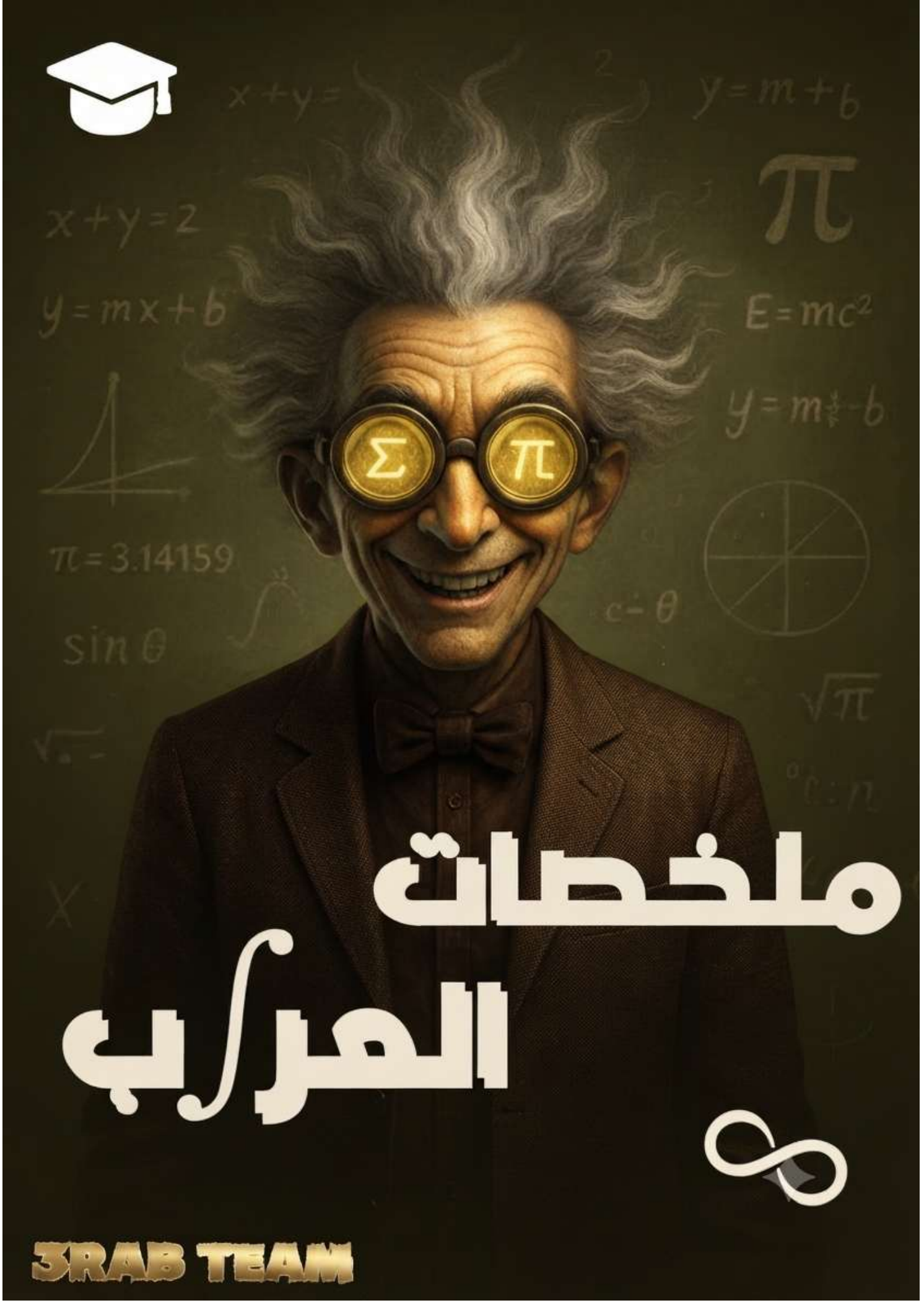
ملخصات
العرب
3RAB TEAM

حالات عدم التعيين $\frac{0}{0}$

تضمن sin, cos

محاولة اظهار النظريات

نظريات شهيرة عند 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{bx}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x.sinx}{1-cosx}=\frac{1}{2}$$

$$1-cosax=2sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)$$

$$sinax=2\sin\left(\frac{ax}{2}\right).\cos\left(\frac{ax}{2}\right)$$

فيه جذر √

$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

نستعمل طريقة المرافق :

