أولاً: الأسئلة المؤتمتة

1

$$\lim_{x\to 6}(x-5)^{\frac{3}{6-x}} = 1^{\pm\infty}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = (x-5)^{\frac{3}{6-x}}$$

بفرض $1+t = x-5$

$t = x-6$

$$f(x) = (1+t)^{-\frac{3}{t}}$$

$$\lim_{x\to 6} f(x) = \lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-3} = \boxed{e^{-3}}$$ أ

2

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{x+1} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{x-1} = -2$$

شرط الاستمرار $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\boxed{m=-2}$ د

3

$E(X) = \frac{5}{3} \Rightarrow np = \frac{5}{3}$ —— (1)

$V(X) = \frac{10}{9} \Rightarrow \boxed{np}(1-p) = \frac{10}{9}$

$$\frac{5}{3}(1-p) = \frac{10}{9}$$

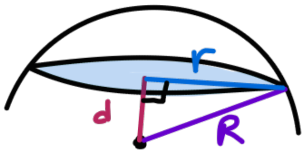
$1-p = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$

نعوض في (1): $\frac{n}{3} = \frac{5}{3}$

$\boxed{n=5}$ ج

---

4 حسب فيثاغورث:



$$R^2 = r^2 + d^2$$

(R: كرة، r: دائرة)

حيث d هو بعد مركز الكرة عن المستوي:

$\Omega(1,-2,0)$

$$d = dist(\Omega, P) = \frac{|7+12+0+14|}{\sqrt{49+36+36}} = \frac{33}{\sqrt{121}} = \frac{33}{11} = 3$$

نعوض: $25 = r^2 + 9$

$r^2 = 16 \Rightarrow \boxed{r=4}$ أ

---

5 نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي:

$(1+t)+(1)+(t)-4 = 0$

$2t-2 = 0 \Rightarrow t=1$

$\boxed{I(2,1,1)}$ أ

6

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3} = 1 \quad \times 6$$

$\boxed{3x+3y+2z-6=0}$ ب

7

$$\arg(1+i) + \arg(z^2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) + 2\arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{4} + 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{12}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{24}}$ أ

8) $S = 2+2^2+2^3+\dots+2^n$

$$= (2)\frac{1-2^n}{1-2} = 2(2^n-1) = 2^{n+1}-2$$

$$\Rightarrow 2^{n+1}-2 = 2046$$

$$2^{n+1} = 2048$$

$$2^n = 1024$$

$$2^n = 2^{10} \Rightarrow \boxed{n=10}$$ ج

---

9) $g'(x) = f'(x) - f'(-x)$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \boxed{0}$$ ج

---

10) $$z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}$$

$$\boxed{=e^{2i\theta}}$$ د

ثانياً : السؤال الأول:

1) f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:

$$f'(x) = \frac{(1)(x-2)-(1)(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

g اشتقاقي على الشرطين:

$x > 0$

و $\sqrt{x} \neq 2$

أي g اشتقاقي على المجال $]0,4[\cup]4,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f'(\sqrt{x})$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{-3}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

2) $$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \; ; & x \geq 0 \\ f(-x) \; ; & x < 0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) \; ; & x > 0 \\ -f'(-x) \; ; & x < 0 \end{cases}$$

$$h'(0^+) = f'(0) = \frac{-3}{(-2)^2} = \frac{-3}{4}$$

$$h'(0^-) = -f'(0) = \frac{3}{4}$$

$$h'(0^+) \neq h'(0^-)$$

فالتابع h غير اشتقاقي عند $x=0$.

السؤال الثاني:

1) ليكن A الحدث: مجموع رقمي الكرتين $= 4$

4 و 0   2 و 2

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}$$

2) $X(\Omega) = \{2,4,6,8\}$

$$P(X=2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$$

$$P(X=4) = P(A) = \frac{4}{15}$$

$$P(X=6) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15}$$

$$P(X=8) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

x	2	4	6	8
$P(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

$$E(X)=\sum x_i\, p_i$$

$$=\frac{4+16+36+24}{15}=\frac{80}{15}=\frac{16}{3}$$

السؤال الثالث:

1)

$$\binom{n}{2}-n=\frac{1}{2}n$$

$$\binom{n}{2}=\frac{3}{2}n$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n}{2} \qquad n\neq 0$$

$$n-1=3 \Rightarrow \boxed{n=4}$$

2)

$$P^2_{n+3}=3\binom{n+2}{2}$$

شرط الحل:

$$\begin{cases} n+3\geq 2 \\ n+2\geq 2 \end{cases} \Rightarrow n\geq 0$$

$$(n+3)(n+2)=3\,\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

نقسم على $n+2\neq 0$:

$$n+3=\frac{3}{2}(n+1)$$

$$2n+6=3n+3$$

$$\boxed{n=3}$$

ثالثاً: التمرين الأول:

1) ليكن g التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق

$$g(x)=\ln(1+x)-\sqrt{x}$$

g اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{2(1+x)\sqrt{x}}=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{x}}\leq 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	0	$\searrow$

من جدول الاطراد نلاحظ أنّ $g(x)\leq 0$

وبالتالي $\ln(1+x)-\sqrt{x}\leq 0$

أي $\ln(1+x)\leq\sqrt{x}$

محققة أياً كانت $x\in[0,+\infty[$.

