★ التوابع الدورية ★

هام جدا وكثيرا

📌 التوابع الدورية الأساسية:

$\sin, \cos, \tan$

◆ **تعريف:**

نقول إن f تابع **دوري** و دورته $T > 0$ إذا تحقّق:

$$(1)\ \forall x \epsilon D_f \Rightarrow x + T \epsilon D_f$$

$$(2)\ f(x+T) = f(x)$$

في حال $D_f = \mathbb{R}$ **فإن الشرط الأول محقق دوما**

◆ مثال:

أثبت أن $f(x) = \cos(2x)$ هو تابع دوري. **ودوره π**

بما أن f معرف على $\mathbb{R}$ فإن شرط التعريف متحقق.

$$f(x+T) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$$

إذن f تابع دوري ودورته الأساسية هي π.

نقصد بالدورة الأساسية (أصغر دور للتابع)

★ ملاحظات ★

1. **إذا كان التابع دوري ودورته 2π**
   يكفي دراسة التابع على أي مجال طوله 2π مثلًا:
   $[0,2\pi]$ أو $[-\pi,+\pi]$.

2. **إذا كان التابع دوري ودورته π:**
   يكفي دراسة التابع على أي مجال طوله π، مثلًا:
   $[0,\pi]$.

3. **إذا كان للتابع صفة تناظرية (زوجي أو فردي):**
   يكفي دراسة التابع على نصف مجال دورة واحدة:
   $[0,\frac{T}{2}]$.

◆ صيغ عامة للدورات:

أصغر دور للتابع

- الدورة لـ $\sin x$ و $\cos x$:

$$T=2\pi$$

- الدورة لـ $\tan x$:

$$T=\pi$$

- الدورة لـ $\sin(ax+b)$ أو $\cos(ax+b)$:

$$T=\frac{2\pi}{|a|}$$

- الدورة لـ $\tan(ax+b)$:

$$T=\frac{\pi}{|a|}$$

📖 أمثلة:

✦ أوجد أصغر دور لكل من التوابع الآتية:

$f(x)=\sin(2x)+\cos x$ ✨

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{2}=\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{1}=2\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{T=2\pi}$$

◆ $f(x)=\cos 2x$

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

◆ $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

$$T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$

◆ $f(x)=\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$T=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$$

قواعد أساسيه يجب حفظها بشكل جيد

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$ وفق $f(x)=\frac{\tan x}{\sin x+1}$

فإن التابع f يحقق إحدى الخواص الآتية:

A	B	C	D	E
دوري دوره π	دوري دوره 2π	ليس دوري	فردي	زوجي

$$f(x)=\frac{\tan x}{\sin x+1}$$

$$f(x+2\pi)=\frac{\tan(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)+1}=\frac{\tan x}{\sin x+1}=f(x)$$

وبالتالي f دوري ودوره 2π

اذا كان لدينا التابع

$$f(x) = sinx$$

فإن

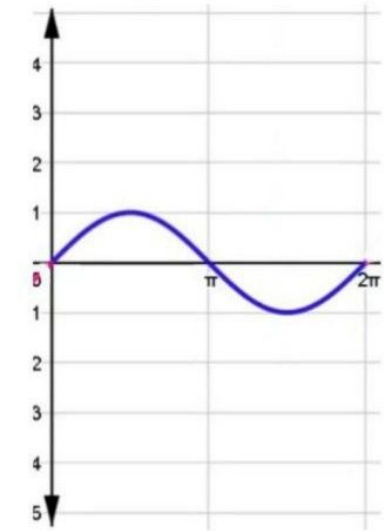
$$f(x + 2\pi) = sin(x + 2\pi)$$

$$= sin\, x$$

$$= f(x)$$

أي ان تابع sin تابع دوري ودوره هو $T = 2\pi$

يعني تابعنا يكرر نفسه على مجال طوله T



الخط البياني لتابع $sin\, x$