



سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإعدادية

الرياضيات

للف الرابع العلمي

المؤلفون

أ.م.د. ليث عبد اللطيف مجيد
م.د. حسين صادق كاظم
عبد الله عمر هندي

أ.د. صلاح حمزة عبد
م.م. مروة فليح حسن
ميسلون عباس حسن

بُنِيَتْ وَصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرِّياضِيَّاتِ للمرحلةِ الإِعدادِيَّةِ) على أيدي فريقٍ من المتخصِّصين في وزارةِ التَّربِيَّةِ / المديريَّةِ العامَّةِ للمناهجِ وبِمِشاركةٍ متخصِّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التَّعليمِ العالِيِ والبحثِ العِلْمِيِ على وفقِ المعاييرِ العالِمِيَّةِ لِتُحَقِّقَ أَهدافَ بِناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثِّلَةِ في جعلِ الطُّلابِ:

- مُتعلِّمينَ ناجحينَ مَدَى الحِياةِ.
- أَفراداً واثقينَ بأنفُسِهِم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشْعُرُونَ بالفَخْرِ.

المشرفُ الفنيُّ على الطَّبعِ
تيسير عبد الإله إبراهيم
مُصمِّمُ الكتابِ
تيسير عبد الإله إبراهيم

المشرفُ العِلْمِيُّ على الطَّبعِ
م. م. مروة فليح حسن
الخَبِيرُ اللُّغَوِيُّ
د. ندى رحيم حسين

الغلافُ والرَّسومُ الهندسيَّةُ
فراس عبد الهادي محمد

المقدمة

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنَ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليميةِ اللازمةِ له، لتنميةِ قدراته على التفكيرِ وحلِّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمِنْ مُنْطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليه وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهجِ بصورةٍ عامةٍ ولاسيماَ مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةِ والتكنولوجيةِ في مجالاتِ الحياةِ المختلفةِ، فَقَدْ وُضِعَتْ خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتُبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأنجزتُ منها سلسلةُ كُتُبِ الرياضياتِ للمرحلتين الابتدائيةِ والمتوسطةِ وبدأ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كُتُبِ المرحلةِ الإعداديةِ.

إنَّ سلسلةَ كُتُبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمنِ الإطارِ العامِ للمناهجِ تُعزِّزُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأيِ والرأيِ الآخرِ والعدالةِ الاجتماعيةِ، وتوفيرِ فرصٍ متكافئةٍ للتمييزِ والإبداعِ، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلُّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعيةِ وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنِيَتْ سلسلةُ كُتُبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محوريةِ الطالبِ في عمليتيِ التعليمِ والتعلُّمِ وَعَدَّهُ المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزتْ سلسلةُ كُتُبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ الإعداديةِ في تنظيمِ الدروسِ على أربعِ فقراتٍ: تعلُّمٌ، تدربٌ وحلٌّ اختيارٍ من متعددٍ، تدربٌ وحلٌّ التمريناتِ، تدربٌ وحلٌّ مسائلَ حياتيةٍ. يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الرابعِ العلميِّ مشتملاً على أربعةِ محاورٍ أساسيةٍ: محورُ الأعدادِ والعملياتِ، ومحورُ الجبرِ، ومحورُ الهندسةِ والقياسِ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضمنِ الأوزانِ النسبيةِ لكلِ محورٍ، وتضمَّنَ الكتابُ خمسةَ فصولٍ وكلِّ فصلٍ تضمَّنَ عدَّةَ دروسٍ، ولكلِّ درسٍ تماريناته.

تتميزُ هذهِ الكُتُبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبَ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريقِ ما تُقدِّمه من تدريباتٍ وتمارينٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلكِ وُضِعَتْ تمريناتٌ لكلِّ فصلٍ وهي تختلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلك لكونها موضوعيةً فالإجابة عنها تكون عن طريقِ اختيارٍ من متعدِّدٍ وهذا بدوره يهيئُ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثِّلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتُبِ الرياضياتِ المطوَّرةِ للمرحلةِ المتوسطةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوَّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرِّسِ، وعليه نأملُ أن يُسهِمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطَّلابِ المهاراتِ العلميةِ والعمليةِ وتنميةِ ميولهم لدراسةِ الرياضياتِ.

اللهم وفّقنا لخدمةِ عراقنا العزيزِ وأبنائه ...

المؤلفون

الدوال الحقيقية والمتباينات

Real Functions and Inequalities

الدرس [1-1] الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية

الدرس [1-2] المتباينات

الدرس [1-3] الدوال الحقيقية الرئيسية (الأم)

الدرس [1-4] الدالة التربيعية والدالة التكعيبية

الدرس [1-5] الدالة المطلقة

للدوال تطبيقات كثيرة في حياتنا اليومية ومنها أن المخطط البياني لقفزات الدلافين فوق سطح ماء البحر يمثل إحدى التحويلات الهندسية للدالة التربيعية الأم $f(x) = x^2$.

Pretest

الاختبار القبلي

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}) \div (\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}})$ 2 $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ 3 $\sqrt{12}(\sqrt{3} - \sqrt{8}) - 6$

إذا كان $f: N \rightarrow N$ و $g: N \rightarrow N$ حيث أن $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ ، جد ما يأتي:

4 $(f \circ g)(3)$ 5 $(g \circ f)(3)$ 6 $(f \circ g)(x) = 33$ ما قيمة x اذا كان

جد مجموعة حل المتباينات التالية:

7 $x - 5 \geq 5$ 8 $-3 \leq 3x + 2 < 9$ 9 $x + 3 > 2$ أو $x + 3 \leq -2$

جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

10 $(x-1)(x+1)$ 11 $3x(x^2+2)$ 12 $\frac{2}{3}(x^2 - 5)(x+2)$

حلّ المقادير الجبرية التالية:

13 $x^2 + 3x - 4$ 14 $x^3 + 2x^2 + x$ 15 $9x^2 - 90x + 81$

حل المعادلات التالية:

16 $4\sqrt{x} - 36 = 0$ 17 $16x^2 - 49 = 0$ 18 $x - 20 = |-5|$

اكتب قاعدة اقتران التطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى :

19 $f = \{ (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) \}$

20 $g = \{ (0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3) \}$

الأعداد الحقيقية والفترات الحقيقية

Real Numbers and Real Intervals

الدرس [1-1]

تعلم



اكتشف علماء الفلك نجماً فائق السرعة يسير بسرعة ستة ملايين كيلو متر في الساعة. حاول أن تفكر مع هذه السرعة الفائقة لهذا النجم هل هناك نهاية لرحلة هذا النجم في هذا الفضاء الشاسع؟

فكرة الدرس

- التعرف الى مفهوم المالا نهاية.
- التعرف الى الفترات الحقيقية المحدودة وغير المحدودة وتمثيلها على مستقيم الاعداد.

المفردات

- المالا نهاية
- الفترة المفتوحة
- الفترة المغلقة
- الفترة نصف المفتوحة (نصف المغلقة)

[1-1-1] مفهوم الأعداد الحقيقية والمالا نهاية

Concept of Real Numbers and Infinity

تعلمت سابقا ان اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية والجدول التالي يوضح أهم خصائص الأعداد الحقيقية: فإذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية.

الخاصية	الجمع	الضرب
الانغلاق	لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a+b) \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي	لكل $a, b \in \mathbb{R}$ فإن $(a \times b)$ عدد حقيقي
التجميعية	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
العنصر المحايد	$a+0=a=0+a$	$a \times 1=a=1 \times a$
النظير	$a+(-a)=0=(-a)+a$	$a \neq 0, a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$
التبديلية	$a+b=b+a$	$a \times b=b \times a$
التوزيع	$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$	$(b+c) \times a = b \times a + c \times a$

مثال (1)

بسّط العبارات التالية باستعمال الخواص وترتيب العمليات:

i) $5(3x-4y) - \frac{1}{2}(6x-2y) = 15x-20y-3x+y$

$= (15x-3x) + (-20y+y) = 12x-19y$

ii) $(3x+4)(x-2) = 3x(x-2)+4(x-2)$

$= 3x^2-6x+4x-8 = 3x^2-(6x-4x)-8$

$= 3x^2-2x-8$

iii) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times 1$

$= \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$

خاصية التوزيع

خاصية التبديل، خاصية التجميع

خاصية التوزيع

خاصية التوزيع، خاصية التجميع

خاصية العنصر المحايد لعملية الضرب

خاصية التوزيع

الفتره: وهي مجموعه كل الاعداد الحقيقية الواقعة بين عددين أو محددة بهما. حيث يعبر عن الفتره بقوسين يوضع داخلهما العددين a, b الأصغر (a) يمثل بداية الفتره والاكبر (b) يمثل نهاية الفتره ويمكن كتابة الفتره على شكل مجموعه بالصفة المميزة وتمثيلها على مستقيم الأعداد الحقيقية الذي يمتد من سالب ما لانهاية $(-\infty)$ الى موجب ما لانهاية (∞) وتصنف الفترات الى نوعين:

أولاً: الفترات المحددة: bounded intervals

1- الفتره المفتوحة: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$ وهي مجموعه الأعداد التي تقع بين العددين a, b وان $a, b \notin (a, b)$.

