarrow a - 1 = 3 \qquad (2)$$

من (2) نجد: $\boxed{a = 4}$ نعوض في (1)

$$4 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$f(x) = 4x + 2 - \frac{\ln x}{x}$$

② لإثبات أن $y = 4x = 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

يجب أن نبرهن:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4x + 2 - \frac{\ln x}{x} - (4x + 2)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر

فإن $y = 4x + 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{x}$$

x	0		1	$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$
x			$+$	
$-\frac{\ln x}{x}$		$+$	0	$-$
الوضع النسبي	‖	C فوق y		C تحت y

③ $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4x + 2 - \frac{1}{x}\ln x\right)\,dx$

$$= \left[2x^2 + 2x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^2$$

$$= \left[2(4) + 2(2) - \frac{1}{2}\ln^2 2\right] - \left[2(1) + 2(1) - \frac{1}{2}\ln^2 1\right]$$

$$= 8 + 4 - \frac{1}{2}\ln^2 2 - 4 = 8 - \frac{1}{2}\ln^2 2$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{4e^x - 2}{e^x + 1}$$

المطلوب:

❶ جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه، وعيّن ما للخط البياني C من مقاربات.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❸ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

❹ ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = f(x) - y_T$، ادرس اطراد التابع g، ثم استنتج الوضع النسبي للخط C مع المماس T

❺ ارسم في معلم واحد المماس T، ومقاربات C، ثم ارسم C.

❻ استنتج رسم الخط البياني للتابع h المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $h(x) = \frac{6e^x}{e^x+1}$

الحل:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{2}{1} = -2$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x-2}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left[4-\frac{2}{e^x}\right]}{e^x\left[1+\frac{1}{e^x}\right]} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{4}{1} = 4$$

$y = 4$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال

$]-\infty, +\infty[$

نشتق التابع:

$$f'(x) = \frac{4e^x(e^x + 1) - e^x(4e^x - 2)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{6e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

الجزء الثاني

f متزايد تماماً.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	-2	$\nearrow$	4

③ لدينا $x_0 = 0$

$$f(0) = \frac{4e^0 - 2}{e^0 + 1} = \frac{4-2}{1+1} = 1 = y_0$$

ميل المماس $f'(0) = \frac{6e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

معادلة المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$T: y = \frac{3}{2}x + 1$$

④ دراسة الوضع النسبي بين y_T, f:

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{4e^x - 2}{e^x + 1} - \frac{3}{2}x - 1$$

$$g'(x) = \frac{6e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{3}{2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{6e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{3}{2}$$

$$4e^x = 2e^{2x} + 2e^x + 1$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

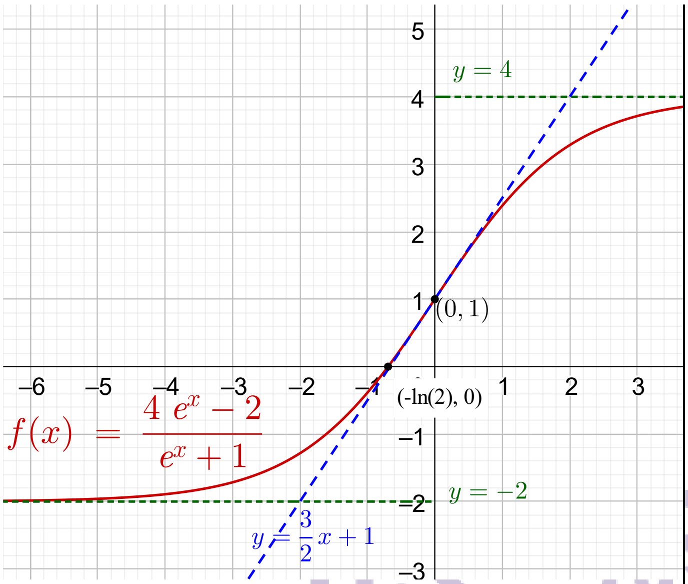
$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x = 1 \overset{\ln}{\Rightarrow} x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$-$
g	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق y		C تحت y

⑤ الرسم:



⑥ استنتاج الخط البياني:

$$h(x) = \frac{6e^x}{e^x + 1} = \frac{4e^x + 2e^x - 2 + 2}{e^x + 1}$$

$$= \frac{4e^x - 2 + 2e^x + 2}{e^x + 1} = f(x) + 2$$

أي أن الخط البياني C للتابع h ينتج عن الخط البياني C للتابع f بانسحاب شعاعه $\vec{v}(0, 2)$

دورة 2023 الثانية:

السؤال الثاني:

حل المعادلة $e^{2x}+2e^{x}-3=0$، ثم استنتج حلول المتراجحة $e^{2x}+2e^{x}-3\le 0$

$$e^{2x}+2e^{x}-3=0$$
$$(e^{x}+3)(e^{x}-1)=0$$

إما $e^{x}+3=0 \Rightarrow e^{x}=-3$ مرفوض

أو $e^{x}-1=0 \Rightarrow e^{x}=1 \Rightarrow x=0$

المتراجحة:

$$e^{2x}+2e^{x}-3\le 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{2x}+2e^{x}-3$	$-$	0	$+$
المتراجحة	محقق		غير محقق

$$x\in\,]-\infty,0]$$

السؤال الرابع:

❶ بسط كتابة كل من العددين $A=5^{\frac{1}{\ln 5}}$ و $B=3^{\frac{1}{\ln 3}}$، ثم احسب الجداء $A.B$

❷ اكتب العدد $a=\ln(15)+\ln\sqrt[3]{27}-\ln\frac{1}{125}$ بأبسط صيغة ممكنة بدلالة $\ln 5$, $\ln 3$

الحل:

① $A=5^{\frac{1}{\ln 5}}=e^{\frac{1}{\ln 5}.\ln 5}=e$

$$B=3^{-\frac{1}{\ln 3}}=e^{-\frac{1}{\ln 3}.\ln 3}=e^{-1}$$
$$A.B=e.e^{-1}=1$$

② $a=\ln(15)+\ln\sqrt[3]{27}-\ln\frac{1}{125}$

$$a=\ln(5\times 3)+\ln(3^{3})^{\frac{1}{3}}+\ln 5^{3}$$
$$=\ln(5)+\ln(3)+\ln(3)+3\ln(5)$$
$$=4\ln(5)+2\ln(3)$$

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-2\,,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=(x+1)\ln(x+2)$$

وليكن g التابع المعرف على $I=]-2,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)$$

المطلوب:

❶ جد $\lim_{x\to-2} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

❷ أثبت أن $f'(x)=g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=-1$

❸ ادرس اطراد $g(x)$ واستنتج إشارته (مستفيداً من نقطة التماس)

❹ نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.

❺ استنتج اطراد المتتالية أياً كان عدد طبيعي.

الحل:

① $\lim_{x\to-2^{+}} f(x)=-1.\ln(0^{+})=+\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي للخط C، و C على يمين المقارب.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ln(+\infty)=+\infty$$

② $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(x+1)$

$$=\frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)=g(x)$$
$$x=-1$$
$$f(-1)=0\ \&\ f'(-1)=0$$
$$\Delta: y=0$$

③ g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-2,+\infty[$

$$g'(x)=\frac{x+2-x-1}{(x+2)^{2}}+\frac{1}{x+2}$$
$$g'(x)=\frac{1+x+2}{(x+2)^{2}}=\frac{x+3}{(x+2)^{2}}>0$$

g متزايد تماماً

x	-2		$+\infty$
g'	||	$+$	
g	||	$\nearrow$	

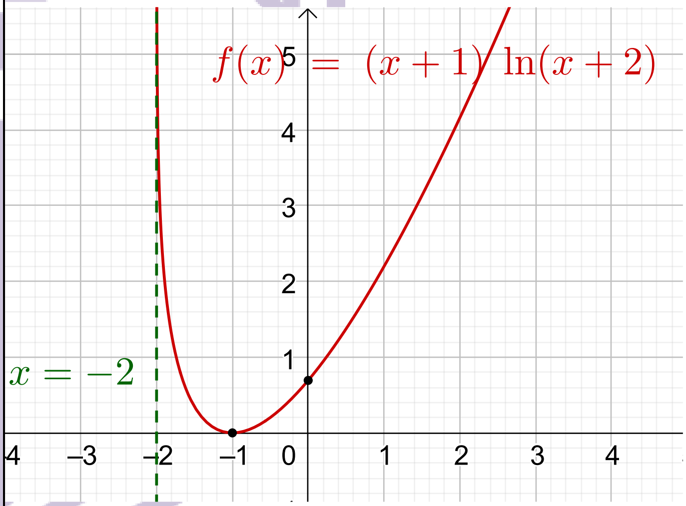
$$g(-1) = 0$$
$$g(x) < 0 \Rightarrow x \in]-2, -1[$$
$$g(x) > 0 \Rightarrow x \in]-1, +\infty[$$

④ $f'(x) = g(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

وللمعادلة $f'(x) = 0$ حل وحيد لأن g معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-2, +\infty[$

$$f(-1) = 0$$

x	-2		1		$+\infty$
f'	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 2$$

نقطة مساعدة

⑤ $u_n = \ln(n+2)^{n+1}$

$$u_n = (n+1)\ln(n+2) \Rightarrow u_n = f(n)$$
$$f(x) = (x+1)\ln(x+2)$$
$$f'(x) > 0$$

$\forall x \in]-1, +\infty[$ فهو متزايد تماماً ومنه وهو متزايد تماماً على المجال $[0, +\infty[$ ومنه u_n متزايدة تماماً $\forall n \in \mathbb{N}$

دورة 2024 الأولى:

السؤال الثالث:

لتكن المعادلة التفاضلية

$$(E) : y' - 2y = -4x + 6$$

❶ عيّن عددين a و b ليكون التابع f المعرف وفق: $f(x) = ax + b$ حلاً للمعادلة التفاضليّة (E).

❷ عيّن جميع حلول المعادلة التفاضلية $(F): y' - 2y = 0$.

❸ ليكن التابع h المعرّف وفق: $h(x) = 2x - 2 + ke^{2x}$ و k عدد حقيقي، بيّن أنّ h حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

الحل:

$$E : y' - 2y = -4x + 6$$

① $\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ f'(x) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a - 2ax - 2b = -4x + 6$

$$-2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$
$$a - 2b = 6 \Rightarrow 2 - 2b = 6$$
$$-2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$
$$f(x) = 2x - 2$$

② $F : y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y \Rightarrow \boxed{y = ke^{2x}}$

③ $h(x) = 2x - 2 + ke^{2x}$

$$h'(x) = 2 + 2ke^{2x}$$

نعوض في E

$$2 + 2ke^{2x} - 2(2x - 2 + ke^{2x}) \stackrel{?}{=} -4x + 6$$
$$\Rightarrow 2 + 2ke^{2x} - 4x + 4 - 2ke^{2x} \stackrel{?}{=} -4x + 6$$

$-4x + 6 = -4x + 6$ محققة

ومنه $h(x)$ حل للمعادلة التفاضلية E

الجزء الثاني

السؤال الثامن:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ جد $f'(x)$، ثم أثبت أنّ $f'(x)+f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

❸ جد تابعاً أصلياً للتابع h المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $h(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$، واستنتج تابعاً أصلياً للتابع f.

الحل:

① $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

حالة عدم تعيين: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

بفرض $u = e^x$

$x\to-\infty \quad , \quad u\to 0$

$$= \lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

② $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x}.e^x$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}$$

$$f'(x)+f(x) = -e^x\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + e^x\ln(1+e^x)$$

$$= \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \ell_2$$

③ $h(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow H(x) = -\ln|1+e^{-x}| = -\ln(1+e^{-x})$

$$f'(x)+f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f(x)+F(x) = H(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = H(x) - f(x)$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

المسألة الثانية:

ليكن التابع g المعرّف على $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

❶ ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها، واستنتج أنَّ للمعادلة $g(x)=0$ جذراً وحيداً $\alpha = 1$.

❷ ليكن C خط التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$، اثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

❸ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❹ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $d : y = x - 1$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$.

❺ ادرس وضع الخط C بالنسبة إلى المقارب d.

❻ ارسم المقارب d، ثم ارسم الخط C في معلم متجانس.

الحل:

$g(x) = x - 1 + \ln x \qquad]0,+\infty[$

① إن g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = 0 - 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0$$

ومتزايد تماماً.

x	0			$+\infty$
g'	‖	$+$	$+$	$+$
g	‖ $-\infty$		$\nearrow$	$+\infty$

إن g مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$.

$$0 \in g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد في $]0,+\infty[$

$$g(1) = 1 - 1 + \ln(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

حل المعادلة $g(x) = 0$

② $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x} \quad , \ ]0,+\infty[$

إن f معرف ومستمر واشتقاقي على yy'.

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}.x - 1\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

③ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 1 - 0 = +\infty$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - 1 - (-\infty) = +\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي منطبق على yy'.

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

④ $d: y=x-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{x}=0$$

ومنه $d: y=x-1$ مقارب مائل للخط C بجوار $+\infty$.

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

⑤

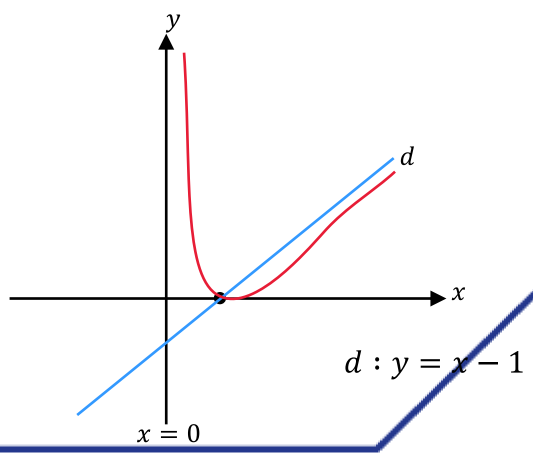
$$f(x)-y_d=\frac{-\ln x}{x}$$

$$-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow f(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
الفرق	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	C فوق d		C تحت d	

$f(1)=0 \Rightarrow (1,0)$ نقطة مشتركة

⑥



دورة 2024 الثانية:

السؤال الخامس:

❶ في معلم متجانس $(o;\vec{i}.\vec{j})$، ارسم $\mathcal{H}$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق المعادلة $\ln(x)-\ln(-y)=0$.