1- نضرب بالمرافق

2- نختزل

المقام من شكل $(ax+b)$

النمط: $x\to a$ $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

1- اظهار عبارة العدد المشتق

2- تكون النهاية هي $\hat{f}(a)$,

كثير حدود

$f(x)=\frac{ax^n\pm bx^m\pm d}{x^d\pm c}$

نستعمل طريقة الاختزال :

1- تحليل البسط و المقام

2- الاختصار

3- فينا نستخدم اوبيتال وهي مشتق البسط على مشتق المقام

اكسمبللاية ex:

أحسب نهاية التوابع الاتية عند النقطة المحددة

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$; $a=1$

الحل: حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$ (عند التعويض)

طالما كثير حدود بدنا نحلل البسط والمقام اذا

$=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ فينا يعني بصير التابع هيك

$=x+1$... نختصر

نعوض النقطة 1 بتصير نهاية التابع 2

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $a=1$

حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$ (عند التعويض)

منضرب بلمرافق : $=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$ منشتق كلشي بلبسط فيه x وبعدين

$=\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$ $\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{4}$ منعوض النقطة مشتق البسط هو sinx-

عادي يكون في مرافق للبسط والمقام او يكون في

بس جذر بلبسط او المقما ومو مطروح منه شي

عوض النقطة بلي اشتقيناه بيطلع سالب 1

بتطلع النهاية هي نفس لي حسبناها

$f(x)=\frac{cosx}{x-\frac{\pi}{2}}$; $a=\frac{\pi}{2}$

حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$ (عند التعويض)

منستعمل طريقة العدد المشتق:

$f(x)=\frac{1-cosx}{sinx}$; $a=0$

حالة عدم تعين $\frac{0}{0}$ (عند التعويض)

نحاول اظهار احد القوانين :

$=\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{2sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})}=\frac{sin(\frac{x}{2})}{cos(\frac{x}{2})}$

$=tan\left(\frac{x}{2}\right)$ $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

حالات عدم التعيين $\infty - \infty$

$f(x) = \sqrt{ax+b} + \alpha x + \beta$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha x + \beta$

$a = \alpha$ | $a \neq \alpha$ | $\sqrt{a} = |\alpha|$ | $\sqrt{a} \neq |\alpha|$

مرافق

اخراج عامل مشترك

طرق سريعة يا غالي

$f(x) = \sqrt{\text{درجة اولى}} - \sqrt{\text{درجة اولى}}$

طرح المسيطرين

اوجد النهاية عند $+\infty$ للتابع

$f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+4}$

الحل: $\infty - \infty$ عدم تعين

$\sqrt{3x} - \sqrt{5x} = \sqrt{x}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$= \sqrt{x}\,(\text{سالب}) = -\infty$

$f(x) = \sqrt{\text{درجة اولى}} \pm \text{درجة اولى}$

نوجدها عند المسيطر

اوجد النهاية عند $+\infty$ للتابع

$f(x) = \sqrt{x+1} - x - 5$

الحل: $\infty - \infty$ عدم تعين

$-x = -(\infty) = -\infty$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + dx$

$\sqrt{ax^2} = dx$

نجمع المسيطرين

وبعدا احسب النهاية

عند $+\infty$

$= \dfrac{b}{d+\sqrt{a}}$

$\sqrt{ax^2} \neq dx$

$\sqrt{a}.x + dx$

عند الناقص لانهاية

$= \dfrac{-b}{d+\sqrt{a}}$

المقاربات

الشاقولي

1- مستقيم يوازي محور التراتيب

2- $x = a$

3- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ فإن المستقيم $x = a$ مقارب شاقولي في للخط البياني C_f في جوار $\pm\infty$ من (اليمين _ اليسار) نحو (oy^-, oy^+)