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



2- الفتره المغلقة: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} , a \leq x \leq b\}$ وهي مجموعه الاعداد تبدأ بالعدد a وتنتهي بالعدد b وأن $a, b \in [a, b]$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



3- الفتره نصف مغلقة (نصف المفتوحة) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ حيث أن العدد a ينتمي للفتره

$b \notin [a, b)$ ، بينما العدد b لا ينتمي للفتره

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



4- الفتره نصف مغلقة (نصف مفتوحة) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ ، حيث أن العدد a لا تنتمي للفتره

$b \in (a, b]$ ، بينما العدد b ينتمي للفتره

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



ثانياً: الفترات غير المحددة: Unbounded intervals

1- الفتره مفتوحة من اليسار وغير محددة من اليمين: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

وان $a \notin (a, \infty)$ وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



2- الفتره مفتوحة من اليمين وغير محددة من اليسار: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

وأن $b \notin (-\infty, b)$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



3- الفتره مغلقة من اليسار وغير محددة من اليمين: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} , x \geq a\}$

وأن $a \in [a, \infty)$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو

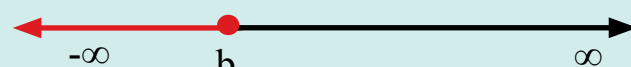


4 - الفتره مغلقة من اليمين وغير محددة من اليسار:

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} , x \leq b\}$

وأن $b \in (-\infty, b]$

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



5- الفتره مفتوحة وغير محددة من اليمين واليسار: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

وهي مجموعه الاعداد الحقيقية

وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو



مثال (2)

أكتب نوع الفترة والصفة المميزة للمجموعة والتمثيل البياني لكل فترة مما يأتي:

i) $[4,7]$

ii) $(-2,5]$

iii) $(11,15)$

iv) $[-10,2)$

الفترة	نوع الفترة	التمثيل البياني	الصفة المميزة للمجموعة
$[4,7]$	مغلقة		$\{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 7\}$
$(-2,5]$	نصف مفتوحة (نصف مغلقة)		$\{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 5\}$
$(11,15)$	مفتوحة		$\{x \in \mathbb{R} : 11 < x < 15\}$
$[-10,2)$	نصف مغلقة (نصف مفتوحة)		$\{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x < 2\}$

مثال (3)

اكتب الفترات بصيغة الصفة المميزة للمجموعة ومثلها بيانياً:

i) $(-\infty, 3)$

ii) $[5, \infty)$

iii) $(-\infty, \infty)$

استنتاج:
فترة جميع الأعداد الحقيقية:
 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
وهي فترة مفتوحة

الفترة	تمثيلها بشكل المجموعة	تمثيلها بيانياً
$(-\infty, 3)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$	
$[5, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\}$	

Operations On Intervals

[1-1-3] العمليات على الفترات

تعلمت سابقاً كيفية إجراء العمليات على المجموعات وبما ان الفترة هي مجموعة وبالتالي فإن العمليات على المجموعة ممكن تطبيقها على الفترات أيضاً.

مثال (4)

عبر عن تقاطع واتحاد الفترتين $[-4,1]$ و $(-1,4)$ على مستقيم الأعداد على صورة فترة، وأيضاً على صورة مجموعة.

$(-1,4) \cap [-4,1]$ على مستقيم الأعداد

(i) نلاحظ التقاطع

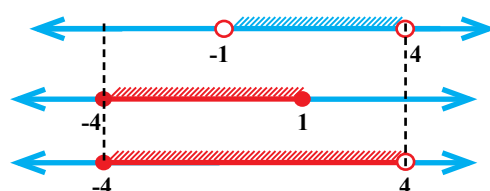
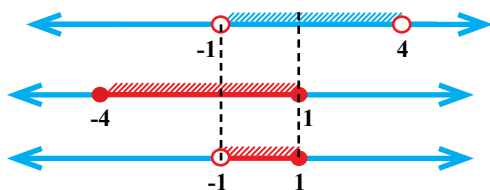
على صورة فترة $(-1,4) \cap [-4,1] = (-1,1]$

على صورة مجموعة $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 1\} = (-1,1]$

(ii) نلاحظ الاتحاد

على صورة فترة $(-1,4) \cup [-4,1] = [-4,4)$

على صورة مجموعة $[-4,4) = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x < 4\}$



أضف إلى معلوماتك:

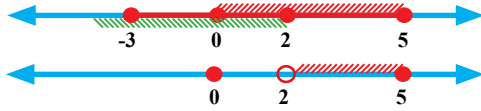
أي فترة $\emptyset \cap A = \emptyset$

أي فترة $\mathbb{R} \cap A = A$

حيث ان $\emptyset$ يمثل رمز مجموعة خالية

مثال 5) لتكن $A = [0,5]$ و $B = [-3,2]$ جد $A-B$ ، A^c :

باستخدام مستقيم الأعداد نجد ان مجموعة $A-B$ هي كل الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى مجموعة A ولا تنتمي إلى مجموعة B وتسمى مجموعة الفرق



$$A-B = [0,5] - [-3,2] = (2,5] \text{ (i)}$$

نلاحظ ان A^c هي مجموعة جميع عناصر المجموعة الشاملة U التي لا تنتمي إلى المجموعة A ويرمز لها بالرمز A^c ، والمجموعة الشاملة هي المجموعة التي تحتوي على جميع عناصر المجموعات الأخرى ويرمز لها بالرمز U

$$A^c = R - [0,5] = (-\infty, 0) \cup (5, \infty) \text{ (ii)}$$

لاحظ ان $\emptyset^c = R$ ، A^c هي المجموعة المتممة إلى مجموعة A في الأعداد الحقيقية

$R^c = \emptyset$ ، $A-B$ هي مجموعة الفرق بين مجموعة A ومجموعة B

الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

- 1) $2 \in \dots$
 - (a) (1,2)
 - (b) (2,5]
 - (c) [2,3)
 - (d) (-1,2)
- 2) $R^+ \cap [-3,3] =$
 - (a) (0,3]
 - (b) [0,3]
 - (c) [0,3)
 - (d) (0,3)
- 3) $[2,5] \cup [4,6]$
 - (a) (2,6)
 - (b) (2,6]
 - (c) [2,6)
 - (d) [2,6]
- 4) $\sqrt{3} \in \dots$
 - (a) [0,1]
 - (b) (2,3)
 - (c) (1,2)
 - (d) [3,5)

التمرينات

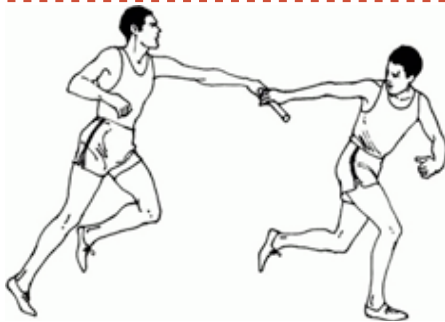
بسط الجمل العددية التالية:

$$5) \frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \quad 6) \sqrt{8}(1-\sqrt{2}) \quad 7) \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{27}) \quad 8) 6(\sqrt{125}+2\sqrt{5}-4\sqrt{5})$$

جد ما يلي باستعمال مستقيم الأعداد:

$$9) [-1,4] \cup [2,3] \quad 10) [0,1] \cap [-2,4] \quad 11) [4,6]^c \quad 12) (9,\infty)^c \quad 13) [4,6]^c$$

مسائل حياتية



14) سباق بريد 400 م يستلم أحدهما من الآخر على التتابع فإذا استلم العداء الثاني من العداء الأول قبل مترين من مسافة العداء الأول، اكتب على شكل فترات كلاً من:

(i) المسافة التي قطعها العداءان معاً.

(ii) ما المسافة التي اشترك كلا العدائين في قطعها؟

15) في امتحان مادة الرياضيات استطاع أحمد أن ينهي الامتحان خلال 150 دقيقة، أما مهند الذي وصل متأخراً بـ 15 دقيقة أنهى الامتحان حتى انتهاء وقت الامتحان الذي مدته 180 دقيقة:

(i) احسب فترة تقاطع فترتي امتحان الطالبين.

(ii) احسب فترة اتحاد فترتي امتحان الطالبين.



تعلم



شركة الغزل والنسيج في الكاظمية
أحد أهم معامل النسيج في العراق،
استطاعت الشركة من بيع 85
لفافة من القماش خلال الأسابيع
الثلاثة الأولى من الشهر. كم
على الشركة أن تباع في الأسبوع
الأخير لتصل مبيعاتها على الأقل
120 لفافة في ذلك الشهر؟

فكرة الدرس

إيجاد مجموعة حل المتباينات
من الدرجة الأولى والدرجة
الثانية والقيمة المطلقة باستعمال
الفترات الحقيقية.

المفردات

المتباينة
القانون العام (الدستور)
القيمة المطلقة

[1-2-1] تمثيل مجموعة حل المتباينات من الدرجة الأولى باستعمال الفترات الحقيقية

Representing the Solution set of first Degree Inequalities using Real Intervals

تعلمت سابقاً أن علاقات التباين هي $>, \geq, <, \leq$ تدعى الجمل الجبرية التي تستخدم هذه الرموز بالمتباينات، وتسمى المتباينة التي تحوي على المتغير x ومعرفة بالشكل $ax + b < 0$ حيث a و b أعداد حقيقية و $a \neq 0$ بمتباينات من الدرجة الأولى ويمكن تمثيل هذه المتباينات باستخدام الفترات الحقيقية.

