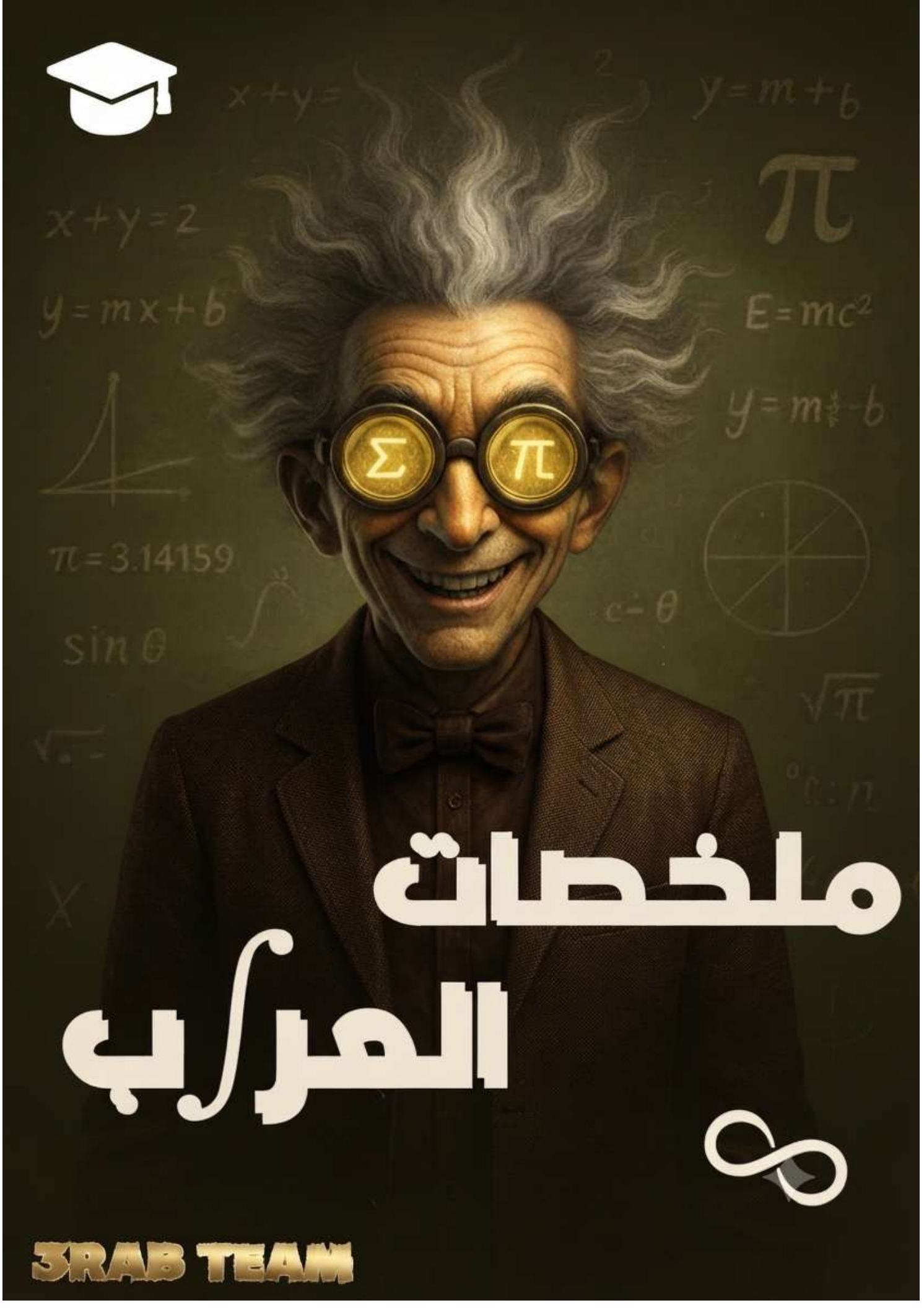
ملخصات
العرب
3RAB TEAM

تطبيقات على نهاية متتالية صريحة

] دب ,دب – [$\in U_n$

الحل :