❷ حلّ المعادلة $\ln(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$.

الحل:

①

$$\ln(x)+\ln(-y)=0 \quad : x>0\,,-y>0 \Rightarrow y<0$$

$$\ln(-xy)=0 \Rightarrow -xy=1 \Rightarrow xy=-1$$

مجموعة النقاط M هي الجزء من قطع زائد منسوب لمقاربيه والواقع في الربع الرابع فقط.

②

$$\ln(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \quad ; x>0 \Rightarrow x\in\,]0,+\infty[$$

$$\frac{x+2}{x}>0 \Rightarrow x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]0,+\infty[$$

الشرط الكلي: $D=\,]0,+\infty[$

$$x=\frac{x+2}{x} \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$x=2$ مقبول ، $x=-1$ مرفوض

كُن قوياً لأجلك

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}-e^{-x}$$

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها، واكتب معادلة لكل مقارب للخط C.

❷ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً α، يقع في المجال $]1,2[$.

❸ ارسم كلّ مقارب وجدته، وارسم الخط C.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين والمستقيم الذي معادلته $x=1$.

❺ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$، أثبت أنّ $f(n+1)\geq 0$، واستنتج أنّ $e^{n+1}\geq\frac{n+2}{n}$.

الحل:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}-e^{-x}\quad : \ [0,+\infty[$$

① f معرف واشتقاق على $[0,+\infty[$

$$f(0)=-1-1=-2 \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي

$$f'(x)=\frac{1+1}{(x+1)^2}+e^{-x}=\frac{2}{(x+1)^2}+e^{-x}>0$$

f متزايد تماماً

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1

② $0\in f(]0,+\infty[)=]-2,1[$

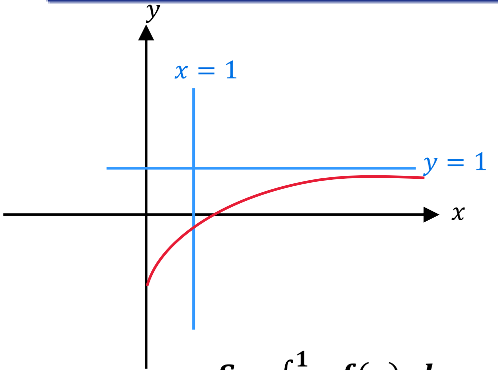
و f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$ إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً $\alpha\in\,]0,+\infty[$

ولدينا:

$$\left.\begin{aligned}f(1)&=-\frac{1}{e}<0\\ f(2)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{e^2}>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(1).f(2)<0$$

$$\alpha\in\,]1,2[$$

③



④ $S=\int_0^1 -f(x).\,dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{1-x}{x+1}-e^{-x}\right).\,dx$$

$$=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}+e^{-x}\right).\,dx$$

$$=[-x+2\ln(x+1)-e^{-x}]_0^1$$

$$=\left(-1+2\ln 2-\frac{1}{e}\right)-(0+0-1)$$

$$=2\ln 2-\frac{1}{e}$$ وحدة مساحة

⑤ القضية $E(n)$: $f(n+1)\geq 0$ حيث $n\geq 1$

1) لنثبت $E(1)$:

محققة: $f(1+1)=f(2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{e^2}\geq 0$

2) بفرض $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n\geq 1$.

3) لنثبت $E(n+1)$ أي لنثبت أن: $f(n+2)\geq 0$

نعلم أن: $n+2\geq n+1$

بأخذ صورة الأطراف ومنه f المتزايد على $[1,+\infty[$ نجد:

$$f(n+2)\geq\underbrace{f(n+1)\geq 0}_{\text{من } 2}$$

$$\Rightarrow f(n+2)\geq 0$$

$E(n+1)$ صحيحة فالقضية $E(n)$ صحيحة حيث $n\geq 1$.

بما أن: $f(n+2)\geq 0$

$$\Rightarrow\frac{n+1-1}{n+1+1}-e^{-(n+1)}\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{n}{n+2}\geq e^{-(x+1)}$$

نقلب الطرفين:

$$e^{n+1}\leq\frac{n+2}{n}$$

دورة 2017 الأولى:

السؤال الثالث:

❶ اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$.

❷ تحقق أن المستوي الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ يمس الكرة S.

الحل:

① $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=R^2$

$\boxed{\Rightarrow S: x^2+y^2+z^2=3}$

تكرورية هامة:

حتى المستوي يمس الكرة يجب ان نبرهن ان البعد بين مركز الكرة والمستوي يساوي نصف قطر الكرة

② $\text{dist}\,(O,P)=\dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}=R$

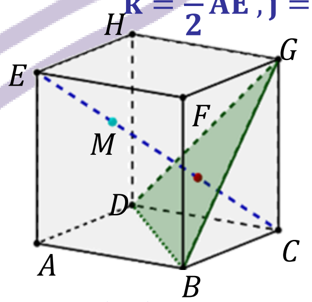
فالمستوي يمس للكرة

المسألة الأولى:

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2.

تتأمل المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث:

$\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\,,\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



❶ اكتب معادلة المستوي (GBD).

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

❸ جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD)

❹ جد احداثيات النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

❺ أثبت تعامد المستقيمين $(EC),(HM)$.

الحل:

❶ $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0)$

$D(0,2,0)E(0,0,2),F(2,0,2)$

$,G(2,2,2),H(0,2,2)$

$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)\ \ \overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$

نلاحظ ان الشعاعين غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow$ B,G,D مستويا تعيين

وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GBD) بالتالي:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{GB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0$

$\Rightarrow -2b-2c=0\Rightarrow b=-c$ ...(1)

$\vec{n}\perp\overrightarrow{GD}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{GD}=0$

...(2) $\Rightarrow -2a-2c=0\Rightarrow a=-c$

بفرض $c=-1$ بالتالي $b=1,a=1$ ومنه

$\vec{n}(1,1,-1)$ والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$1(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0$

$\Rightarrow \boxed{(GBD): x+y-z-2=0}$

③ المستقيم مار من $E(0,0,2)$ وشعاع توجيهه $\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$ بالتالي:

$$(EC):\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=-2t+2 \end{cases};t\in\mathbb{R}$$

③ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC) في معادلة المستوي (GBD):

$2t+2t+2t-2-2=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$

نعوض قيمة ال$t=\frac{2}{3}$ في معادلة المسقيم (EC)

$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

④ بفرض $M(x,y,z)$ بالتالي:

$\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

$\Rightarrow (x,y,z-2)=\dfrac{1}{3}(2,2,-2)$

$\Rightarrow (x,y,z-2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

⑤ $\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{8}{3}+\dfrac{4}{3}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{EC}$

فالمستقيمين $(EC),(HM)$ متعامدين.

دورة 2017 الثانية

السؤال الثاني:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d', d

$$d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3\ ; s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

$$d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2\ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

وهل المستقيمان d', d يقعان في مستوي واحد؟ علل إجابتك.

الحل:

$\vec{u} = (1, -3, -3)$ شعاع توجيه d و $\vec{v}(1, -3, -1)$ شعاع توجيه d'

مستقلا خطياً ، لأن مركباتهما غير متناسبة، وبالتالي d, d' غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو متخالفين.

نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} t + 1 = s \\ -3t + 2 = -3s - 3 \\ -3t + 3 = -s + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - s = -1 \quad (1) \\ t - s = \dfrac{5}{3} \quad (2) \\ 3t - s = 2 \quad (3) \end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) والمعادلة (2)

فجملة المعادلات متناقضة وليس لها حلول.

بالتالي المستقيمان d, d' متخالفان ولا يقعان في مستوٍ واحد.

لا تنتظر الظروف المثالية، ابدأ من حيث أنت وبما لديك فالبدايات البسيطة تصنع أعظم القصص

السؤال الرابع:

نتأمل في المعلم المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين: $A(2, 0, 1)$ $B(1, -2, 1)$ والمطلوب:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل:

لتكن H منتصف $[AB]$ فيكون

$H\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$ $\overrightarrow{BA}(1, 2, 0)$ فيكون:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2(y + 1) + 0(z - 1) = 0$$

$$x + 2y - \frac{3}{2} + 2 = 0$$

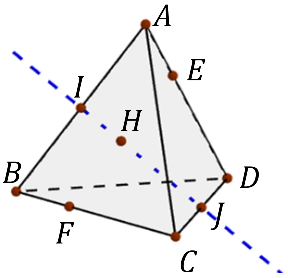
$$\Rightarrow 2x + 4y + 1 = 0$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ رباعي وجوه، a عدد حقيقي. I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB], [CD]$ و E, F نقطتان تحققان العلاقتين $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$،

وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

أثبت أن I, J, H تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$$

$\Leftarrow$ $(E,1)$ مركز أبعاد متناسبة لـ

$(A, 1 - \alpha)$ (D, α)

$\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$

$\Leftarrow$ F مركز أبعاد متناسبة لـ

$(B, 1 - a)$ (C, a)

وبما أن H منتصف $[EF]$ بالتالي H مركز أبعاد متناسبة لـ $(E, 1)$ $(F, 1)$

فحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 1 - a)$ $(B, 1 - a)$ (C, a) (D, a)

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة لـ (C, a) (D, a)

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A, 1 - a)$ $(B, 1 - a)$

بالتالي حسب الخاصة التجميعية النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(I, 2a)$ $(I, 2 - 2a)$

فأن النقاط I, J, H تقع على استقامة واحدة

دورة 2018 الأولى

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة

$A(1,-2,0)$ والمستوي P الذي معادلته:

$P: x+2y+z-1=0$ والمطلوب:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ، ثم اكتب

معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

$$\text{dist}(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|1(1)+2(-2)+0-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

الكرة مركزها A

ونصف قطرها لان المستوي يمس الكرة

معادلتها: $R=\text{dist}(A,p)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=\frac{16}{6}$$

المسألة الثانية:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,1,0)$ $B(1,2,1)$ $C(4,0,0)$ والمطلوب:

❶ أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

❷ أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى

بالعلاقة: $x+3y-3z-4=0$

❸ ليكن المستويان P, Q معادلتهما:

$P: x+2y-z-4=0$
$Q: 2x+3y-2z-5=0$

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل

المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=t-2\\ y=3\\ z=t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

❹ ما هي نقطة تقاطع المستويات $P, Q, (ABC)$ ؟

❺ احسب بعد A عن المستقيم d.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ $\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$

الشعاعين مستقلان خطياً والنقاط ليست على استقامة واحدة (تعين مستوياً).

❷ نعوض إحداثيات النقاط في معادلة المستوي $x+3y-3z-4=0$:

$A:\ 1(1)+3(1)-3(0)-4=0\Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow A\in(ABC)$
$B:\ 1(1)+3(2)-3(1)-4=0\Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow B\in(ABC)$
$C:\ (4)+3(0)-3(0)-4=0\ \Rightarrow 0=0$
$\Rightarrow C\in(ABC)$

بالتالي معادلة المستوي (ABC) هي:

$$\boxed{x+3y-3z-4=0}$$

③ يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقق معادلتيهما:

$P:\ t-2+6-y-4=0\Rightarrow 0=0$

محققة

$Q:\ 2t-4+9-2t-5=0\Rightarrow 0=0$

محققة

إذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q, P

④ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوى (ABC) نجد:

$$t-2+9-3t-4=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

ط2:يمكن الحل ع غاوس

⑤ بفرض A' المسقط القائم لـ $A(1,1,0)$ على d وبالتالي

$\vec{u}(1,0,1)$ $\overrightarrow{AA'}(t-3,2,t)$ $A'(t-2,3,t)$

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0 \Rightarrow t-3+t=0$$

$$\Rightarrow A'\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AA'=\sqrt{\frac{9}{4}+4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{34}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

دورة 2018 الثانية:

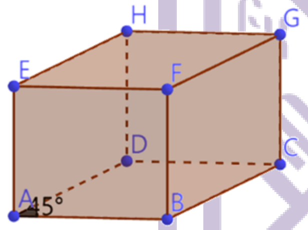
السؤال الثاني:

ABCDEFGH متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوية $D\hat{A}B=45°$ والنقطة I منتصف [EF] والمطلوب:

❶ احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

❷ عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$



الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AD.\cos DAB$

$$=2\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

❷ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AI}$$

حسب علاقة شال، ومنه M تنطبق على I.

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$C(4,0,0)\ B(1,0,-1)\ A(2,1,3)$
$E(1,-1,1)\ D(0,4,0)$

❶ جد $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$

❷ أثبت أن النقاط E, D, C ليست على استقامة واحدة.

❸ أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE).

❹ اكتب معادلة المستوي (CDE).

❺ احسب بعد B عن المستوي (CDE).

❻ اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE)

الحل:

❶ $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)\ \overrightarrow{CD}(-4,4,0)$
$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$

❷ الشعاعين $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، فالنقاط E, D, C ليست على استقامة واحدة.

③ $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 4-4+0=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB} = 3+1-4=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$

ومنه المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDE)

④ المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$ وناظمه $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$ بالتالي:

$$a(x-x_c)+b(y-y_c)+c(z-z_c)=0$$
$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$$
$$-x-y-4z+4=0$$
$$x+y+4z-4=0$$

⑤ $$\operatorname{dist}(B;(CDE)) = \frac{|ax_B+by_B+cz_B+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|1+0-4-4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$$

⑥ الكرة S مركزها B و $r = \operatorname{dist}[B;(CDE)]$

معادلتها:

$$S: (x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2 = r^2$$
$$S: (x-1)^2+y^2+(z+1)^2 = \frac{49}{18}$$

دورة 2019 الأولى:

السؤال الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $B(0,1,1)\ A(1,0,1)$، والمطلوب:

❶ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$

❷ أثبت أن المستقيمين $d, (AB)$ متعامدان.

