ساره العنزي

الملف رياضيات المنقذة النهائية
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

2025 - 2026

رياضيات

المنقذة النهائية

SOS

الصف 12 علمي - الفصل الثاني

لا تضيع وقتك بمراجعة كل شيء ❌
ركز على اللي يجي فعلاً بالاختبار... وتمرّن عليه بذكاء ✓

🚨 لا تدخل الفاينل بدووونها 🚨

قو أونلاين
المهندسه / ساره العنزي

مراجعه مختصره لنهائي

تكامل

- محدد: $\int_{\square}^{\square} f(x)\,dx$ = ناتج
- غير محدد: $\int f(x)\,dx$ → $F(x) + C$

درس (1-5) : تكامل غير المحدد

- مباشره: $\int \frac{\text{حدودية}}{\text{حدودية}}\,dx$ درجه البسط اكبر — تحليل
- توزيع: $\frac{\square + \square}{\text{حد واحد}}$ — فراشه

درس (5-2) : بالتعويض

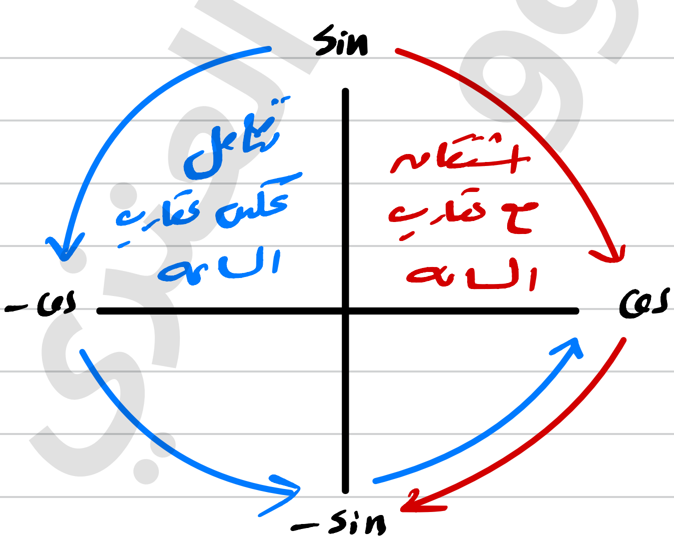
$\int$ دالة * مشتقتها dx

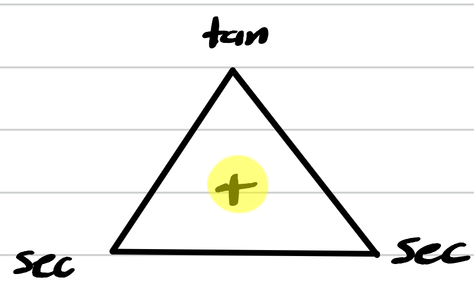
مباشرة	كسور شرط ناقص	معادلة x بدلالة u

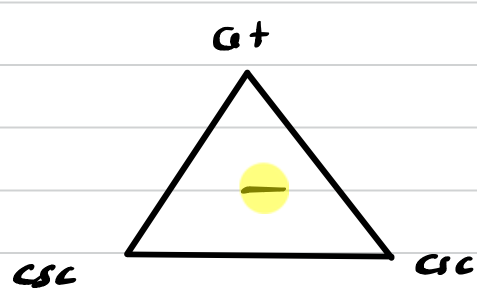
* $\sqrt{(\ \ )}$
* كسور

تذكير : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

درس (5-3) : تكامل الدوال المثلثية







أوجد :

$$\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x-3)(x-1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int x-3\,dx$$

$$= \int x\,dx - \int 3\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

أوجد :

$$\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{3x^2}{1x} - \cancel{\frac{x}{x}}\right)^2 dx$$

$$= \int (3x^1 - 1)^2\,dx$$

$$= \int 9x^2 - 6x + 1\,dx$$

$$= 9\cdot\frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + x + c$$

رتب $= 3x^3 - 3x^2 + x + c$

أوجد :

$$\int (x+2)\cdot\sqrt[3]{x^2+4x-1}\cdot dx$$

$$= \int (x+2)\cdot(x^2+4x-1)^{\frac{1}{3}} dx$$

$u = x^2+4x-1$

$du = 2x+4\ dx$

$= 2(x+2)\ dx$

$\frac{1}{2} du = (x+2)\ dx$

$$= \int u^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + c \Rightarrow \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + c$$

أوجد :

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+3\right)^4}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}+3\right)^4 dx$$

$u = \frac{1}{x}+3$

$-du = \frac{1}{x^2} dx$

$$= \int u^4\cdot - du$$

$$= -\int u^4 du$$

$$= -\frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+3\right)^5 + c$$

أوجـد :