دب $> |U_n|$

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ نعلم ان نهاية المتتالية تساوي الصفر جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$

الحل :

$$|u_n| < 10^{-3} \rightarrow \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3}$$

$$n\sqrt{n} > 10^3 \rightarrow n^3 > 10^6$$

$$n > 100$$

إيجاد $n > n_0$

1- نحسب نهاية المتتالية L عند القيمة المعطاة

2- نحسب $r = \frac{\text{العدد الكبير} - \text{العدد الصغير}}{2}$

3- نعوض في $|U_n - l| < r$

4- بتكمل حسابات

مثال :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق $U_n = \frac{3n+1}{n-1}$: جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $U_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n اكبر تماما من n_0

الحل:

1- النهاية مسيطرع مسيطر 3

2- $r = \frac{3.02 - .98}{2} = 0.02$

3- $|u_n - 3| < 0.02$

$$\left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < 0.02 \rightarrow \left|\frac{4}{n-1}\right| < 0.02$$

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100} \rightarrow \frac{n-1}{4} > 50 \rightarrow n - 1 > 200$$

$$n > 201 \rightarrow n_0 \geq 201$$

قوانين للحفظ هام جدا

1- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

2- اذا كان $q > 1$ فان $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

3- اذا كان $q \leq -1$ فان ليس للمتتالية نهاية

4- اذا كان $q = 1$ فان المتتالية ثابتة أي نهاية الأساس يساوي 1

مثال :

عنا متتالية فيها $-1 < q < 1$

$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

احسب نهاية المتتالية :

اول شي منحول الى قانون مجموع المتتالية الهندسية

$$s = 1.\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}.q^n$$

بما انو الأساس محصور بين سالب 1و 1 فنهايته هي صفر يعني اللون البرتقالي بصار صفر ضل الكسر لي حدو هو النهاية

حساب نهاية متتالية (من خلالهم احيانها بجيب العنصر الراجح)

نكشات

$U_{n+1} = aU_n + b$ -2

بشكل سريع(اتمتة)

$lim = \frac{b}{1-a}$:

او حل المعادلة $f(x) = x$

انتبه للمتتالية الثابتة :

عنا متتاليتين متجاورتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث

$x_0 = 5 \quad y_0 = 3$

والمتتالية $w_n = 3x_n - y_n$

ثابتة , ان النهاية المشتركة ل x_nوy_n هي:

منروح نحسب اول حد ل w_n

$w_0 = 12$

هلق منعوض بدل كل متتالية L

$12 = 3l - l \rightarrow 12 = 2l \rightarrow l = 6$

سلسلة بطريقة التقليدي و السريعة

-1 سلسلة فيا عدد اس n

$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

الحل : القانون بطريقة سريعة

a=3 $lim = \frac{1}{a-1}$

-2 سلسلة فيا عدد اس n (بس البسط بيتغير مش ثابت)

$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

الحل : القانون بطريقة سريعة

a=3 $lim = \frac{2}{a-2}$

-3 سلسلة مافيا اس n بل n بذاتها :

$u_n = \frac{n}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+n}$

او شكل شبيه مثلا جذر او تربيع هيك

بطبق هاد القانون :

الكسر الاول $n. \leq u_n \leq$ الكسر الاخير $n.$

حتى بفيدني ب كتابة وحل حصر متتالية ةبفيد بحساب النهاية

مثال

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n

$U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$:

متل هاد بيعطيك علاقة منطبق القانون

ومنه نفسه بحسب نهاية المتتالية

كسر مع قوة $U_n = \frac{\text{عدد}^n \pm \text{شي}}{\text{عدد}^n \pm \text{شي}}$

الحل: بسحب عامل مشترك دايما وبنهي طبعا لاتنسى انو هون العدد نعتبرو مثل الأساس اذا كان اكبر من لواحد نهايتو لانهاية وبين الواحد والناقص واحد نعتبر نهاية المقدار هاد صفر احسب نهاية المتتالية

