لكى تفهم وتحل

هندسة

الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

معلومات تراكمية

مصطفى لاشين

لكى نفهم هندسة الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

يجب معرفة الآتى

معلومات تراكمية على الصف الأول والثانى

الزاويتان المتكاملتان :

هما زاويتان مجموع قياسيهما ١٨٠°

تكون أحدهما حادة والأخرى منفرجة أو كل منهما قائمة .

الزاويتان المتتامتان :

هما زاويتان مجموع قياسيهما ٩٠°

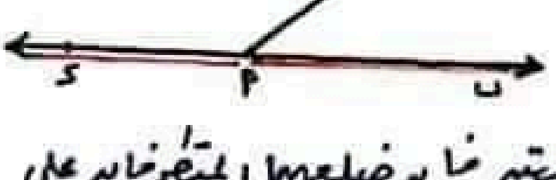
وتكون كل منهما زاوية حادة

ملحوظة هامة :

١ مكملات الزاوية الواحدة (أو الزوايا المتساوية فى القياس) تكون متساوية فى القياس .

٢ متممات الزاوية الواحدة (أو الزوايا المتساوية فى القياس) تكون متساوية فى القياس .

- الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع نقطة بدايته تقع على هذا المستقيم متكاملتان .



ق(ب $\hat{أ}$ ج) + ق(ج $\hat{أ}$ د) = ١٨٠°

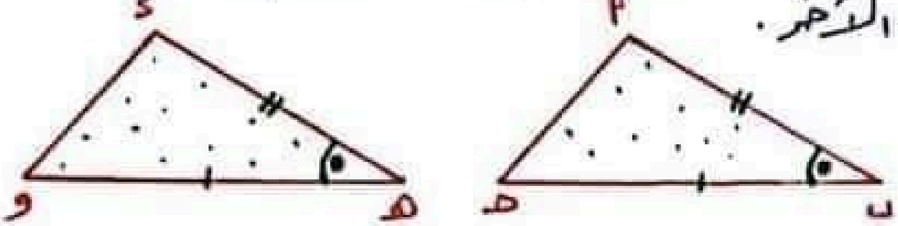
- إذا كانت الزاويتين المتجاورتين متكاملتين فإن ضلعيهما المتطرفان على استقامة واحدة .

- إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس .

حالات تطابق المثلثات

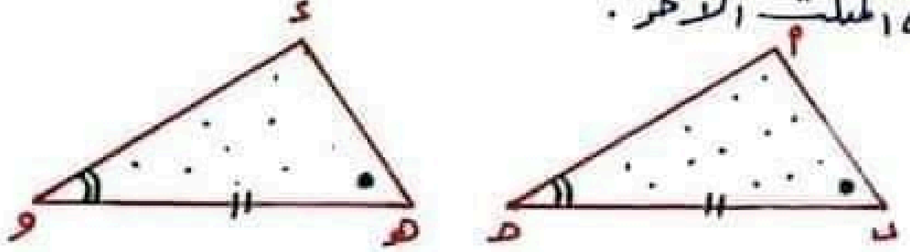
الحالة الأولى :

يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من أحد المثلثين مع نظائرها من المثلث الآخر .



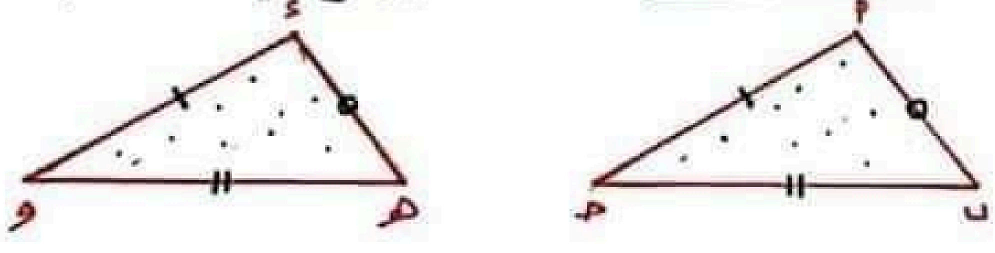
الحالة الثانية :

يتطابق المثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما من أحد المثلثين مع نظائرها من المثلث الآخر .



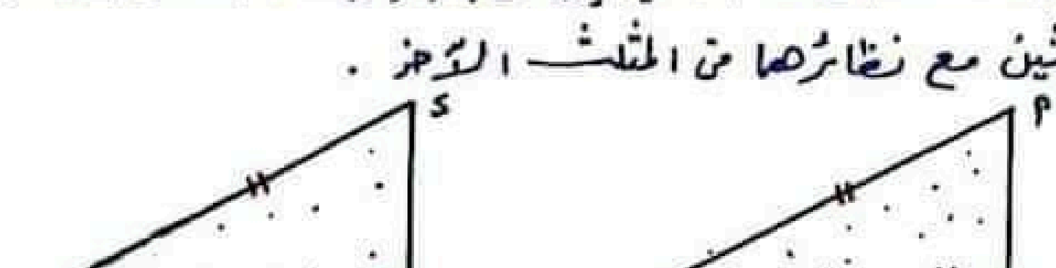
الحالة الثالثة :

يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع من أحد المثلثين مع نظيره من المثلث الآخر



الحالة الرابعة :

يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر وأحد ضلعي القائمة من أحد المثلثين مع نظائرهما من المثلث الآخر .

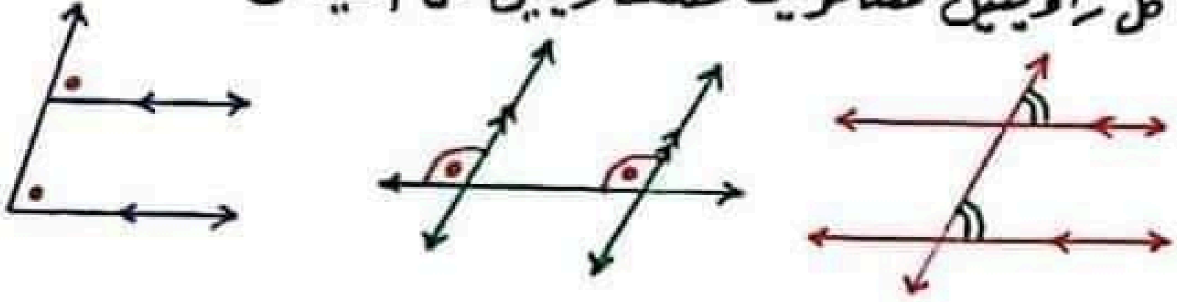


مصطفى لاشين

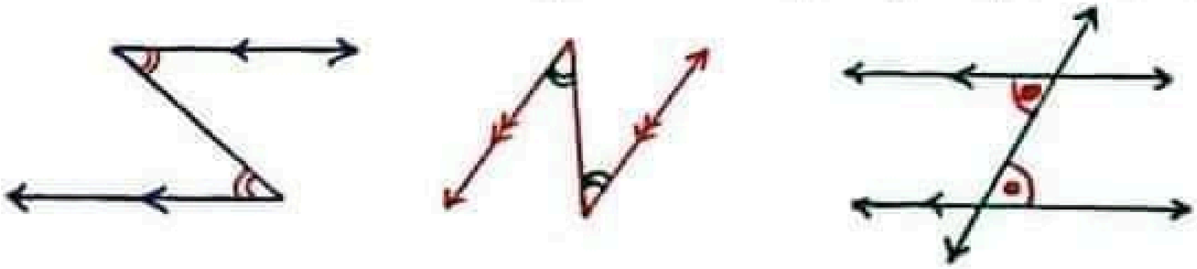
التوازي

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن

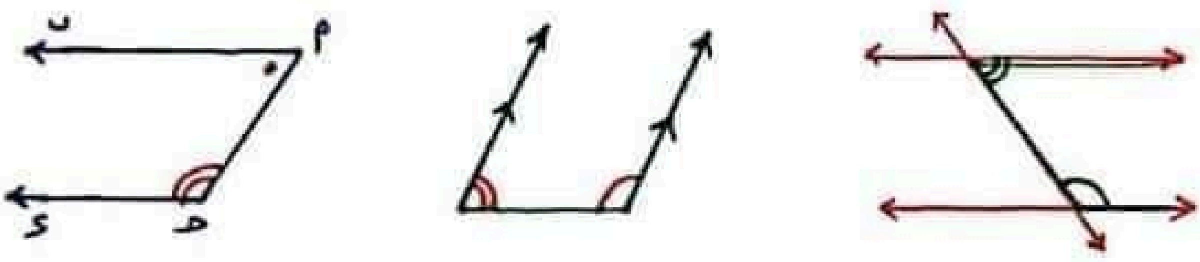
1. كل زاويتين متناظرتين متساويتين في القياس .



2. كل زاويتين متبادلتين متساويتين في القياس .



3. كل زاويتين داخليتين ومن جهة واحدة من القاطع متكاملتان .



إثبات أن المستقيمان متوازيان :

إذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث إحدى الحالات الآتية :

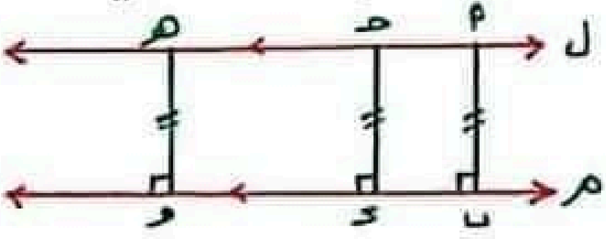
1. زاويتان متناظرتان متساويتان في القياس .
2. زاويتان متبادلتان متساويتان في القياس .
3. زاويتان داخلتان ومن جهة واحدة من القاطع متكاملتان .

كان المستقيمان متوازيان .

مصطفى لاشين

نتائج هامة على التوازي

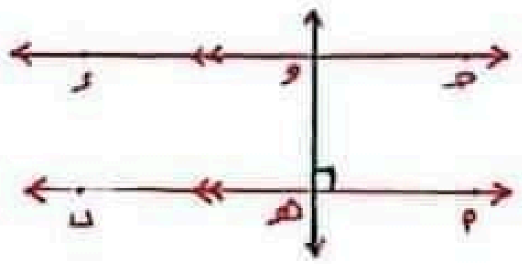
1) المستقيمان المتوازيان البعد العمودي بينهما ثابت .



∵ ل // م

∴ أب = جـ د = هـ و

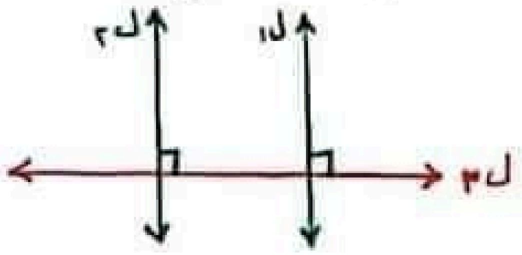
2) المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين في المستوى يكون عمودياً على الآخر .



∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{هـ و}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

3) المستقيمان العموديان على ثالث في المستوى متوازيان .

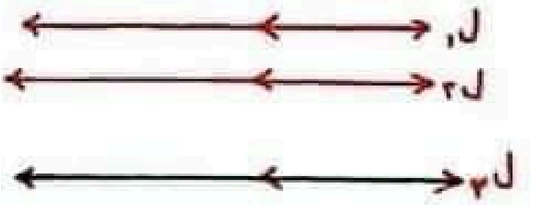


∵ ل١ ⊥ ل٣ ، ل٢ ⊥ ل٣

∴ ل١ // ل٢

مصطفى الرشيدي

4) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان .

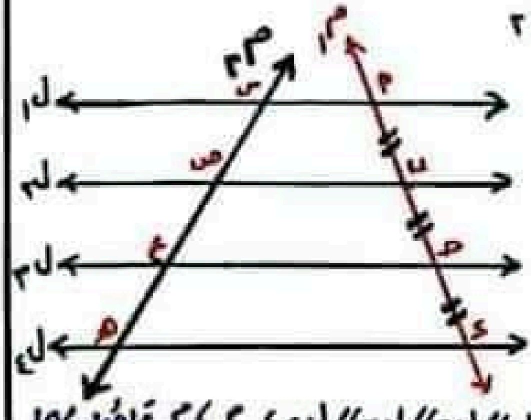


∵ ل١ // ل٣ ، ل٢ // ل٣

∴ ل١ // ل٢

5) نظرية تاليس :

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات المتوازية متساوية في الطول فإن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر متساوية في الطول .



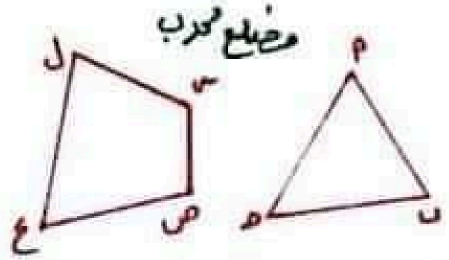
∵ ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م١ ، م٢ قاطعان لها

بحيث أب = ب جـ = جـ د

∴ س ص = ص ع = ع هـ

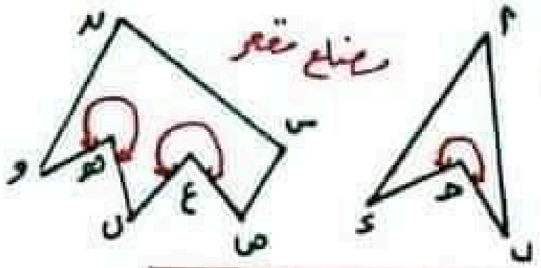
المضلع

هو خط بسيط مغلق يتكون من إتحاد عدة قطع مستقيمة تسمى أضلاع المضلع.