2)

$$f(x)=3^{\sin^2 x}=e^{(\sin^2 x)\cdot\ln 3}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=(2\ln 3\,\sin x\,\cos x)\,e^{(\sin^2 x)\cdot\ln 3}$$

$$=(2\ln 3\,\sin x\,\cos x)\cdot 3^{\sin^2 x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(2\ln 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$=\boxed{\sqrt{3}\cdot\ln(3)}$$

3)

$9^x = 3^{x+1}-2$

$3^{2x} = 3\cdot 3^x - 2$

$3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$

$(3^x-1)(3^x-2) = 0$

إما $3^x = 1$ أي $\boxed{x_1 = 0}$

أو $3^x = 2$

$\ln(3^x) = \ln(2)$

$x\ln(3) = \ln(2)$

$\boxed{x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$

التمرين الثاني:

1)

$E(n):\quad 1 \le u_n \le 12$

من أجل $n=0$ لدينا

$1 \le u_0 = 1 \le 12$

$E(0)$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ و نبرهن صحة $E(n+1)$

من الفرض $1 \le u_n \le 12$

$\frac{2}{3} \le \frac{2}{3}u_n \le 8$

$\frac{14}{3} \le \frac{2}{3}u_n + 4 \le 12$

$1 \le \frac{14}{3} \le u_{n+1} \le 12$

$1 \le u_{n+1} \le 12$

$E(n+1)$ محققة

وبالتالي $E(n)$ محققة أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 0$

2)

$v_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$= \frac{2}{3}u_n - 8 = \frac{2}{3}(u_n - 12)$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n}$

فالمتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 12 = -11$

$v_n = v_0\, q^n$

$\boxed{v_n = -11\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

3)

$S_n = (v_0+12) + (v_1+12) + \dots + (v_n+12)$

$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (\underbrace{12 + 12 + \dots + 12}_{n+1\ \text{مرة}})$

$= v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 12(n+1)$

$= -11 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + 12n + 12$

$= -33\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 12n + 12$

$\boxed{S_n = 22\left(\frac{2}{3}\right)^n + 12n - 21}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 0 + \infty = +\infty$

حيث $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لأن: $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

التمرين الثالث:

$a=-1 \,,\; b=2+i\sqrt{3} \,,\; c=2-i\sqrt{3} \,,\; d=3$

1)

$\ell_1 = a-b = -1-(2+i\sqrt{3})$

$= -3-i\sqrt{3}$

$\ell_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$

$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-1-2+i\sqrt{3})$

$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3+i\sqrt{3})$

$= -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$

$= -3-i\sqrt{3}$

$\ell_1 = \ell_2$ المساواة محققة

$\frac{a-b}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}} \rightarrow \left|\frac{a-b}{a-c}\right| = 1$

$\boxed{AB = AC}$

$\arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = \frac{\pi}{3}$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

2) لتكن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,-1), (B,2), (C,2)$

$d' = \frac{-a+2b+2c}{-1+2+2} = \frac{1+4+2i\sqrt{3}+4-2i\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{9}{3} = 3 = d$

فالنقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,-1), (B,2), (C,2)$

3)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MD}$

$c-a = d-m$

$m = a+d-c$

$m = (-1)+(3)-(2-i\sqrt{3})$

$= 2-2+i\sqrt{3}$

$\boxed{m = i\sqrt{3}}$

4)

$p = -(a+b) = -1-i\sqrt{3}$

$q = ab = -2-i\sqrt{3}$

رابعاً: المسألة الأولى:

1)

$A(0,0,0) \,,\; B(2,0,0) \Rightarrow I(1,0,0)$

$C(2,1,0) \,,\; G(2,1,1) \Rightarrow J(2,1,\frac{1}{2})$

$D(0,1,0)$

$\overrightarrow{DI}(1,-1,0) \,,\; \overrightarrow{DJ}(2,0,\frac{1}{2})$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (DIJ):

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DJ} = 0 \Rightarrow 2a+\frac{1}{2}c=0$

$4a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-4a}$

نفرض $a=1$ نجد $b=1$ و $c=-4$

$\vec{n}(1,1,-4)$

$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$

$\boxed{(DIJ):\; x+y-4z-1=0}$

2)

$DI^2 = \|(1,-1,0)\|^2 = 1+1+0 = 2$

$DJ^2 = \|(2,0,\frac{1}{2})\|^2 = 4+0+\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$IJ^2 = \|(1,1,\frac{1}{2})\|^2 = 1+1+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

نلاحظ أنَّ $DJ^2 = DI^2 + IJ^2$

فالمثلث DIJ قائم في I.