$u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

منروح منسحب عامل مشترك اكبر عدد او صاحب اكبر اس

$u_n = \frac{3^n(1 - (\frac{2}{3})^n)}{3^n(1 - (\frac{1}{3})^n)}$

نختصر ونحسب النهاية مثل الصفحة لفوق عليسار ويطلع جواب 1

-1 حفظ علاقات :

بدنا نهاية المقدار التالي :

$U_n = \frac{1^2 + 1^2 + \cdots + n^2}{\text{شي فيه } n}$

اكيد مش تقلي مسيطر على مسيطر بتروح بتجيب لقانون لحفظتك ياه بتدريج

$1^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

بتحطو بدل البسط وبتروح بتنشر بس n على الاقواس وبعدا خود مسيطر على مسيطر

أفكار مهمة

المتتالية التلسكوبية

$$u_n = \frac{c}{(An-F)(Bn+G)}$$

وطلب حساب $s_n = u_0 + \cdots + u_n$

1- نكتب بالشكل $u_n = \frac{a}{An-F} + \frac{b}{Bn+G}$

2- $c = a(Bn+G) + b(An-F)$

3- نختار قيمة تعدم a ونعوضها ب الخطوة 2 وأيضا قيمة تعدم b ونعوضها في 2

4- شكل جديد متل الخطوة 1 بس بعوض القيم بحسب اول حد ب اول كسر فقط وبعدين بنزل تاني كسر بدلالة n اذا بدو مجموع بدلالة n واذا بدو نهاية متل ماعملت صح وبنهي

ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1- عين قيمة a,b ليتحقق :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

2- عبر عن s_n بدلالة n

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$1 = a(2x+1) + b(2x-1)$$

قيمة تعدم a $x = -\frac{1}{2}$ ومنه بتعويض $b = -\frac{1}{2}$

قيمة تعدم b $x = \frac{1}{2}$ ومنه بتعويض $a = \frac{1}{2}$

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$u_0 = \frac{1}{2}(-1-1)\,,\, u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \ldots$$

شوف كيف اذا جمعنا رح يروح حدود مع بعض بتالي رح يضل اول كسر من اول حد واخر كسر من المتتالية $s_n = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

التجاور

1- الشرط الأول : $lim[U_n - V_n] = 0$

2- الشرط الثاني: احداهما متزايدة ولاخرة متناقصة

3- لهما نفس النهاية

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 1}$ المعرفتيين وفق العلاقتين $s_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $t_n = \frac{n-1}{n}$:

اثبت انهما متجاورتان ثم احسب النهاية

$$s_{n+1} - s_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \rightarrow \grave{f}(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

احسب النهايات او حسوب نهاية الفرق بتجي 0

اثبت تجاور المتتاليتان

$$y_n = x_n + \frac{1}{n} \quad y_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

;كفي الحل لحالك سهلة

حساب نهاية سلسلة تقليدي

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1- اثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$

2- استنتج عنصر راجح

الاثبات منحلو عادي اما بنسبة ل 2 هون بروح ببدل كل عدد ب العلاقة الي اثبتها

يعني $1 \leq 2^1$ بدلت كل n بعدد

$3 \leq 2^3$ $2 \leq 2^2$ وهكذا

$$u_n \leq \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2^n}{3^n}$$

صار مجموع متتالية هندسية معي الاساس و لحد لأول

$$u_n \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$u_n \leq 2 - 2(\frac{2}{3})^n$$

$$u_n \leq 2$$

المحدودية و التقارب

ملاحظات للحفظ

1- اذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى $u_n \leq m$ فهي متقاربة

2- اذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى $u_n \geq m$ فهي متقاربة

3- اذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأدنى فهي متباعدة

4- اذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الأعلى فهي متباعدة

عزيزي لاتنسى تدرب على الرسمات وكيف تعرفن انا شرحت رسم فيديو

حصر متتالية

أحيانا بروح بحسب اول حد بلمتتالية و بحسب نهايتها لاحسن احصرها ببعض الأوقات

بين اذا كانت المتتاليات الاتية محدودة من الأعلى او الأدنى

$u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ اول حد $u_1 = \frac{-2}{\sqrt{2+3}}$ يعني تقريبا قريب ل -1 لما احسي النهاية هي صفر

$$-1 \leq \frac{-2}{\sqrt{2n+3}} \leq 0$$

$u_n = \frac{1}{1+n^2}$ اول حد $u_1 = \frac{1}{2}$ و النهاية 0

$$0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{2}$$

$u_n = n.(-1)^n$ هي غير محدودة لا من هون ولا هون

$u_n = n^2 - 1 + n$ الحد الأول : 1 و النهاية هي لانهاية بتالي محدودة من الأدنى بس