الحل:

❶

$$d:\begin{cases} x = at+x_0 \\ y = bt+y_0 \\ z = ct+z_0 \end{cases};t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ d:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases};t\in\mathbb{R}$$

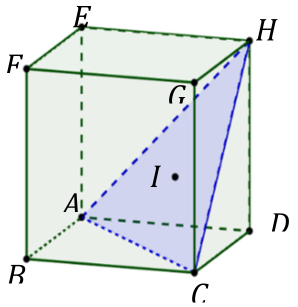
❷ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\vec{u}(2,2,1)$

$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = -1\times2+1\times2+0\times1=0$

$\Leftarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ فالمستقيمين $d, (AB)$ متعامدين.

المسألة الأولى:

تتأمل في معلم متجانس $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ المكعب ABCDEFGH والمطلوب:



❶ اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D.

❷ اكتب معادلة المستوي (ACH)

❸ أثبت أن المستوي P الذي معادلته:
$P: \ -2x + 2y - 2z = 0$
يوازي المستوي (ACH)

❹ بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة.

❺ اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

الحل:

❶ $A(0,0,0)\ B(1,0,0)\ C(1,1,0)$
$D(0,1,0)\ E(0,0,1)\ F(1,0,1)$
$G(1,1,1)\ H(0,1,1)$

❷ $\overrightarrow{AH}(0,1,1)\ \overrightarrow{AC}(1,1,0)$
وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ACH)

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$
$$(1) \qquad \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0$$
$$(2) \qquad \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow c = -b$$

بفرض $b = -1$ بالتالي $c = 1\ ,a = 1$ ومنه

$\vec{n}(1,-1,1)$ والمستوي يمر من $A(0,0,0)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$(ACH): x - y + z = 0$$

❸ $\vec{n}_{ACH}(1,-1,1)\ \vec{n}_p(-2,2,-2)$

شعاعي الناظمين مرتبطين خطياً لأن $\vec{n}_P = -2\vec{n}_{ACH}$ مركباتهما متناسبة فالمستويين متوازيين

❹ مركز ثقل المثلث ACH هو:

$$I\left(\frac{x_A + x_C + x_H}{3}, \frac{y_A + y_C + y_H}{3}, \frac{z_A + z_C + z_H}{3}\right)$$
$$I\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{DF}(1,-1,1)\ ,\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

نلاحظ $\overrightarrow{DF} = 3\ \overrightarrow{DI}$ فالشعاعان $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً. والنقاط F, I, D على استقامة واحدة.

❺ الكرة مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

معادلتها:

$$S: (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$
$$S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$$
$$\text{dist}(\Omega, (ACH)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$= \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$$

فالمستوي (ACH) يمس الكرة S.

الجزء الثاني

دورة 2019 الثانية:

السؤال الرابع:

تأمل في معلم متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان:

$A(2,1,-2)$ $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

❶ أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

الحل:

❶ $\vec{n}_P(3,-1,-3)$ $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$\Rightarrow \vec{n}_P = -\overrightarrow{AB}$$

الشعاعان مرتبطان خطياً ومنه المستقيم (AB) يعامد المستوي P

❷ $A(2,1,-2)$ $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$

$$(AB): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (AB): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوي

$$3(2-3t) - (1+t) - 3(-2+3t) - 8 = 0$$

$$6 - 9t - 1 - t + 6 - 9t - 8$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{19}$$

نعوض في معادلات (AB) فنجد:

$$A'\left(\frac{29}{19}, \frac{22}{19}, \frac{-29}{19}\right)$$

المسألة الأولى:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ ، والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

❶ أثبت أن المستويين Q,P متقاطعان بفصل مشترك Δ ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

❷ تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

❸ أثبت أن المستويات R,Q,P تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها.

❹ استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

الحل:

❶ $\vec{n}_Q(1,1,1)$ $\vec{n}_P(2,-1,2)$ المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ مستقلان خطياً والمستويان Q,P متقاطعان بفصل مشترك، لكتابة الفصل المشترك نجمع معادلتي المستويين

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 3x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow x = -z + 1$$

نعوض في المعادلة الثانية نجد:

$$-z + 1 + y + z - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

نفرض $z = t$ بالتالي $x = -t + 1$ ومنه:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

❷ $\vec{u}_\Delta(-1,0,1)$, $\vec{n}_R(1,0,-1)$

$\vec{u}_\Delta = -\vec{n}_R$ فالشعاعان $\vec{u}_\Delta,\vec{n}_R$ مرتبطان خطياً والمستوي R يعامد Δ

نعوض احداثيات A في معادلة R نجد:

$$1 - 0 - 1 = 0$$

محققة ومنه المستوي R يمر بالنقطة A.

❸ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي R نجد:

$$1 - t - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0$$

بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة

$$I(1,0,0)$$

❹ النقطة A تنتمي للمستوي R العمودي على المستقيم Δ ويتقاطع معه في النقطة A بالتالي:

$$dist(A,\Delta) = AI = \sqrt{0+4+0} = 2$$

الجـزء الثاني

دورة 2020 الأولى:

السؤال الثاني:

تأمل المستويين

$P_2: x+y-z=0$

$P_1: 2x-y+z+1=0$

والمطلوب:

❶ تيقن أن المستويين متعامدين.

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

الحل:

① $\vec{n_1}(2,-1,1)\,,\vec{n}_2(1,1,-1)$

$\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 2-1-1=0$

شعاع الناظمين متعامدين بالتالي P_2, P_1 متعامدان.

③

$P_1: 2x-y+z+1=0$
$P_2: x+y-z=0$ ⇒ بالجمع

$\Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

نفرض $z=t$ ونعوض في المعادلة الثانية نجد $y=t+\frac{1}{3}$

بالتالي:

$$\Delta: \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=t+\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$A(1,0,0)\ B(4,3,-3)\ C(-1,1,2)\ D(0,0,1)$

المطلوب:

❶ أثبت أن $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

❷ أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

❸ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(C,\gamma)\ (B,\beta)\ (A,\alpha)$

حيث γ,β,α أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

① $\overrightarrow{AC}(-2,1,2)\ \ \overrightarrow{AB}(3,3,-3)$

الشعاعان $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

③ ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$(-1,0,1)=a(3,3,-3)+b(-2,1,2)$$

$$\Rightarrow(-1,0,1)=(3a-2b,3a+b,-3a+2b)$$

$$\begin{cases}3a-2b=-1\\ 3a+b=0\\ -3a+2b=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-2b=-1 & (1)\\ -3a-b=0 & (2)\\ -3a+2b=1 & (3)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$-3b=-1\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

نعوض في (2) :

$$-3a-\frac{1}{3}\Rightarrow\ a=-\frac{1}{9}$$

نعوض في (2) نجد:

$$3\left(-\frac{1}{9}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)=1\Rightarrow 1=1$$

محققة وبالتالي

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

أي أن $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

③

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{9}\overrightarrow{AC}$$

نضرب الطرفين ب 9

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow -9\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 7\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

أي أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة للنقاط $(A,7)\ (B,-1)\ (C,3)$

المسألة الأولى:

(EABCD) هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع، طول ضلعه 3، [AE] عمودي على المستوي (ABCD) و $EA = 3$ ، نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

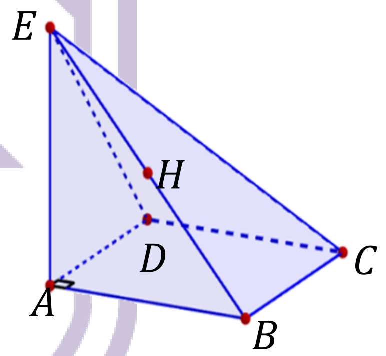
❶ عين إحداثيات A, B, C, D, E.

❷ جد معادلة المستوي (EBC).

❸ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

❹ استنتج أن H منتصف [EB] هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC).

❺ احسب حجم رباعي الوجوه (AEBC).



الحل:

① $A(0,0,0)\ B(3,0,0)\ C(3,3,0)$
$D(0,3,0)\ E(0,0,3)$

③ $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)\ \ \overrightarrow{EC}(3,3,-3)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على المستوي (EBC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{EC} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a - 3c = 0\\ 3a + 3b - 3c = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a = c\\ a + b - c = 0\end{cases}$$

بفرض $c = 1$ بالتالي $b = 0, a = 1$ ومنه $\vec{n}(1,0,1)$

والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0) + 0(y-0) + 1(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(EBC): x + z - 3 = 0}$$

③ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u} = \vec{n}(1,0,1)$ ويمر من $A(0,0,0)$

$$d: \begin{cases}x = at + x_A\\ y = bt + y_A\\ z = ct + z_A\end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases}x = t\\ y = 0\\ z = t\end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

④ $E(0,0,3)\ ,B(3,0,0) \Rightarrow H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فإن المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow A' = H$$

⑤ المثلث EBC قائم في B و $EB = \|\overrightarrow{EB}\| =$ $\sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, BC = 3$

بالتالي :

$$AH = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$S_{EBC} = \frac{EB \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times BC}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{EBC} \times AH$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2} \times 3}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

طريقة ثانية:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} S_{ABCD} \times EA\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 3\right) = \frac{9}{2}$$

دورة 2020الثانية:

السؤال الرابع:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي

$P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

المطلوب:

❶ أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

❷ اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل:

① نعوض $A(1,1,-2)$ في

$$P: 2x+y-3z+2=0$$

نجد: $2(1)+1(1)-3(-2)+2=11\neq 0$

ومنه $A\notin P$

③ بما أن المستويين Q, P متوازيين فإن $\vec{n}_P(2,1,-3)=\vec{n}_Q$ والمستوي مار من $A(1,1,-2)$

$$Q: a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$Q: 2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{Q: 2x+y-3z-9=0}$$

التمرين الثالث:

المستقيمان d', d معرفان وسيطياً وفق:

$$d':\begin{cases} x=2s-1 \\ y=s-2 \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z=3s-2 \end{cases}$$

$$d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$$

❶ أثبت أن d, d' متقاطعان، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع.

❷ جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d', d

الحل:

① $\vec{u}(1,2,-1)$ شعاع موجه للمستقيم d و $\vec{u'}(2,1,3)$ شعاع موجه للمستقيم d'

$\vec{v},\vec{u}$ مستقلان خطياً لعدم تناسب المركبات ومنه المستقيمان d', d غير متوازيين،

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{cases} t+2=2s-1 \quad (1) \\ 2t+1-s-2 \quad (2) \\ -t=3s-2 \quad (3) \end{cases}$$

من (1) و (3) بالجمع نجد أن: $s=1$ وبالتعويض في (1) نجد أن $t=-1$ بتعويض هاتين القيمتين في المعادلة (2) نجد

$-2+1=1-2$ محققة ومنه المستقيمان d', d متقاطعان ويقعان في مستوٍ واحد.

نجد نقطة التقاطع هي $I(1,-1,1)$

③ $\vec{u}(1,2,-1)$ $\vec{u'}(2,1,3)$ ولنفرض ناظم المستوي المطلوب $\vec{n}(a,b,c)$

إن كلاً من الشعاعين $\vec{n},\vec{AB}$ يوازي ناظم المستوي بالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow a+2b-c=0$$
$$\vec{n}.\vec{u'}=0\Rightarrow 2a+b+3c=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} 3a+6b-3c=0 \\ 2a+b+3c=0 \end{matrix} \Rightarrow \text{بالجمع}$$
$$\Rightarrow 5a+7b=0\Rightarrow a=-\frac{7}{5}b$$

نفرض $b=-5\Rightarrow a=7$ نعوض في المعادلة الأولى نجد $c=-3$ ومنه $\vec{n}(7,-5,-3)$

والمستوي مار بالنقطة $(1,-1,1)$ بالتالي:

$$7(x-1)-5(y+1)-3(z-1)=0$$
$$\Rightarrow Q: 7x-5y-3z-9=0$$

المسألة الأولى:

ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2، O نقطة تقاطع القطرين $[HB], [AG]$

نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

والمطلوب:

❶ جد إحداثيات O, H, G, B, A

❷ أعط معادلة المستوي (GOB)

❸ احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos GOB$

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

❺ أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

❻ جد الأعداد الحقيقية γ, β, α لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C, \gamma)\ (B, \beta) (A, \alpha)$

الحل:

① $A(0,0,0)\ B(2,0,0)\ C(2,2,0)$
$D(0,2,0)\ E(0,0,2)\ F(2,0,2)$
$G(2,2,2)\ H(0,2,2)\ O(1,1,1)$

③ $\overrightarrow{OB}(1,-1,1)\ \overrightarrow{OG}(1,1,1)$ وبفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GOB) بالتالي:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OG} = 0$$
$$(1) \quad \Rightarrow a + b + c = 0$$
$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{OB} = 0$$
$$(2) \quad \Rightarrow a - b - c = 0$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

نعوض في (1) نجد

$$c = -b$$

بفرض $b = 1$ بالتالي $c = -1$ ومنه $\vec{n}(0,1,-1)$

والمستوي يمر من $B(2,0,0)$

$$0(x-2) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{(GBD): y - z = 0}$$

③ $\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)\ , \overrightarrow{OG}(1,1,1)$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$
$$\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow \cos GOB = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\|.\|\overrightarrow{OG}\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

④ المستقيم (DC) مار من $D(0,2,0)$ وشعاع توجيهه $\overrightarrow{DC}(2,0,0)$ بالتالي:

$$(EC): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

⑤ $\vec{n}(0,1,-1),\ \overrightarrow{DC}(2,0,0) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0 + 0 + 0 = 0$

الشعاعين متعامدين بالتالي المستقيم يوازي المستوي.