المضلع المحدب:

قياس كل زاوية من زواياه الداخلة أقل من ١٨٠°



المضلع المقعر:

توجد به زاوية واحدة على الأقل من الزوايا الداخلة منعكسة.

> مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مضلع عدد أضلاعه ن
>
> $$= (\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ$$

- عدد أقطار المضلع $= \dfrac{\text{ن}(\text{ن} - ٣)}{٢}$

- مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن $= ٣٦٠^\circ$

المضلع المنتظم:

هو مضلع يتوافر فيه شرطان: ١ جميع أضلاعه متساوية في الطول.

٢ جميع زواياه متساوية في القياس

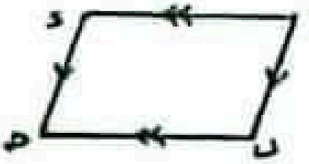
> قياس كل زاوية من زوايا مضلع محدب منتظم عدد أضلاعه ن
>
> $$= \dfrac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠}{\text{ن}}$$

- عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس إحدى زواياه س°

$$= \dfrac{٣٦٠^\circ}{١٨٠ - \text{س}^\circ} = \dfrac{٣٦٠^\circ}{\text{مكملة س}^\circ}$$

- محيط المضلع المنتظم = طول الضلع × عدد الأضلاع — مستر مصطفى الدرشيني

متوازي الأضلاع



هو شكل رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

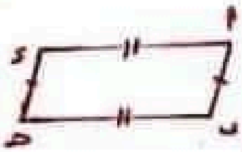
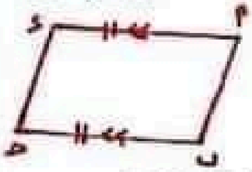
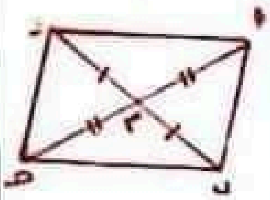
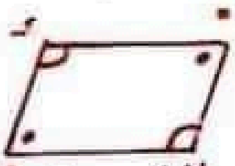
أ ب جـ د شكل رباعي فيه : $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$ ، $\overline{أد} \parallel \overline{بجـ}$

خواص متوازي الأضلاع :

1. كل ضلعان متقابلان متساويان في الطول .
2. كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس .
3. مجموع قياسي أي زاويتين متتاليتين يساوي ١٨٠°
4. القطران ينصف كلا منهما الآخر .

متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع ؟

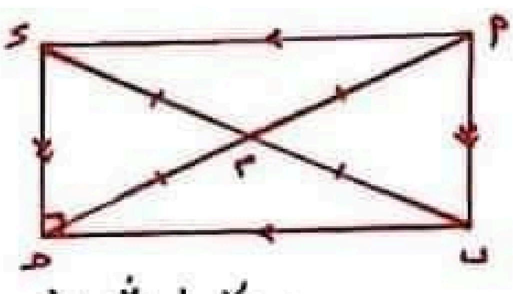
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تحققت إحدى الحالات الآتية

١	٢	٣	٤	٥
إذا توازى فيه كل ضلعان متقابلين	إذا تساوى فيه كل ضلعان متقابلين	إذا توازى ضلعان متقابلين فيه وتساويا في الطول	إذا نصف القطران كلا منهما الآخر	إذا تساوى فيه قياسا كل زاويتين متقابلتين
				
$\overline{أد} \parallel \overline{بجـ}$ ، $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$	أب = جـ د أد = ب جـ	$\overline{أد} \parallel \overline{بجـ}$ أد = ب جـ	م أ = م جـ م ب = م د	ق(∠أ) = ق(∠جـ) ق(∠ب) = ق(∠د)

حالات خاصة لمتوازي الأضلاع

المستطيل :

هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



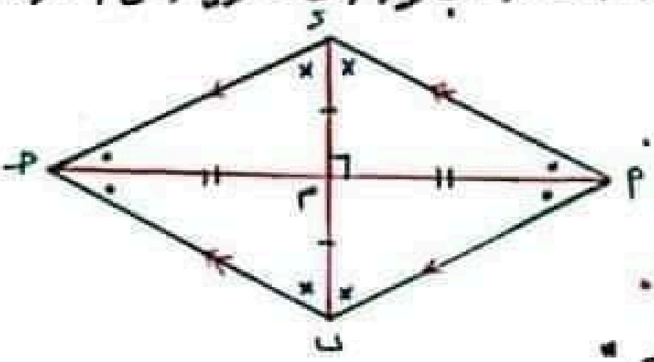
خواصه :

1. جميع زواياه قوائم
2. القطران متساويان في الطول .

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

مصطفى أبو شبين

المعين : هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول



خواص المعين :

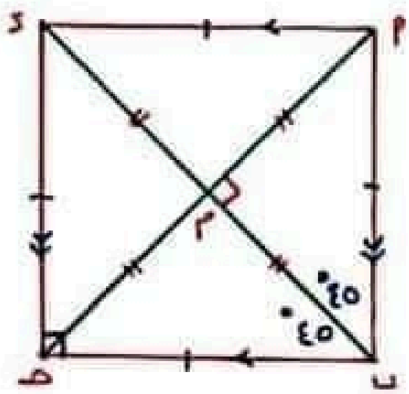
① أضلاعه الأربعة متساوية في الطول

② قطراه متعامدان

"وكل قطر ينصف زاويتين متقابلتين"

"محيط المعين = طول الضلع × ٤"

المربع : هو متوازي أضلاع زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول .



خواص المربع :

① أضلاعه الأربعة متساوية في الطول

② جميع زواياه قوائم .

③ القطران متساويان في الطول ومتعامدان

"كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين"

④ الزاوية المحصورة بين القطر والضلع قياسها ٤٥° "محيط المربع = طول الضلع × ٤"

لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل "نثبت إحدى الخاصيتين"

1 إحدى زواياه قائمة

2 القطران متساويان في الطول

لإثبات أن متوازي الأضلاع معين : نثبت إحدى الخاصيتين

1 ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول

2 القطران متعامدان .

لإثبات أن متوازي الأضلاع مربع : نثبت إحدى الخواص .

1 القطران متساويان في الطول ومتعامدان .

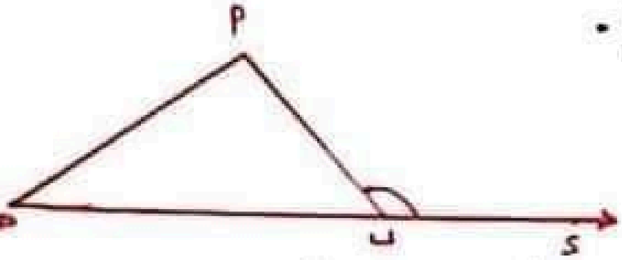
2 ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول وإحدى زواياه قائمة .

3 إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان

مصطفى الدشين

المثلث

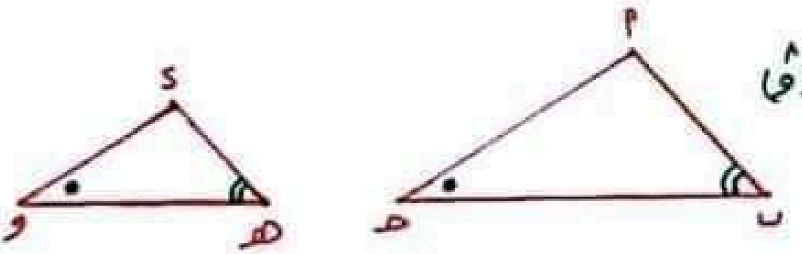
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي ١٨٠°
- قياس أي زاوية خارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها .



∵ ∠ أ ب د خارجة عن △ أ ب جـ

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ) + ق(∠ جـ)

- إذا ساوت زاويتين في مثلث زاويتين في مثلث آخر كان قياس الزاوية الثالثة من المثلث الأول مساويا لقياس الزاوية الثالثة من المثلث الآخر .

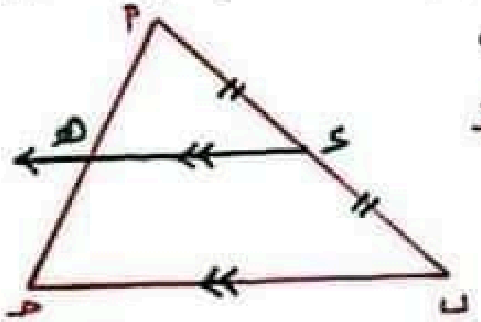


∵ ق(∠ ب) = ق(∠ هـ) ، ق(∠ جـ) = ق(∠ و)

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ د)

التوازي في المثلث

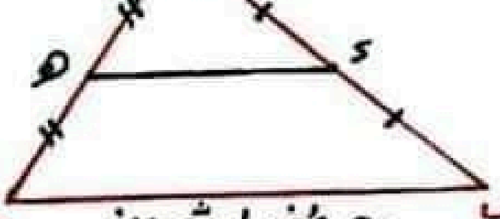
- الشعاع المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازيا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث .



في △ أ ب جـ : ∵ د منتصف أب ، دهـ // بجـ

∴ هـ منتصف أجـ

- القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول الضلع الثالث .



في △ أ ب جـ : ∵ د منتصف أب ، هـ منتصف أجـ

∴ ① دهـ // بجـ

② دهـ = $\frac{1}{2}$ بجـ

محمد محفوظ الرشيدي

التحويلات الهندسية

الانعكاس :

أ (س ، ص) ← الانعكاس في محور السينات ← أ' (س ، -ص)

أ (س ، ص) ← الانعكاس في محور الصادات ← أ' (-س ، ص)

أ (س ، ص) ← الانعكاس في نقطة الأصل ← أ' (-س ، -ص)

الانتقال :

الانتقال في المستوى الإحداثي يحول كل نقطة أ إلى أ'

بإزاحة سينية هـ يتبعها إزاحة صادية د

أ (س ، ص) ← أ' (س + هـ ، ص + د)

الدوران في مستوى الإحداثيات :

أ (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي المتعامد ، و نقطة الأصل

أ (س ، ص) ← بالدوران د(و ، ٩٠°) / بالدوران د(و ، -٢٧٠°) ← أ' (-ص ، س)

أ (س ، ص) ← بالدوران د(و ، -٩٠°) / بالدوران د(و ، ٢٧٠°) ← أ' (ص ، -س)

أ (س ، ص) ← بالدوران د(و ، ١٨٠°) / بالدوران د(و ، -١٨٠°) ← أ' (-س ، -ص)

يسمى دوران نصف دورة

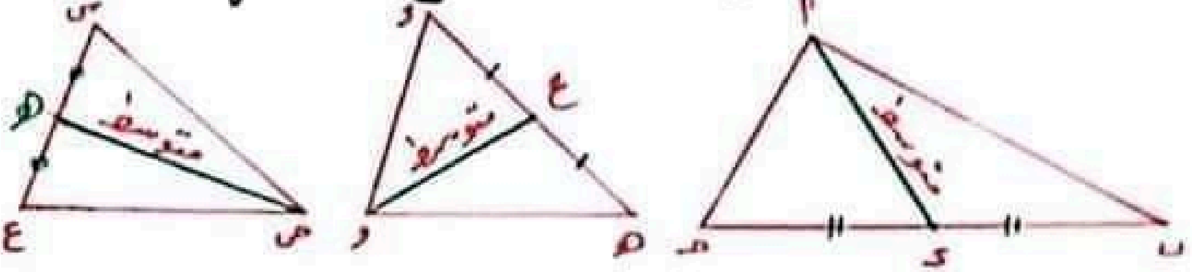
أ (س ، ص) ← بالدوران د(و ، ٣٦٠°) / بالدوران د(و ، -٣٦٠°) ← أ' (س ، ص) هي نفس النقطة

يسمى بالدوران المحايد

مصطفى لاشين

متوسطات المثلث

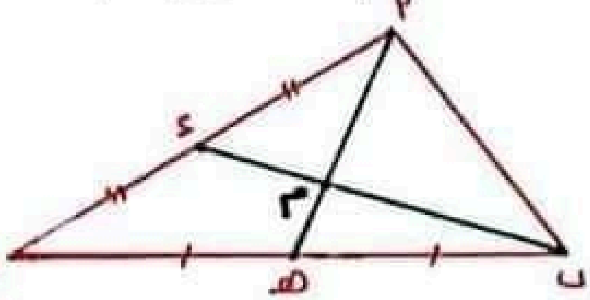
متوسط المثلث: هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.



- متوسطات المثلث تتقاطع جميعا في نقطة واحدة
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة

١ : ٢ من جهة القاعدة

٢ : ١ من جهة الرأس

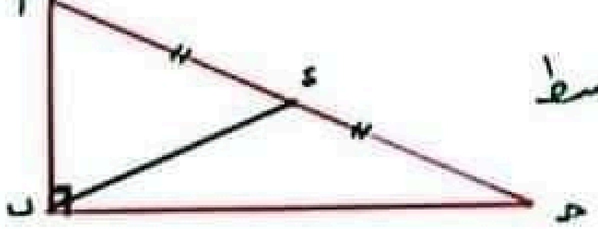


- م هـ = $\frac{١}{٢}$ أ م
- أ م = ٢ م هـ
- م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ
- أ هـ = ٣ م هـ

أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ

أ هـ = $\frac{٣}{٢}$ أ م

- طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث



في △ أ ب جـ : ∵ ق(∠ب) = ٩٠° ، ب د متوسط

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

- طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

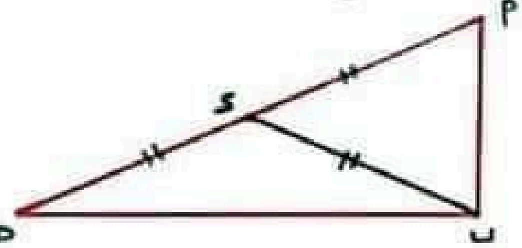
مصطفى الرشيدي

في △ أ ب جـ : ∵ ق(∠ب) = ٩٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

يسمى △ أ ب جـ ثلاثيني ستيني

⊙ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة .



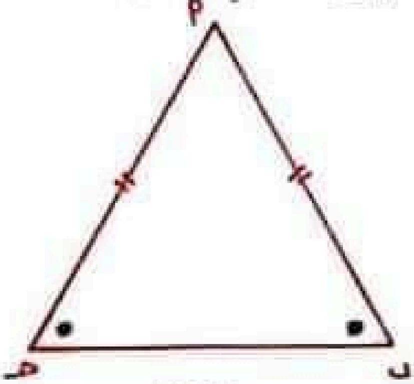
في Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{ب د}}$ متوسط

، ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

المثلث المتساوي الساقين

⊙ زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان .



في Δ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

⊙ إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقتين ويكون المثلث متساوي الساقين .

⊙ إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاث متطابقة ويكون قياس كل منها = ٦٠°

مصطفى الرشيدي

⊙ إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع .

نتائج هامة :

① متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة .

في Δ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ

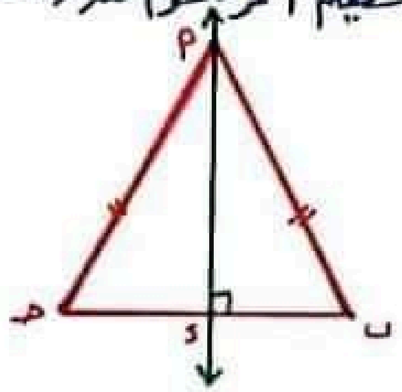
، $\overline{\text{أ د}}$ متوسط ∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب أ د) = ق(∠جـ أ د)

٢ منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها .

٣ المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس .

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته .

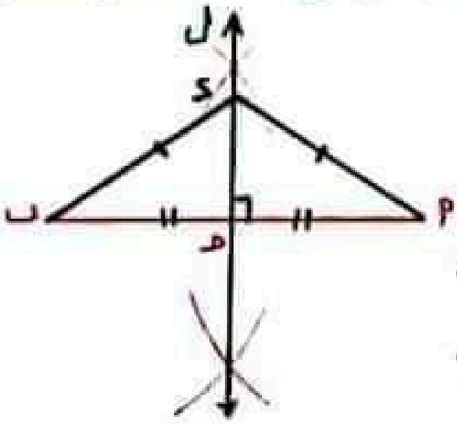


في △ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ ، $\overleftrightarrow{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ $\overleftrightarrow{أد}$ محور تماثل △ أ ب جـ .

- للمثلث المتساوي الساقين محور تماثل واحد .
- للمثلث المتساوي الأضلاع ٣ محاور تماثل .
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له أي محاور تماثل . "عدد محاور تماثله صفر"

محور تماثل القطعة المستقيمة :



هو المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها .

"ويسمى إختصاراً محور القطعة المستقيمة"

- أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها .

∵ د ∈ ل ∴ د أ = د ب

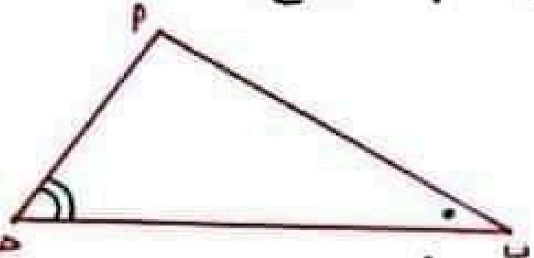
- إذا كانت النقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة فإنها تقع على محور القطعة المستقيمة .

∵ أ د = ب د ∴ د ∈ محور $\overline{أب}$

مصطفى الرشيدي

التباين في المثلث

⊙ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر .



في △ أ ب جـ : ∵ أ ب > أ جـ

∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب)

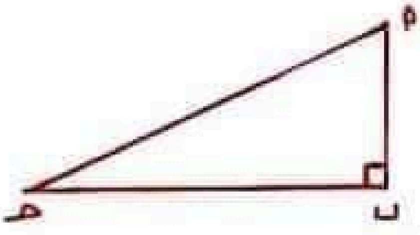
⊙ إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الزاوية الأخرى .

في △ أ ب جـ : ∵ ق(∠جـ) > ق(∠ب)

∴ أ ب > أ جـ

⊙ أكبر الأضلاع طولاً في المثلث تقابله أكبر الزوايا قياساً .
أكبر الزوايا قياساً يقابلها أكبر الأضلاع طولاً .

⊙ في المثلث القائم الزاوية الوتر هو أطول أضلاع المثلث

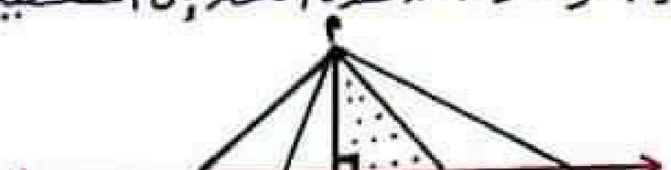


في △ أ ب جـ : ∵ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ أ جـ وتر

∴ أ جـ > أ ب

أ جـ > ب جـ

⊙ طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم . في الشكل : أ ب < أ جـ



أ ب < أ د

أ ب < أ هـ

أ ب < أ و

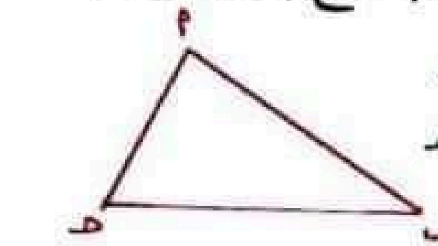
⊙ بعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم .

مصطفى الرشيدي

متباينة المثلث

في أي مثلث يكون :

- مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث .
- الفرق بين طولي أي ضلعين أصغر من طول الضلع الثالث .



في Δ أ ب جـ : أ ب + ب جـ > أ جـ

أ ب + أ جـ > ب جـ

ب جـ + أ جـ > أ ب

أ ب − ب جـ < أ جـ

أ ب − أ جـ < ب جـ

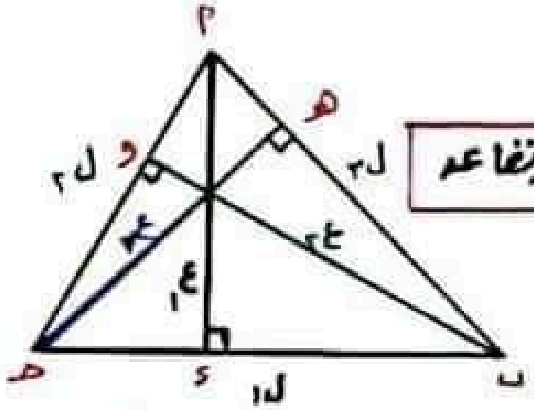
ب جـ − أ جـ < أ ب

ملحوظة : من متباينة المثلث

في أي مثلث :

الفرق بين طولي أي ضلعين < طول أي ضلع < مجموع طولي أي ضلعين

المساحات

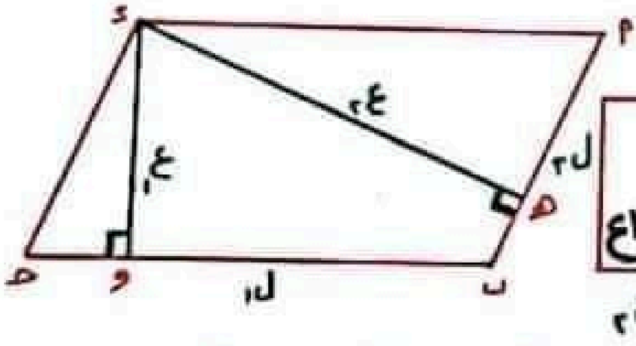


مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول قاعدة × ارتفاع

للمثلث ٣ ارتفاعات ع١ ، ع٢ ، ع٣

للمثلث ٣ قواعد ل١ ، ل٢ ، ل٣

مساحة متوازي الأضلاع :

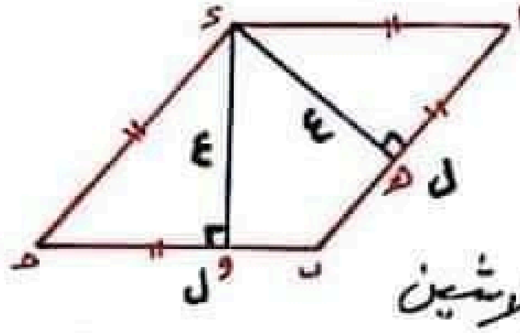


مساحة متوازي الأضلاع

= طول القاعدة × طول الارتفاع

مساحة ▱ أ ب جـ د = ل١ × ع١ = ل٢ × ع٢

- **مساحة المعين :**

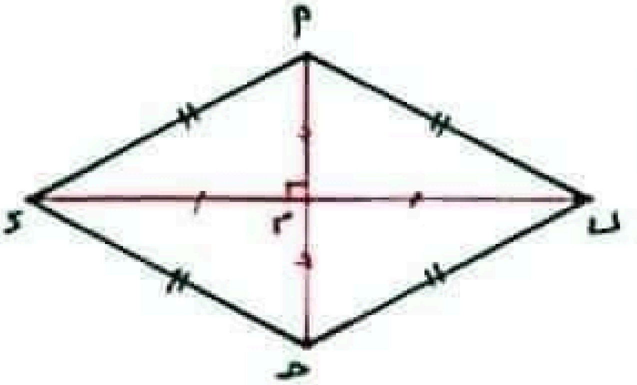


مساحة المعين

= طول قاعدة × ارتفاع

مساحة المعين = ل × ع

مصطفى لاشين

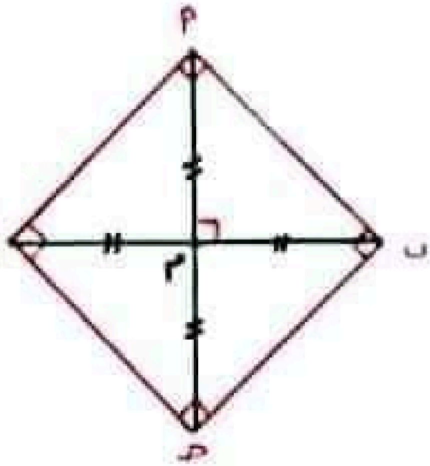


مساحة المعين

$=$ ½ حاصل ضرب طولي قطريه

مساحة المعين $= \frac{1}{2}$ أ جـ $\times$ ب د

مساحة المربع :

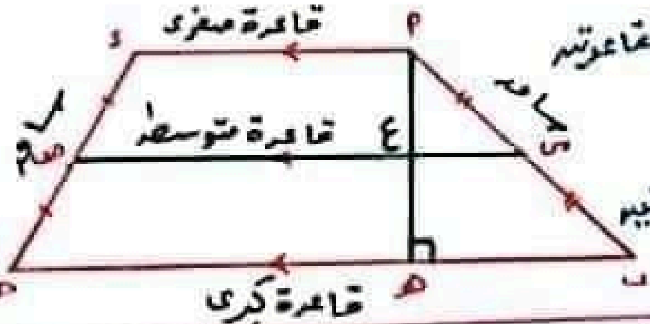


مساحة المربع $= \frac{1}{2}$ مربع طول قطره

مساحة المربع $=$ مربع طول ضلعه

شبه المنحرف :

هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان .



- القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف توازي القاعدتين
- طول القاعدة المتوسطة

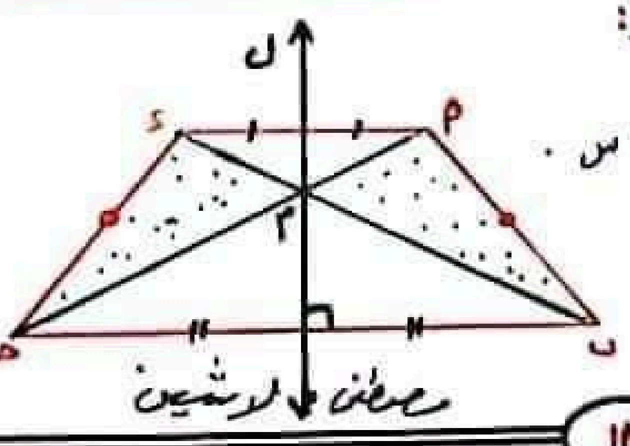
$= \frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين

مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ مجموع طولي قاعدتيه المتوازيتين $\times$ الارتفاع

مساحة شبه المنحرف $=$ طول القاعدة المتوسطة $\times$ الارتفاع

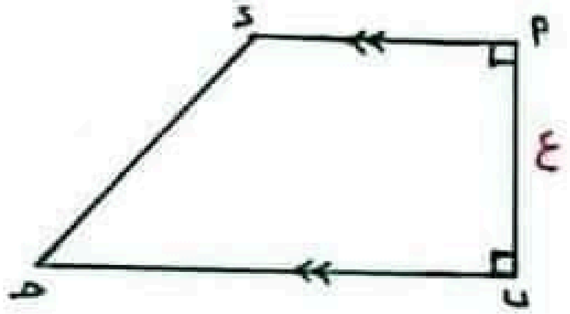
شبه المنحرف المتساوي الساقين :

فيه أب $=$ د جـ



- زاويتا كل من قاعدتيه متساويتين في القياس .
- قطراه متساويان في الطول .
- له محور تماثل واحد

شبه المنحرف القائم الزاوية



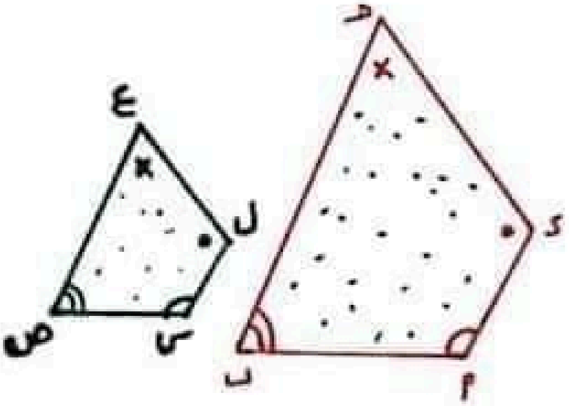
هو شبه منحرف فيه أحد ساقيه عمودي على القاعدتين المتوازيتين .

$\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{بأ}} \perp \overline{\text{أد}}$

ارتفاع شبه المنحرف هو $\overline{\text{أب}}$

التشابه

تشابه مضلعين :



يقال لمضلعين أنهما متشابهين إذا تحقق الشرطان :

1. الزوايا المتناظرة متساوية في القياس
2. أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

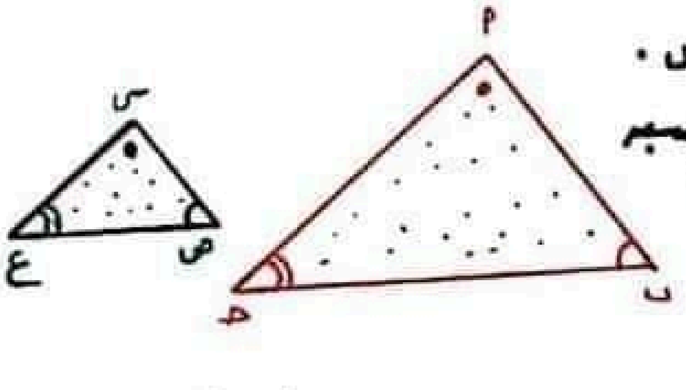
∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ل س}} = \text{مقدار ثابت}$$

تشابه مثلثين :

يتشابه المثلثان إذا تحقق أحد الشرطين

1. الزوايا المتناظرة متساوية في القياس .
2. أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة



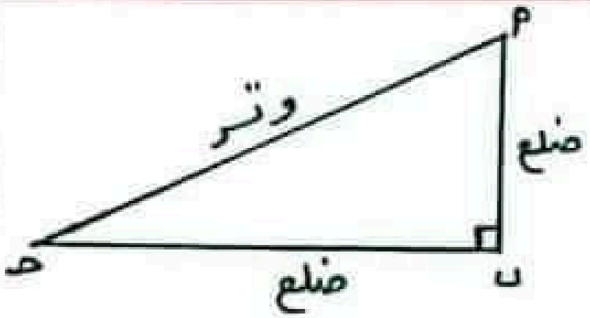
∵ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$$

مصطفى لاشين

نظرية فيثاغورس

في المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعي القائمة .



في $\triangle$ أ ب ج : $\because$ ق($\hat{ب}$) $= 90^\circ$

$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$

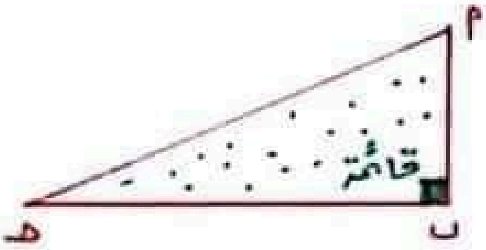
$(\text{أ ب})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{ب ج})^2$

$(\text{ب ج})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{أ ب})^2$

التعرف على نوع المثلث بالنسبة لزواياه

(1) المثلث القائم الزاوية :

" عكس نظرية فيثاغورس "

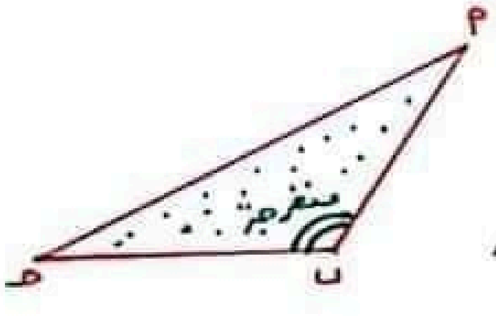


مربع الضلع الأكبر = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

في $\triangle$ أ ب ج : إذا كان $(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$

$\therefore$ ق($\hat{ب}$) $= 90^\circ$

(2) المثلث المنفرج الزاوية :

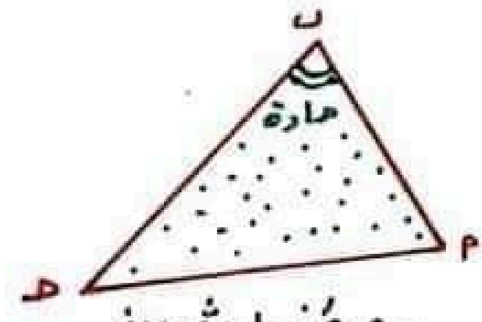


مربع طول الضلع الأكبر > مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

في $\triangle$ أ ب ج : إذا كان $(\text{أ ج})^2 > (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$

$\therefore$ $\hat{ب}$ منفرجة

(3) المثلث الحاد الزوايا :



مربع طول الضلع الأكبر < مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

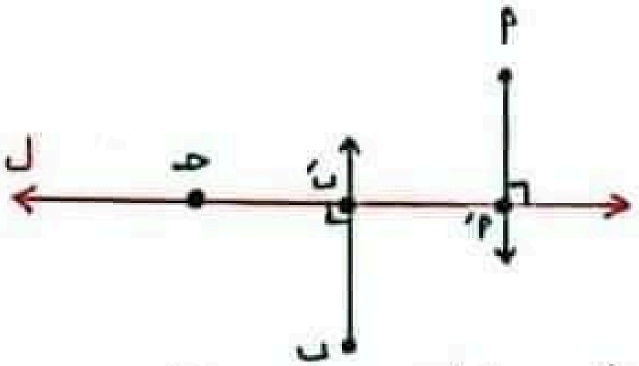
في $\triangle$ أ ب ج : إذا كان $(\text{أ ج})^2 < (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$

$\therefore$ $\hat{ب}$ حادة

مصطفى الرشيدي

المساقط

مسقط نقطة على مستقيم :



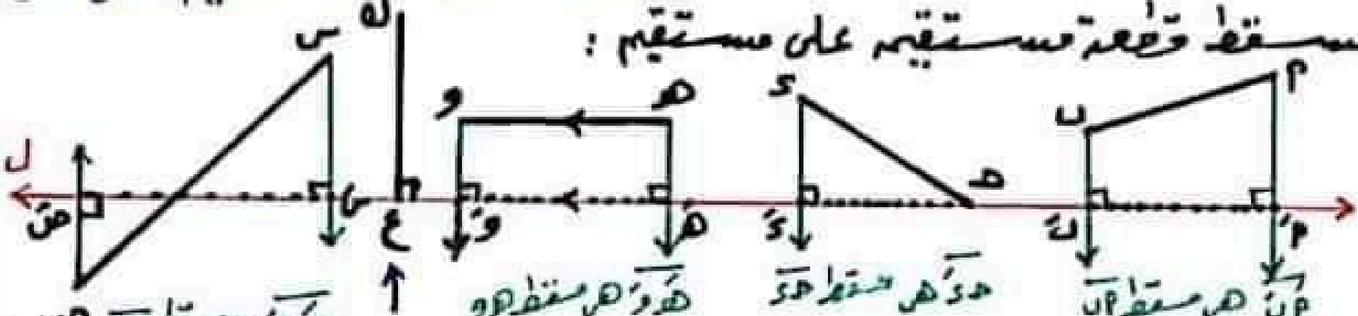
- مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود الساقط من هذه النقطة على المستقيم
- إذا كانت النقطة تقع على المستقيم فإن مسقطها هو نفس النقطة .

أ َ هي مسقط أ على المستقيم ل

ب َ هي مسقط ب على المستقيم ل

جـ ∈ ل مسقط جـ على المستقيم ل هي نفسها

مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم :



$\overline{س َ ص َ}$ هي مسقط $\overline{س ص}$ $\overline{هـ َ و َ}$ هي مسقط هـ و $\overline{ء َ جـ}$ هي مسقط $\overline{ء جـ}$ $\overline{أ َ ب َ}$ هي مسقط $\overline{أ ب}$

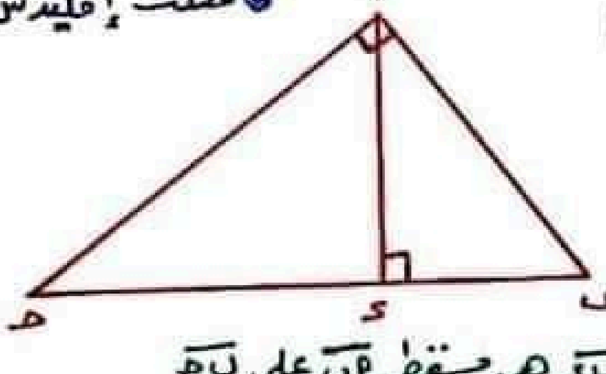
∵ $\overline{ك ع}$ ⊥ المستقيم ل ∴ النقطة ع هي مسقط $\overline{ك ع}$ على المستقيم ل

هام

نظرية إقليدس

> مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية تساوي مساحة المستطيل الذي بعداه طول مسقط هذا الضلع على الوتر وطول الوتر

- مثلث إقليدس



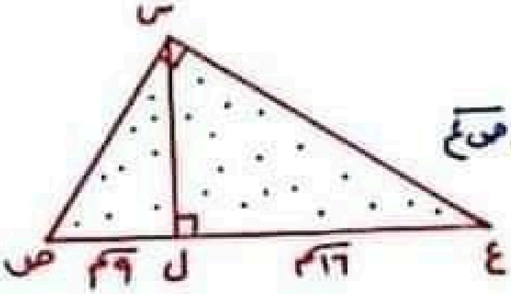
إذا كان : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

- $(أ ب)^2 = ب ء \times ب جـ$
- $(أ جـ)^2 = جـ ء \times جـ ب$
- $أ ء = \frac{أ ب \times أ جـ}{ب جـ}$
- $(أ ء)^2 = ب ء \times ء جـ$

$\overline{ب ء}$ هي مسقط $\overline{أ ب}$ على $\overline{ب جـ}$

$\overline{جـ ء}$ هي مسقط $\overline{أ جـ}$ على $\overline{ب جـ}$

مصطفى لاشين



مثال ١: على نظرية إقليدس

س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ، $\overline{سل} \perp \overline{صع}$

، ع ل = ١٦ سم ، ص ل = ٩ سم

أوجد: طول $\overline{سع}$ ، $\overline{سص}$ ، $\overline{سل}$

الحل: في Δ س ص ع:

(س ع)² = ص ل × ص ع

= ١٦ × ٢٥

= ٤٠٠

س ع = √٤٠٠ = ٢٠ سم

(س ص)² = ص ل × ص ع

= ٩ × ٢٥

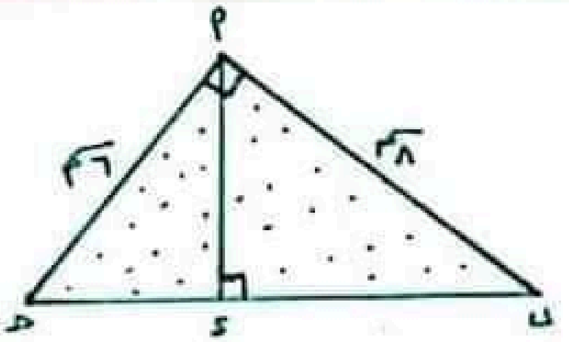
= ٢٢٥

∴ س ص = √٢٢٥ = ١٥ سم

س ل = (س ع × س ص) / ص ع

= (٢٠ × ١٥) / ٢٥

= ١٢ سم



مثال ٢: من الشكل المقابل:

Δ أ ب جـ فيه ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° ، $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم

أوجد طول $\overline{بد}$ ، $\overline{جـد}$ ، $\overline{أد}$

الحل: في Δ أ ب جـ : ∵ ق(∠أ) = ٩٠°

نوجد ب جـ من نظرية فيثاغورس

(ب جـ)² = (أ ب)² + (أ جـ)²

= (٨)² + (٦)²

= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

∴ ب جـ = √١٠٠ = ١٠ سم

(أ ب)² = ب د × ب جـ

(٨)² = ب د × ١٠

٦٤ = ١٠ ب د

ب د = ٦٤/١٠ = ٦,٤ سم

∵ ب جـ = ١٠ سم

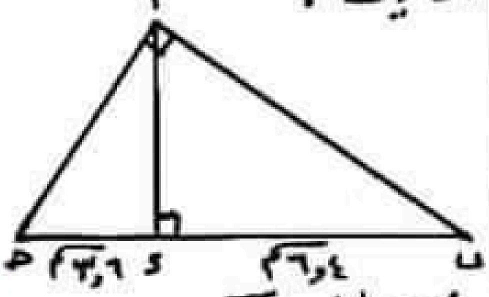
∴ جـ د = ١٠ − ٦,٤ = ٣,٦ سم

أ د = (أ ب × أ جـ) / ب جـ

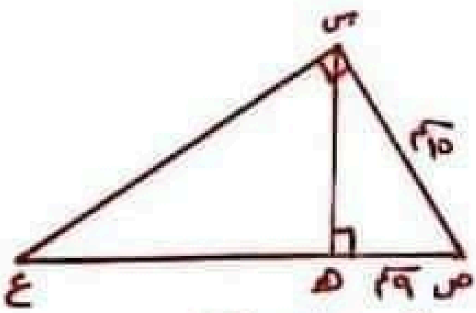
= (٨ × ٦) / ١٠

= ٤,٨ سم

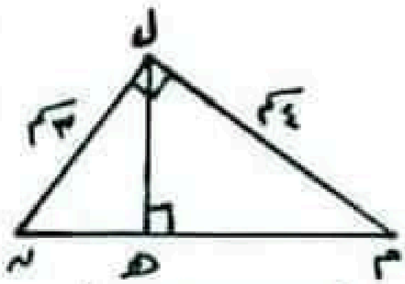
تمارين:



أوجد طول $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أد}$



أوجد طول $\overline{هـع}$ ، $\overline{سهـ}$ ، $\overline{سع}$

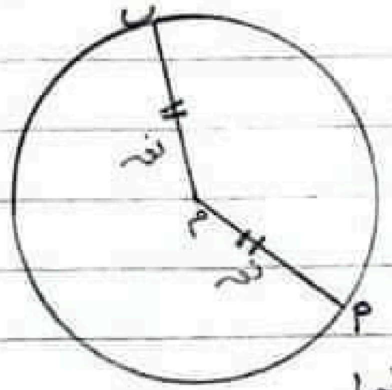


أوجد طول $\overline{من}$ ، $\overline{هـم}$ ، $\overline{نهـ}$ ، $\overline{لهـ}$

مصطفى لاشين

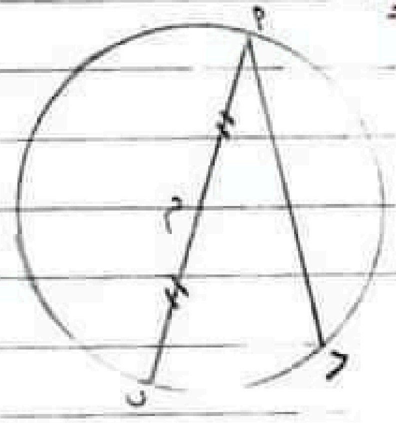
"ملخص الهندسة"

الباب الأول:-

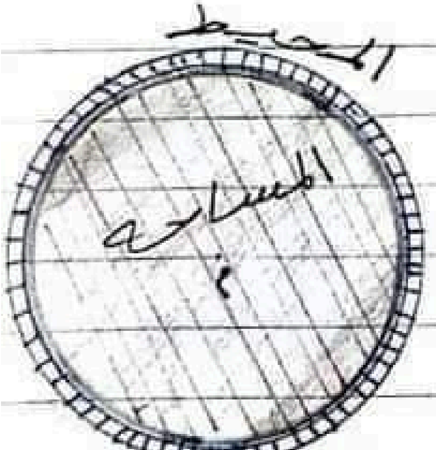


الدائرة:- هي مجموعة من النقط التي تقع على بعد ثابت من نقطة ثابتة وهي المركز والبعد الثابت يسمى نصف القطر "نق"

- نصف القطر "نق":- هي القطعة المستقيمة التي طرفاها أي نقطة على الدائرة والمركز
- أنصاف أقطار الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة متساوية.



- الوتر:- هي قطعة مستقيمة طرفاها أي نقطتين على الدائرة
- القطر:- هو الوتر المار بمركز الدائرة
- طول القطر = ٢ نق
- مركز الدائرة يقسم القطر إلى جزئين متساويين كل جزء منها يساوي "نق"
- القطر هو أكبر أوتار الدائرة



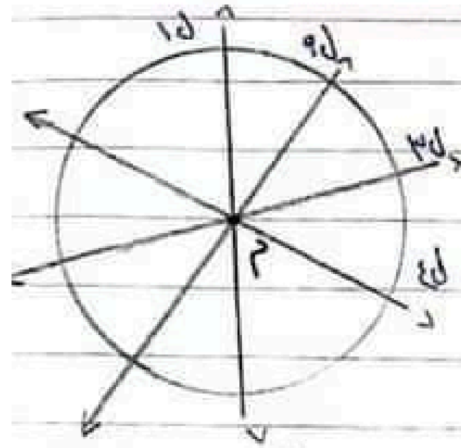
- المحيط:- هو طول الخط الخارجي المغلق للدائرة.
- محيط الدائرة = ٢π نق أو ٢ط نق

بحيث ط = $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣,١٤

- المساحة:- هي سطح الدائرة:- وهي اتحاد مجموعة نقط الدائرة مع النقط داخل الدائرة
- مساحة الدائرة = π نق²

: هناك فرق بين الدائرة و محيط الدائرة = هناك فرق بين الدائرة و سطح الدائرة

الدائرة مجموعة من النقط تقع على بعد ثابت من نقطة ثابتة أما محيط الدائرة هو طول الخط المنحنى المغلق للدائرة	فالدائرة هي مجموعة من النقط التي تقع على بعد ثابت من نقطة ثابتة أما السطح فهو الاتحاد بين نقط الدائرة و نقط داخل الدائرة



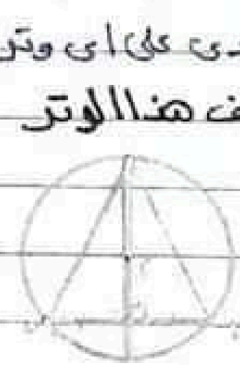
- التماثل في الدائرة :-

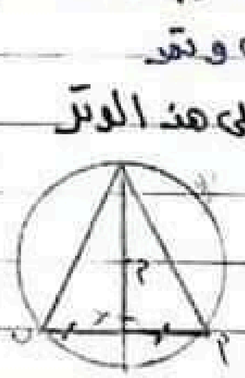
محور التماثل :- اي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

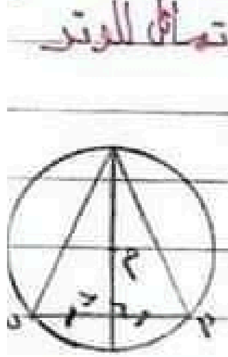
- الدائرة لها عدد لانهائي من محاور التماثل

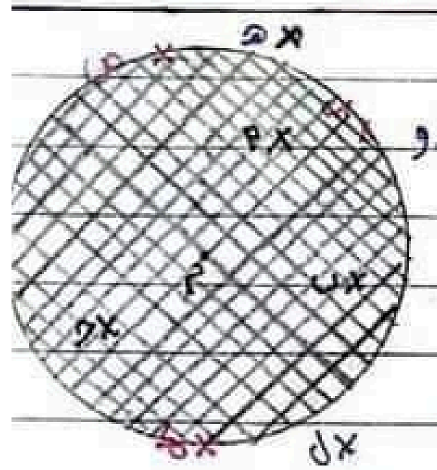
نتائج هامة :-

(١) المستقيم المار بمركز الدائرة عمودي على اي وتر فيها ينصف هذا الوتر	(٢) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف اي وتر يكون عمودي على هذا الوتر	(٣) المستقيم العمودي على اي وتر وينصفه "محور تماثل للوتر" يمر بمركز الدائرة









تجزئة المستوى :-

الدائرة تجزئ المستوى لثلاث مجموعات

(١) داخل الدائرة مثل م ، ب ، جـ

(٢) على الدائرة مثل س ، ص ، ع

(٣) خارج الدائرة مثل هـ ، و ، ل

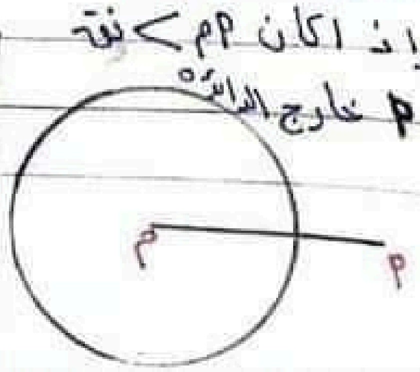
- ملاحظة اي مستقيم يتقاطع مع الدائرة في نقطة على الاقل و نقطتين على الاكثر

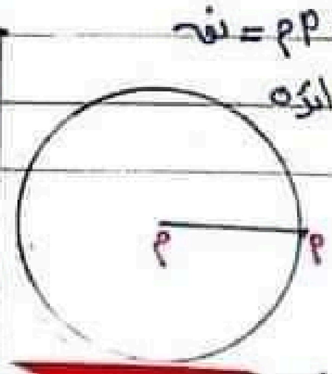
- اي مستقيم يتقاطع مع سطح الدائرة في قطعة مستقيمة

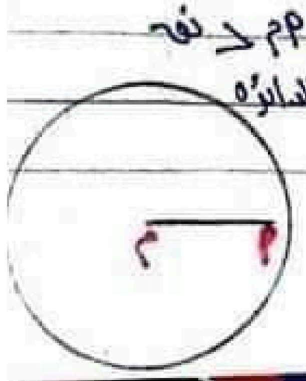
"اوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة"

- وضع النقطة :-

(١) اذا كان م أ > نق فإن أ خارج الدائرة	(٢) اذا كان م أ = نق فإن أ على الدائرة	(٣) اذا كان م أ < نق فإن أ داخل الدائرة

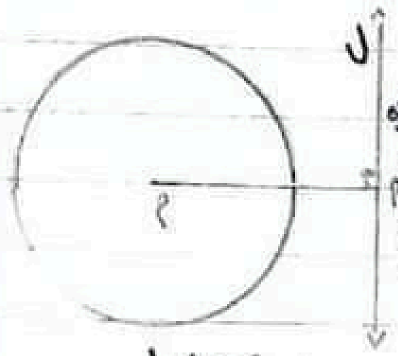






وضع مستقيم :-

(١)



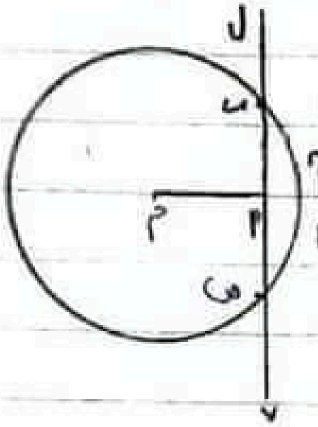
إذا كان ل ∩ الدائرة = ∅

فإن المستقيم خارج الدائرة

∴ م أ > نق حيث م أ ⊥ ل

، أ تقع خارج الدائرة

(٢)



إذا كان ل ∩ الدائرة = {ب ، جـ}

فإن المستقيم ل قاطع الدائرة

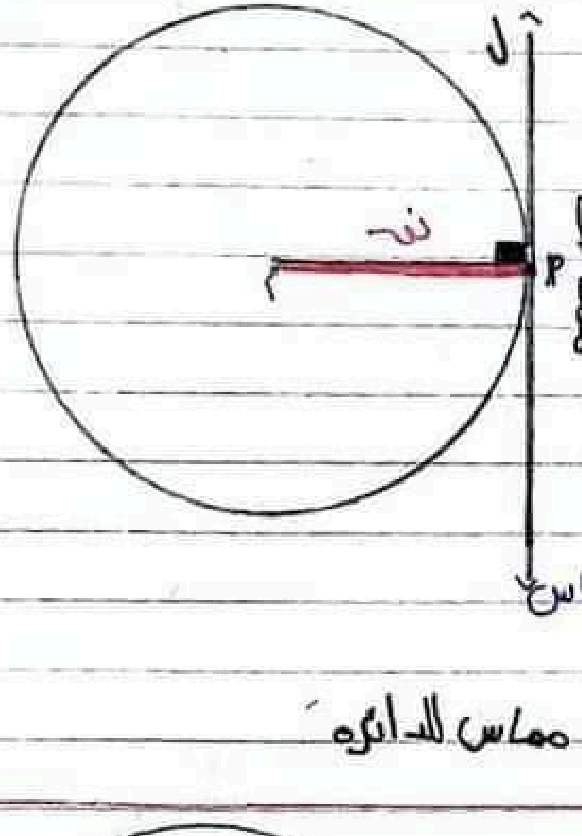
∴ م أ < نق

حيث م أ ⊥ ل

، أ تقع داخل الدائرة

(٣) إذا كان ل ∩ الدائرة م = {أ}

فإن ل يكون مماس للدائرة م



∴ م أ = نق حيث م أ ⊥ ل

، أ تقع على الدائرة

ملاحظات :-

١) المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر من نقطة التماس

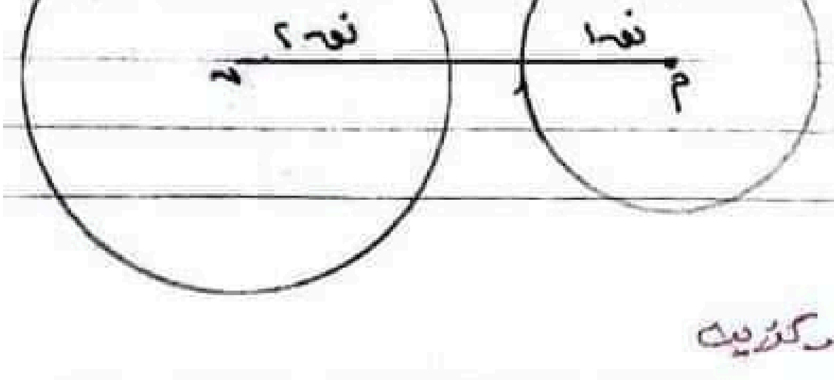
٢) نقطة تقاطع المماس مع الدائرة تسمى نقطة التماس

و تقع على بعد ثابت يساوي نصف القطر.