افقي

1- مستقيم يوازي محور الفواصل

2- $y = b$

3- إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم $y = b$ مقارب أفقي في للخط البياني C_f في جوار ∞

تعين الثوابت

- المقارب الشاقولي : تعين قيمة b لصيبح للتابع مقارب عند x=a يجب ان يتحقق $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ مثلا كان التابع كسر بروح بساوي المقام يساوي 0
- المقارب الافقي: تعين قيمة a ليصبح هناك مقارب عند y=b يتحقق $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

تابع الجزء الصحيح

معرفة مستمر او لا

$$f(x) = x - E(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

المجال المغلق هو صورة و المفتوح هو نهاية يعني لما نشوف إشارة اصغر او يساوي متل هي ≤ 1 فبهاد السطر هي صورة بعوضها واذا كان < 1 هي نهاية بعوضها بلسطر الي فيها وبطبق شرط الاستمرار شاريحنو تحت

نهاية التابع

لحساب النهاية : $x - 1 < E(x) \le x$

ومنضل نضيف او طرح او ضرب او قسمة لنوصل لشكل التابع وبعدا منحسب النهاية مثلا :

$$f(x) = \frac{2E(x)+1}{x}$$

$$x - 1 < E(x) \le x$$

$$2x - 2 < 2E(x) \le 2x$$

$$2x - 1 < 2E(x) + 1 \le 2x + 1$$

$$\frac{2x-1}{x} < f(x) \le \frac{2x+1}{x}$$

حسوب نهاية الأطراف هي نهاية التابع

الكتابة بدون E(X)

بيعطيني مجال مثلا [0,2] بروح بقسمه 3 اقسام من 0 ل 1 ومن 1 ل 2 واذا كان المجال مغلق بضمن ال2 لحالها بمجال

مثلا تابع معرف عل [0,2] وفق

$$f(x) = x - E(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

شوية حركات

تعين قيمة $x > a$

1- نحسب نهاية التابع L عند القيمة المعطاة

2- نحسب $r = \frac{\text{العدد الكبير} - \text{العدد الصغير}}{2}$

3- نعوض في $|f(x) - l| < r$

4- بتكمل حسابات

EX:

احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x) = \frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ، من ثم اعطى عددا A يحقق الشرط : إذا كان $x > a$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

$$r = \frac{5,1 - 4,9}{2} = \frac{0,2}{2} = \frac{1}{10}$$

ومنه : $|f(x) - l| < r$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1} - 5\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

في جوار $+\infty$ $\frac{4}{x-1} < \frac{1}{10}$

$$x - 1 > 40 \quad \to x > 41$$

وهكذا وانتبه يكون المجال سالب (العدد الكبير ضمن المجال السالب هو الصغير)

التقابل

نعوض بدل كل x في التابع y أي منشيل x ومنحط مكانها y ومنحط بدل x f(x) بعزل y ويرجع بحط بدل f(x) y

EX:

مثلا عنا $f(x) = x + 1$

$$y = x + 1$$

$$x = y + 1$$

$$-y = 1 - x$$

$$y = x - 1$$

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

التابع المخفي

$|af(x) + l| < g(x)$

يريد نهاية التابع f عند $+\infty$

منحسب نهاية $g(x)$

1- اذا كانت النهاية هي صفر منقول نهاية $f(x)$ هي $\frac{-l}{a}$

2- اذا كانت مش صفر منقول لايمكن تحديد او معرفة نهاية $f(x)$

Ex:

نهاية التابع $g(x)$ الذي يحقق $|g(x) + 3| \le \frac{sin^2(2x)}{x^3 - x^2}$ عند $+\infty$

الحل:

احاطة اكيد هون في تربيع

$$0 \le sin^2(2x) \le 1$$

$$0 \le \frac{sin^2(2x)}{x^3 - x^2} \le \frac{1}{x^3 - x^2}$$

منحسب نهايو الأطراف منلاقيها صفر فنهاية التابع الي جوا القيمة المطلقة هو عكس إشارة العدد الي جنبو يعني النهاية هى -3