لاحظ: يمكن استبدال $<$ في تعريف المتباينة بأي علاقة من علاقات التباين أعلاه.

مثال (1)

في فقرة تعلم،

ليكن x عدد لفافات القماش المباعة في الأسبوع الأخير
وحيث أن المبيعات يجب أن تصل على الأقل 120
فالمتباينة ستكون بالشكل التالي
ب طرح 85 من الطرفين
إذن مجموعة حلول المتباينة باستخدام الفترات الحقيقية ستكون $S = [35, \infty)$
لذا يجب أن تباع الشركة 35 لفافة قماش أو أكثر .

$$x + 85 \geq 120$$

$$x \geq 35$$

$$S = [35, \infty)$$

مثال (2)

عبر عن قيم x لكل مما يأتي بدلالة الفترات :

$$1) x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1]$$

$$2) -2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-2, 3]$$

$$3) 6 < x < 9 \Rightarrow x \in (6, 9)$$

مثال (3)

حل المتباينة التالية ومثل الحل بالفترات الحقيقية.

$$x - 8 < -2$$

$$\Rightarrow x - 8 + 8 < -2 + 8$$

$$\Rightarrow x < 6$$

بإضافة النظير الجمعي للعدد -8 لطرفي المتباينة



إذن الفترة التي تمثل حل المتباينة هي $x \in (-\infty, 6)$

1-2-2] حل المتباينات التربيعية من (الدرجة الثانية) باستعمال الإشارات:

Solving Quadratic Inequalities from the second Degree by Signs

المتباينة التربيعية بالصيغة العامة تأخذ إحدى الصور التالية:

$$i) ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \text{or} \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$ii) ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{or} \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

ولحل هذه المتباينة فإننا نتبع الخطوات التالية :

أولاً : نجد حل للمعادلة من الدرجة الثانية المرافقة للمتباينة ونحدد جذورها بحلها باحدى الطرق السابقة .

ثانياً : نعين جذور المعادلة التربيعية على مستقيم الأعداد بتحديد الفترات السالبة والموجبة على مستقيم الأعداد.

ثالثاً : نحدد الفترات التي تحقق المتباينة باستعمال تقاطع (ضرب) إشارات الفترات ونجد مجموعة الحل للمتباينة وإذا كانت المتباينة تتضمن علاقة ($<$, $\leq$) فإن فترة الحل تكون فترة واحدة ، إما إذا كانت تحتوي العلاقة ($>$, $\geq$) فإن فترة الحل تكون من اتحاد فترتين منفصلتين .

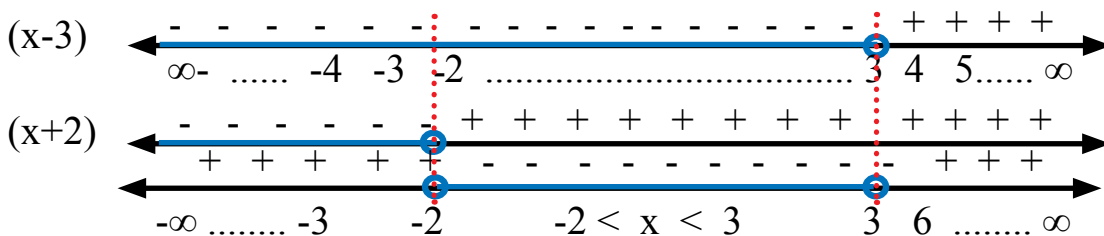
مثال (4) جد مجموعة الحل للمتباينة التربيعية التالية باستعمال الإشارات :

$$x^2 - x - 6 < 0$$

الخطوة الأولى : نجد حل المعادلة المرافقة من الدرجة الثانية باستعمال التحليل بالتجربة .

$$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{or} \quad x = -2$$

الخطوة الثانية : نعين جذور المعادلة على مستقيم الأعداد ونضع إشارات الأقواس .



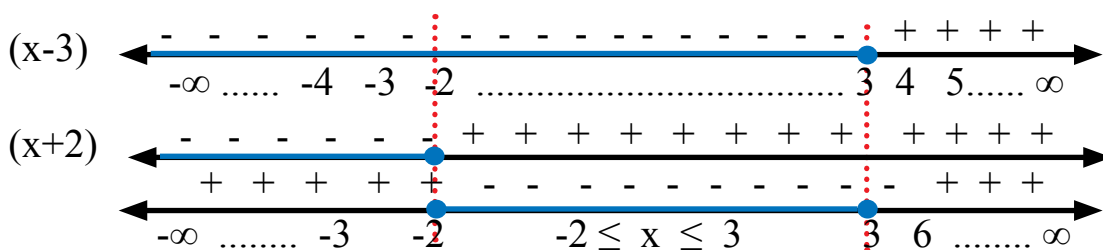
الخطوة الثالثة : نقاط إشارات الفترات للحصول على مجموعة الحل التي تحقق المتباينة وهي

$$s = (-2, 3)$$

مثال (5) جد مجموعة الحل للمتباينة التالية باستعمال الإشارات:

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

ملاحظة : نتبع الخطوات السابقة في حل المثال (4) والفرق هنا نلاحظه بان مجموعة الحل سوف تكون فترة مغلقة $s = [-2, 3]$ وذلك لان العلاقة هي أصغر من أو يساوي



مثال (6) جد مجموعة الحل للمتباينة التربيعية التالية باستعمال الأشارات :

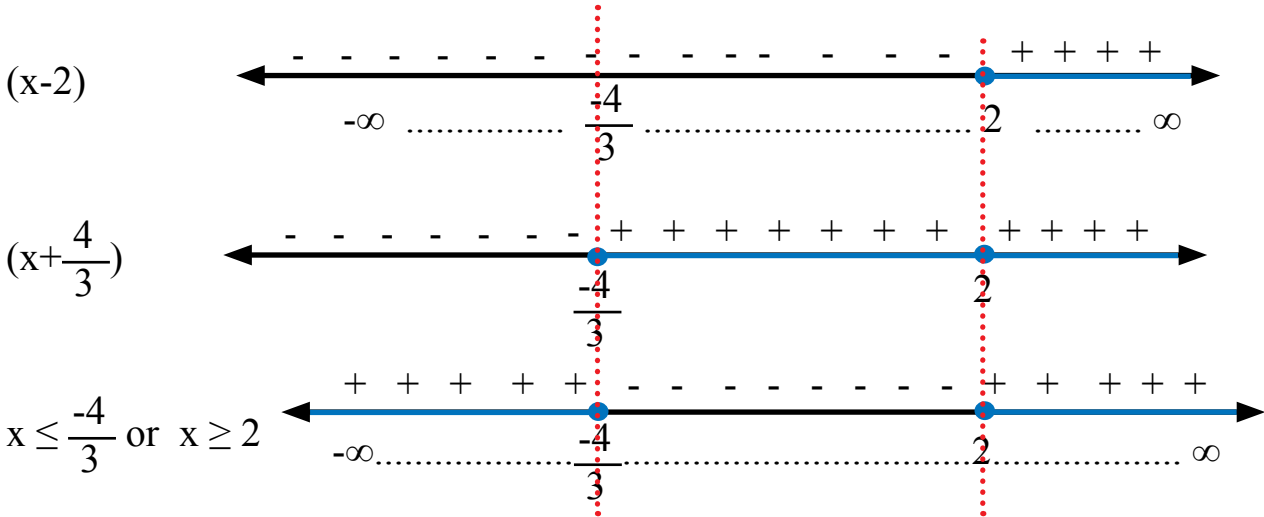
$$3x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

الخطوة الأولى : نجد حل المعادلة المرافقة من الدرجة الثانية باستعمال القانون العام (الدستور) .

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 , a=3 , b=-2 , c=-8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 96}}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 10}{6} \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = \frac{-4}{3}$$

الخطوة الثانية : نعين جذور المعادلة على مستقيم الأعداد ونضع اشارات الأقواس .



الخطوة الثالثة : نقاط الفترات للحصول على مجموعة الحل التي تحقق المتباينة وهي اتحاد مجموعتين (نصف مغلقة أو نصف مفتوحة) وذلك لأن المتباينة تحتوي علاقة أكبر من أو يساوي :

$$s = (-\infty, \frac{-4}{3}] \cup [2, \infty).$$

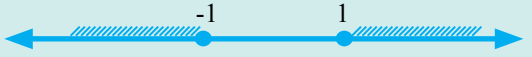
Absolute Value Inequalities

[1-2-3] متباينات القيمة المطلقة

درست سابقا أن القيمة المطلقة $|x|$ لعدد حقيقي x هي المسافة على مستقيم الأعداد بين هذا العدد والصفر. ولما كان البعد عددا موجبا فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. ويمكن أيضا حل المتباينات التي تتضمن قيما مطلقة فمثلا $|x| \leq 1$ تعني أن العدد الحقيقي x بعده عن الصفر أصغر أو يساوي 1 على مستقيم الأعداد ويمكن تمثيل حلول هذه المتباينة كما في الشكل :



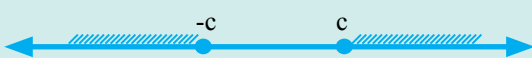
أما $|x| \geq 1$ يعني أن بعد x عن الصفر هو أكبر من أو يساوي 1 على مستقيم الأعداد كما يبين الشكل الآتي :
بصورة عامة إذا كان c عددا حقيقيا موجبا فإن :



$$|x| \leq c \text{ تكافئ } -c \leq x \leq c$$



$$|x| \geq c \text{ تكافئ } x \leq -c \text{ أو } x \geq c$$



مثال (7)

جد مجموعة الحل للمتباينات التالية علي شكل فترة ومثلها علي مستقيم الأعداد .