المستقيم العمودي على القطر من احد نهايتيها يكون مماس للدائرة

وضع دائرة :-

١) الدائرتان المتباعدتان :



سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

م ن > نق١ + نق٢

الخط الواصل بين م ، ن "م ن" يسمى خط المركزين

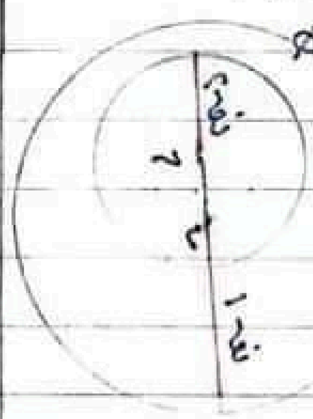
- لهما محور تماثل واحد وهو خط المركزين

(٢) الدائرتان المتداخلتان :-

اذا كانت الدائرة م ∩ ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح ن = سطح الدائرة ن

م ن < نق١ - نق٢



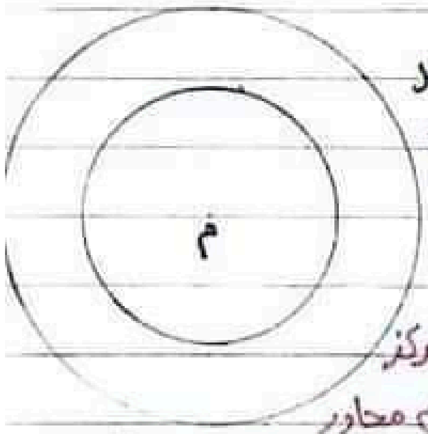
اي دائرتان متداخلتان لهما محور تماثل واحد هو خط المركزين "$\overleftrightarrow{م ن}$"

(٣) المتحدتا المركز

اذا كان م ن = صفر

فإن الدائرتان تكونان متحدتا المركز

م ≡ ن



اي دائرتان متحدتا المركز لهما عدد لانهائي من محاور التماثل تمر بالمركز المشترك "م"

(٤) الدائرتان المتماستان من الخارج :-

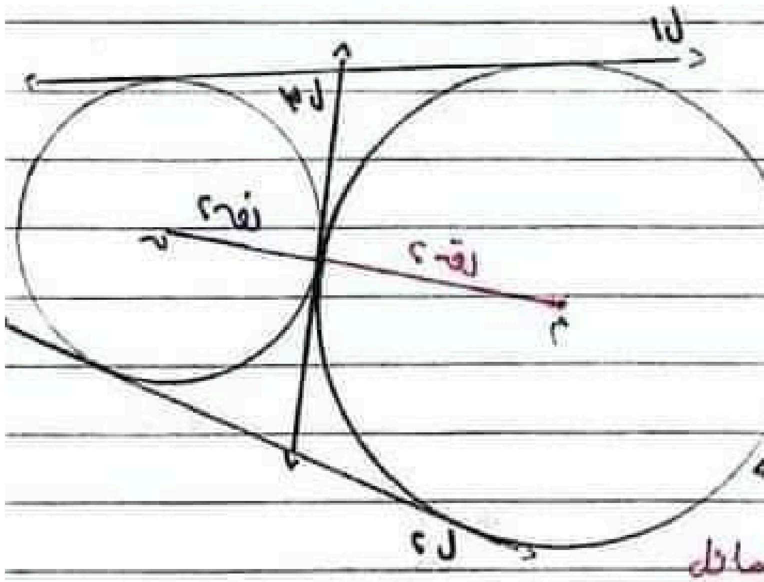
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}

فإن الدائرتان متماستان من الخارج

أ تسمى نقطة التماس

م ن = نق١ + نق٢ ، أ نقطة التماس

الدائرتان المتماستان من الخارج لهما ثلاث مماسات مشتركة احدهم يمر بنقطة التماس ل٣ ويكون عمودي على خط المركزين "$\overleftrightarrow{م ن}$"



اي دائرتين متماستين من الخارج لهما محور تماثل او محورين اذا كانتا متطابقتان

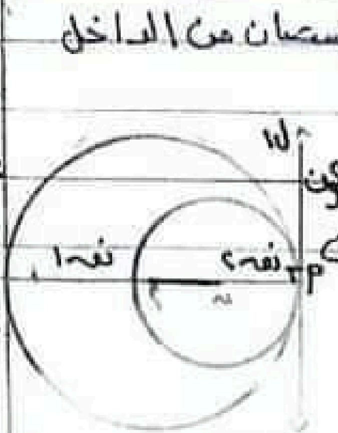
(٥) الدائرتان المتماستان من الداخل :-

الدائرة م ∩ ن = {أ} ، سطح الدائرة م ∩ ن = سطح ن

فإن الدائرتين تكونان متماستان من الداخل

م ن = نق١ - نق٢

ل مماس مشترك ويكون عمودي على خط المركزين

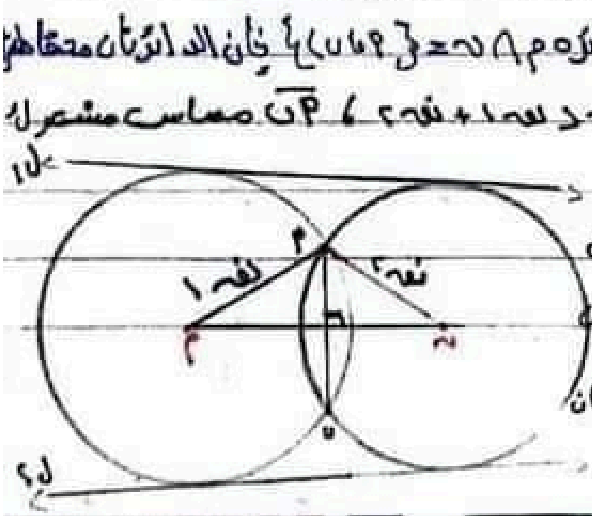


(٦) الدائرتان المتقاطعتان :-

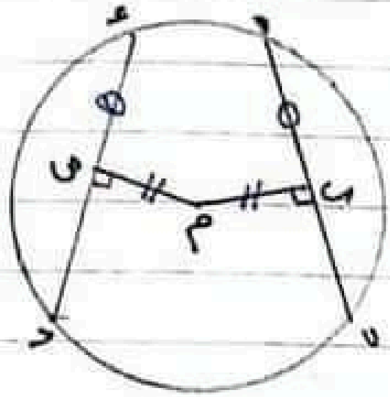
اذا كانت الدائرة م ∩ ن = {أ ، ب} فإن الدائرتان متقاطعتان

م ن < نق١ + نق٢ ، $\overline{أب}$ مماس مشترك عمودي على خط المركزين

ل١ ، ل٢ مماسان مشتركان للدائرتان م ، ن

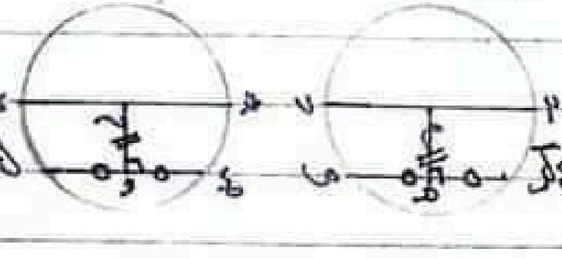


علاقة الأوتار في الدائرة بمركزها :-



نظرية :-

- الأوتار المتساوية في الطول على أبعاد متساوية من مركزها
- في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية في الطول على أبعاد متساوية من المركز.



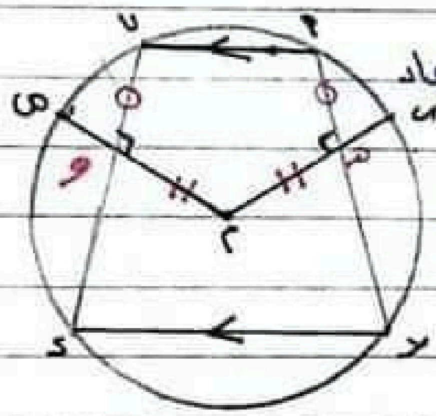
أ ب = ج د

∵ م ، ن متطابقتان ، ∵ س ص

ع ل ، م ه ⊥ س ص ، ن و ⊥ ع ل

∴ م ه = ن و

عكس النظرية :-



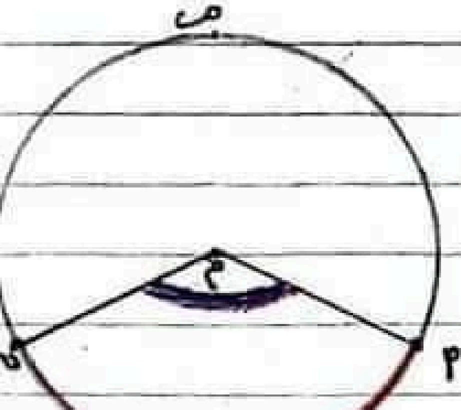
- في الدائرة الواحدة او الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها متساوية في القياس

(١) ∵ أ ج = ب د ∴ ق (أ⌒ج) = ق (ب⌒د)

(٢) ∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

(٣) هـ م = و م

الزاوية المركزية وقياس الأقواس :-



القوس :- هو جزء من الخط الخارج للدائرة واصل بين نقطتين

مثل " (أ⌒ب)

هناك قوسين يعبر عنهما بالرمز (أ⌒ب) إما الأكبر او الأصغر

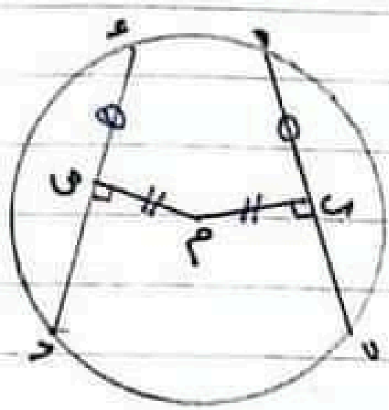
وإذا لم يتم النص عن نوع (أ⌒ب) فإنه يرمز لـ (أ⌒ب) الأصغر

- (أ⌒ب) الأكبر هو (أ⌒جـ ب)

- (أ⌒ب) الأصغر هو (أ⌒ب)

ملاحظة :-

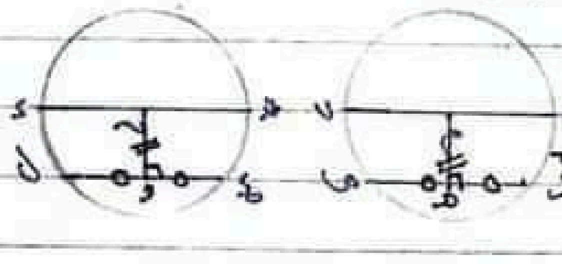
يتم وضع نقطة ثالثة لتحديد الاتجاه



علاقة الأوتار في الدائرة بمركزها:-

نظرية:-

- الأوتار المتساوية في الطول على أبعاد متساوية من مركزها
- في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية في الطول على أبعاد متساوية من المركز.