⑤ $\overrightarrow{DA}(0,-2,0)\ \overrightarrow{DB}(2,-2,0)\ \overrightarrow{DC}(2,0,0)$

$$\overrightarrow{DA} = a\,\overrightarrow{DB} + b\,\overrightarrow{DC}$$
$$\Rightarrow (0,-2,0) = a(2,-2,0) + b(2,0,0)$$
$$(0,-2,0) = (2a + 2b - 2a, 0)$$
$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ -2a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a\ (1) \\ a = 1\quad (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد $a = 1, b = -1$ بالتالي:

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1)\ (B,-1)\ (A,1)$

ومنه $\alpha = 1, \beta = -1\ , \gamma = 1$

طريقة ثانية: بحسب خاصة متوازي الأضلاع في الوجه ABCD نجد:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,1)(B,-1)\ (A,1)$

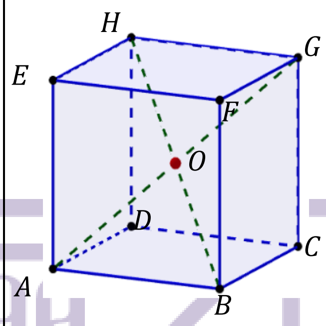
ومنه $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$

الجزء الثاني

دورة 2021 الأولى:

السؤال الرابع:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$ $C(5,0,5)$ $D(6,2,5)$ والمطلوب:



❶ أثبت أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

❷ جد العددين الحقيقيين α,β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ واستنتج أن A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد.

الحل:

① $\overrightarrow{AC}(3,0,4)$ $\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$ الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

③ $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow (4,2,4)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,0,4)$

$(4,2,4)=(-\alpha+3\beta,-2\alpha,4\beta)$

$-\alpha+3\beta=4$

$-2\alpha=2 \quad\Rightarrow \alpha=-1$

$4\beta=4 \quad\Rightarrow \beta=1$

نعوض $\alpha=-1,\beta=1$ في المعادلة الأولى نجد $1+$ $3=4$ محققة

بالتالي: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ والأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً والنقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد.

تَحرَّر ... فالخوف لا يصنع طريقاً 😊

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تتأمل النقاط $A(-1,2,3)$ $B(2,1,1)$ $C(-3,4,-1)$ $D(3,1,1)$ والمطلوب:

❶ جد $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمان $(AB),(AC)$ متعامدان.

❷ أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

❸ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على المستوي (ABC).

❹ احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

❺ بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين $(AB),(CG)$ متوازيان.

الحل:

① $\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)$ $\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6-2+8=0$

الشعاعان متعامدان فالمستقيمان $(AB),(AC)$ متعامدان.

③ $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=6-4-2=0$, $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-4+8-4=0$

بالتالي الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) والمستوي مار من $B(2,1,1)$ ومنه:

$2(x-2)+4(y-1)+1(z-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x+4y+z-9=0}$

③ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}(2,4,1)$ ويمر من $D(3,1,1)$

دورة 2021 الثانية:

السؤال الثاني:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(2,1,2)$

والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$

❶ احسب بعد A عن المستوي P.

❷ اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

الحل:

① $dist(A,P)=\frac{|2(2)+1-2(2)-4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$

③ مركز الكرة A ونصف قطرها هو بعد A عن P: $R=$

$dist(A,P)=1$ ومعادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1}$$

$$d:\begin{cases}x=at+x_A\\ y=bt+y_A\\ z=ct+z_A\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=2t+3\\ y=4t+1\\ z=t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

④

$$dist(D,(ABC))=\frac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2(3)+4(1)+1-9|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$S_{ABC}=\frac{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}{2}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{14}\times 2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2\times7\times2\times3}=2\sqrt{21}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times2\sqrt{21}\times\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{4}{3}$$

⑤ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)\ (B,-1)(C,2\ )$ بالتالي:

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{GC}$$

الشعاعين $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{GC}$ مرتبطين خطياً فالمستقيمين $(AB),(CG)$ متوازيان

طريقة ثانية: نوجد احداثيات G ثم مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CG}$ ثم نثبت الارتباط الخطي لهما.

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(1,3,0)\ B(0,6,0)\ N(0,0,3)\ M(0,6,2)$

والمطلوب:

❶ اكتب معادلة المستوي (AMN).

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (AMN).

❸ أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيم $[BA]$

الحل:

① $O(0,0,0)\ A(1,3,0)$

$B(0,6,0)\ N(0,0,3)\ M(0,6,2)$

$\overrightarrow{AN}(-1,-3,3)\ \overrightarrow{AM}(-1,3,2)$ وبفرض

$\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AMN) بالتالي:

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$$

$$\Rightarrow -a+3b+2c=0 \qquad (1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AN}=0$$

$$\Rightarrow -a-3b+3c=0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-2a+5c=0\Rightarrow a=\frac{5}{2}c$$

بفرض $c=2$ بالتالي $a=5$ نعوض في (1) نجد

$$b=\frac{1}{3}$$

للتخلص من الكسور نضرب المركبات بـ 3 ومنه

$\vec{n}(15,1,6)$ والمستوي يمر من $N(0,0,3)$

$$15(x-0)+1(y-0)+6(z-3)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(AMN):\ 15x+y+6z-18=0}$$

③ المستقيم Δ مار من $O(0,0,0)$

ويقبل $\vec{n}(15,1,6)$ شعاع توجيه له بالتالي:

$$(EC):\begin{cases}x=15t\\ y=t\\ z=6t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$$

③ المستوي مار من $(0,6,1)$ منتصف $[BM]$ وناظمه

معادلته: $\vec{n}=\overrightarrow{BM}(0,0,2)$

$$0(x-0)+0(y-6)+2(z-1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{z-1=0}$$

دورة 2022 الأولى:

السؤال الثاني:

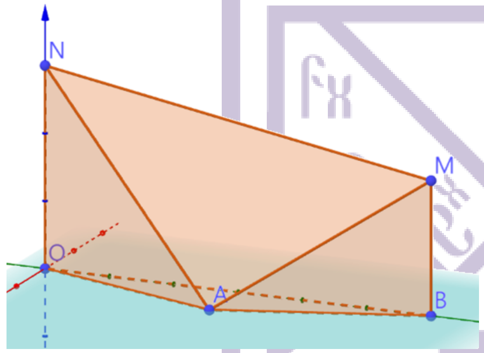
تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$C(0,0,1)\ B(0,1,0)\ A(2,0,0)$ والمطلوب:

❶ احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $\cos BAC$

❷ إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$



الحل:

① $\overrightarrow{AB}(-2,1,0),\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2,1,0).(-2,0,1)=4+0+0$$
$$=4$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+0^2}=\sqrt{4+1+0}$$
$$=\sqrt{5}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{4+0+1}$$
$$=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos BAC$$

$$\Rightarrow \cos BAC=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

③ نفرض G مركز ابعاد متناسبة للنقاط

A, B, C وكل واحدة مثقلة ب 3

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$$

$$\Rightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{AB}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\|$$

مجموعة نقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{1}{6}$

الجزء الثاني

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(1,1,2)$

والمستويين $P: x - y + 2z - 1 = 0$ و $Q: 2x + y + z + 1 = 0$ والمطلوب:

❶ أثبت أن المستويين Q, P متقاطعان بفصل مشترك d.

❷ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

❸ اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين Q, P

❹ جد احداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R.

❺ احسب بعد A عن المستقيم d.

❻ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

الحل:

① الشعاعان $\vec{n}_Q(2,1,1)$, $\vec{n}_P(1,-1,2)$ مستقلان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويات P, Q متقاطعان بفصل مشترك d.

② نحل المعادلتين حل مشترك:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0 \quad (1)$$
$$Q: 2x + y + z + 1 = 0 \quad (2)$$

بالجمع نجد

$$3x + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -z}$$

نعوض في (2) نجد:

$$-2z + y + z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = z - 1}$$

نضع $z = t$ وبالتالي: $x = -t, y = t - 1$ ومنه:

$$d: \begin{cases} x = -t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

③ لدينا $\vec{n}_P(1,-1,2)$, $\vec{n}_Q(2,1,1)$ ولنفرض $\vec{n}_R(a,b,c)$

$$\begin{cases} \vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0 \\ \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow 3a + 3c = 0 \Rightarrow a = -c$$

بفرض $c = -1$ وبالتالي $b = -1, a = 1$ ومنه $\vec{n}_R(1,-1,-1)$ والمستوي R المار بالنقطة $A(1,1,2)$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1) - (y - 1) - (z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R: x - y - z + 2 = 0}$$

④ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي R نجد:

$$-t - t + 1 - t + 2 = 0 \Rightarrow -3t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow B(-1,0,1)$$

⑤ النقطة A تنتمي للمستوي R العمود على d بالتالي النقطة $B(-1,0,1)$ هي مسقط A على d بالتالي:

$$\text{dist}(A,d) = AB$$
$$= \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}$$
$$= \sqrt{6}$$

مركز الكرة $A(1,1,2)$ ونصف قطرها هو بعد A عن Q:

$$R = \text{dist}(A,Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$= \frac{|2(1) + 1 + 2 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

⑥ معادلة الكرة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$$

دورة 2022 الثانية:

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ $B(1,-1,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $MA = MB$ وما طبيعة المجموعة S؟

الحل:

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن B, A بالتالي:

$$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$
$$= (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1$$
$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$

$$2x - 4y + 4z - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y - 4z - 3 = 0$$

مجموعة النقاط S هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(2,-2,2)$ $B(1,1,0)$ $C(1,0,1)$ $D(0,0,1)$ والمطلوب:

❶ أثبت أن النقاط D, C, B لا تقع على استقامة واحدة.

❷ أثبت أن $y + z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BCD)

❸ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD).

❹ عين احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).

❺ اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً فيها.

الحل:

① $\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$ $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

الشعاعين $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$ مستقلان خطياً ومنه فإن النقاط D, C, B لا تقع على استقامة واحدة.

③ نعوض إحداثيات النقاط في معادلة المستوي $x +$

$3y - 3z - 4 = 0$

$$1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow B \in (BCD)$$
$$0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow C \in (BCD)$$
$$0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow D \in (BCD)$$

بالتالي $y + z - 1 = 0$ هي معادلة للمستوي (BCD)

③ المستقيم Δ مار من $A(2,-2,2)$ ويقبل $\vec{n}(0,1,1)$ شعاع توجيهه له:

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 \\ y = t - 2 \,;\, t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

④ النقطة K هي نقطة تقاطع Δ مع المستوي (BCD) بالتالي نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ في معادلة المستوي (BCD) فنجد:

$$t - 2 + t + 2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

⑤ مركز الكرة هو منتصف $[AD]$ ومنه $I\left(1,-1,\frac{3}{2}\right)$

نصف قطر الكرة هو AD بالتالي

$$R = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{2} = \frac{3}{2}$$
$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2$$
$$\boxed{(x-1)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

دورة 2023 الأولى

السؤال الخامس:

تتأمل في المعلم المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين

$A(1,-1,2)$ $B(2,0,4)$

والمستوي: $P: x - y + 3z - 4 = 0$

جد معادلة للمستوي Q الموازي للمستوي P والمار من النقطة A، واكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.

الحل:

معادلة المستوي Q:

$$\vec{n}_Q(1,-1,3)$$
$$A(1,-1,2)$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$1(x-1)-1(y+1)+3(z-2)=0$$
$$Q: x - y + 3z - 8 = 0$$

معادلة الكرة:

$$I\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right) \quad ©$$
$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ©$$
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}$$

المسألة الأولى:

$ABCDE$ هرم رأسه E، وقاعدته مربع، المستقيم (AE) عمودي على المستوي $(ABCD)$، $AE = 3, AB = 4$. تتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$، المطلوب:

❶ جد إحداثيات النقاط E, D, C, B, A.

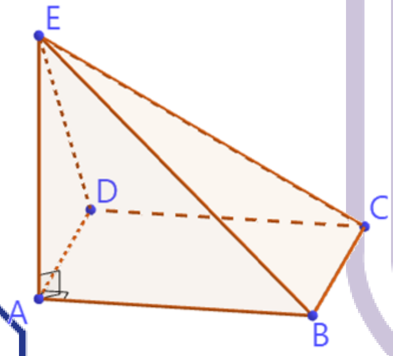
❷ جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE}$$

❸ احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC، ثم احسب مساحته.

❹ أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

❺ اكتب معادلة للمستوي (EBC) واحسب بُعد النقطة A عن المستوي (EBC)، ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.



الحل:

① $A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(4,4,0)$
$D(0,4,0)$ $E(0,0,3)$

③ $4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CE}$

$$M(x,y,z)$$
$$(x-4, y-4, z) = \frac{3}{4}(-4,-4,3)$$
$$x - 4 = -3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$
$$y - r = -3 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$
$$\boxed{z = \frac{9}{4}}$$
$$\Rightarrow M\left(1, 1, \frac{9}{4}\right)$$

③ $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC} = 0$

$$(4,0,-3).(0,4,0) = 0$$

الجـــزء الثاني

$$0+0+0=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{BC}$$

المثلث قائم في B

$$S=\frac{EB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{16+0+9}.\sqrt{0+16+0}}{2}$$
$$=\frac{5\times 4}{2}=10$$

④ معادلة المستقيم (EC)

$$E(0,0,3)$$
$$\vec{v}=\overrightarrow{EC}(4,4,3)$$
$$(EC)=\begin{cases}x=4t\\ y=4t\\ z=3+3t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

⑤ معادلة المستوي (EBC):

$$\vec{n}(a,b,c)$$
$$B(4,0,0)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0\Rightarrow 4a-3c=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow 4b=0$$
$$\boxed{b=0},\boxed{c=4},\boxed{a=3}$$
$$\vec{n}(3,0,4)$$
$$3(x-4)+0(y-0)+4(z-0)=0$$
$$3x+4z-12=0$$
$$dist=\frac{|0+0-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{5}$$
$$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times 10=\frac{12}{5}=8$$

دورة 2023 الثانية:

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين: $A(2,2,4)$ $B(-2,0,2)$، المطلوب:

❶ أعطِ معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

❷ أعطِ معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$، ما طبيعة المجموعة S؟

① I منتصف $[AB]$

$$I(0,1,3)$$
$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-4,-2,-2)$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-4(x-0)-2(y-1)-2(z-3)=0$$
$$-4x-2y+2-2z+6=0$$
$$\Rightarrow P: 2x+y+z-4=0$$

② $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$$M(x,y,z)$$
$$\overrightarrow{MA}(2-x,2-y,4-z)$$
$$\overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$(2-x)(-2-x)-y(2-y)+(4-z)(2-z)=0$$
$$-4-2x+2x+x^2-2y+y^2+8-4z-2z+z^2=0$$
$$x^2+y^2+z^2-2y-6z+4=0$$
$$x^2+y^2-2y+z^2-6x+4=0$$

نقوم بالإتمام إلى مربع كامل

$$x^2+y^2\pm 2y+1-1+z^2-6x+9-9+4=0$$
$$x^2+(y-1)^2+(z-3)^2-6=0$$
$$x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$$

مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها $(0,1,3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{6}$

الجزء الثاني

المسألة الأولى:

تتأمل النقاط:

$A(1,0,0)\ B(0,1,0)\ C(0,0,1)\ D(1,1,1)$

المطلوب:

❶ جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

❷ جد معادلة للمستوي (ABC).