1) $|x + 3| < 7 \Rightarrow x + 3 > -7 \text{ and } x + 3 < 7$ خواص القيمة المطلقة

$\Rightarrow \begin{cases} x > -7 - 3 \Rightarrow x > -10 \Rightarrow x \in (-10, \infty) \\ \text{and } x < 7 - 3 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4) \end{cases}$ بإضافة النظير الجمعي للعدد 3

$\Rightarrow x \in (-10, \infty) \cap (-\infty, 4) \Rightarrow x \in (-10, 4)$

متباينة أو مجموعة الحل هي $s = (-10, 4)$

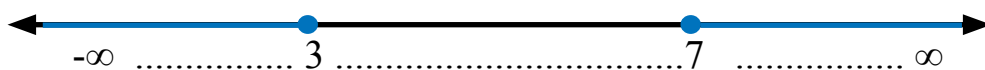


2) $|x - 5| \geq 2 \Rightarrow x - 5 \leq -2 \text{ or } x - 5 \geq 2$ خواص القيمة المطلقة

$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 + 5 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3] \\ \text{or } x \geq 2 + 5 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow x \in [7, \infty) \end{cases}$ خواص التباين

$s = (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$

مجموعة الحل هي



كتابة المتباينة المطلقة من التمثيل البياني لها نتبع الخطوات الآتية :

أولاً: نبحث عن نصف قطر r لفترة المتباينة بالعلاقة $r = \frac{b-a}{2}$ حيث العدد a يمثل النهاية اليسرى لفترة المتباينة والعدد b يمثل النهاية اليمنى لفترة المتباينة .

ثانياً: نجد c مركز فترة المتباينة بالعلاقة $c = b - r$.

ثالثاً: نكتب المتباينة بالصيغة $|x - c| < r$ أو $|x - c| \leq r$ اذا كانت فترة الحل على مستقيم الأعداد فترة متصلة .

رابعاً: نكتب المتباينة بالصيغة $|x - c| > r$ أو $|x - c| \geq r$ اذا كانت فترة الحل على مستقيم الأعداد من اتحاد فترتين منفصلتين .



مثال (8)

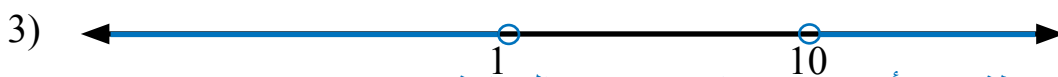
اكتب متباينة القيمة المطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :



نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r = 2$ وأن $c = 0$ والمتباينة هي $|x| < 2$ أو $|x - 0| < 2$



نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r = 2$ وأن $c = -1$ والمتباينة هي $|x + 1| \geq 2$



نتبع الخطوات في الملاحظة ونجد أن $r = 4.5$ وأن $c = 5.5$ والمتباينة هي $|x - 5.5| > 4.5$

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

الاختيار من متعدد

(1) إذا كان $-3x + 17 < -13$ فان :

- a) $x \in (10, \infty)$ b) $x \in [10, \infty)$ c) $x \in (-\infty, 10)$ d) $x \in [-10, 10]$

(2) إذا كان $|x - 1| > 5$ فان :

- a) $x \in (-4, 6)$ b) $x \in [-4, 6]$
c) $x \in (-\infty, -4) \cup (6, \infty)$ d) $x \in (-\infty, -4] \cup [6, \infty)$

التمرينات

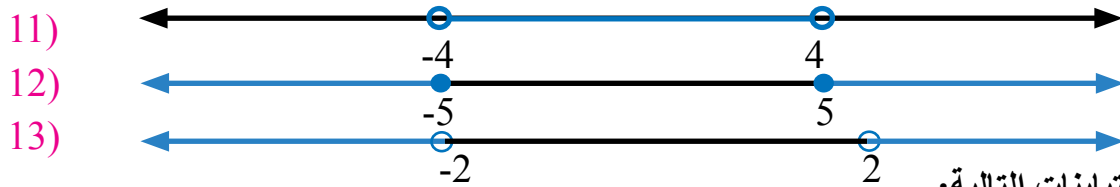
اكتب المتباينات التالية بالصيغة العامة بأبسط صورة:

- 3) $4x + 4 \leq 16$ 4) $17x + 5 \geq -6x^2$ 5) $5x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1$

جد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية التالية باستعمال الاشارات :

- 6) $-x^2 + 6x - 7 \geq 0$ 7) $3x^2 - 2x - 8 \geq 0$ 8) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$
9) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ 10) $x^2 - 6x - 8 < 0$

اكتب متباينة القيمة المطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :



حل كلا من المتباينات التالية:

- 14) $|x| > 2$ 15) $2|3x - 4| - 1 > 5$ 16) $|\frac{3}{4} - x| \geq \frac{7}{8}$
17) $|2x - 1| \leq 7$ 18) $|x + 5| < -8$ 19) $|x + 2| > 6$

مسائل حياتية

(20) **غوص:** يجب أن يبقى ضغط أسطوانة الغوص 1136 كغم لكل بوصة مربعة، بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 227 كغم لكل بوصة مربعة. اكتب متباينة تبين مدى الضغط المثالي لأسطوانة الغاز.



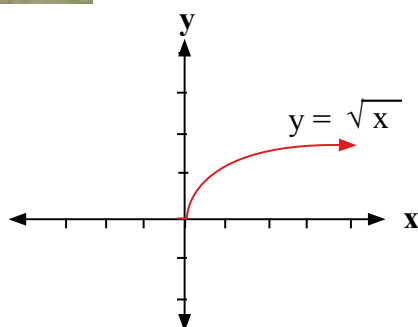
(21) **غذاء:** يبلغ وزن علبة عسل التمر من مصانع تعليب كربلاء 950 غم، يقوم مسؤول السيطرة النوعية باختيار بعض العلب للتحقق من أوزانها، وتُرفض كل علبة يزيد الفرق بينها ووزن علبة عسل التمر 10 غم. اكتب متباينة أوزان العلب غير المقبولة ومثل ذلك على مستقيم الأعداد.



تعلم



القطارات المغناطيسية تغير مساراتها بمنحنٍ وذلك لسرعتها العالية ويمثل تغيير مسارها جزءاً من منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$



فكرة الدرس

- * التعرف الى الدوال الرئيسية الام .
- * ايجاد المجال والمدى للدوال الرئيسية الام.

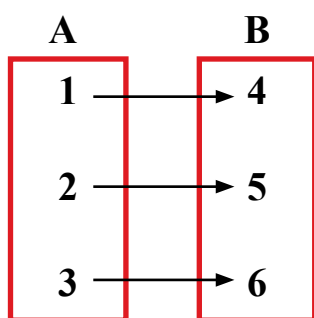
المفردات

- * الدالة الرئيسية الأم
- * الدالة الثابتة
- * الدالة المحايدة
- * الدالة التربيعية
- * الدالة التكعيبية
- * دالة الجذر التربيعي
- * دالة المطلق
- * الدالة النسبية (المقلوب)
- * الدالة الدرجية (السلمية)

تعلمت سابقا ان العلاقة المعرّفة من المجموعة X الى المجموعة Y عبارة عن مجموعة جزئية مكوّنة من الأزواج المرتبة بالشكل (x,y) حيث $x \in X$ و $y \in Y$.
الدالة $f: X \rightarrow Y$ هي علاقة تربط كل عنصر في X بقيمة واحدة (صورة واحدة) في Y . وتسمّى المجموعة X بمجال الدالة (Domain)، والمجموعة Y بالمجال المقابل للدالة (Co-Domain)، وتسمّى مجموعة جميع الصور في المجال المقابل بالمدى (Range). وتسمّى بالدالة الحقيقية اذا كان مجالها والمجال المقابل لها مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزءاً منها .

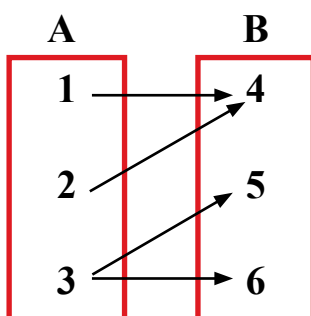
مثال (1)

بيّن إذا كانت العلاقات التالية تمثل دالة ام لا.