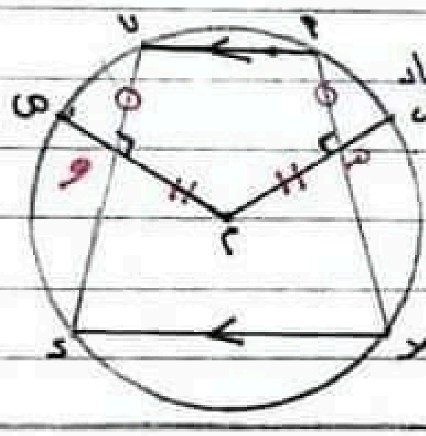


أ ب = جـ د

∴ م ، ن متطابقتان ، ∵ س ص

∴ م هـ ، م و بعدي الوترين عن المركز

∴ م هـ = ن و



عكس النظرية:-

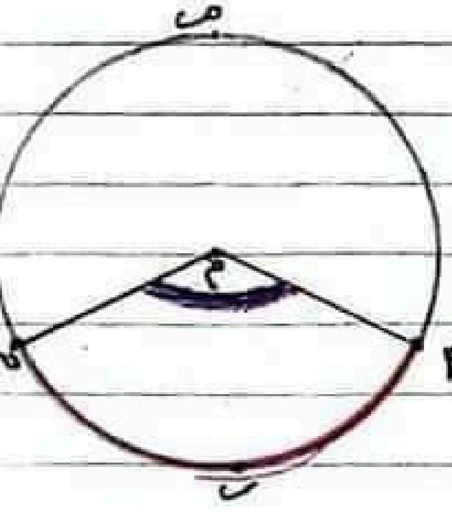
- في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها متساوية في القياس

(١) ∵ أجـ = ب د ∴ ق (أ جـ) = ق (ب د)

(٢) ∴ $\overline{أب}$ // جـ د

(٣) هـ م = و م

الزاوية المركزية وقياس الأقواس:-



القوس:- هو جزء من الخط الخارج للدائرة واصل بين نقطتين مثل " (أ ب) "

هناك قوسين يعبر عنهما بالرمز (أ ب) إما الأكبر أو الأصغر

وإذا لم يتم التحدث عن نوع (أ ب) فإنه يرمز لـ (أ ب) الأصغر

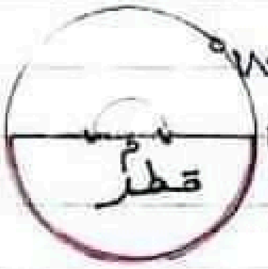
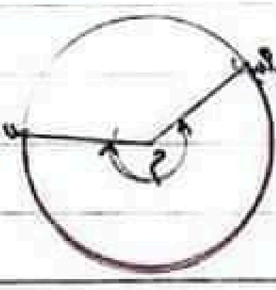
- (أ ب) الأكبر هو (أ ص ب)
- (أ ب) الأصغر هو (أ ع ب)

ملاحظة:-

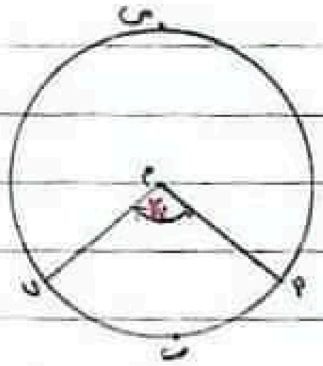
يتم وضع نقطة ثالثة لتحديد الاتجاه

الزاويه المركزيه

هي الزاويه التي رأسها مركز الدائره و كل من ضلعيها يحمل نصف قطر في الدائره

(٣)	(٢)	(١)
 ∵ ق (∠ ا م ب) = ١٨٠° ∴ (ا ب) نصف دائره	 ∵ ق (∠ ا م ب) > ١٨٠° ∴ (ا ب) قوس اكبر	 ∵ ق (∠ ا م ب) < ١٨٠° ∴ (ا ب) قوس اصغر

قياس القوس :-

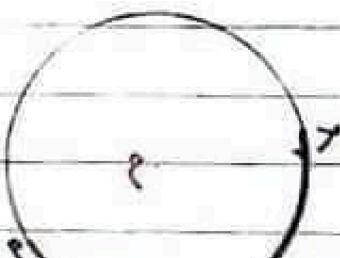


هي قياس الزاويه المركزيه المقابله للقوس

قياس (ا د ب) = ١٢٠ بحيث قياس (∠ا م ب) = ١٢٠°

قياس (ا ى ب) = ٢٤٠ بحيث قياس ∠ا م ب المنعكسه ٢٤٠°

الاقواس المتجاوره :-



هما قوسان من دائره يشتركان في نقطه واحده فقط

مثل ا ب ، ب حـ

ق (ا حـ) = ق (حـ ب) + ق (ا ب)

، ق (ا ب) = ق (ا ب حـ) - ق (ب حـ)

طول القوس :-

هو جزء من محيط الدائره يتناسب مع قياس

طول القوس = (قياس القوس / قياس الدائره) × المحيط

∴ = (قياس القوس / ٣٦٠°) × ٢ ط نق

بحيث ط = ٢٢/٧ أو ٣,١٤

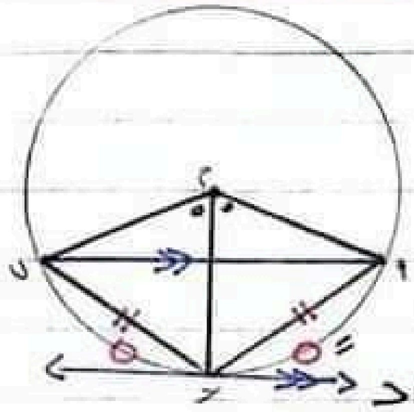
قياس القوس :-

هي النسبه بين طول القوس و المحيط مضروب في قياس الدائره

قياس القوس = (طول القوس / طول الدائره) × ٣٦٠

= (طول القوس / ٢ ط نق) × ٣٦٠

نتائج هامه :-

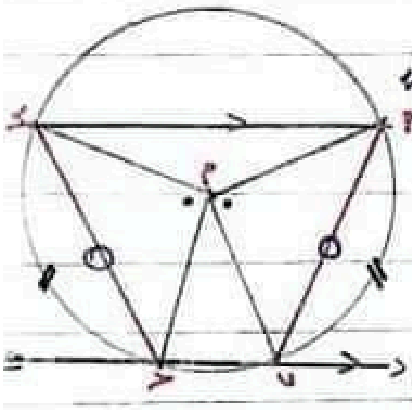


(١) في الدائره الواحده او في الدوائر المتطابقه الاقواس المتساويه في الطول متساويه في القياس

- قياس الزاويه المركزيه المقابله للقوس متساويه " م (∠ أ م ء) = م (∠ ء م ب) "
- الاوتار المقابله للاقواس المتساويه متساويه في الطول " أ ء = ب ء "
- ∵ م (أ جـ) = م (ب جـ)

∴ أ ب // ل

(٢) في الدائره الواحده او في الدوائر الأقواس المتساويه في القياس تحصر بينها ~~...~~ اوتار متساويه



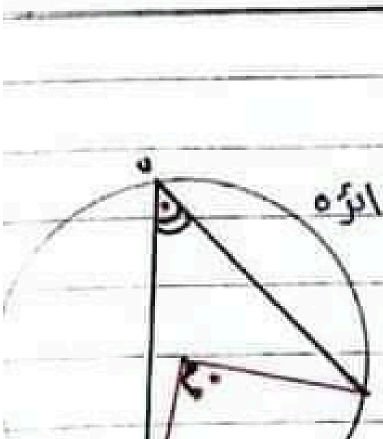
- قياس الزوايا المركزيه المقابله للاقواس متساويه " م (∠ أ م ب) = م (∠ ء م جـ) "
- أ ب = ء جـ
- أ ء // ب جـ
- △ أ م ب ≡ △ ء م جـ

(٣) القوسان المحصوران بين وتران متوازيان متساويان في القياس

أو القوسان المحصوران بين وتر ومماس متوازيان متساويان في القياس

✱ العلاقه بين الزوايه المحيطيه والمركزيه المشتركه في القوس :-

الزاويه المحيطيه :-



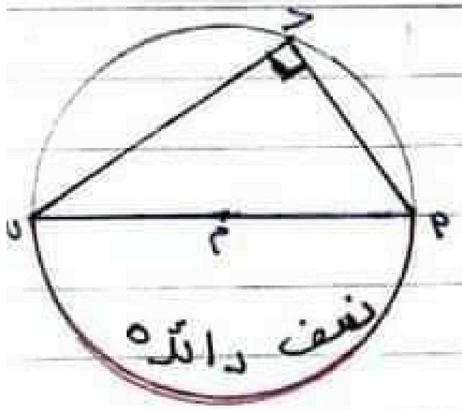
هي الزاويه التي يقع رأسها على الدائره و كل من ضلعيها يحمل وتر في الدائره

- قياس الزاويه المركزيه يساوي $\frac{1}{2}$ قياس الزاويه المركزيه المشتركه معها في القوس

- م (∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ م (∠ أ م جـ)

، م (∠ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ م (أ جـ)

نتيجة (١):-



- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة

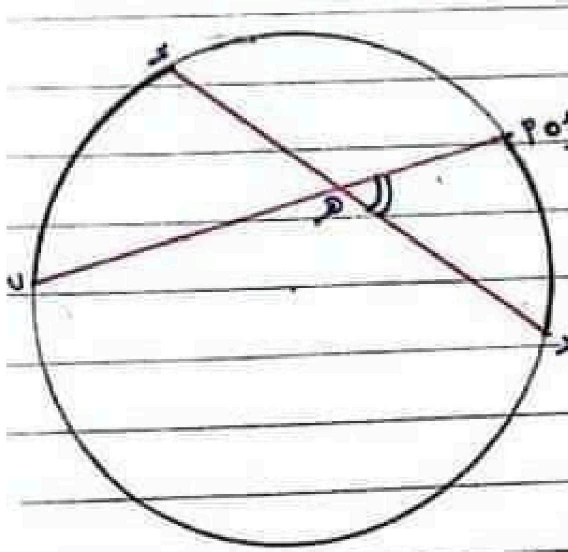
∵ ق(∠ح) = ½ ق(أب⌢)

، ق(أب⌢) = ½ دائرة

∴ ق(∠ح) = ½ × ½ × ٣٦٠

∴ ق(∠ح) = ٩٠°

تمرين مشهور:-

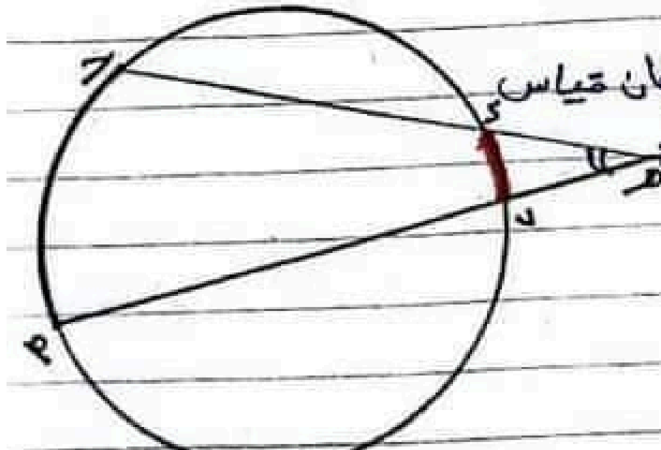


(١) إذا تقاطع مستقيمان "وتران" في نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لهما

- ق(∠أهـح) = ½ ق(أح⌢) + ½ ق(ءب⌢)

= ½ (ق(أح⌢) + ق(ءب⌢))

(٢) تمرين مشهور:-

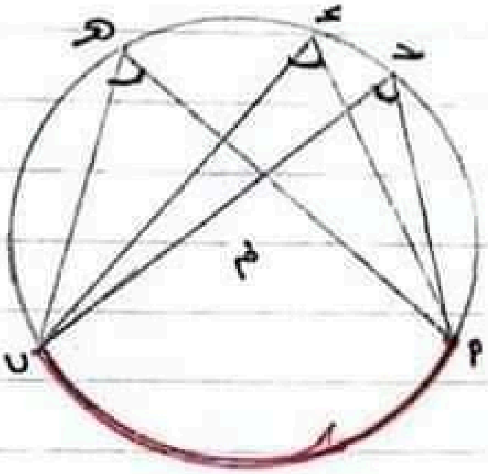


إذا تقاطع شعاعين حاملان وتران في دائرة خارجها فإن قياس الزاوية المتقاطع تساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرها ضلعي الزاوية

- ق(∠هـ) = ½ ق(حأ⌢) - ½ ق(ءب⌢)

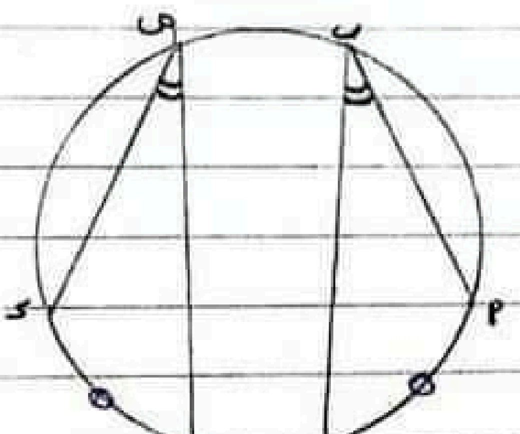
ق(∠هـ) = ½ (ق(حأ⌢) - ق(ءب⌢))

الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس :-



ـ الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس من الدائرة
متساوية في القياس

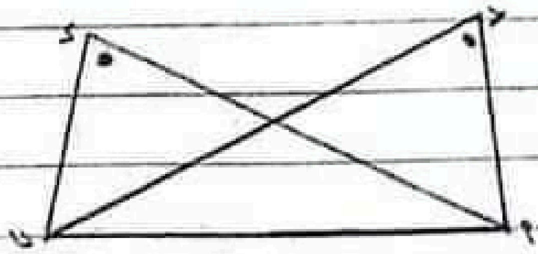
ـ ∵ ∠ج ، ∠د ، ∠هـ تحصر (أ ب)
∴ ق(∠ج) = ق(∠د) = ق(∠هـ)
حيث ∠ج ، ∠د ، ∠هـ
تحصر قوس واحد .