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)^{3}}\,dx$$

$$= 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+2)^{-3}\,dx$$

$u = \sqrt{x}+2$

$2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= 5\int u^{-3}\cdot 2\,du$$

$$= 10\int u^{-3}\,du$$

$$= 10\cdot -\tfrac{1}{2}\,u^{-2} + c$$

$$= -5\,u^{-2} + c$$

$$= -5\,(\sqrt{x}+2)^{-2} + c \qquad = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^{2}} + c$$

أوجـد :

$$\int x^{3}\cdot\sqrt{x^{2}-2}\cdot dx$$

$$= \int x^{3}\cdot(x^{2}-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$u = x^{2}-2$

$x^{2} = u+2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

$$= \int x^{1}\cdot x^{2}\,(x^{2}-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int (u+2)\cdot u^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$\frac{3}{2}+1 \qquad \frac{1}{2}+1$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \implies \frac{1}{5}(x^{2}-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^{2}-2)^{\frac{3}{2}} + c$$

أوجد :

$$\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$$

$u = \cos(2x-3)$

$du = -\sin(2x-3)\cdot 2\,dx$

$-\frac{1}{2}du = \sin(2x-3)\,dx$

$= \int u^3 \; -\frac{1}{2}du$

$= -\frac{1}{2}\int u^3 du \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + C$

$= -\frac{1}{8}u^4 + C$

$= -\frac{1}{8}(\cos(2x-3))^4 + C$

أوجد :

$$\int \csc^5 x\cdot\cot x\cdot dx$$

$u = \csc x$

$-du = \csc x\cdot\cot x\,dx$

$= \int \csc^4 x\cdot\csc x\cdot\cot x\,dx$

$= -\int u^4\cdot du$

$= -\frac{1}{5}u^5 + C$

$= -\frac{1}{5}(\csc x)^5 + C$

أوجـد :

$$\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x+3}\cdot dx$$

$u = x^2+2x+3$

$du = 2x+2\ dx$

$= 2(x+1)\ dx$

$\frac{1}{2}du = (x+1)\ dx$

$= \int e^u \cdot \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{2}\int e^u \cdot du$

$= \frac{1}{2}e^u + c \longrightarrow \frac{1}{2}e^{x^2+2x+3} + c$

أوجـد :

$$\int x\cdot \sin(5x)dx$$

① $u = x$ $\qquad dv = \sin(5x)\ dx$

$du = 1\ dx$ $\qquad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

② $= u\cdot v - \int v\cdot du$

تعويض ③ $= x\cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) - \int -\frac{1}{5}\cos(5x)\cdot 1dx$

$= x\cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,dx$

$= x\cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\sin(5x) + c$

$= x\cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + c$

درس (5-5) : بالتجزيء

مثلثية (sin ، cos ، tan)

Ln * جدورية ∫

* الأسس متساوية

تكامل ($dv =$ ، $v =$

اشتقاق ($u =$ ، $du =$ ①

② $u \cdot v - \int v \cdot du$

درس (5-6) : كسور جزئية

$$\frac{\text{حدودية}}{\text{حدودية}}$$

* درجة المقام أكبر + يتحلل

درس (5-7) : تكامل محدد

مطلق ← قيمة ترتيبية

تعويض u, du

إثبات قيمة التكامل ≥ 0 ، ≤ 0

$\ln$ ①
جدولية ②

أوجد :

$$\int (4x-1)\cdot \ln x \cdot dx$$

① $u = \ln x$ $\quad dv = 4x-1\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x$

$= 2x^2 - x = x(2x-1)$

② $= u\cdot v - \int v\cdot du$

$= \ln x \cdot x(2x-1) - \int \frac{\cancel{x}}{1}(2x-1)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx$

$= \ln x \cdot x(2x-1) - \int 2x-1\,dx$

$= \ln x \cdot x(2x-1) - (x^2 - x) + C$

$= \ln x \cdot x(2x-1) - x^2 + x + C$

أوجد :

$$\int x^2 \cdot \ln x^2 \cdot dx$$

① $u = \ln x^2$ $\quad dv = x^2 dx$

$du = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}dx = \frac{2}{x}dx$ $\quad v = \frac{1}{3}x^3$

② $= u\cdot v - \int v\cdot du$

$= \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{2}{x}dx$

$= \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}\int \cancel{x^3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx$