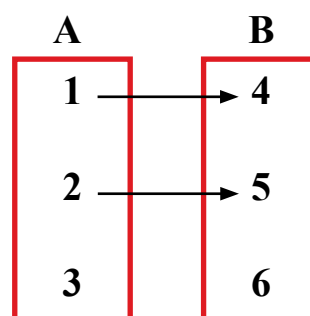
$$f: A \rightarrow B$$

f - تمثل دالة لان كل عنصر من A مرتبط بعنصر واحد من B



$$f: A \rightarrow B$$

f - لا تمثل دالة لان العنصر 3 من A مرتبط بعنصرين 5 ، 6 من B



$$f: A \rightarrow B$$

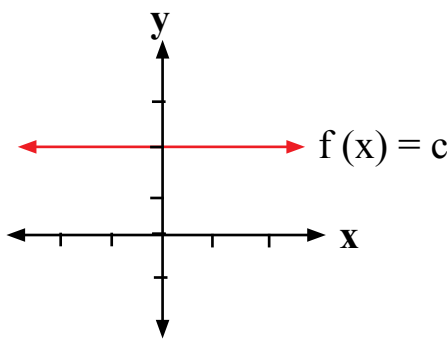
f - لا تمثل دالة لان العنصر 3 لم يرتبط بأي عنصر من B

الدوال الرئيسية (الأم) هي مجموعة من الدوال الحقيقية منحنياتها تشترك في صفة واحدة أو أكثر. وتعرف الدالة الرئيسية (الأم) أنها أبسط صورة للدالة في العائلة. ويمكن تمثيل باقي دوال العائلة عن طريق إجراء التحويلات الهندسية عليها.

ملاحظة: سوف يتم دراسة الدالة التربيعية والتكعيبية ودالة المطلق بالتفصيل في الدروس القادمة اما في هذا الدرس فسوف نتطرق الى الدالة الثابتة ، الدالة المحايدة ، دالة الجذر التربيعي ، الدالة النسبية (المقلوب) والدالة الدرجية (الدالة السلمية) .

Constant Function

أولاً : الدالة الثابتة



تسمى الدالة المعرّفة بالشكل $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي بالدالة الثابتة وتُمثّل بشكل مستقيم افقي يوازي محور السينات.

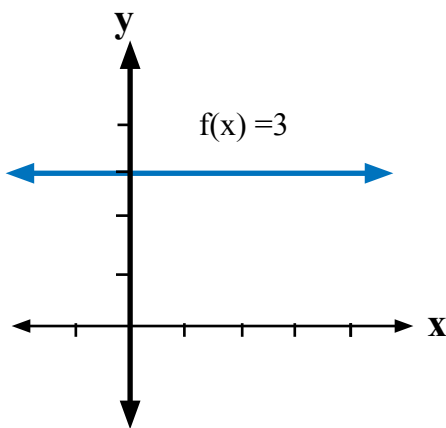
مجال الدالة الثابتة: هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية

مدى الدالة الثابتة: هو $\{c\}$

مثال (2)

ارسم بيان الدالة $f(x) = 3$ وحدّد المجال والمدى

نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا



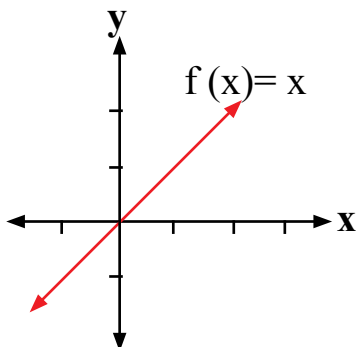
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	3	3	3	3	3	3

مجال الدالة = R

مدى الدالة = $\{3\}$

Identity Function

ثانياً : الدالة المحايدة

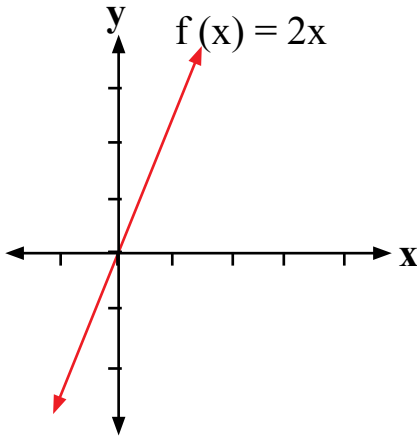


وتكتب بالشكل $f(x) = x$ وتمثل بمنحني جميع النقاط التي احداثياتها (a, a)

مجال الدالة المحايدة: هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية R

ملاحظة: مدى الدالة المحايدة : هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية .

مثال (3)



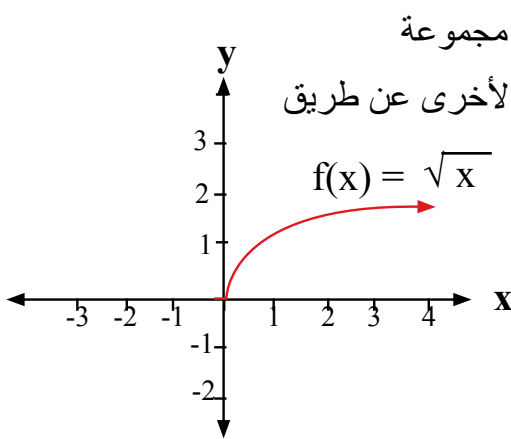
ارسم بيان الدالة $f(x) = 2x$ وحدد مجال الدالة
نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-6	-4	-2	0	2	4	6

مجال الدالة = R

Square Root Function

ثالثاً : دالة الجذر التربيعي

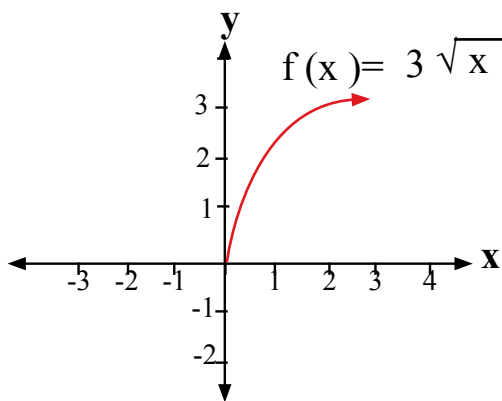


تُسمَّى الدالة المعرفة $f(x) = \sqrt{x}$ بالشكل بالدالة الرئيسية الام في مجموعة
الدوال الجذرية (التربيعية) وتستخدم للحصول على الدوال الجذرية الأخرى عن طريق
التحويلات الهندسية.

مجال دالة الجذر التربيعي: $\{x \in R : x \geq 0\}$

ملاحظة: مجال دالة الجذر التربيعي هو جميع القيم التي تجعل ما تحت الجذر أكبر أو يساوي صفر

مثال (4)



ارسم بيان الدالة $f(x) = 3\sqrt{x}$ وحدد مجال الدالة

لإيجاد مجال الدالة يجب أن تكون $x \geq 0$

اذن مجال الدالة $\{x \in R : x \geq 0\}$

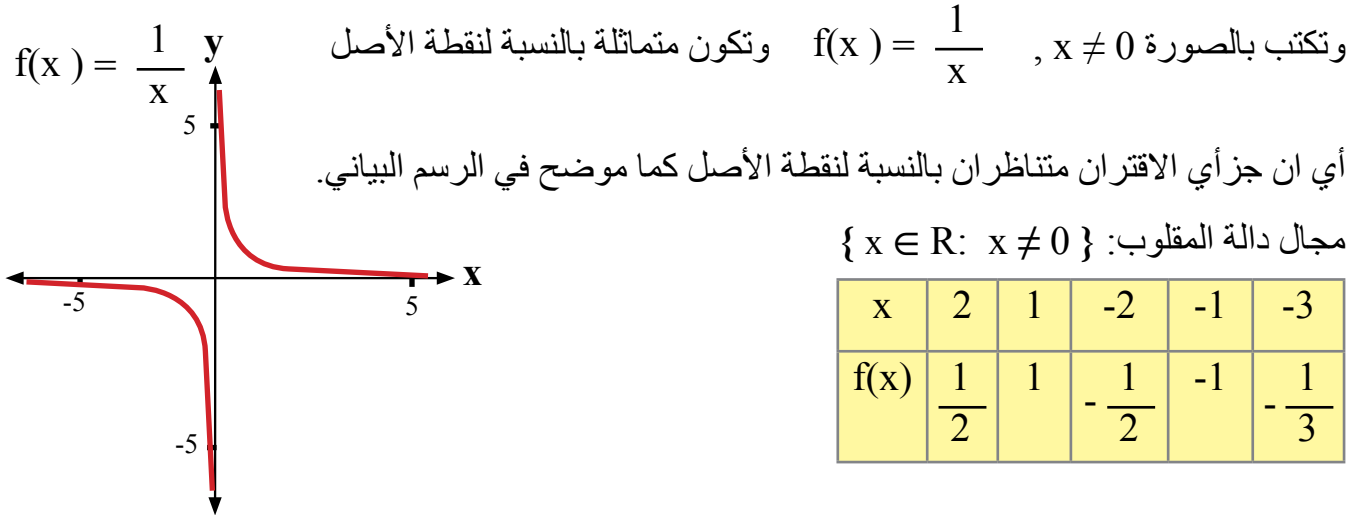
الان نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانيا

x	0	1	4	9
f(x)	0	3	6	9

وبذلك فان الرسم البياني للدالة هو نفس الدالة الرئيسية بعد تمده.

Reciprocal Function

رابعاً : دالة النسبية (المقلوب)



ملاحظة: مجال دالة المقلوب (النسبية) هو جميع القيم عدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً .

مثال (5)

جد قيمة x التي تجعل الدالة $f(x) = \frac{2}{3x+7}$ غير معرفة

نجد قيمة x التي تجعل المقام صفراً

$$3x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

اذن الدالة غير معرفة عندما $x = -\frac{7}{3}$

مثال (6)

عين مجال الدالة $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

مجال الدالة هو {اصفار المقام} / $\mathbb{R}$ مجموعة كل الاعداد الحقيقية عدا القيم التي تجعل المقام تساوي صفر

وعليه بوضع المقام = صفر فإن:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -3$$

لذا مجال الدالة هو $\mathbb{R} / \{3, -3\}$

Step Function

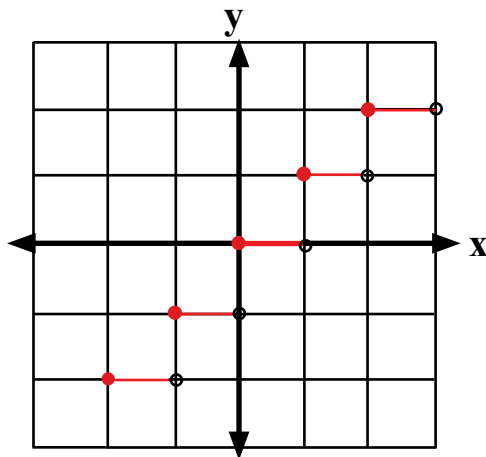
خامساً : الدالة الدرجية (السلمية) :

الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ والتي قاعدتها $f(x) = [[x]]$ تسمى دالة العدد الصحيح x حيث $[[x]]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x بصيغة أخرى .

إذا كان $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ فإن $n \leq x < n+1$ وان $f(x) = [[x]] = n$

مثال (7)

ارسم الدالة $f(x) = [[x]]$ بيانياً واستخدم جدول القيم :



n	الفترة	f(x)
.....		
-2	$-2 \leq x < -1$	-2
-1	$-1 \leq x < 0$	-1
0	$0 \leq x < 1$	0
1	$1 \leq x < 2$	1
2	$2 \leq x < 3$	2
.....		

مجال الدالة الدرجية: مجموعة كل الاعداد الحقيقية R .

مثال (8)

جد ناتج الدالة الدرجية لكل مما يأتي: $[[3.6]]$, $[[-2.1]]$

بحسب التعريف $[[3.6]] = 3$

$[[-2.1]] = -3$

الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(1) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x-4}$ هو

- a) $\{x \in R: x > 2\}$ b) $\{x \in R: x < 2\}$ c) $\{x \in R: x \geq 2\}$ d) $\{x \in R: x \leq 2\}$

(2) مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{2-x}$ هو

- a) $\{x \in R: R / \{2\}\}$ b) $\{x \in R: R / \{3\}\}$ c) $\{x \in R: R / \{-2\}\}$ d) $\{x \in R: x \neq 9\}$

(3) ناتج الدالة الدرجية $[[-2 . 3]]$ هو

- a) -2 b) 2 c) 3 d) -3

التمرينات

جد ناتج الدالة الدرجية لكل مما يأتي:

4) $[[0.5]]$

5) $[[-1.99]]$

6) $[[2.99]]$

جد القيم التي تجعل الدالة غير معرفة :

7) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$

8) $f(x) = \frac{9}{x-3}$

9) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

10) $f(x) = \sqrt{2x} - 1$

جد المجال لكل من الدوال الآتية:

11) $f(x) = \frac{3}{2-x}$

12) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

13) $f(x) = \sqrt{x-5}$

مثل كل دالة بيانيا مستخدما الدالة الرئيسية الام وحدد مجالها

14) $f(x) = -3x$

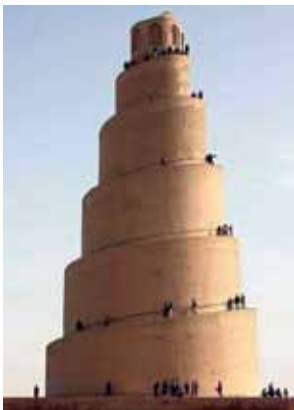
15) $f(x) = [[x]] + 1$

16) $f(x) = 2x - 1$

17) $f(x) = \sqrt{x} + 3$

18) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

مسائل حياتية



19) قطعت سيارة انطلقت من مدينة بغداد الى مدينة الموصل مسافة 450km بسرعة مقدارها $V_{km/h}$, اكتب دالة الزمن بدلالة السرعة ومثلها بيانيا.

20) رحلة مدرسية لطلاب مدرسة لزيارة مأذنة الملوية في سامراء. قرّرت المدرسة اذا كان عدد الطلاب لهذه الرحلة 40 طالبا أو أقل فانهم سيستأجرون حافلات تتسع لـ 15 شخصا. واذا كان هناك اكثر من 40 طالبا فانهم سوف يستأجرون حافلات تتسع لـ 56 شخصا.

1 - ماهي الدالة التي يمكن استخدامها لتمثيل ذلك ؟
2 - كم عدد الحافلات التي تحتاجها المدرسة اذا كان عدد الطلبة الراغبين بالذهاب 412 طالبا ؟

تعلم



الدوال الحقيقية التربيعية و التكعيبية (الأم) وتحويلات الهندسية لها تطبيقات كثيرة في حياتنا اليومية منها الهندسية في انشاء المباني و عمل نافورات المياه... وكذلك نلاحظ بأن الثعابين تسير بشكل ملتوي فمثلا جزء من مسار ثعبان الأنكوندا يمثل إحدى التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية الأم $f(x) = x^3$.

فكرة الدرس

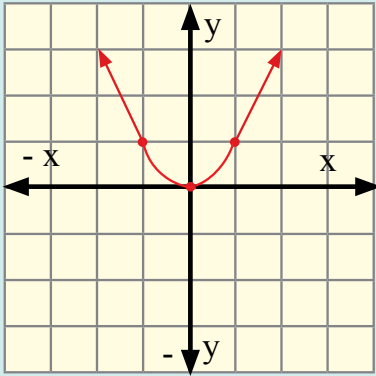
- * التعرف الى الدالة التربيعية و الدالة التكعيبية (الأم)
- * التعرف الى مجال الدالة ومداها
- * تمثيل الدالة بيانيا
- * التعرف إلى التحويلات الهندسية للدالة التربيعية و التكعيبية.

المفردات

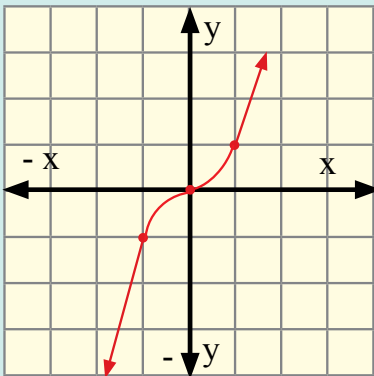
- * الدالة التربيعية ، الدالة التكعيبية ، مجال الدالة ، مدى الدالة ، تحويلات الدالة التربيعية و التكعيبية

[1-4-1] الدالة التربيعية و الدالة التكعيبية: Quadratic and Cubic Functions

تعرفت من الدرس السابق إلى خمسة من الدوال الرئيسة (الأم) و تعرفت إلى كيفية إيجاد مجالها و المدى لها، والأن سوف نستكمل باقي الدوال الأم وهي الدالة التربيعية والدالة التكعيبية و نتعرف إلى المجال و المدى لهما و تمثيلهما البياني إضافة الى تحويلاتهما الهندسية .



الدالة التربيعية : الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = x^2$ والمعرفة ، حيث x عدد حقيقي. تسمى بالدالة التربيعية (الأم) . وتمثيلها البياني رأسه عند نقطة الأصل (0,0) و متناظر حول الجزء الموجب من محور الصادات ، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة .



الدالة التكعيبية : الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة بالعلاقة $f(x) = x^3$ ، حيث x عدد حقيقي. تسمى بالدالة التكعيبية (الأم) . وتمثيلها البياني هو منحن يمر بنقطة الأصل و جزؤه الموجب يقع في الربع الأول و الجزء السالب يقع في الربع الثالث ومتناظرة مع نقطة الأصل، و مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية وكذلك مداها مجموعة الأعداد الحقيقية . نقطة انعطاف الدالة (انقلاب الدالة) هو (0,0)

Geometric Transformations For Quadratic Function

أولاً : الانسحاب

حيث $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ أن a, b, c تسمى معاملات الدالة التربيعية .
 $f(x) = x^2$ هي أبسط الدوال التربيعية وتسمى الدالة الأم ، وسوف نتطرق الى أنسحابات الدالة على المحاور في المستوى الإحداثي.

$$y = (x - b)^2, b > 0$$

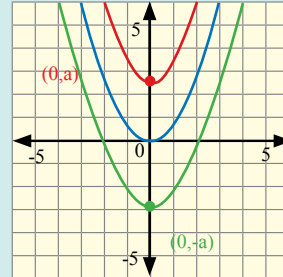
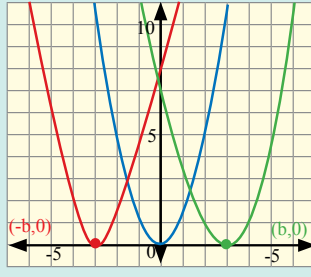
الرأس $(b, 0)$