ملاحظات :

نتبه مو دايما الحد الأول منعوض 1 نتبه على تعريف المتتالية + أحيانا منصغر الصغير ونكبر الكبير يعني ممكن تلاقي اختلاف ب المجال الي طلع معك متل المثال الأول فوق

نمط هام جدا

$u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 3$

بيجي بدرجلك الطلبات

1- اثبات بتدريج $1 \leq u_n \leq 2$ فينك أحيانا تصور الأطراف بشرط التابع لاتنساه وفيك تمشي متل الإحاطة

2- بعدين بقلك حسبلي

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

بتروح تنشرن بعد الطرح او تعمل تحليل

3- بقلك اثبت انها متناقصة مثلا هون تستفيد من طلب الي قبل انها متناقصة

4- بيجي بقلك هل هي متقاربة؟ طالما متناقصة ومحدودة من لادنى (من سؤال 1) ف بتقلو بدي حل المعادلة $f(x) = x$ وهون تقبل وترفض بناء على اطراد المتتالية

-1 لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $x_n = 3 - \frac{(-1)^n}{n}$ إن المتتالية

$\mathcal{A}$	محدودة بالعدد 1	$\mathcal{B}$	محدودة بالعدد 2	C	محدودة بالعدد 3	$\mathcal{D}$	محدودة بالعدد 0

-2 لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $x_n = \frac{n(-1)^n}{n+1}$ إن المتتالية

$\mathcal{A}$	محدودة بالعدد 1	$\mathcal{B}$	محدودة بالعدد 2	C	محدودة بالعدد 3	$\mathcal{D}$	محدودة بالعدد 0

-3 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$ اذا علمت ان $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق: $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

$\mathcal{A}$	4	$\mathcal{B}$	3	C	2	$\mathcal{D}$	1

-4 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

$\mathcal{A}$	$\frac{1}{2}$	$\mathcal{B}$	2	C	0	$\mathcal{D}$	$\frac{1}{3}$

-5 نتأمل المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$, إذا كان $U_n . V_n = e$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ تساوي

$\mathcal{A}$	$\frac{1}{e}$	$\mathcal{B}$	0	C	1	$\mathcal{D}$	$+\infty$

-6 ليكن q عدداً حقيقياً يحقق $0 < q < 1$ و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:
$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ اذا علمت ان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$ فإن q يساوي

$\mathcal{A}$	$\frac{1}{3}$	$\mathcal{B}$	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{3}{4}$	$\mathcal{D}$	$\frac{2}{3}$

-7 لدينا المتتاليتين المتجاورتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ ونعرف $X_n = 2V_n + 5U_n$ إن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{X_n}{U_n}$

$\mathcal{A}$	7	$\mathcal{B}$	5	C	2	$\mathcal{D}$	4

-8 لدينا المتتاليتين المتجاورتين $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$ حيث: $x_0 = 5, y_0 = 3$ ولدينا المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة , معرفة وفق: $w_n = 3x_n - y_n$ ان النهاية المشتركة ل $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$ تساوي

$\mathcal{A}$	6	$\mathcal{B}$	12	C	3	$\mathcal{D}$	4

-9 عند دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = \frac{5^n - 7^n}{1 - 7^n}$ نجد انها متقاربة من العدد

$\mathcal{A}$	1	$\mathcal{B}$	-1	C	$\frac{1}{7}$	$\mathcal{D}$	0

-10 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = n\sqrt[3]{n}$ إن اصغر عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط من اجل كل $n > n_0$ فإن $u_n > 10^{12}$

$\mathcal{A}$	10^4	$\mathcal{B}$	10^6	C	10^{12}	$\mathcal{D}$	10^9

السؤال الأول :