شكل $f(f(x))$

1- حساب $\lim_{x\to\pm\infty} f(f(x))$

الحل :

الجواب : $\lim_{x\pm\infty} f(x) = a \, , f(a) =$

2- كتابة التابع $f(f(x))$

الحل:

نعوض بدل كل X التابع كامل بشيل X وبحط مكانها $f(x)$

EX:

ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$: ان $\lim_{x\to\infty} f(f(x))$

الحل:

نحسب اول نهاية $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

نحسب الصورة اذا أمكن $f(3) = 10$ وهو المطلوب .

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]3, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ ، ان $g(g(x))$ يساوي:

$$g(g(x)) = \frac{3\left(\frac{3x-1}{x-1}\right) - 1}{\left(\frac{3x-1}{x-1}\right) - 3} = x$$

حصر التابع

بكون عاطينا المركز يعني نحسب النهاية عنده و المجال منروح منحط هيك

$$|f(x)-l|<r$$

$$r=\frac{\text{العدد الكبير} - \text{العدد الصغير}}{2}$$

بس هلمرة منحط مجال سالب وموجب

ليكن f تابع معرف وفق

$$f(x)=\frac{x+3}{x-3}$$

اوجد مجالا I مركزه 5 ويحقق الشرط إذا انتمى x الى المجال I انتمى التابع الة المجال $]3.95,4.05[$

الحل:

$$\left|\frac{x+3}{x-3}-4\right|<0.05$$

$$\left|-3+\frac{6}{x-3}\right|<0.05$$

$$-0.05<-3+\frac{6}{x-3}<0.05$$

ونبلش ننقل 3- للطرفين وبتكفي

الاستمرار

منحسب النهاية تساوي الصورة واذا طلعو متساويين يعني التابع مستمر بجوز يقلي انو التابع مستمر وعين قيمة مجهول عادي منحل عادي

ليكن التابع f المعرف على R وفق عين قيمة m ليكون التابع مستمر

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & x\neq 0\\ m-1 & x=0\end{cases}$$

الحل: بس تشوف إشارة عدم المساواة هي بدها حساب نهاية عند النقطة لي جنب الاشارى يعني

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ نضرب بلمرافق

$$\frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{-x}{(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$m-1=0 \quad m=1$$

صفات التوابع

1- زوجية التابع :

$$f(x)=f(-x)$$

← متناظر بنسبة $y'y$

2- فردية التابع :

$$f(-x)=-f(x)$$

← متناظر بنسبة $x'x$

3- دورية التابع :

$$f(x+T)=f(x)$$

4- مركز تناظر التابع :

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

ليكن f معرف على R وفق

$$f(x)=\sqrt{1-cosx}$$

اثبت إن التابع زوجي ودوره 2π

اول شي منعرف انو الكوساين بياكل السالب

$$f(-x)=\sqrt{1-\cos(-x)}$$
$$=\sqrt{1-cosx}=f(x)$$

وكمان منعرف

$$cos(x+2\pi)=cosx$$

مثلا $f(x)=x$

$$f(-x)=-x=-f(x)$$

حصر مجال تابع

يكون التابع كسري منعمل قسمة اقليدية منحط الشكل الجديد ومحصور بين القيمة الكبيرة و القيمة الصغيرة ضمن المجال الي عاطيني ياه ونبلش نعزل x لحالها

في شكل تاني تبع $f(x)>10^n$

$f(x)=\frac{9}{(x+1)^2}$ معرف على $R\backslash\{-1\}$

اكبر قيمة α تحققها وفق :

$$x\in\,]-1-\alpha\,,1+\alpha[$$
$$,f(x)>10^4$$

الحل:

منزل التابع متل ماهو

$$\frac{9}{(x+1)^2}>10^4$$

لاحظ كيف منحسن نجذر كل لاطراف

$$\frac{3}{|x+1|}>10^2$$

$$|x+1|<3.10^{-2}$$

$$|x+1|<0.03$$

$$a=0.03$$

المقارب المائل

كسري

$$f(x)=\frac{ax^n\pm bx^{n-1}....}{x^m\pm d}:$$

قسمة اقليدية منوصل لهاد الشكل

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x\pm d}:$$

$$y=ax+b+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x\pm d}$$

او مثلا عمول تفرقة للكسر يعني البسط ساويه شقفتين والخ هيك

اكسمبللاية :

ليكن التابع f المعرف على R\0

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$$

عمول تفرقة

$$=\frac{2x^2}{x}+\frac{5x}{x}-\frac{4}{x}$$

$$=2x+5-\frac{4}{x}$$

طبق القانون

$$y=ax+b+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x\pm d}$$

$$y=2x+5$$

جذري + صحيح

$$f(x)=\sqrt{ax^2+b}\pm dx$$

$$y=|\sqrt{a}|\pm dx$$

Ex:

المقارب المائل للتابع في جوار$+\infty$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$$

$$y=x+x=2x$$

حيث

$A=x$

$D=x$

كلشي برا الجذر بنزله متل ماهو

وبشتغل على الي جوا

الطريقة العامة

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad -1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b \quad -2$$

$$y=ax+b \quad -3$$

جذري

$$:f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$y=\left|\sqrt{a}x\pm\frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$$

ننتبه للمسعى اذا كان $+\infty$ تكون

$$y=\sqrt{a}x\pm\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

ننتبه للمسعى اذا كان $-\infty$ تكون

$$y=-(\sqrt{a}x\pm\frac{b}{2\sqrt{a}})$$

او منساوي إتمام لمربع كامل

المقارب المائل للتابع في جوار $-\infty$ و $+\infty$

$$f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$$

الحل :

$y=2x-1$ حيث b=-4

و a=2x

في جوار $-\infty$ يكون

$$y=-(2x-1)$$

كسري+جذري

$$f(x)=ax\pm\frac{bx}{\sqrt{cx^2+d}}$$

المقارب هو : $y=ax\pm\frac{b}{\sqrt{c}}$

ننتبه للمسعى اذا كان $+\infty$ تكون يكون

المقارب: $y=ax+\frac{b}{\sqrt{c}}$

وعند $-\infty$: $y=ax-\frac{b}{\sqrt{c}}$

او يقول لي احسب او اثبت

Ex:

المقارب المائل للتابع في جوار$+\infty$

$$f(x)=x+\frac{4x}{\sqrt{1+16x^2}}$$

الحل:

$$y=ax+\frac{b}{\sqrt{c}}=x+\frac{4}{4}$$
$$=x+1$$

المقارب المائل للتابع في جوار$-\infty$

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$y=ax-\frac{b}{\sqrt{c}}=x-\frac{1}{1}$$
$$=x-1$$

f(x)
العراب في الرياضيات
الدكتور محمد
https://t.me/AcademyArbic
AlArrab العراب في الرياضيات

إيجاد معادلة المتقارب المائل

الحالة $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$

(ط) المتقارب عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $y=\alpha x+\beta$

$\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ = عدد حقيقي

عدد حقيقي : $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)$

ملاحظة : إذا كانت أحد النهايتين السابقتين غير موجودة أو $\pm\infty$ فليس للدالة متقارب مائل

أوجد معادلة $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

ع.ث. $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$

$=\boxed{1=\alpha}$

$f(x)-\alpha x=\sqrt{x^2+4x+5}-x$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)=+\infty-\infty$

نضرب ونقسم بالمرافق

$f(x)-x=\dfrac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$

$=\dfrac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$

$=\dfrac{4}{2}=\boxed{2=\beta}$

$\Rightarrow y=\alpha x+\beta$

$\boxed{y=x+2}$

متقارب مائل في جوار $+\infty$

(ط) نوجد $\gamma=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-\sqrt{ax^2}$

نوجد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-(\sqrt{ax^2}+\gamma)$ فنجدها محدودة

نستنتج أن $y=\sqrt{ax^2}+\gamma$ متقارب مائل

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

أوجد معادلة المتقارب المائل عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f(x)-\sqrt{x^2}=\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{x^2})=+\infty-\infty$