انسحاب لليمين على محور X

$$y = (x + b)^2, b > 0$$

الرأس $(-b, 0)$

انسحاب لليسار على محور X



$$y = x^2 - a, a > 0$$

الرأس $(0, -a)$

انسحاب للأسفل على محور Y

$$y = x^2 + a, a > 0$$

الرأس $(0, a)$

انسحاب للأعلى على محور Y

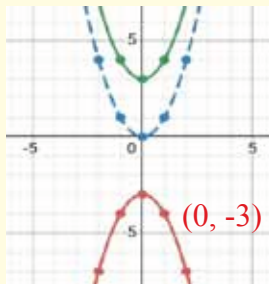
ثانياً : الانعكاس

تعلمت من دراستك السابقة الانعكاسات في المستوى الإحداثي وسوف نذكرك به و كما يلي :

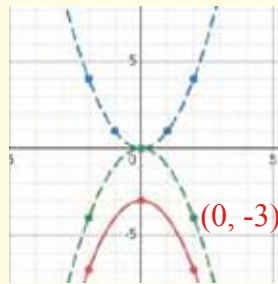
الانعكاس	حول محور السينات	حول محور الصادات	حول نقطة الأصل	حول الخط المستقيم $y=x$
من الأصل الى الصورة	$(a, b) \rightarrow (a, -b)$	$(a, b) \rightarrow (-a, b)$	$(a, b) \rightarrow (-a, -b)$	$(a, b) \rightarrow (b, a)$

والأن سوف ندرس انعكاس الدالة التربيعية الأم $y = x^2$ على محور x و كذلك أنعكاسها وأنسحابها على المحاور في أن واحد.

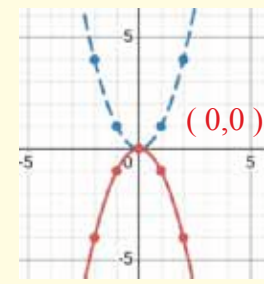
نلاحظ أن الدالة $y = -x^2 - 3$ هي نفسها الدالة $y = -(x^2 + 3)$ وهي انعكاس للدالة $y = x^2 + 3$ على محور X ونقطة الرأس هي $(0, -3)$



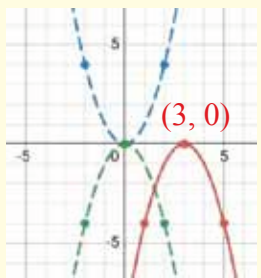
الدالة $y = -x^2 - 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X مع انسحاب للأسفل على محور Y ونقطة الرأس هي $(0, -3)$



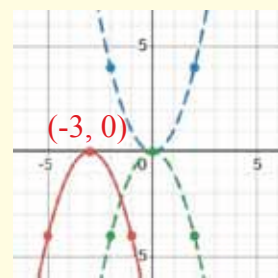
الدالة $y = -x^2$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X وهو منحنى مقلوب للأسفل ونقطة الرأس هي $(0, 0)$



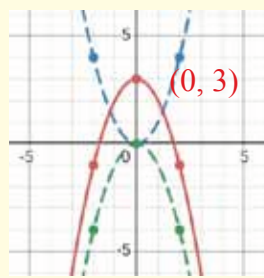
الدالة $y = -(x - 3)^2$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X مع انسحاب لليمين على محور X ونقطة الرأس هي $(3, 0)$



الدالة $y = -(x + 3)^2$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X مع انسحاب لليسار على محور X ونقطة الرأس هي $(-3, 0)$



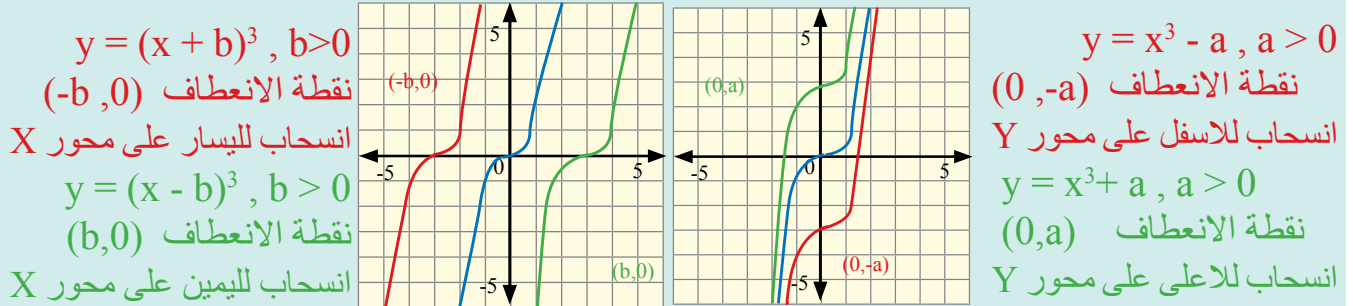
الدالة $y = -x^2 + 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = x^2$ على محور X مع انسحاب للأعلى على محور Y ونقطة الرأس هي $(0, 3)$



Geometric Transformations For Cubic Function

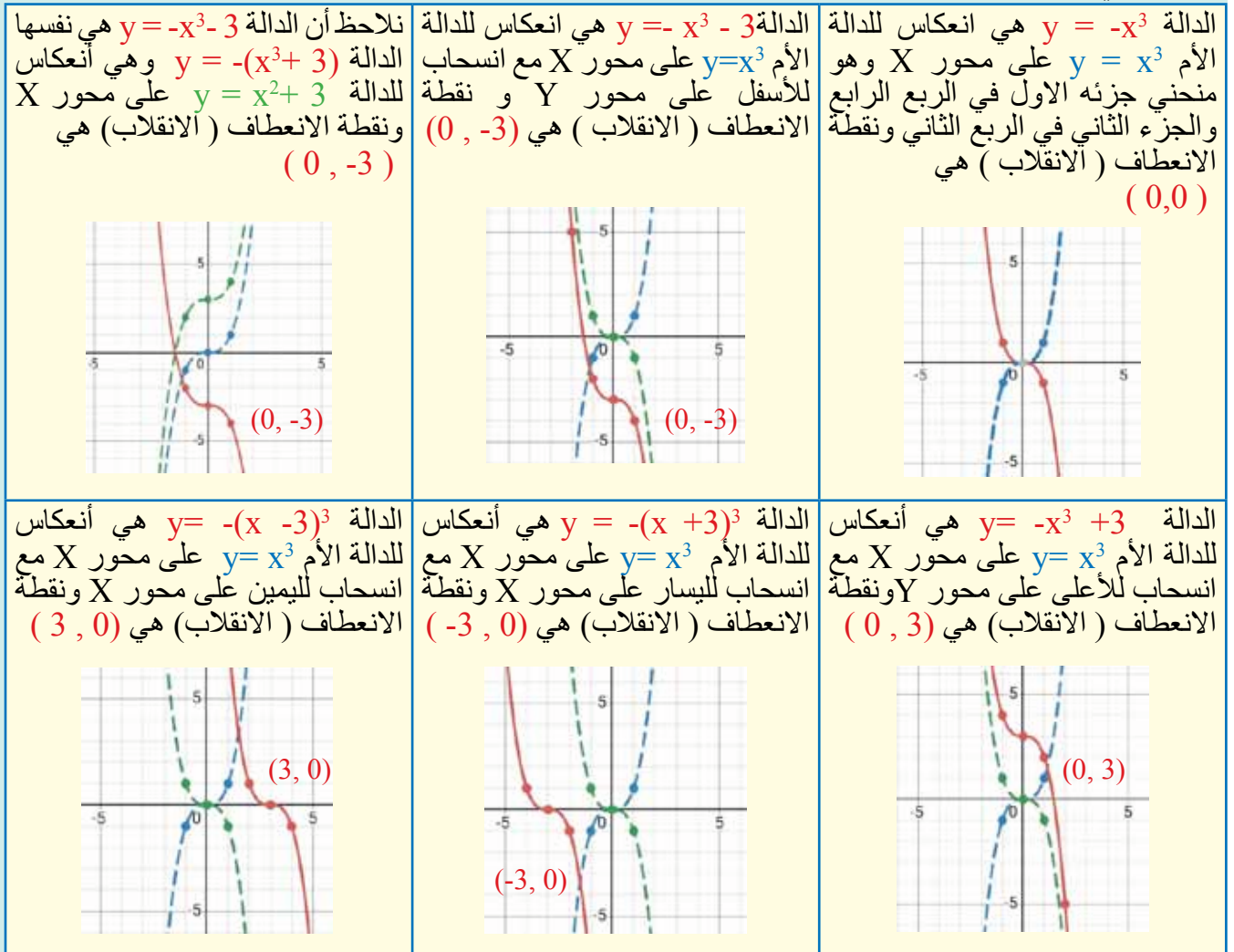
أولاً: الانسحاب

حيث $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ و $a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ تسمى معاملات الدالة التكعيبية .
 $f(x) = x^3$ هي أبسط الدوال التكعيبية وتسمى الدالة الأم ، وسوف نتطرق الى انسحاباتها على المحاور .



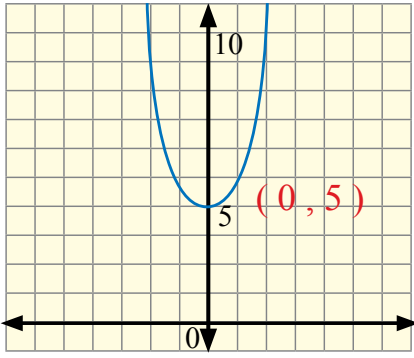
ثانياً: الانعكاس

والآن سوف ندرس انعكاس الدالة التكعيبية الأم $y = x^3$ على محور Y و كذلك أنعكاسها وأنسحابها على المحاور في أن واحد.