❸ تعرف النقاط $A'(2,0,0)\ B'(0,2,0)\ C'(0,0,4)$ المستوي $(A'B'C')$، أثبت أن

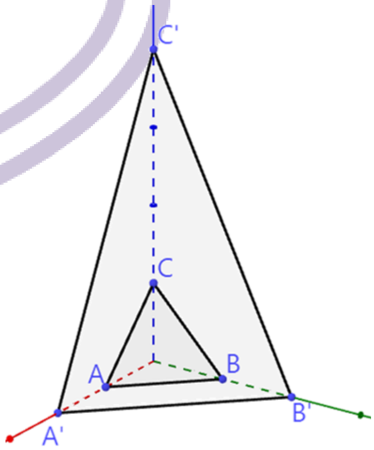
$$2x+2y-z-4=0$$

معادلة للمستوي $(A'B'C')$

❹ أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) , $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

❺ احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.



الحل:

① $A(1,0,0)\ B(0,1,0)\ C(0,0,1)\ D(1,1,1)$

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\ \overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}=-\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{0}{1}$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0\Rightarrow(OG)\perp(AB)$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0\Rightarrow(OG)\perp(AC)$$

$$\Rightarrow(OG)\perp(ABC)$$

② $$\vec{n}=\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\vec{n}(1,1,1)$$

$$(ABC):\ x+y+z-1=0$$

③ $$A'(2,0,0)\ B'(0,2,0)\ C'(0,0,4)$$

$$P: 2x+2y+z-4=0$$

$$A': 4+0+0-4=0\Rightarrow A'\in P$$

$$B':\ 0+4+0-4=0\Rightarrow B'\in P$$

$$C':\ 0+0+4-4=0\Rightarrow C'\in P$$

إذاً P هي معادلة المستوي $(A'B'C')$

④ نعوض Δ في كل من المستويين:

$$\Delta: t+3-t-2-1=0\Rightarrow\Delta\in(ABC)$$

$$\Delta: 2t+6-2t-2-4=0\Rightarrow\Delta\in(A'B'C')$$

$\Leftarrow$ Δ هو الفصل المشترك للمستويين

نكتب معادلة المستوي R

$$\vec{n}=\vec{u}(1,-1,0)$$

$$D(1,1,1)$$

$$1(x-1)-1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$R: x-y=0$$

$$\Delta=R\Rightarrow t-3+t=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2},y=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2},z=-2$$

$$\Rightarrow D'\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)$$

$$dist(A,\Delta)=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

الجزء الثاني

دورة 2024 الأولى

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(2,0,3)$.

❶ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB).

❷ جد معادلة الكرة S التي مركزها O وتمر بالنقطة A.

❸ استنتج إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (AB) مع الكرة S.

الحل:

① $\left.\begin{matrix}A(1,1,1)\\B(2,0,3)\end{matrix}\right\}\vec{u}=\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$

$$(AB)\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\\z=2t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

② $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$R=OA=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{3}$$

$$S: x^2+y^2+z^2=3$$

③ نحل حل مشترك (AB) مع الكرة S

$$(t+1)^2+(-t+1)^2+(2t+1)^2=3$$

$$t^2+2t+1+t^2-2t+1+4t^2+4t+1=3$$

$$5t^2+4t=0\Longrightarrow t(5t+4)=0$$

إما $t=0\Longrightarrow \left.\begin{matrix}x=1\\y=1\\z=1\end{matrix}\right\}\Longrightarrow A(1,1,1)$ نقطة التقاطع الأولى

أو $t=-\dfrac{4}{6}\Longrightarrow \left.\begin{matrix}x=-\dfrac{4}{6}+1=\dfrac{2}{6}\\y=\dfrac{4}{6}+1=\dfrac{10}{6}\\z=-\dfrac{8}{6}+1=-\dfrac{2}{6}\end{matrix}\right\}$

نقطة تقاطع الثانية $N\left(\dfrac{2}{6},\dfrac{10}{6},-\dfrac{2}{6}\right)$

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمل المستويين:

$$P: 2x-y+z-2=0$$
$$Q: x+y+2z-1=0$$

❶ أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان بفصل مشترك d، ثم أعطِ تمثيلاً وسيطياً له.

❷ جد معادلة للمستوي R المار بالنقطة $B(0,2,1)$ ويعامد كلاً من المستويين Q و P.

❸ أثبت أنَّ $I(1,0,0)$ هي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة Q و P و Q.

❹ احسب بُعد النقطة $A(4,0,0)$ عن المستقيم d.

❺ اكتب معادلة لأسطوانة المحدودة بالقاعدتين اللّتين لهما المركزين A و I، ونصف قطر قاعدتها 3.

الحل:

① $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_p}(2,-1,1)\\\overrightarrow{n_Q}(1,1,2)\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً فالمستويان P و Q متقاطعان بفصل مشترك d:

$$P+Q\Longrightarrow 3x+3z-3=0\Longrightarrow x+z-1=0$$

بفرض $\boxed{x=t}$ ومنه

$$t+z-1=0\Longrightarrow\boxed{z=-t+1}$$

نعوض في Q

$$t+y-2t+2-1=0\Longrightarrow\boxed{y=t-1}$$

$$(d)\begin{cases}x=t\\y=t-1\\z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

② بما أن R يعامد P و Q فهو يعامد d

$$\overrightarrow{n_R}=\overrightarrow{u_d}(1,1,-1)\qquad B(0,2,1)$$

$$1(x-0)+1(y-2)-1(z-1)=0$$

$$x+y-2-z+1=0$$

$$\boxed{R:\ x+y-z-1=0}$$

③ نحل حل مشترك d مع R

$$t+t-1+t-1-1=0\Longrightarrow 3t=3\Longrightarrow\boxed{t=1}$$

نعوض في d

دورة 2024 الثانية

السؤال الثاني:

نتأمل في معلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$، ومستوياً P يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين له.

❶ جد $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}.\vec{v}$.

❷ اكتب معادلة للمستوي P.

الحل:

① $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=(-3,-5,-4).(1,1,-2)$
$=-3-5+8=0$

$\overrightarrow{AB}.\vec{v}=(-3,-5,-4).(3,-1,-1)$
$=-9+5+4=0$

❶ $\overrightarrow{AB}$ ناظم لـ P

$P:\ -3(x-2)-5(y-5)-4(z-3)=0$

$P:\ -3x-5y-4z+43=0$

السعداء لا يملكون كل شيء،

بل مقتنعين بكل شي

$$\left.\begin{aligned}x&=1\\y&=0\\z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow I(1,0,0)$$ نقطة التقاطع

④ لإيجاد بُعد $A(4,0,0)$ عن المستقيم d نوجد A' المسقط القائم لـ A على المستقيم d نوجد معادلة مستوي S مار من A ويعامد d

$$\vec{n}=\vec{u_d}(1,1,-1)$$

$$1(x-4)+1(y-0)-1(z-0)=0$$

$$x-4+y-z=0\Rightarrow \boxed{S:x+y-z-4=0}$$

نحل حل مشترك d مع S

$$t+t-1+t-1-4=0\Rightarrow 3t=6\Rightarrow \boxed{t=2}$$

نعوض في d

$$\left.\begin{aligned}x&=2\\y&=1\\z&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A'(2,1,-1)$$

$$AA'=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

⑤ $R=3$ $\quad A(4,0,0)$, $I(1,0,0)$

معادلة الأسطوانة

$$y^2+z^2=9$$

$$1\le x\le 4$$

المسألة الأولى:

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E، قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه 2.

(EA) يعامد المستوي $(ABCD)$ و $AE = 4$ ،G نقطة تقاطع قطري المربع $ABCD$ ، ولتكن النقطة $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)$، ليكن المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$.

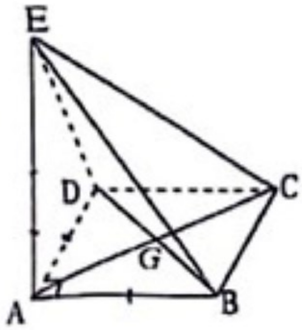
❶ عيّن إحداثيات رؤوس الهرم $EABCD$، ثم جد إحداثيات النقطة G.

❷ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

❸ أثبت أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (EC).

❹ عيّن إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (EC).

❺ احسب حجم الهرم $MABCD$.



الحل:

① $A(0,0,0)\ \ B(2,0,0)\ \ D(0,2,0)$
$C(2,2,0)\ \ E(0,0,4)$

❶ $\overrightarrow{EC}(2,2,-4) \Rightarrow (EC)\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -4t+4 \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

③ $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)$ نعوض في تمثيل (EC) نجد:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{4} \\ 3 - 4t + 4 \Rightarrow -1 = -4t \Rightarrow t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

لأن قيم t متساوية في المعادلات الثلاث إذاً $M \in (EC)$

④ بفرض G' المسقط القائم لـ G على (EC)

عندئذٍ: $G'(2t,2t,-4t+4)$

ولدينا: $G(1,1,0)$

$$GG'.EC = 0$$
$$\Rightarrow (2t-1,2t-1,-4t+4)(2,2,-4) = 0$$
$$4t-2+4t-2+16t-16 = 0$$
$$24t = 20 \Rightarrow t = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$
$$\Rightarrow G'\left(\frac{10}{6},\frac{10}{6},\frac{-20}{6}+4\right) \Rightarrow G'\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$

⑤

$$v = \frac{1}{3}.S.h \qquad ; h = z_m = 3$$
$$S = a^2 = 4$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4$$

دورة 2017 الأولى:

ليكن العددان العقديان

$$z_2 = 1+i \quad , \quad z_1 = 1+\sqrt{3}i$$

المطلوب:

❶ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

❷ اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل:

①

$$z_1 = 1+\sqrt{3}i$$

$$r_1 = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1+i$$

$$r_2 = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

②

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{3})}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ومنه يكون:

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{(1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

دورة 2017 الثانية:

لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z = -1+i$

والمطلوب:

❶ أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً.

❷ جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي.

الحل:

①

$$z^8 = (z^2)^4 = ((-1+i)^2)^4$$

$$i^2 = 1 \Rightarrow z^8 = (1-2i-1)^4$$

$$z^8 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$$

②

$$z' - a = e^{\frac{\pi}{4}i}(z-a)$$

$$z' = e^{\frac{\pi}{4}i}(-1+i-1-i) + 1+i$$

$$z' = e^{\frac{\pi}{4}i}(-2) + 1+i$$

$$z' = -2e^{\frac{\pi}{4}i} + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z' = (-2+\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(r سالبة نضربها بسالب) ونضيف π للزاوية

$$z' = -(2-\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z' = (2-\sqrt{2})e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)i} \Rightarrow z' = (2-\sqrt{2})e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

دورة 2018 الأولى:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط M,C,B,A التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية

$m=-1+i\,,\ c=2i\,,\ b=1-i\ ,\ a=-1-i$

❶ مثل الأعداد:

$m=-1+i\,,\ c=2i\,,\ b=1-i\ ,\ a=-1-i$

❷ احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

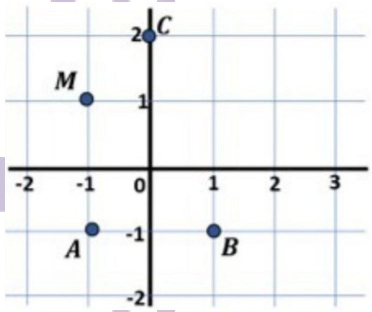
❸ أثبت أن النقاط B,O,M تقع على استقامة واحدة.

❹ احسب $arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج أن $(DC),(OM)$ متعامدان.

الحل:

① $A(-1,-1),\ B(1,-1),\ C(0,2),\ M(-1,1)$

الرسم



② $z_D-z_O=e^{\frac{\pi}{2}i}(z_C-z_O)$

$\Rightarrow d=e^{\frac{\pi}{2}i}c\Rightarrow d=ic=i\times 2i=-2$

③ حتى تقع النقاط على استقامة واحدة يجب أن يتحقق:

$$arg\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OB}}\right)=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})=0 \text{ أو } \pi$$

حقيقي بحت سالب $\Leftarrow arg(-1)=\pi$

وبالتالي $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}$ مرتبطات خطياً ومنه النقاط B,O,M تقع على استقامة واحدة.

④

$$\frac{c-d}{m}=\frac{c-d}{m-o}=\frac{z_{\overrightarrow{DC}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}=\frac{2+2i}{-1+i}$$

$$=\frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-4i}{2}=-2i$$

$$=(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC})$$

ومنه $arg\left(\frac{c-d}{m}\right)=(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC})$

ومنه $(DC),(OM)$ متعامدان.

دورة 2018 الثانية:

في المستوي العقدي إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين $z_A=4\,,\ z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ ولتكن I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

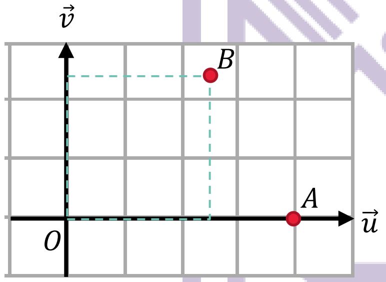
❶ مثل النقطتين A و B في معلم المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ واكتب z_B بالشكل الأسي.