نتأمل المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفين وفق :

$$U_n = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} \qquad V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

1- ادرس اطراد المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$

2- اثبت ان المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين

3- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $u_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots + \frac{1}{n(n+n)}$

1- اثبت ان $\frac{1}{2n} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج ان المتتالية محدودة واحسب نهايتها

السؤال الثاني:

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $x_0 = 2$ و $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}$ ولتكن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $y_n = x_n - 1$

1- اثبت ان المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية عين أساسها و حدها الأول ومن ثم اكتب عبارة (y_n) بدلالة n

2- احسب بدلالة n المجموع $s_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

3- احسب بدلالة n المجموع $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

السؤال الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{u_n+2} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ و المطلوب :

1- اثبت ان المتتالية u_n متزايدة

2- اثبت ان المتتالية $-1 \leq u_n \leq 3$

3- استنتج تقارب المتتالية u_n و احسب نهايتها

التمرين الأول :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n}$

1- اثبت بإستخدام التدريج أن $n \leq 2^n$ أيا كان العدد الطبيعي n

2- اثبت ان العدد $\frac{2}{3}$ عنصر راجح على المتتالية

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0 = -\frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$ و المطلوب :

1- أثبت ان $-2 \leq u_n \leq -1$ اياً كان العدد الطبيعي n

2- أثبت ان $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$ اياً كان العدد الطبيعي n

3- استنتج أن المتتالية متقاربة و احسب نهايتها

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{2}{4n^2-1}$ وليكن $(s_n)_{n\geq 1}$ المجموع

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ المطلوب :

1- عين العددين الحقيقين A,B بحيث : $u_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$

2- بفرض أن $A = 1, B = -1$ اثبت ان $s_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$ و احسب $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

حل المسألتين الاتيتين :

المسألة الأولى :

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفين وفق : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

من اجل كل عدد طبيعي nو المطلوب :

1- من اجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = v_n - u_n$ أثبت ان المتتالية هندسية عين أساسها و احسب نهايتها

2- ادرس اطراد $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ و اثبت انهما متجاورتان

3- نعتبر ان t_n هي المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n وفق : $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$

1- اثبت ان t_n متتالية ثابتة

2- عين النهاية المشتركة لـ u_n و v_n

المسألة الثانية :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 2u_n \end{cases}$

ونرمز بالرمز u_n الى التابع المعرف على وفق: $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$

1- ادرس تغيرات التابع ونظم جدول بها على المجال $[0,2]$
2- أثبت انه اذا انتمى x الى المجال $[1,2]$ انتمى $f(x)$ الى المجال $[1,2]$
3- استنتج ان العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة
4- استنتج ان المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها مع ملاحظة ان $u_{n+1} = f(u_n)$

أنتهت الأسئلة

السؤال الأول :

$$U_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

①

$$* \; U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$- \; U_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4^{n+1}} > 0$$

U_n متزايدة تماماً

$$* \; V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$- \; V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

$$V_{n+1} - V_n = (U_{n+1} - U_n) + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

(2^n) (2^{n+1})

$$= \frac{1 + 2^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

(2^{n+2})

$$= \frac{1 + 2^{n+1} - 2^{n+2}}{4^{n+1}}$$

$$= \frac{1 - 2^{n+1}}{4^{n+1}}$$

المقام $4^{n+1} > 0$

البسط $1 - 2^{n+1} < 0$

لأن : $2^{n+1} > 1$

إذاً :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{4^{n+1}} < 0$$

V_n متناقصة تماماً

$$V_n = U_n + \frac{1}{2^n}$$

$$V_n - U_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

إذاً تحقق شرطا التجاور

U_n متزايدة و V_n متناقصة

$\lim (V_n - U_n) = 0$

إذاً المتتاليتان U_n و V_n متجاورتان.