نضرب ونقسم بالمرافق

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}+2\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}+2\right)$

$=+2-2=0$

بالتالي فإن المستقيم المائل $\Delta: y=\sqrt{x^2}+2$

$=|x|+2$

$y=x+2$

متقارب مائل في جوار $+\infty$

نكتب كثير الحدود ax^2+bx+c بالصيغة القانونية عن طريق الإكمال إلى مربع كامل

$ax^2+bx+c=C(x+d)^2+L$

$f(x)=\sqrt{(x+d)^2+L}$

حيث L ثابت

$f(x)\sim\sqrt{C}\,|x+d|$

نقترب أن المتقارب المائل

$y=|x+d|$

ثم نوجد $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-y_d$

فنجد كانت محدودة

إذا كانت $x\to+\infty$ فإن $y\to+\infty$ عند $-k+d$

إذا كانت $x\to-\infty$ فإن $y\to-\infty$ عند $-k-d$

متقارب مائل عند $\pm\infty$

$f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$

أوجد معادلة المتقارب عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$x^2+4x+5=x^2+4x+(2)^2+5-(2)^2$

$=(x+2)^2+4+5$

$=(x+2)^2+9$

$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+9}\approx\sqrt{(x+2)^2}$

$f(x)\approx|x+2|=x+2$

في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+2)^2+9}-(x+2)\right)=+\infty-\infty$

ع.ج:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+2)^2+9}-(x+2)\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{\sqrt{(x+2)^2+9}+(x+2)}=0$

$\boxed{y=x+2}\Leftarrow$

متقارب مائل في جوار $+\infty$

ملاحظة لمعرفة رسمة المشتق من التابع الاصلي

f **متزايد على مجال معين**	C_f **يقع فوق محور الفواصل على نفس المجال**
f **متناقص على مجال معين**	C_f يقع تحت محور الفواصل على نفس المجال
$f(a)$ **قيمة حدية محليا و** $f'(a)$ **موجودة**	$f'(a)=0$ أي C_f يقطع محور الفواصل عند a
f **غير اشتقاقي عند نقطة** a	f' غير معرف عند a
$y=ax+b$ **مقارب مائل**	$y=a$ مقارب افقي للخط C_f
الخط C_f	الخط $C_{f'}$

1- ان نهاية التابع $f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}$ عند 2^-

$+\infty$	D	$-\infty$	C	4	B	$\mathbf{-4}$	A

2- ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-|2x|}{x^2+|x|} & : \ x\neq 0\\ m & x=0\end{cases}$ ان قيمة m التي تجعل التابع مستمراً عند ال 0

$\mathbf{-1}$	D	-2	C	1	B	1	A

3- ان نهاية التابع $f(x)=\frac{1-cosx}{sinx}$ عند 0

4	D	2	C	0	B	1	A

4- ان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sqrt{1-cos^2x}}{x}$

$\mathbf{-1}$	D	غير موجودة	C	$\mathbf{1}$	B	$\mathbf{0}$	A

5- ان نهاية التابع $f(x)=\frac{xsinx}{1-cos}$ عند 0

4	D	2	C	0	B	1	A

6- ان نهاية التابع $f(x)=\frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{2x-1}}$ عند 5

$\mathbf{\frac{-9}{4}}$	D	$\mathbf{\frac{9}{4}}$	C	$\mathbf{-\frac{9}{8}}$	B	$\mathbf{\frac{9}{8}}$	A

7- ان نهاية التابع $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}$ عند 1

-4	D	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	C	$\mathbf{\frac{-1}{4}}$	B	1	A

8- ليكن لدينا $f(x)$ تابع يقبل $y=4x+1$ مقارب مائل, إن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x}$

3	D	4	C	$\mathbf{2}$	B	1	A

9- ان مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{6}{|x|-x}$

$]-\infty,0]$	D	$]-\infty,0[$	C	$]0,+\infty[$	B	$[0,+\infty[$	A

أجب عن الأسئلة الاتية (50 درجة لكل سؤال):