❷ بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$.

❸ اكتب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin\frac{\pi}{8}$.

الحل:

①



$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

ومنه $z_B=4e^{i\frac{\pi}{4}}$

②

طبيعة المثلث:

$$OB=|b-o|=\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\right|$$

$$\Rightarrow OB=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$$

$$OA=|a-o|=|4|\Rightarrow OA=4$$

$$AB=|b-a|=\left|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i+4\right|$$

أي أن $OA=OB\neq AB$ وبالتالي المثلث متساوي الساقين فيه $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{4}$.

بما أن المثلث AOB متساوي الساقين و $[OI]$ متوسط متعلق بالقاعدة فهو منصف لزاوية الرأس وبالتالي فإن قياس الزاوية $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

دورة 2019 الأولى:

لتكن النقطتان A , B اللتان يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $z_A = -1 + i$, $z_B = -3i$

وليكن: $p(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

❶ أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $p(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة.

❷ جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

❸ اكتب z_A بالشكل الأسي.

الحل:

① نعوض z_A في المعادلة

$$(-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$$
$$= 1 - 2i + i^2 - 1 + i - 2i + 2i^2 + 3 + 3i$$
$$= -2i - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i = 0$$

ومنه z_A حل للمعادلة

نعوض في المعادلة

$$(-3i)^2 + (1+2i)(-3i) + 3 + 3i$$
$$= -9 - 3i + 6 + 3 + 3i = 0$$

z_B جذر للمعادلة (قمت بحلها بطريقة أخرى في البحث)

② حسب الصيغة العقدية للدوران:

نفرض أن النقطة الممثلة للعدد العقدي z_A هي z:

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$z' - z_B = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A - z_B)$$

$$z' + 3i = i(-1 + i + 3i) \Rightarrow z' = -4 - 4i$$

③

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_A = r.e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

③

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2}$$
$$= (2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + 2}$$
$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{4(2+\sqrt{2})} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومن الطلب السابق لدينا: $(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{8}$ أي زاوية العدد العقدي I هي $\frac{\pi}{8}$

ومنه: $z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$

بالمقارنة بين الشكلين الجبري والمثلثي نجد:

$$z_I = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$
$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

دورة 2019 الثانية:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط C , B, A التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية

$b=-6+3i \quad , \quad a=6-i \quad , \quad c=-18+7i$

❶ احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ احسب واستنتج أن النقاط C, B, A تقع على استقامة واحدة.

❷ بفرض أن $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ احسب θ.

❸ جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً.

الحل:

①

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}=\frac{-12+4i}{-24+8i}$$
$$=\frac{-12+4i}{2(-12+4i)}=\frac{1}{2}$$
$$arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=arg\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$\Leftarrow$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

② حسب الصيغة العقدية للدوران يكون:

$$d=0=e^{i\theta}(a-0)$$
$$d=e^{i\theta}a\Rightarrow\frac{d}{a}=e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow\theta=\arg\left(\frac{d}{a}\right)$$
$$\frac{d}{a}=\frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\frac{6+i+36i-6}{36+1}$$
$$=\frac{37i}{37}=i\Rightarrow\theta=arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

③

$$z_{OA}=z_{DN}\Rightarrow a-o=n-d$$
$$n=a+d\Rightarrow n=6-i+1+6i=7+5i$$

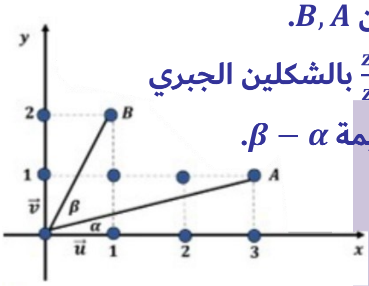
دورة 2020 الأولى:

نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$

❶ اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_B , z_A اللذين يمثلان النقطتين B, A.

❷ اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري والاسي ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$.



الحل:

①

$$A(3,1)\Rightarrow z_A=3+i$$
$$B(1,2)\Rightarrow z_B=1+2i$$

②

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1+2i}{3+i}=\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{5+5i}{10}$$
$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow\boxed{\frac{z_B}{z_A}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$
$$\beta-\alpha=arg(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$
$$=arg\left(\frac{b-o}{a-o}\right)=arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\frac{\pi}{4}$$

دورة 2020 الثانية:

ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{i+1}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ والمطلوب:

❶ بين أن $|w| = 1$ ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي.

❷ ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z - \bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي.

الحل:

$$|w| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = 1$$

بما أن r في w ليس حقيقي بحت فالعدد غير مكتوب بالشكل الأسي لنكتب كلاً من البسط والمقام بالشكل الأسي

نفرض:

$$z_1 = -\sqrt{2}$$

لتحويله إلى أسي

$$r = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \\ \sin\theta = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi}$$

بنفس الطريقة نجد: $z_2 = 1 + i$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

ومنه يكون:

$$w = \frac{-\sqrt{2}}{i+1}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{z_1}{z_2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}\,.e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = e^{i\frac{13\pi}{12}}}$$

② حتى يكون z حقيقي يجب أن يتحقق $\bar{z} = z$

وبما أن $|w| = 1 \quad \Leftarrow \quad \bar{w} = \frac{1}{w}$

$$\bar{z} = \overline{\left[\frac{z - \bar{z}w}{1-w}\right]} = \frac{\bar{z} - z\bar{w}}{1-\bar{w}} = \frac{\bar{z} - z\left(\frac{1}{w}\right)}{1-\frac{1}{w}}$$

$$= \frac{\frac{\bar{z}w - z}{w}}{\frac{w-1}{w}}$$

$$= \frac{\bar{z}w - z}{w-1} = \frac{-(z-\bar{z}w)}{-(1-w)} = \frac{z-\bar{z}w}{1-w} = z$$

بما أن $\bar{z} = z$ فإن z حقيقي.

دورة 2021 الأولى:

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية $a = 8$ و $b = -4 + 4i$ و $c = -4i$ بالترتيب، المطلوب:

❶ احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث قائم ومتساوي الساقين.

❷ جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

❸ جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً.

الحل:

①

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8+4i}$$

$$= \frac{4(-1+2i)}{4(2+i)} = \frac{-1+2i}{2+i}$$

$$= \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$$

$$arg\,\frac{b-c}{a-c} = arg\; i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow [BC] \perp [AC]$$

أي المثلث ABC هو مثلث قائم ومتساوي الساقين.

② حسب الصيغة العقدية للدوران:

$$d - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(a - o) \Rightarrow d = a\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

③ لدينا $BC = AC$ و $[BC] \perp [AC]$ لكي يكون الرباعي $ABCE$ مربعاً يجب أن يكون $z_{AE} = z_{CB}$

$$z_{AE} = z_{CB} \Rightarrow e - a = b - c \Rightarrow e = a + b - c$$

$$\Rightarrow e = 8 - 4 + 4i + 4i \Rightarrow e = 4 + 8i$$

دورة 2021 الثانية:

أولاً: ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة

$$P(z) = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ والمطلوب:

❶ احسب العدد α لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$.

❷ بفرض $\alpha = 1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z) = (z-2)Q(z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$.

ثانياً: لتكن C, B, A نقاط المستوى التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $c = -1 + i\sqrt{3}\ , b = 1 + i\sqrt{3}\ , a = 2$ والمطلوب:

❶ أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل عين c', b', a' التي تمثلها نقاط المستوى C', B', A' على الترتيب.

الحل:

① حساب العدد α:

$$P(2) = 0 \Rightarrow (2)^3 - 2(a + i\sqrt{3})(2)^2 - 4(a - i\sqrt{3})$$
$$(2) + 8 = 0 \Rightarrow 8 - 8(a + i\sqrt{3}) - 8(a - i\sqrt{3}) + 8 = 0$$
$$\Rightarrow 1 - (a + i\sqrt{3}) - (a - i\sqrt{3}) + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$-a - i\sqrt{3} - a + i\sqrt{3} + 2 = 0 \Rightarrow -2a + 2 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1$$

② استنتاج حلول المعادلة $P(z) = 0$

$$P(z) = (z-2)Q(2)$$
$$\Rightarrow P(z) = z^3 - 2(1 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8(z-2)Q(z)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 \\
\hline
z - 2 & z^3 - 2z^2 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4z + 4\sqrt{3}iz + 8 \\
 & \mp z^3 \pm 2z^2 \\
\hline
 & -2i\sqrt{3}z^2 - 4z + 4\sqrt{3}iz + 8 \\
 & \pm 2\sqrt{3}iz^2 \quad \mp 4\sqrt{3}iz \\
\hline
 & -4z \quad + 8 \\
 & \pm 4z \quad \mp 8 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}$$

ومنه نجد $P(z) = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$

$$\Rightarrow Q(z) = z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4$$

(كما يمكن إيجاده بالنشر ثم المقارنة)

$$P(z) = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$$

$\Rightarrow$ إما $z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$

أو $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3}i)^2 - 4(+1)(-4)$$
$$= -12 + 16 = 4 > 0$$
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}i + 2}{2} \Rightarrow z_1 = 1 + \sqrt{3}i$$
$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}i - 2}{2} \Rightarrow z_1 = -1 + \sqrt{3}i$$

ثانياً:

① إثبات أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2 - 1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-2}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$
$$\cos\frac{a}{r} = -\frac{1}{2}\ ,\ \sin\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$
$$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1 \Rightarrow AB = BC \\ 2)\ arg\frac{a-b}{c-b} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \hat{B} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية الرأس $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$

❖ تعيين C', b', a'

إذا كان z' نظير z بالنسبة لمحور الفواصل فإن $z' = \bar{z}$ وبالتالي نجد:

$$a' = \bar{a} = 2$$
$$b' = \bar{b} = 1 - i\sqrt{3}$$
$$c' = \bar{c} = -1 - i\sqrt{3}$$

الجـزء الثاني

دورة 2022 الأولى:

❶ جد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $w = -3 + 4i$.

❷ ثم حل في C المعادلة الآتية:

$$z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$$

الحل:

① نفرض أن $z = x + iy$ جذر تربيعي للعدد $w = -3 + 4i$

لدينا $x = -3 , y = 4$ وبالتالي نستنتج أن:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad ...(1)$$
$$x^2 - y^2 = |Re\, w| = -3 \quad ...(2)$$
$$2xy = |lm\, w| = 4 \quad ...(3)$$

نجمع $(1), (2)$ نجد:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

بطرح (1) من (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$\Rightarrow y = \pm 2$$

وبما أن $xy > 0$ فيجب أن يكون المقدارين x, y من إشارة واحدة وبالتالي يكون

إما $(x,y) = (-1,-2)$ أو $(x,y) = (1,2)$

فالجذران التربيعيان للعدد العقدي السابق هما:

$$z_1 = 1 + 2i \quad , \quad z_2 = -1 - 2i$$

② $a = 1 \quad , \quad b = 2 + 2i \quad , \quad c = i + \frac{3}{4}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2+2i)^2 - 4(1)\left(i + \frac{3}{4}\right)$$
$$= 4 + 8i - 4 - 4i - 3 = -3 + 4i$$

من الطلب السابق نجد أن: $\sqrt{\Delta} = \mp 1 \mp 2i$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2i + 1 + 2i}{2} = \frac{-1}{2}$$
$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2i - 1 - 2i}{2} = \frac{-3 - 4i}{2}$$
$$= -\frac{3}{2} - 2i$$

وبالتالي حلا المعادلة:

$$z_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad z_2 = -\frac{3}{2} - 2i$$

دورة 2022 الثانية:

أجب عن الأسئلة الثلاث الآتية:

❶ جد كل عدد عقدي يحقق $j^3 = 1$ واكتبه بالشكل الجبري.

❷ إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي

$$\omega = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$$

a) أثبت أن $|\omega| = 1$.

b) من أجل $\beta = 1$ أثبت أن $\omega^{12} = 1$.

❸ عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق $|z - 2 + i| = 5$.

الحل:

① نفرض أن $j = re^{i\theta}$

عندئذٍ المعادلة $j^3 = 1$ تكافئ $r^3 e^{3i\theta} = 1. e^{0i}$

ومنه $r^3 = 1$ و $3\theta = 0 + 2\pi k$

$\Leftarrow r = 1 \quad , \quad \theta = \frac{2\pi}{3}k$ (k عدد صحيح)

- من أجل $k = 0$ نجد أن $\theta = 0$ ومنه

$$i_1 = 1e^{i0} = 1$$

- من أجل $k = 1$ نجد أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$ومنه

$$i_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- من أجل $k = 2$ نجد أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ومنه

$$i_3 = 1e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

②

a) أياً كان β من $\mathbb{R}$ لدينا: $\omega = \frac{i(-i\beta + \sqrt{3})}{\sqrt{3} - i\beta} = i$

(أو نضرب بمرافق المقام)

ومنه $|\omega| = |i| = 1$

b) $\omega^{12} = i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

③ $|z - (2 - i)| = 5$

$\Leftarrow a = 2 - i$ هو العدد العقدي الممثل للنقطة A

عندئذٍ

المعادلة $|z - 2 + i| = 5$ تكافئ $|z - a| = 5$

ومنه فإن مجموعة النقاط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها $A(-2, 1)$ ونصف قطرها 5.

دورة 2023 الأولى:

تتأمل النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية $a=-1+i\sqrt{3}$ و $b=\frac{1}{2}-3+\sqrt{3}i$ و $c=2$ و $d=3+i\sqrt{3}$ بالترتيب، المطلوب:

❶ اكتب العدد $\frac{a-c}{d-c}$ بالشكل الجبري والأسي، واستنتج طبيعة المثلث DCA.

❷ جد العدد العقدي n الذي يمثل N صورة B وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته 2.

❸ أثبت أن النقطة B هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(D,-1)$ و $(C,1)$.