$S = \frac{1}{2} DI \cdot IJ = \frac{1}{2}(\sqrt{2})(\frac{3}{2}) = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

$\vec{JI}\cdot\vec{JD} = (-1,-1,-\frac{1}{2})\cdot(-2,0,-\frac{1}{2})$

$= 2+0+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

لكن: $\vec{JI}\cdot\vec{JD} = JI \cdot JD \cdot \cos(D\hat{J}I)$

$\frac{9}{4} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\cos(D\hat{J}I)$

$$\boxed{\cos(D\hat{J}I) = \frac{3}{\sqrt{17}}}$$

3)

$H(0,1,1)$

$dist(H, DIJ) = \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}}$

$= \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{2\cdot 2}{3\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$V_{H-DIJ} = \frac{1}{3} S_{DIJ} \cdot h$

$= \frac{1}{3}(\frac{3\sqrt{2}}{4})\cdot(\frac{2\sqrt{2}}{3}) = \boxed{\frac{1}{3}}$

4)

$\vec{u}(1,1,-4)$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 1-4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

5)

محور الأسطوانة $(O;\vec{i})$

نصف قطر قاعدتها $r = AE = 1$

$$\boxed{y^2+z^2 = 1 \quad ; 0 \leq x \leq 2}$$

المسألة الثانية:

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = e^{-x}+x-2$

$= e^{-x}(1+xe^{x})-2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)(1+0)-2$

$= +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = -e^{-x}+1$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 = e^{-x}$

$\boxed{x = 0}$

$f(0) = 1-2 = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2)

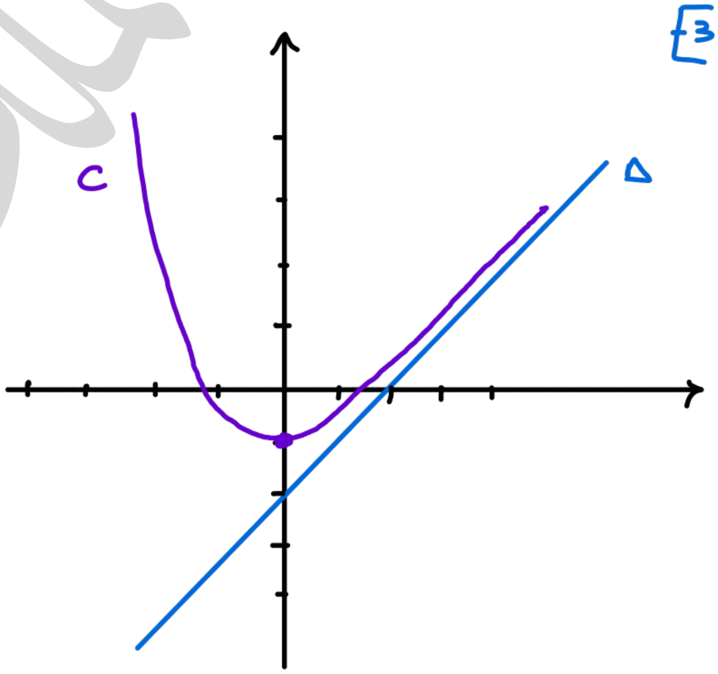
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

فالمستقيم Δ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$.

$$f(x)-y=e^{-x}>0$$

c فوق Δ.

3)



4)

$$S=\int_0^{\ln 2}(f(x)-y)\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=\frac{-1}{2}+1$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}}$$

5)

$$e^{-2x}+\frac{x}{e^{x}}-\frac{3}{2}e^{-x}=0$$

نضرب الطرفين ب $e^{x}>0$:

$$e^{-x}+x-\frac{3}{2}=0$$

$$e^{-x}+x-2=\frac{3}{2}-2$$

$$f(x)=\frac{-1}{2}$$

نقاطع المستقيم $y=\frac{-1}{2}$ مع الخط c

نجد أنه يوجد نقطتا تقاطع

أي للمعادلة حلان مختلفان.

------------------ انتهى الحل ------------------

أ.عبد الملك خير الله