③

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+n)}$$

①

عدد الحدود × أصغر حد ≤ U_n ≤ عدد الحدود × أكبر حد

$$n \times \frac{1}{n(n+n)} \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \times n$$

عدد الحدود $= n - 1 + 1 = n$

$$\frac{1}{n+n} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{2n} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$ ④

الجواب الأول:

$$U_1 = \frac{1}{4}$$

$\lim U_n = 0$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{4}$$

U_n محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{4}$

U_n محدودة من الأدنى بـ 0

السؤال الثاني :

$$\begin{cases} X_0 = 2 \\ X_{n+1} = \frac{1}{3} X_n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$Y_n = X_n - 1$

$Y_{n+1} = X_{n+1} - 1$ ①

$$\frac{Y_{n+1}}{Y_n} = \frac{\frac{1}{3} X_n + \frac{2}{3} - 1}{X_n - 1} = \frac{\frac{1}{3} X_n - \frac{1}{3}}{X_n - 1} = \frac{1}{3} = q$$

ثابت لا يتعلق بـ n

إذاً $(Y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$Y_0 = X_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

$Y_0 = 1$ حدها الأول

$Y_n = Y_0 (q)^n$

$Y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ ②

$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

$q = \frac{1}{3}$ أساسها

$$S_n = 1\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{2}(1 - 0) = \frac{3}{2}$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$

$S_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$ ③

$= 2 + \frac{4}{3} + \dots + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)$

$= \left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 1\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 1\right) + \dots + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)$

عدد الحدود

عدد الحدود $= n - 0 + 1 = n + 1$

$S_n = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1} + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$S_n = n + 1 + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$= n + 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= n + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\lim S_n = +\infty$

لأن: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

السؤال الثالث :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$$

$U_{n+1} = f(U_n)$ ①

$f(x) = \frac{4x + 3}{x + 2}$

$f'(x) = \frac{4(x+2) - (4x+3)}{(x+2)^2}$

$= \frac{5}{(x+2)^2} > 0$

f متزايدة تماماً

نبرهن الخاصية: $U_{n+1} > U_n$

نبرهن (E0):

$U_1 > U_0$

$U_1 = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} > 0$

صحيحة

نفرض $P(n)$:

الفرض $P(n)$: $\boxed{U_{n+1} > U_n}$

نبرهن $P(n+1)$:

$P(n+1)$: $\boxed{U_{n+2} > U_{n+1}}$ الطلب

البرهان :

من الفرض : $U_{n+1} > U_n$

بما أن f متزايد تماما على I :

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

إذا $P(n)$ محققة $P(n+1)$ محققة.

$\forall n \geq 0$ $P(n)$ محققة

② $-1 \leq U_n \leq 3$

نبرهن بالتدريج صحة القضية :

$P(n)$: $-1 \leq U_n \leq 3$

نبرهن $P(0)$:

$-1 \leq U_0 = 0 \leq 3$ محققة

نفرض $P(n)$ القضية :

$P(n)$: $\boxed{-1 \leq U_n \leq 3}$ الفرض

نبرهن $P(n+1)$ صحيحة :

$P(n+1)$: $\boxed{-1 \leq U_{n+1} \leq 3}$ الطلب

البرهان :

من الفرض : $-1 \leq U_n \leq 3$

بما أن f متزايد تماما :

$f(-1) \leq f(U_n) \leq f(3)$

$-1 \leq U_{n+1} \leq 3$

$P(n+1)$ محققة

إذا $P(n)$ محققة $\forall n \geq 0$

من $-1 \leq U_n \leq 3$

نستنتج أن U_n محدودة من الأعلى بالعدد 3

محدودة من الأسفل بالعدد -1

إذا U_n محدودة

ومن الطلب الأول وجدنا أن U_n متزايدة

بما أن U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى إذا U_n متقاربة

* إيجاد النهاية :

$f(x) = x$

$\frac{4x+3}{x+2} = x$

$4x + 3 = x^2 + 2x$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

إما $x = 3$ مقبول

أو $x = -1$ مرفوض

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

التمرين الأول :

$U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^n}$

① $\forall n \geq 0 ; \ n \leq 2^n$

② $\frac{2}{3}$ عنصر لـ E

① نفرض القضية $P(n)$:

$P(n)$: $n \leq 2^n$

- نبرهن $P(0)$:

$0 \leq 1$ محققة

- نفرض $P(n)$:

$P(n)$: $\boxed{n \leq 2^n}$ الفرض

- نبرهن $P(n+1)$:

$P(n+1)$: $\boxed{n+1 \leq 2^{n+1}}$ الطلب

البرهان :

من الفرض : $n \leq 2^n$

~~نضيف 1 للطرفين~~

$2^n \geq n$

نضرب في 2 :

$2^{n+1} \geq 2n$

$2^{n+1} \geq 2n + 1 - 1$

$2^{n+1} \geq \underbrace{n+1}_{\text{موجب}} + \underbrace{n-1}_{\text{الطلب}} \geq n+1$

$2^{n+1} \geq n+1$

$P(n+1)$ محققة

إذا $P(n)$ محققة $\forall n \geq 0$.

② $U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n} \leq \frac{2^1}{5^1} + \frac{2^2}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^n}$

$U_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

$q = \frac{2}{5}$

$U_n \leq \frac{2}{5}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}}\right) \Rightarrow U_n \leq \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

$U_n \leq \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{2}{3}$

إذا $\frac{2}{3}$ عنصر راجح على المتتالية

التمرين الثاني:

$$\begin{cases} U_0 = -\frac{3}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + 4U_n + 2 \end{cases}$$

① $\forall n \geq 0 \; : \; -2 \leq U_n \leq -1$

② $U_{n+1} - U_n = (U_n+1)(U_n+2)$

③ متقاربة ← النهاية

الحل:

نبرهن بالتدريج صحة المتباينة:

$P(n): -2 \leq U_n \leq -1$

نبرهن $P(0)$:

$-2 \leq U_0 = -\frac{3}{2} \leq -1$ محققة

نفرض $P(n)$:

الفرض $P(n): \boxed{-2 \leq U_n \leq -1}$

نبرهن $P(n+1)$:

الطلب $P(n+1): \boxed{-2 \leq U_{n+1} \leq -1}$

البرهان:

من الفرض: $-2 \leq U_n \leq -1$

نشكل التابع:

$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$f'(x) = 2x + 4 \geq 0$

f متزايد

بما أن f متزايد فإن:

$f(-2) \leq f(U_n) \leq f(-1)$

$-2 \leq U_{n+1} \leq -1$ محققة $P(n+1)$

إذاً $P(n)$ محققة $\forall n \geq 0$.

② $U_{n+1} - U_n = U_n^2 + 3U_n + 2$

$U_{n+1} - U_n = (U_n+1)(U_n+2)$

③ $-2 \leq U_n \leq -1$

بما أن U_n محدودة من الأعلى بالعدد -1

و من الأدنى بالعدد -2

فإن U_n محدودة

ونلاحظ أن:

① $-2 \leq U_n$

$U_n + 2 \geq 0$

(U_n+2) موجب

② $U_n \leq -1$

$U_n + 1 \leq 0$

(U_n+1) سالب

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = (U_n+1)(U_n+2) \leq 0$

U_n متناقصة

بما أن U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فإن U_n متقاربة

* لإيجاد النهاية نحل المعادلة: $f(x) = x$

$x^2 + 4x + 2 = x$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x+1)(x+2) = 0$

إما $x = -1$ مرفوض

أو $x = -2$ مقبول

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -2$

التمرين الثالث:

$$U_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$$

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

① ليكن A, B:

$$U_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

② نفرض أن $A = 1$ ، $B = -1$

$S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$

$\lim S_n$ ـــ 1

الحل:

$$U_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

$$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

$2 = A(2n+1) + B(2n-1)$

نفرض: $n = -\frac{1}{2}$

$2 = -2B \Rightarrow \boxed{B = -1}$

نفرض $n = \frac{1}{2}$

$2 = 2A \Rightarrow \boxed{A = 1}$

إذاً:

$$U_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n+1}$$

②

$$S_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{-1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{-1}{2n+1}\right)$$