الحل:

①

$$\frac{a-c}{d-c}=\frac{-1+i\sqrt{3}-2}{3+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$$

جبري $\boxed{\frac{a-c}{d-c}=i\sqrt{3}}$

أسي $\frac{a-c}{d-c}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$arg\left[\frac{a-c}{d-c}\right]=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow (CA)\perp(CD)$$

فالمثلث DCA قائم في C.

② N صورة B وفق تحاكٍ مركزه A و $k=2$

$$n-a=k(b-a)$$
$$n-(-1+i\sqrt{3})=2\left(\frac{1}{2}(-3+i\sqrt{3})-a\right)$$
$$n-(-1+i\sqrt{3})=-3+i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}$$
$$n+1-i\sqrt{3}=-1-i\sqrt{3}$$
$$\boxed{n=-2}$$

③ بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,2)$, $(D,-1)$, $(C.1)$

$$g=\frac{2a-d+c}{2-1+1}=\frac{2a-d+c}{2}$$
$$=\frac{-2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}+2}{2}$$
$$g=\frac{1}{2}(-3+i\sqrt{3})=b$$

وبالتالي B هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,2)$, $(D.-1)$, $(C,1)$

دورة 2023 الثانية:

تأمل الشكل المرسوم جانباً $AEMN$, $ABCD$ مربعان

نختار معلم متجانس مباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$

ولتكن الأعداد العقدية

الممثلة s,n,m,e,d,c,b,a

للنقاط S,N,M,E,D,C,B,A والمطلوب:

❶ أثبت أنّ $d=ib$ و $e=-in$.

❷ احسب $\frac{e-b}{d-n}$ واكتبه بالشكل الأسي واستنتج أن: $(EB)\perp(ND)$ وأنّ $ND=EB$.

❸ إذا كانت S صورة D وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AC}$، اكتب s بدلالة c و d.

الحل:

① D صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$
$$\boxed{d=ib}\quad ;a=0$$

N صورة E وفق دوران مركزه A زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$n-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(e-a)$$
$$n=ie$$
$$\Rightarrow \boxed{e=-in}$$

②

$$\frac{e-b}{d-n}=\frac{-in-b}{ib-n}=\frac{i(-n+ib)}{-n+ib}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{e-b}{d-n}\right|=|i|=1\Rightarrow\frac{EB}{ND}=1$$
$$\Rightarrow\boxed{EB=ND}$$
$$arg\left[\frac{e-b}{d-n}\right]=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(\overrightarrow{ND},\overrightarrow{BE})=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow\boxed{(ND)\perp(EB)}$$

③

$$z_S=z_D+z_{\overrightarrow{AC}}$$
$$s=d+c-a\Rightarrow\boxed{s=d+c}$$

دورة 2024 الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، ليكن العدد العقدي $w = 8$، والأعداد العقدية a و b و c التي تمثل النقاط A و B و C بالترتيب.

❶ اكتب w بالشكل الأسي.

❷ إذا كانت a و b و c جذور المعادلة $z^3 = 8$، اكتب كلاً منها بالشكل الأسي.

❸ أثبت أنّ $a + b + c = 0$.

❹ أثبت أن النقاط A و B و C تقع على دائرة مركزها O، وما نصف قطر هذه الدائرة.

الحل:

① $w = 8 = 8e^{2\pi k i}$

② طريقة أولى:

$z_0 = 2$ جذر للمعادلة $z^3 = 8$

نقسم على $z - 2$

$$\begin{array}{r|l} & z^2 + 2z + 4 \\ \hline z-2 & z^3 - 8 \\ & \mp z^3 \pm 2z^2 \\ \hline & 2z^2 - 8 \\ & \mp 2z^2 \pm 4z \\ \hline & 4z - 8 \\ & \mp 4z \pm 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$(z-2)(z^2+2z+4) = 0$$

إما $z_0 = 2$

أو $z^2 + 2z + 4 = 0$

$$\Delta = 4 - 4(1)(4) = -12$$

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2 - 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 0$$

③

نفرض جذور المعادلة من الشكل $z = re^{i\theta}$ ونعوض

$$\left(re^{i\theta}\right) = 8$$

$$r^3 e^{3i\theta} = 8 = 8e^{2\pi k i}$$

بالمطابقة

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3}$$

$$k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 2e^0 = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$k = 2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

④ يجب تحقق:

$$OA = OB = OC$$

$$OA = |z_A - z_0| = \left|2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 2$$

$$OB = |b - o| = \left|2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right| = 2$$

$$OC = |c - o| = |2| = 2$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = 2$$

فالنقاط C, B, A تقع على دائرة مركزها O نصف قطرها $r = 2$.

الجـــزء الثاني

دورة 2024 الثانية:

في المستوي العقدي، نتأمل المعلم المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن الأعداد العقدية: $a=1$ و $b=-i$ و $c=-1$ الممثلة للنقاط A و B و C على الترتيب.

❶ إذا كانت C صورة A وفق دوران مركزه F وزاويته $\frac{\pi}{3}$، أثبت أنَّ العدد العقدي f الممثل للنقطة F هو $f=-\sqrt{3}i$.

❷ اكتب بالشكل الأسي كلاً من العددين العقديين z_1 الممثل للشعاع $\overrightarrow{CF}$، و z_2 الممثل للشعاع $\overrightarrow{CB}$.

❸ اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي العدد العقدي $\frac{b-c}{f-c}$، ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل:

$$c=-1 \quad , \quad b=-i \quad , \quad a=1$$

①

$$c-f=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-f)$$

$$c=f+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a-f)$$

$$-1=f+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1-f)$$

$$-1=f+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}f-\frac{\sqrt{3}}{2}fi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}f+\frac{\sqrt{3}}{2}if=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow f=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$f=\frac{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{3}{4}=-\sqrt{3}i$$

②

$$z_1=z_{\overrightarrow{CF}}=f-c=-\sqrt{3}i+1=1-\sqrt{3}i \;:\; r=2$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2=z_{\overrightarrow{CB}}=b-c=-1+1=1-i \;:\; r=\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

③

$$\frac{b-c}{f-c}=\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \dots(1)$$

ولدينا:

$$\frac{b-c}{f-c}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad \dots(2)$$

بمساواة (1) مع (2) نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

عندما تؤمن بأنك تستحق الأفضل

ستحصل عليه فعلاً

الجزء الثاني

دورة 2017 الأولى:

السؤال الرابع:

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة

❶ بكم طريقة يكن للطالب أن يختار الأسئلة؟

❷ بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟

الحل:

① اختيار الأسئلة عشوائي لذلك نستخدم التوافيق

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

② بقي خمسة أسئلة على الطالب اختيار اثنين منها

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

التمرين الثالث:

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$. نعرف X المتحول العشوائي الذي يدلّ على عدد مرات ظهور الشعار، اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

لدينا تجربة برنولية لأن $n = 3$

$p = \frac{1}{3}$ ويعطي $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$k \in X = \{0, 1, 2, 3)$

نطبق قانون برنولي

$$P(x = k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$$

من أجل $k = 0$:

$$P(x = 0) = \binom{3}{0} . \left(\frac{1}{3}\right)^0 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

من أجل $k = 1$:

$$P(x = 1) = \binom{3}{1} . \left(\frac{1}{3}\right) . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{12}{27}$$

من أجل $k = 2$:

$$P(x = 2) = \binom{3}{2} . \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{e}\right)^1 = 3.\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$

من أجل $k = 3$:

$$P(x = 3) = \binom{3}{3} . \left(\frac{1}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{e}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

يمكن حل المسألة عن طريق المبدأ الأساسي في العد.

لدينا $x = \{0, \ 1, 2, 3\}$

حيث $P(T) = \frac{2}{3} \ , P(H) = \frac{1}{3}$

عند $x = 0$ ظهور T ثلاث مرات (T, T, T)

$$P(x = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{8}{27}$$

عند $x = 1$ ظهور H مرة واحدة 4

$$\{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\}$$
$$P(x = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{12}{27}$$

عند $x = 2$ تعي ظهور H مرتين

$$\{(T, H, H) , (H, T, H) , (H, H, T)\}$$
$$P(x = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{27}$$

عند $x = 3$ تعني ظهور H ثلاث مرات

$$(H, H, H)$$
$$P(x = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{27}$$

k	02	1	2	3
$P(x = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

التوقع الرياضي:

$$E(x) = n.p = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

ويمكن تطبيق القانون:

$$E(x) = \sum\left(k.P(x = k)\right)$$

التباين:

$$V(x) = n.p.q = \frac{2}{3}$$

ويمكن تطبيق القانون:

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

دورة 2017 الثانية:

المسألة الثانية:

يضم مصنع ورشتين B, A لتصنيع الأقلام، عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنّعت الورشة A منها 600 قلماً وصنعت البقية الورشة B، هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال، في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب، نرمز بالرمز A إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A) وبالرمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B) وبالرمز D إلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال)

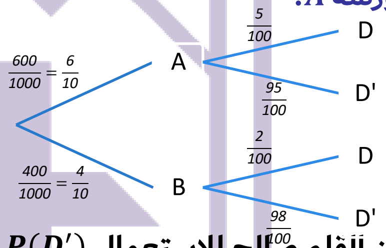
❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

❷ احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال.

❸ إذا كان القلم صالحاً للاستعمال، فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A؟

الحل:

①



② احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال $P(D')$

إما صالح ومن A أو صالح ومن B

$$P(D') = \frac{95}{100} \times \frac{6}{10} + \frac{98}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{570}{1000} + \frac{392}{1000}$$

$$P(D') = \frac{962}{1000}$$

$$P(A|D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')}$$

$$P(A \cap D') = \frac{95}{100} \times \frac{6}{10} = \frac{570}{1000}$$

$$P(D') = \frac{\frac{570}{1000}}{\frac{962}{1000}} = \frac{570 \times 1000}{962 \times 1000} = \frac{285}{481}$$

③ لدينا $X = \{0, 1, 2\}$

$P(x = 0)$ هو احتمال سحب قلم غير صالح.

عدد الأقلام غير الصالحة من ورشة A يساوي:

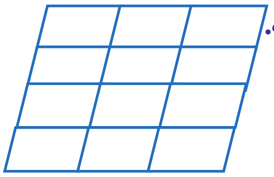
$$600 \times \frac{5}{100} = 30$$

$$P(x = 0) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{30 \times 29}{600 \times 599} = \frac{29}{11980}$$

دورة 2018 الأولى:

السؤال الثالث:

في الشكل المجاور، نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية، تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع، والمطلوب:



احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة.

الحل:

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 60$$

حتى ينشئ متوازي أضلاع يتطلب مستقيمين شاقوليين ومستقيمين أفقيين.

التمرين الثالث:

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية، الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات:

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

فإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$

و $P(X = 0) = \frac{1}{27}$, $P(X = 1) = \frac{6}{2}$

❶ جد $P(X = 3), P(X = 2)$

❷ ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟

❸ ما تباين المتحول العشوائي X؟

الحل:

① لدينا تجربة برنولية

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$

حيث $n = 3$ و $k \in X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$p = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(x = 2) = \binom{3}{2} . \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27}$$

$$P(x = 3) = \binom{3}{3} . \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{8}{27} \times 1 = \frac{8}{27}$$

② $E(x) = n.p = 3 \times \frac{2}{3} = 2$

③ $V(x) = n.p.q = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

دورة 2018 الثانية:

السؤال الثالث:

في إحدى مراكز الخدمة ثلاثة مهندسين وخمس عمال، كم لجنة قوامها مهندس وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة؟

الحل:

$$\binom{3}{1}\binom{5}{2} = 3 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 30$$

التمرين الثاني:

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً، نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك والمطلوب: اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي.

تكرورية هامة:

عند مسائل الصناديق نحدد ثلاث أشياء:
n : عدد الشغلات الموجودة في الصندوق
r : عدد الشغلات المسحوبة من الصندوق.
نوع السحب:
معاً $\binom{n}{r}$ - دون إعادة P_n^r - مع إعادة $n.r$

الحل:

$n = 9$, $r = 3$ ، معاً (توافيق)

$$X = \{0, 3, 5\}$$

$$P(x=3) = \text{حمراء } (2) \text{ و خضراء} (1) = \frac{\binom{5}{2}.\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{240}{504} = \frac{20}{42}$$

$$P(x=5) = \text{حمراء } (3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{42}$$

$$P(x=0) = 1 - \big(P(x=5) + P(x=3)\big) = 1 - \frac{25}{42} = \frac{17}{42}$$

x	0	3	5
$P(x)$	$\frac{17}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

التوقع الرياضي:

$$E(x) = \sum\big(x.P(x)\big)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{17}{42}\right) + 3\left(\frac{20}{42}\right) + 5\left(\frac{5}{42}\right) = \frac{85}{42}$$

دورة 2019 الأولى:

السؤال الثاني:

عين الحد المستقل عن x في منشور

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$$

الحل:

$$T_r = \binom{n}{r}.a^{n-r}.b^r$$

$$T_r = \binom{6}{r}(x)^{6-r}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= \binom{6}{r}.(x)^{6-r}.(x)^{-2r}$$

$$= \binom{6}{r}.(x)^{6-3r}$$

الحد المستقل هو x_0

$$x^{6-3r} = x^0$$

$$6 - 3r = 0 \Rightarrow r = 2$$

الحد الذي يحوي الحد الثابت هو الحد الثالث

$$T_2 = \binom{6}{2} = 15$$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاث حمراء اللون، وتحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 0 ، 1 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق.

الحدث A: الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته، احسب $P(A)$

نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين، عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي، ثم احسب توقعه الرياضي.