السؤال الأول :

ليكن f تابع معرف و اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$ خطه البياني C_f جدول تغيراته هو الاتي :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↘		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1- جد نهايات التابع عند اطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مستقيم افقي او شاقولي , وهل يوجد للخط C_f مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$؟ علل اجابتك

2- استنتج حلول كل من المتراجحات الاتية : $f(x) < 0$ $\hat{f}(x) \leq 0$

3- جد كل من النهايات $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))$

4- اوجد مجموعة تعريف التابع $g(x) = \sqrt{f(x)}$

السؤال الثاني:

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = -2(cos(x) + x)$ **المطلوب:**

1- احسب نهايات التابع عند $-\infty$ و $+\infty$ و اثبت ان التابع متناقص

2- اثبت ان للمعادلة $f(x) = -2$ حلاً وحيداً

3- اثبت ان التابع $f(x) = \frac{1}{4-3si\ (3x)}$ محدود

4- هل يوجد نهاية للتابع $f(x) = \frac{\sin(|x|)}{x}$ عند الصفر ؟ علل إجابتك

السؤال الثالث :

ليكن لدينا التابع $f(x) = x + E(x+1)$ المعرف على المجال $[-1,1]$ **المطلوب :**

1- اكتب عبارة $f(x)$ بصيغة لاتحوي $E(x+1)$ على المجال وارسم الخط البياني الموافق

2- هل التابع مستمر على المجال

السؤال الرابع :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{9}{(x+1)^2}$ **المطلوب:**

1- احسب نهايات التابع عند اطراف مجموعة تعريفه

2- عين عدداً α يحقق الشرط : اذا كان x عنصر من المجال $]-1-\alpha, \alpha+1[$ مختلفاً عن -1 كان $f(x) > 10^4$

أجب عن التمارين الاتية (40 درجة للتمرين الأول و 60 درجة للتمرين الثاني) :

التمرين الأول :

ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x-3}{1-x}$ و **المطلوب :**

1- احسب نهايات التابع عند $-\infty$ و $+\infty$
2- أعط عدداً حقيقياً يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in]-2.01,-1.99[$.
3- أكتب $f(f(x))$ بدلالة x ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
4- احسب التقابل العكسي $f^{-1}(x)$

التمرين الثاني :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة وفق : $f(x)=\frac{x^2+x\sqrt{x}}{x+1}$ **المطلوب:**

1- أثبت وجود عدد حقيقي مغاير للصفر a يحقق : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
2- هل يوجد عدد حقيقي b يحقق : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ ؟ و استنتج فيما اذا كان للخط C_f مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ ؟

رابعا:

حل المسألتين الاتيتين (لكل مسألة 100 درجة):

المسألة الأولى :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x)=|x-3|+\frac{2}{x-1}$ **المطلوب:**

1- اكتب التابع بدون قيمة مطلقة
2- احسب نهايات التابع عند اطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مستقيم افقي او شاقولي
3- ادرس تغيرات التابع وشكل جدول بها
4- اثبت ان التابع يقبل مقاربين مائلين $\Delta_1: y_1=x-3$ عند $+\infty$ و $\Delta_2: y_2=-x+3$ عند $-\infty$ ومن ثم ادرس الوضع النسبي لكل مقارب مع الخط البياني
5- ارسم الخط C و المستقيمين Δ_2 و Δ_1

المسألة الثانية :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-2\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2+6x+6}{2x+4}$ **المطلوب:**

1- احسب نهايات التابع عند اطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مستقيم افقي او شاقولي

2- من اجل $x\neq -2$ يمكن كتابة التابع بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+4}$ حيث a,b,c ثلاث اعداد حقيقية يطلب تعيينها

3- استنتج المقارب المائل للتابع f و ادرس الوضع النسبي بينه وبين الخط البياني C

4- اثبت ان النقطة $A(-2,-1)$ هي مركز تناظر للخط البياني C ثم ارسم C و المستقيمات المقاربة

5- ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

أنتهت الأسئلة