$= \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}\int x^2 dx$

$= \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C$

$= \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^3 + C$

لتكن الداله f :

$$f(x) = \frac{2}{x^2+8x+15}$$

(1) الكسور الجزئيه

(2) $\int f(x)\mathrm{d}x$

حلّ

① $x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$ $x=-3$ $x=-5$

② $\frac{2}{x^2+8x+15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$

ضرب

③ $2 = A(x+5) + B(x+3)$

تكامل

④ $\int \frac{2}{x^2+8x+15}dx = \int \frac{1}{x+3}dx + \int \frac{-1}{x+5}dx$

$= \ln|x+3| - \ln|x+5| + C$

$x=-3$

$2 = A(-3+5)$

$\therefore A = 1$

$x=-5$

$2 = B(-5+3)$

$\therefore B = -1$

لتكن الداله f :

$$f(x) = \frac{-x+10}{x^2+x-12}$$

(1) الكسور الجزئيه

(2) $\int f(x)\mathrm{d}x$

حلّ

① $x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$ $x=3$ $x=-4$

② $\frac{-x+10}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}$

ضرب

③ $-x+10 = A(x+4) + B(x-3)$

④ $\int \frac{-x+10}{x^2+x-12}dx = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{-2}{x+4}dx$

$= \int \frac{1}{x-3}dx - 2\int \frac{1}{x+4}dx$

$= \ln|x-3| - 2\ln|x+4| + C$

$x=3$

$-(3)+10 = A(3+4)$

$\therefore A = 1$

$x=-4$

$-(-4)+10 = B(-4-3)$

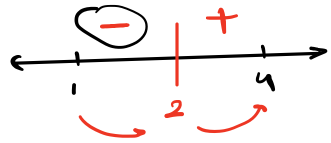
$\therefore B = -2$

أوجد :

$$\int_1^4 |x-2|\,dx$$

$x - 2 = 0$

$x = 2$



$$= \int_1^2 -x+2\,dx + \int_2^4 x-2\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 + \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^4$$

$$= \left[2 - \tfrac{3}{2}\right] + \left[0 - (-2)\right]$$

$$= \frac{5}{2} = 2.5$$

أوجد :

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 2x - 3\right)^2 (x+1)\,dx$$

$u = x^2 + 2x - 3$

$du = 2x + 2\,dx = 2(x+1)\,dx$

$\frac{1}{2}du = x+1\,dx$

$u = (1)^2 + 2(1) - 3 = 0$ $x = 1$ عندما

$u = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$ $x = -1$ عندما

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} u^2 \cdot du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-4}^{0} \Longrightarrow \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{64}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{32}{3}$$

أوجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot sec^2 x \, dx$$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

عندما $x = 0$: $u = \tan(0) = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$: $u = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

$$= \int_0^1 u \cdot du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}$$

أوجد :

$$\int_0^2 (x^2 - 2x - 3) \, dx \leqslant 0$$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

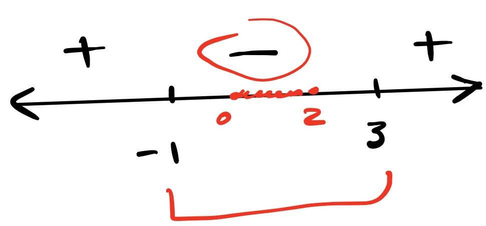
متصلة على $[0,2]$

نضع $f(x) = 0$

$+x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -1$



$\because f(x) \leq 0 \ \forall x \in [-1,3]$

$\because [0,2] \subseteq [-1,3]$

$\therefore f(x) \leq 0 \ \forall x \in [0,2]$

$$\therefore \int_0^2 x^2 - 2x - 3 \, dx \leq 0$$

درس (6-1) : المساحات في المستوى

مباشرة

$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

دالتين

وسكت $=$

غير متقاطعتين $f(x) > g(x)$

$$A = \left| \int_a^b y_1 - y_2 \, dx \right|$$

درس (6-2) : حجوم الأجسام الدورانية

مباشرة

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

دالتين

$$V = \int_a^b (\text{الأكبر})^2 - (\text{الأصغر})^2 \, dx$$

درس (6-3) : طول القوس ومساحة سطح الدالة

طول القوس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

حول ونقطة

حول العمودي

جزء 3

أوجد مساحه المنطقة المحدده بمحنى الداله f: $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات

دالة متغير

A

① $f(x) = 0$ نضع

تحليل ← $x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$, $x = 3$

② $A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$

$= \left| \int_0^3 x^2 - 3x\,dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 \right|$

$= \left| \left[-\frac{9}{2} - 0 \right] \right| = \frac{9}{2}$ units²

أوجد مساحه المنطقة المحدده بمحنى الداله f: $g(x) = -2x$ $f(x) = 2x - x^2$

① $f(x) = g(x)$

$2x - x^2 = -2x$

$-2x - 2x + x^2$

$x^2 - 4x = 0$

$x = 0$, $x = 4$

② $A = \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \right|$

$= \left| \int_0^4 x^2 - 4x\,dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \right|$

$= \left| \left[\frac{-32}{3} - 0 \right] \right|$

$= \frac{32}{3}$ units²

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$

والمستقيمين: $x = 0$, $x = 2$ علما بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

b a

① $4x - x^2 - (5 + x^2)$

$4x - x^2 - 5 - x^2 = 0$

$-2x^2 + 4x - 5 = 0$

② $A = \left| \int_a^b f(x) - g(x)\, dx \right|$

$= \left| \int_0^2 -2x^2 + 4x - 5\, dx \right|$

$= \left| \left[-2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 5x \right]_0^2 \right|$