الحل:

إما 2 حمراء، أو 2 بيضاء = $P(A)$

$$P(A) = \frac{P_2^2}{P_5^2} + \frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{2}{5 \times 4} + \frac{3 \times 2}{5 \times 4}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

تكرورية هامة:

في مسائل الصناديق عندما يكون لدينا كرات مرقمة وملونة، عند السؤال عن الأرقام ننسى الألوان

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0)=\frac{P_2^2}{P_5^2}\times 1=\frac{2}{5\times 4}=\frac{1}{10}$$

$$P(x=1)=\frac{P_2^1.P_2^1}{P_5^2}\times 2=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$P(x=2)=\frac{P_2^1.P_1^1}{P_5^2}\times 2+\frac{P_2^2}{P_5^2}\times 1=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

$$P(x=3)=\frac{P_2^1.P_1^1}{P_5^2}\times 2=\frac{2}{10}$$

X_1	0	1	2	3
$P(X=X_1)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(x)=\frac{4}{10}+\frac{6}{10}+\frac{6}{10}=\frac{8}{5}$$

تظن أنها النهاية ثم يصلح الله كل شيء

دورة 2019 الثانية:

السؤال الثاني:

عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة:

$$\binom{15}{2n}=\binom{15}{n+3}$$

الحل:

الشرط: $\begin{matrix}2n\le 15\\ n+3\le 15\end{matrix}\Rightarrow n\le 7$

إما $2n=n+3\Rightarrow n=3$ مقبول

أو $15=2n+n+3\Rightarrow n=4$ مقبول

التمرين الرابع:

صندوق يحتوي على خمس كرات، منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء، نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته.

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة عين مجموعة القيم التي يأخذها X واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X، واحسب توقعه الرياضي.

الحل:

$$X=\{2,3,4\}$$

السحب مرتان عندما يكون (حمراء ، حمراء)

السحب ثلاث مرات عندما يكون (زرقاء، زرقاء، زرقاء) (حمراء ، زرقاء ، حمراء) (زرقاء) ، حمراء ، حمراء)

السحب أربع مرات عندما يكون:

(ح ، ز ، ز ، ح) (ح ، ز ، ز ، ز) (ز ، ح ، ز ، ح)

(ز ، ح ، ز ، ز) (ز ، ز ، ح ، ز) (ز ، ز ، ح ، ح)

$$P(x=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$P(x=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{1}$$

$$P(x=4)=1-[P(x=2)+P(x=3)]=1-\frac{4}{16}=\frac{6}{10}$$

x_1	2	3	4
$P(x=x_1)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$E(x)=\sum(x_1P(x=x_1))=\frac{2+9+24}{10}=\frac{35}{10}$$

الجـــزء الأول

دورة 2020 الأولى:

السؤال الثالث:

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات، يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم: 5، 4، 3، 2، 1، 0.

❶ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل؟

❷ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

الحل:

① $6 \times 6 \times 6 = 216$

② $6 \times 5 \times 4 = 120$

دورة 2020 الثانية:

السؤال الثاني:

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5، نسحب عشوائياً كرتين على التتالي مع الإعادة والمطلوب:

❶ كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

❷ كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموع رقميهما عدد فردي؟

الحل:

① $5 \times 5 = 25$

② المجموع فردي إذا كانت كرة مرقمة بعدد زوجي وكرة مرقمة بعدد فردي (عدد التباديل 2)

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

دورة 2021 الأولى:

السؤال الثاني:

جد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$$

الحل:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} . b^r$$

$$T_r = \binom{12}{r} x^{12-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= \binom{12}{r} x^{12-r} . x^{-2r}$$

$$= \binom{12}{r} x^{12-3r}$$

الحد الثابت المستقل عن x يحقق:

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$T_r = \binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

السؤال السادس:

تتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود، ووجهان ملونان بالأحمر، نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي، نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها، والمطلوب

❶ اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X = 0)$

❷ احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه.

الحل:

تجربة برنولية

① قيم المتحول العشوائي X:

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$n = 5 \, , p = \frac{2}{3} , q = \frac{1}{3} \, , k = 0$$

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$

$$P(x = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

② التوقع الرياضي:

$$E(x) = n.p = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$V(x) = n.p.q = 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

دورة 2021 الثانية:

السؤال الأول:

عين قيمة n التي تحقق المعادلة

$$P^3_{n+3} = 16\binom{n+2}{2}$$

الحل:

شرط الحل:

$$n+2 \geq 2 \Rightarrow n \geq 0$$
$$n+3 \geq r \Rightarrow n \geq 0$$

ومن شرط الحل $n \geq 0$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 8(n+1)(n+2)$$

نقسم على $(n+2)(n+1) \neq 0$

$$n+3 = 8 \Rightarrow n = 5$$

مقبول

دورة 2022 الأولى:

السؤال الثالث:

صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق، نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق، ثم نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق، ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق.

الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون،

الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون.

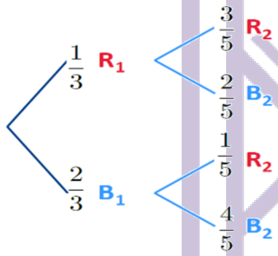
المطلوب:

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء؟

الحل:

①



②

$$P(R_2) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_1'|R_2) = \frac{P(R_1'\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

السؤال الخامس:

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الستة الآتية بأحد العددين $+1$ أو -1 المطلوب:

❶ بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة؟

❷ بفرض أن X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الستة بعد ملئها، عين مجموعة قيم X.

❸ بكم طريقة يمكن ملء الخانات الستة ليكون مجموع الأعداد فيها يساوي الصفر.

الحل:

① $n^r = 2^6 = 64$

② مجموع قيم x

$$X = \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$$

③ يكون المجموع صفراً إذا وضعت في ثلاث خانات من أصل ستة

$$\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

دورة 2022 الثانية:

السؤال السادس:

لتكن C دائرة مركزها O، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة، لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار، والمطلوب:

❶ ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S؟

❷ ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S؟

❸ كم مستطيل رؤوسه من عناصر S؟

الحل:

① $\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$

② $\binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$

③ عدد المستطيلات يساوي عدد المجموعات الجزئية

$$\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

التمرين الثالث:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة، واحدة زرقاء تحمل الرقم 2 وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين 0 و 1 ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة، ونعرف المتحولين العشوائيين Y, X كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين.

❶ اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.

❷ اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

❸ اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y)، أيكون المتحولان Y, X مستقلين احتمالياً؟ لماذا؟

① $X = \{1, 2\}$

$$P(x=1) = \frac{P_2^1 . P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(x=2) = \frac{P_2^2}{P_3^2} \times 1 = \frac{2}{3\times2} = \frac{1}{3}$$

X	1	2
$P(x=k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

② $Y = \{1, 2, 3\}$

$$P(y=0) = \frac{P_1^1 . P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \frac{2}{3\times2} = \frac{1}{3}$$

$$P(y=1) = \frac{P_1^1 . P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \frac{1}{3}$$

$$P(y=2) = \frac{P_1^1 . P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \frac{1}{3}$$

y	0	1	2
$P(y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

③

$x \backslash y$	1	2	3	قانون y
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
قانون x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$P(x=1).P(y=1) = \frac{2}{9}$$
$$\neq P((x=1)\cap(y=1))$$

منه x, y غير مستقلين احتمالياً

الجـــزء الأول

دورة 2023 الأولى:

السؤال الثالث:

عيّن في منشور

$$\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

الحد الذي يحوي x^4 ، هل يوجد حد مستقل عن x؟ علل ذلك.

الحل:

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\,b^r$$

$$a=2x\ ,\ b=\frac{1}{\sqrt{x}}\ \ ,\ n=10$$

$$T_r=\binom{10}{r}(2x)^{10-r}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$=\binom{10}{r}2^{10-r}.x^{10-\frac{3}{2}r}$$

$$10-\frac{3}{2}r=4$$

$$\frac{3}{2}r=6\Longrightarrow\boxed{r=4}$$

$$T_4=\binom{10}{4}2^6.x^4=13440x^4$$

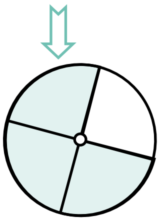
نضع $10-\frac{3}{2}r=0$

وبالتالي $\frac{3}{2}r=10$

حل المعادلة ليست عدداً طبيعياً

وبالتالي المنشور لا يحوي حد مستقل عن x.

السؤال السادس:



ندوّر القرص الدائري المرسوم جانباً ليستقر المؤشّر على أحد الأجزاء، ثمّ نكرّر التجربة خمس مرات. نعرّف متحوّلاً عشوائياً X يدل على عدد المرّات التي يستقرّبها المؤشّر على الجزء المظلل، المطلوب:

1. ما احتمال أن يستقر المؤشر على الجزء المظلل مرتين على الأقل؟
2. احسب التوقّع الرياضي والتباين للمتحوّل X.

الحل:

$$n=5\quad ,\quad P=\frac{1}{4}$$

تجربة برنولية

① $$P(x=k)=\binom{n}{k}P^k.q^{n-k}$$

$$P(x\geq 2)=1-[P(x=0)+P(x=1)]$$

حيث $$P(x=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

و $$P(x=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$P(x\geq 2)=1-\left[\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}\right]$$

$$=1-\frac{648}{1024}=\frac{376}{1024}$$

②

$$E(x)=n.p=5.\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$V(x)=n.p.q=5.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$$

الجـــزء الأول

دورة 2023 الثانية:

السؤال الثالث:

لتكن المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، المطلوب:

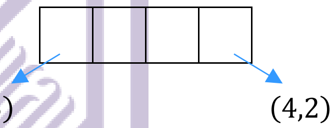
❶ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة E.

❷ كم عدداً زوجياً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل وكل عدد منها أكبر تماماً من 5000.

الحل:

① $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

②



$$2 \times 1 \times 3 \times 2 = 12 \quad \begin{cases} 2 : \text{آحاد} \\ 1 : \text{آلوف} \\ 3 : \text{عشرات} \\ 2 : \text{مئات} \end{cases}$$

السؤال السادس:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية علماً أن المتحولين (X, Y) العشوائيين X, Y مستقلان احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.3
1			0.14	
قانون Y		0.4		1

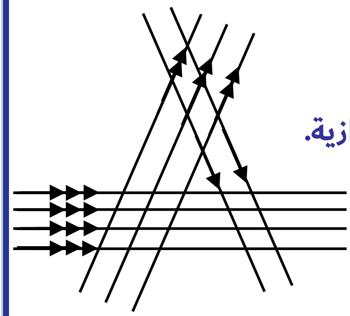
الحل:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) . P(Y = y_j)$$

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.12	0.06	0.3
1	0.28	0.28	0.14	0.7
قانون Y	0.4	0.4	0.2	1

دورة 2024 الأولى:

السؤال الرابع:



في الشكل المجاور، نتأمل ثلاث مجموعات من المستقيمات المتوازية.

ما عدد متوازيات الأضلاع المرسومة في هذا الشكل؟

الحل:

ثلاث مجموعات من المستقيمات المتوازية

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{المستقيمات} \twoheadrightarrow\!\!\to}\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{المستقيمات} \twoheadrightarrow} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{المستقيمات} \twoheadrightarrow\!\!\to}\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{المستقيمات} \to} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{المستقيمات} \twoheadrightarrow}\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{المستقيمات} \to}$$

$$= (6)(3) + (6)(1) + (3)(1)$$
$$= 18 + 6 + 3 = 27$$

السؤال السابع:

نتأمل صندوقين، يحتوي الصندوق الأول على كرتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، ويحتوي الصندوق الثاني على ثلاث كرات حمراء وكرة سوداء واحدة، نسحب عشوائياً من الصندوق الأول كرة ونضعها في الصندوق الثاني، ثم نحسب عشوائياً كرة من الصندوق الثاني.

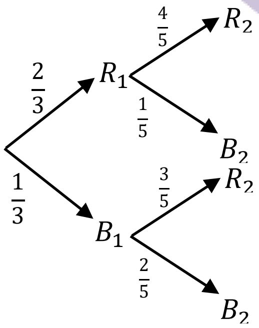
❶ أعطِ تمثيلاً شجرياً لهذه التجربة.

❷ ما احتمال أنّ تكون كرة من الصندوق الثاني.

❸ إذا علمت أنَّ الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء فما احتمال أنَّ تكون الكرة المسحوبة أولاً سوداء؟

الحل:

①



② $$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{2}{3} . \frac{4}{5} + \frac{1}{3} . \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$$

③

$$P(B_1 \backslash R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{11}{15}} = 3/11$$

دورة 2024 الثانية:

السؤال الثالث:

لتكن المجموعة $E = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$.

❶ كم عدداً مختلف الأرقام، مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكن تشكيله من عناصر المجموعة E؟

❷ كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، أكبر من 500، يمكن تشكيله من عناصر المجموعة E؟

الحل:

$S = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

① طريقة $120 = 4 \times 5 \times 6 =$ عدد الطرق

② المئات بـ 3 طرق

الآحاد بـ 6 طرق

العشرات بـ 6 طرق

طريقة $108 = 3 \times 36$ عدد الطرق

﴿وَهُوَ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ﴾

التمرين الثالث:

وُضِعْت أربعة أسئلة في مسابقة، لكل سؤال منها خمس إجابات مقترحة، واحدة منها فقط صحيحة.

يجيب متسابق عشوائياً عن هذه الأسئلة الأربعة.

❶ ما احتمال أن يُجيب هذا المتسابق عن السؤال الأول بشكلٍ صحيح؟

❷ نعرّف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي يُجيب عنها المتسابق. اكتب قيم المتحول العشوائي X ، واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

❸ يعدُّ ناجحاً في المسابقة من يُجيب عن ثلاثة أسئلة على الأقل بشكل صحيح، ما احتمال نجاح هذا المتسابق؟

الحل:

① A حدث أن يجيب عن السؤال الأول بشكل صحيح.

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

② $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

التجربة برنولية: $n = 4$

$$p = \frac{1}{5}\ , \qquad q = \frac{4}{5}$$

$$E(x) = 4 \times \frac{1}{5} = n.p = \frac{4}{5}$$

$$V(x) = n.p.q = \frac{16}{25}$$

③ S حدث النجاح يتحقق من $K = \{3, 4\}$

$$P(S) = \binom{4}{3} p^3 q + \binom{4}{4} p^4 = 4\left(\frac{1}{125}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{625}$$

$$= \frac{16+1}{625} = \frac{17}{625}$$

الجـــزء الأول