إذاً:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

المسألة الأولى:

$$\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

① $W_n = U_n - V_n$ هي متتالية طبيعية بـ

② اطراد U_n ، V_n متجاورتان

③ $t_n = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n)$

① أثبت متتالية تابعة

② النهاية المشتركة لـ U_n ، V_n

$$W_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} - \frac{U_n + V_n}{2}$$

$$W_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} + V_n - U_n - V_n$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{4}(V_n - U_n)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{4} W_n$$

W_n متتالية هندسية

$$q = \frac{1}{4}$$

$$W_0 = V_0 - U_0 = 1$$

$$W_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\lim W_n = 0$$

لأن

$$-1 < \frac{1}{4} < 1$$

* $U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n - 2U_n}{2} = \frac{-U_n + V_n}{2} = \frac{W_n}{2}$$

ولدينا $W_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

إذاً $U_{n+1} - U_n = \frac{W_n}{2} > 0$

إذاً U_n متزايدة

* $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1} + V_n - 2V_n}{2} = \frac{U_{n+1} - V_n}{2}$$

$$= \frac{-V_n + U_n}{4} = -\frac{1}{4} W_n < 0$$

إذاً V_n متناقصة

* $\lim_{n \to +\infty} V_n - U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

إذاً المتتاليتان U_n ، V_n متجاورتان.

$t_n = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n)$

$t_{n+1} = t_n$ ~~[illegible]~~ تكون t_n متتالية ثابتة حيث أن يكون

$$t_0 = \frac{1}{3}(U_0 + 2V_0) = \frac{1}{3}(3 + 8) = \frac{11}{3}$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(U_{n+1} + 2V_{n+1})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{U_n + V_n}{2} + 2\left(\frac{\frac{U_n + V_n}{2} + V_n}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{U_n + V_n}{2} + \frac{U_n + V_n}{2} + V_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2U_n + 2V_n}{2} + V_n\right)$$

$$= \frac{1}{3}(U_n + V_n + V_n) = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n) = t_n$$

إذاً المتتالية t_n ثابتة.

بما أن t_n ثابتة فإن:

$$t_0 = t_1 = t_2 = \cdots = t_n$$

$$t_0 = \frac{11}{3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \frac{11}{3}$$

بما أن V_n ، U_n متجاورتان فلهما النهاية:

$$\lim U_n = \lim V_n = l$$

$$t_n = \frac{1}{3}(l + 2l)$$

$$\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(3l)$$

$$l = \frac{11}{3}$$

$$\lim U_n = \lim V_n = \frac{11}{3}$$

$u_{n+1} < 2$ حقيقة $P(n+1)$

$\forall n \geq 0$ حقيقة $P(n)$

u_n متتالية عددية

$P(n)$: $u_{n+1} > u_n$

البرهان:

$P(0)$: $u_1 > u_0$

$u_1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

$P(0)$: $\frac{3}{2} > 1$ حقيقة

نفرض $P(n)$: $u_{n+1} > u_n$

نبرهن $P(n+1)$: $u_{n+2} > u_{n+1}$

البرهان:

$u_{n+1} > u_n$

بما أن f متزايدة نجد:

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$

$u_{n+2} > u_{n+1}$ حقيقة $P(n+1)$

بما أن u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

النهاية: $f(x) = x$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x = x$

$-\frac{1}{2}x^2 + x = 0$

$x(-\frac{1}{2}x + 1) = 0$

$x = 0$ مرفوض

$x = 2$ مقبول

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 2u_n \end{cases}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

① f معرفة ومستمرة وتزايدية على $\mathbb{R}$ وبالتالي على $[0,2]$

$f(x) = -x + 2$

$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = +2$

x	0		2
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0		2

② سهم تغيرات f عندما $x \in [0,2]$

يكون

$f(x) \in [0,2]$

أي $f([0,2]) = [0,2]$

③ نبرهن بالتدريج أن:

$P(n)$: $u_n < 2$

نبرهن $P(0)$: $u_0 = 1 < 2$ حقيقة

نفرض $P(n)$: $u_n < 2$

نبرهن $P(n+1)$: $u_{n+1} < 2$

الطلب

البرهان:

$u_n < 2$

بما أن f متزايدة تماما فإن:

$f(u_n) < f(2)$