ـ الزوايا المحيطية التي تحصر اقواس متساوية في القياس
في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة متساوية في القياس

ـ ق(أب) = ق(جـ د)
∴ ق(∠س) = ق(∠ص)
تحصر اقواس متساوية

الشكل الرباعي الدائري :-

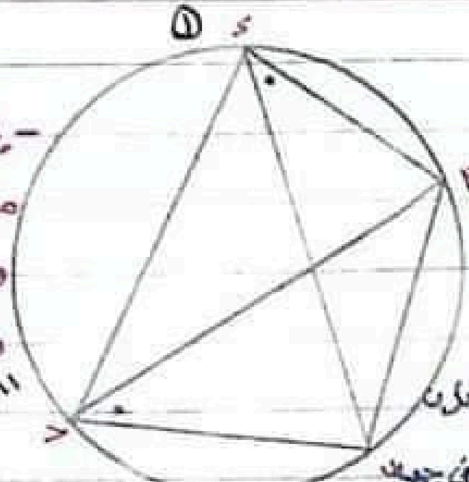


ـ هو الشكل الذي يمكن ان تمر برؤوسه دائرة

حالات الشكل الرباعي الدائري :-

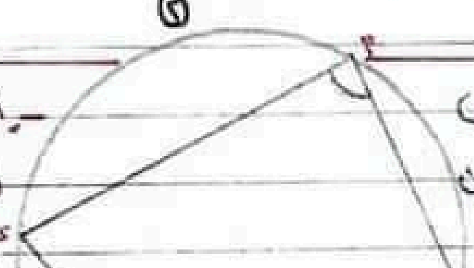
١) الحالة الأولى (الزوايا المرسومة على قاعدة واحدة)
٢) الحالة الثانية (الزوايا المتقابلة و المتكاملة)
٣) الحالة ~~الرابعة~~ الثالثة (الزاوية الخارجة المساوية للداخلة المقابلة للمجاورة لها)
٤) الحالة الرابعة (النقطة الموجودة على ابعاد متساوية)

النظريه	عكسها



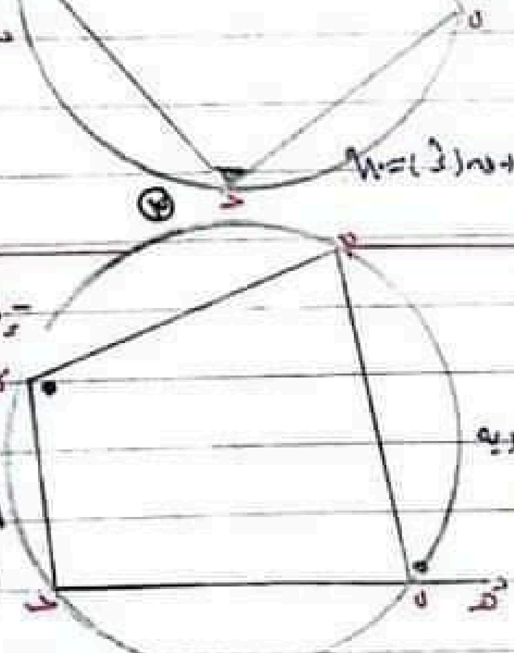
- ∵ ق(∠ أ د ب) = ق(∠ أ حـ ب) مرسومتان على قاعده واحده وفي جهه واحده منها
∴ أ ب حـ د رباعي دائري
- نتيجه :- في الشكل الرباعي الدائري أي زاويتان مشتركتان في القاعده في جهه واحده متساويتان

- إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتان على قاعده واحده وفي جهه واحده منها فإنه يمر برؤسها دائره واحده تكون القاعده وتراً فيها "شكل رباعي دائري"



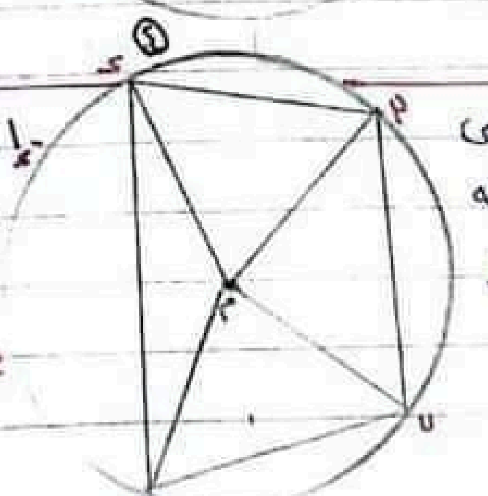
- إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين
- نتيجه :-
∵ أ ب حـ د رباعي دائري
∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° ، ق(∠ ب) + ق(∠ د) = ١٨٠°

- إذا وجد في الشكل الرباعي زاويتان متقابلتان متكاملتان فإن الشكل يمر برؤسه دائره "شكل رباعي دائري"



- قياس الزاويه الخارجه عن رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاويه الداخل المقابله للمجاوره لها
∵ أ ب حـ د رباعي دائري
∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ د)

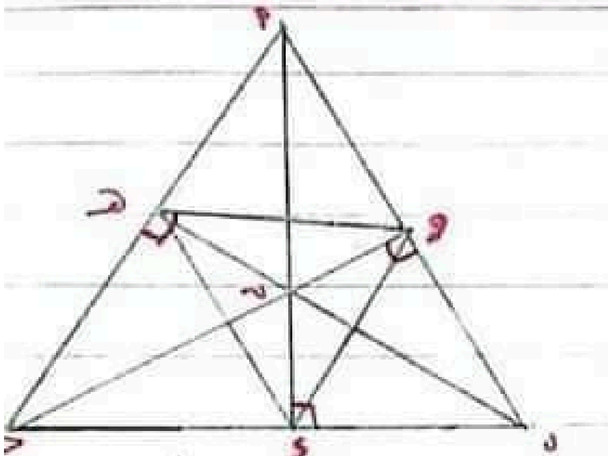
- إذا وجد شكل رباعي فإن أي زاويه خارجه تساوي قياس الزاويه الداخليه المقابله للمجاوره لها. "شكل رباعي دائري"



- يكون الشكل الرباعي دائري إذا وجدت فيه نقطه داخله تقع على بعد ثابت من نقط رؤوسه

- إذا وجد داخل الشكل الرباعي نقطه تقع على ابعاد متساويه من رؤوسه فإن الشكل يكون "رباعي دائري"

ارتفاعات المثلث :-

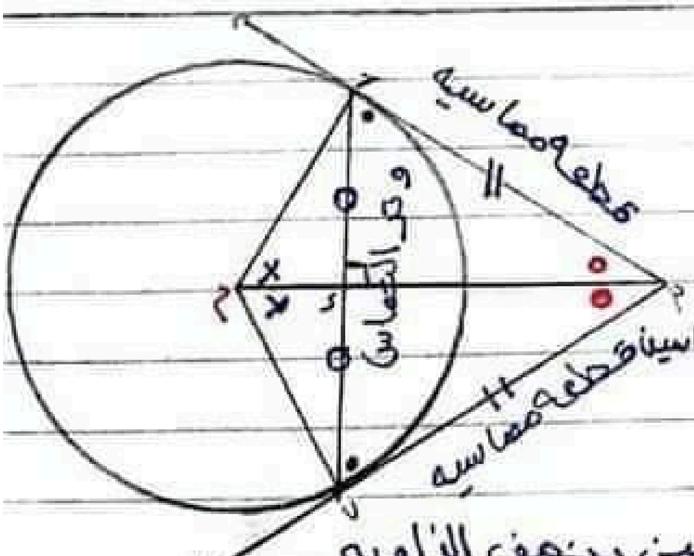


- ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعها في نقطة واحدة
- يوجد في الشكل أ ب جـ ٦ أشكال رباعية دائرية

١) ب د ن و (ق(∠ب و ن) + ق(∠ب د ن) = ١٨٠°)
٢) أ و ن هـ (ق(∠أ و ن) + ق(∠أ هـ ن) = ١٨٠°)
٣) جـ د ن هـ (ق(∠ن هـ جـ) + ق(∠ن د جـ) = ١٨٠°)
٤) و ب جـ هـ (ق(∠ب و جـ) = ق(∠جـ هـ ب))
٥) ب د هـ أ (ق(∠أ هـ ب) = ق(∠ب د أ))
٦) أ و د جـ (ق(∠أ و جـ) = ق(∠جـ د أ))

- المثلث د هـ و يسمى مثلث المواقع
- ارتفاعات المثلث أ ب جـ تنصف زوايا △ و د هـ

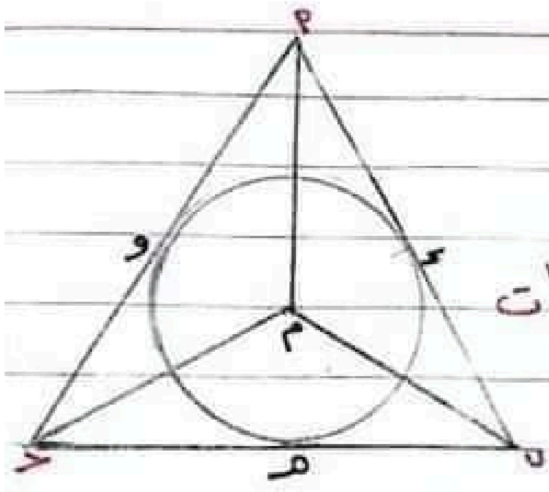
التماس :-



- أجـ ، أب قطعتان مماسيتان ∴ أجـ = أب
- جـ ب هو وتر التماس
- المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع المماسين يكون محور تماثل لهذين المماسين
- أم ⊥ ب جـ ، جـ د = د ب
- المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع المماسين ينصف الزاوية بين هذين المماسين ، كما ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطة التماس
- ق(∠جـ أ م) = ق(∠ب أ م) ، ق(∠جـ م أ) = ق(∠ب م أ)

ملاحظة :-

- الشكل أ جـ م ب رباعي دائري
- أم محور تماثل وتر التماس



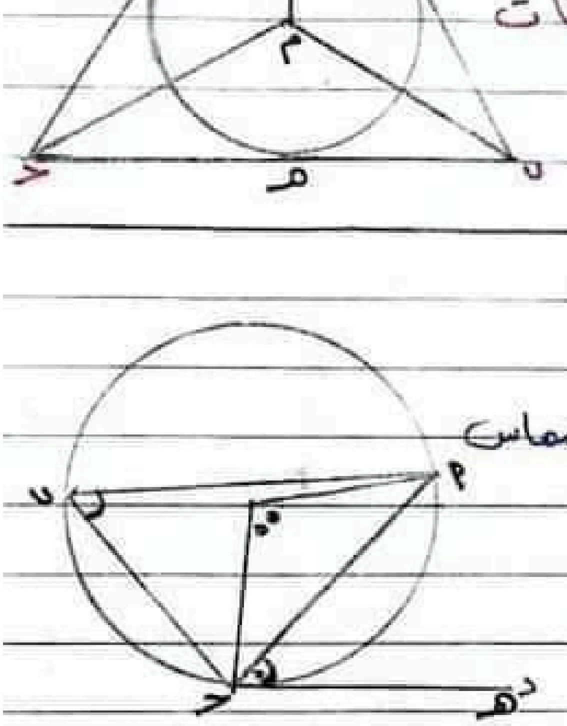
الدائرة الداخلة للمثلث :-

هي الدائرة التي تقع داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه

- مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

- أء = أو ، ب ء = ب هـ ، جـ هـ = جـ و

الزاوية المماسية :-



- هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما يحمل مماس والآخر يحمل وترا

- ق(∠أ جـ هـ) = ½ ق(أ جـ)

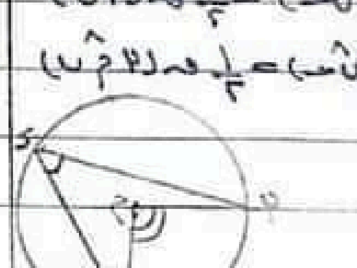
ق(∠أ جـ هـ) = ½ ق(∠أ م جـ)

ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ ب جـ)

(١) ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ ء ب)

ق(∠أ ب جـ) = ½ ق(أ ب)

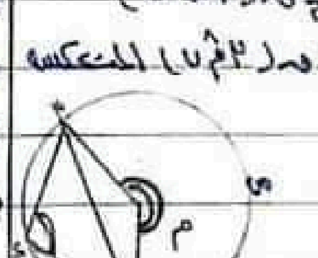
ق(∠أ ب جـ) = ½ ق(∠أ م ب)



(٢) ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ ء ب)

ق(∠أ ب جـ) = ½ ق(أ ء ب)

ق(∠أ ب جـ) = ½ ق(∠أ م ب) المنعكسة

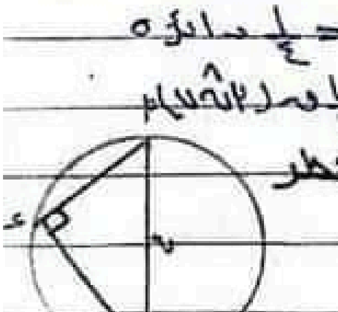


(٣) ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ ء ب)

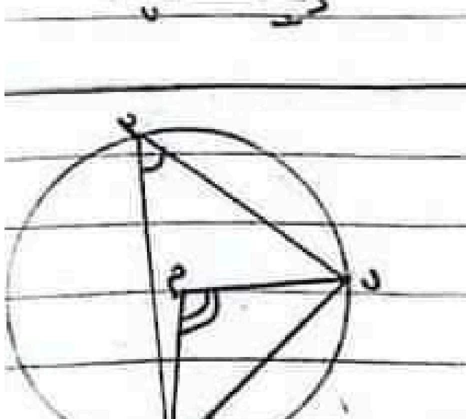
ق(∠أ ب جـ) = ½ دائرة

ق(∠أ ب جـ) = ½ ق(أ ب) = ٩٠°

ويكون أب قطر في الدائرة



عكس النظرية :-



- إذا رسم شعاع من أحد طرفي وتر بحيث يكون قياس الزاوية المحصورة بين الشعاعين تساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماس للدائرة