$= \left| \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^2 \right|$

$= \left| \left[\frac{-22}{3} - 0 \right] \right| = \frac{22}{3}$ units^2

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة

بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين

$x = -1$, $x = 3$ بالوحدات المكعبة.

a b

① $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$

$= \pi \int_{-1}^3 (\cancel{\sqrt{x+1}})^{\cancel{2}}\, dx$

$= \pi \int_{-1}^3 x + 1\, dx$

$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^3$

$= \pi \left[\frac{15}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) \right] = 8\pi$ units^3

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنيي الدالتين: $y_2 = x^2 + 1$, $y_1 = x + 3$.

① $y_1 = y_2$

$x + 3 = x^2 + 1$

$x^2 + 1 - x - 3 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 \qquad x = -1$

$0 \in (-1, 2)$

② $y_1 = (0) + 3 = 3$ الأكبر

$y_2 = (0)^2 + 1 = 1$

③ $V = \pi \int_a^b (y_1)^2 - (y_2)^2 \, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^{\boxed{2}} - (x^2+1)^{\boxed{2}} \, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 \, dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} -x^4 - x^2 + 6x + 8 \, dx$

$= \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2}$

$= \pi \left[\frac{284}{15} - \left(\frac{-67}{15} \right) \right]$

$= \frac{117}{5} \pi \text{ units}^3$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفتره [2,5]

مشتقة + تربيع ①

$f'(x) = \cancel{\frac{2}{9}} \cdot \frac{3}{2} (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{3} = (9 + 3x)^{\frac{1}{2}}$

$(f'(x))^2 = \left((9 + 3x)^{\boxed{\frac{1}{2}}}\right)^{\boxed{2}} = 9 + 3x$

قانون ②

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$

$= \int_2^5 \sqrt{10 + 3x} \, dx \Rightarrow \frac{1}{3} \int_2^5 (10 + 3x)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$u = 10 + 3x$

$du = 3\,dx$

$\frac{1}{3} du = 1\,dx$

$= \frac{2}{9} \left[(10 + 3x)^{3/2} \right]_2^5$

$= \frac{2}{9} [125 - 64]$

$= \frac{122}{9}$

مشتقه

أوجد معادله منحنى الداله f الذي ميله عند أي نقطه P(x ,y) يساوي : $4x^3+6x^2-2x+1$
ويمر بالنقطة B (1,0)

x f(x)
y

مشتقه $f'(x) = 4x^3+6x^2-2x+1$

معادله $f(x) = \int 4x^3+6x^2-2x+1 \, dx$

$= 4\cdot\frac{1}{4}x^4+6\cdot\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C$

$= x^4+2x^3-x^2+x+C$

∵ يمر بالنقطة $B(1,0)$

$0 = (1)^4+2(1)^3-(1)^2+(1)+C$

$\therefore C=-3$

$f(x) = x^4+2x^3-x^2+x-3$

إذا كان ميل العمودي علي منحنى الداله f : عند أي نقطة عليه (x,y) يساوي : $\boxed{2x+5}$ مشتقه
فأوجد معادله المنحنى عندما يمر بالنقطة B(-2,3)

$\because f'(x) = \frac{-1}{f'(x)} = \frac{-1}{2x+5}$

$f(x) = \int \frac{-1}{2x+5} dx$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+5} dx$

$= -\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$

x f(x)

∵ منحنى الداله يمر بالنقطة $B(-2,3)$

$3 = -\frac{1}{2}\ln|2(-2)+5|+C$

$\therefore C=-3$

$f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5|-3$

حل المعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

① $y' = 2x \cdot y$

$y \rightleftarrows x$

② $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$

$\frac{dy}{y} = 2x \cdot dx$

③ $\int \frac{dy}{y} = \int 2x \cdot dx$

$\ln|y| = x^2 + c$

$|y| = e^{x^2+c}$

④ $y = \pm e^{x^2+c}$

⑤ $y = k e^{x^2}$

$\therefore k = \pm e^{c}$

حل المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 4$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y = 3$ عندما $x = 0$

$e^0 = 1$

① $\frac{3y'}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2y}{3}$

$y' = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}y$

$a = \frac{2}{3}$ $\quad b = \frac{4}{3}$

② $y = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$

$y = k \cdot e^{\frac{2}{3}x} - \frac{4/3}{2/3}$

$y = k \cdot e^{\frac{2}{3}x} - 2$

③ $3 = k \cdot e^{\frac{2}{3}(0)} - 2$

$3 = k \cdot e^0 - 2$

$3 = k - 2$

$\therefore k = 5$

④ $y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$