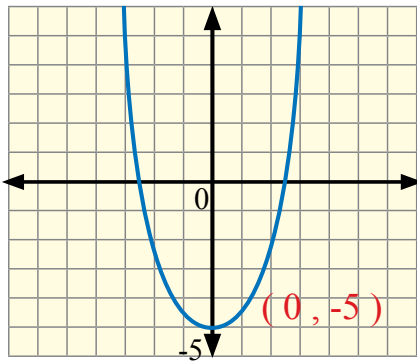
ملاحظة: سوف نكتفي في هذا الصف بدراسة هذه الدوال الأم وبعض التحويلات الهندسية لها أما الدوال متعددة الحدود الأخرى فسوف يتم دراستها في الصفوف اللاحقة .

مثال (1)



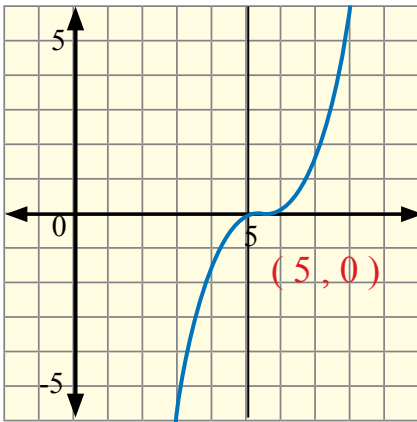
الدالة $f(x) = x^2 + 5$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها $\{ y \in \mathbb{R} : y \geq 5 \}$ ، الرأس عند النقطة $(0, 5)$ والتحويل يمثل انسحاباً للأعلى على محور Y

مثال (2)



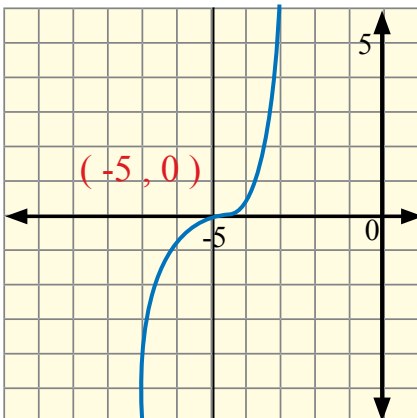
الدالة $f(x) = x^2 - 5$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها $\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -5 \}$ ، الرأس عند النقطة $(0, -5)$ والتحويل يمثل انسحاباً للأسفل على محور Y

مثال (3)



الدالة $y = (x - 5)^3$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها مجموعة الأعداد الحقيقية، نقطة الانعطاف $(5, 0)$ والتحويل يمثل انسحاباً لليمين على محور X

مثال (4)



الدالة $y = (x + 5)^3$ رسمها البياني كما موضح في الشكل المجاور و مداها مجموعة الأعداد الحقيقية، نقطة الانعطاف $(-5, 0)$ والتحويل يمثل انسحاباً لليسار على محور X

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

الاختيار من متعدد

(1) مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-3}}$ هو:

- a) $[\frac{3}{2}, \infty)$ b) $(\frac{3}{2}, \infty)$ c) $(\frac{2}{3}, \infty)$ d) $[\frac{2}{3}, \infty)$

(2) مجال الدالة $f(x) = \frac{x}{x-3}$ هو:

- a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ c) $\{3\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$

التمرينات

جد المجال و المدى لكل دالة مما يأتي :

- 3) $y = x^2 + 6$ 4) $y = (x - 7)^2$ 5) $y = (x + 9)^3$ 6) $y = x^3 - 9$

اذكر نوع التحويلات لكل دالة من الدوال التالية بالنسبة إلى الدالة الأم :

- 7) $y = x^2 - 10$ 8) $y = (x - 14)^2$ 9) $y = x^3 + 12$ 10) $y = (x - 12)^3$

- 11) $y = 4 - x^2$ 12) $y = 4 - x^3$ 13) $y = -(x + 1)^2$ 14) $y = -(x - 1)^2$

- 15) $y = -4 - x^3$ 16) $y = -(x - 1)^3$

ارسم بيانياً كل دالة من الدوال الآتية :

- 17) $y = x^2 + 7$ 18) $y = x^2 - 7$ 19) $y = (x - 1)^2$

- 20) $y = (x + 1)^2$ 21) $y = x^3 + 1$ 22) $y = x^3 - 1$

- 23) $y = (x + 1)^3$ 24) $y = (x - 1)^3$ 25) $y = 8 - x^2$

- 26) $y = -(x + 2)^2$ 27) $y = -x^3 - 2$ 28) $y = -(x + 2)^3$

مسائل حياتية



(29) **هندسة :** تعمل النافورات المائية في الحدائق العامة بأشكال

مختلفة والبعض يعمل كما نلاحظ في الصورة تمثله

الدالة $f(x) = 2 - x^2$ وهي إحدى التحويلات الهندسية للدالة

التربيعية الأم . مثل هذه الدالة بيانياً وبين علاقتها بالدالة

التربيعية الأم .



(30) **سباق سيارات :** تصمم شوارع سباقات السيارات بشكل

هندسي إذ تكون منه أجزاء ملتوية وبدرجات مختلفة ونلاحظ

أن جزءاً منه تمثله الدالة $f(x) = -(x + 2)^3$ وهي إحدى

التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية الأم . ارسم بيانياً هذه

الدالة، وبين علاقتها بالدالة الأم .

تعلم

فكرة الدرس

- * التعرف الى دالة القيمة المطلقة الأم
- * التعرف الى التحويلات الهندسية
- المفردات**
- * رسم دالة المطلق
- * المجال والمدى لدالة المطلق
- * التحويلات الهندسية لدالة المطلق



متوسط درجة حرارة الجسم الداخلية للإنسان في حالاتها الاعتيادية غير المرضية هي 37.0 درجة مئوية. ودرجة الحرارة يمكن أن تختلف بمقدار يصل إلى 0.5 درجة، ولا تزال تعد طبيعية وتحسب رياضياً بالدالة $y = |x - 37.0|$ حيث x تمثل درجة حرارة الشخص.

درسنا سابقاً القيمة المطلقة لعدد ما تكون دائماً موجبة فمثلاً $|-3| = 3$ وتعرف الدوال المعرفة بالشكل $f(x) = a|x + b| + c$ بدوال القيمة المطلقة، والتمثيل البياني لهذه الدوال على شكل حرف V حيث يمثل الرأس أصغر أو أكبر قيمة للدالة.

خصائص القيمة المطلقة للعدد الحقيقي	
العبارة	أمثلة
$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$	$-6 \in \mathbb{R}, -6 = 6 > 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, -x = x $	$ -8 = 8 = 8$
$\forall x \in \mathbb{R}, - x < x \leq x $	$- 7 = -7 < 7 \leq 7 = 7 $
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = x ^2$	$(-3)^2 = 9 = -3 ^2$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = x \cdot y $	$x = 2, y = -9$ $ x \cdot y = 2(-9) = -18 = 18 \Rightarrow 2(-9) = 18 = 2 \cdot -9 $ $ x \cdot y = 2 \cdot -9 = 2(9) = 18$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \left \frac{y}{x} \right = \frac{ y }{ x }$	$x = 2, y = -9$ $\left \frac{-9}{2} \right = \frac{ -9 }{ 2 } = \frac{9}{2}$
$\forall a > 0, x \leq a, -a \leq x \leq a$	$ x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$
$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq x + y $	$x = 2, y = 6$ $ 6 + 2 = 8 = 2 + 6 \Rightarrow x + y = x + y $

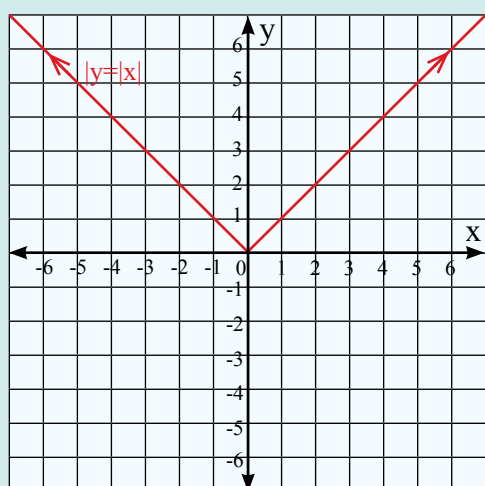
استعمل خاصية القيمة المطلقة لتحسب المتباينة التالية:

مثال (1)

$$x = 2, y = -6$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\left. \begin{array}{l} |x + y| = |2 - 6| = 4 \\ |x| + |y| = 2 + 6 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow |x + y| < |x| + |y|$$



تسمى الدالة المعرفة بالشكل $f(x)=|x|$ بالدالة الرئيسية (الأم) في مجموعة الدوال المطلقة، وتستخدم للحصول على الدوال المطلقة الأخرى عن طريق تحويلات هندسية كما سنبين ذلك لاحقاً.

نستطيع تعريف الدالة الرئيسية كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x = 0 \\ -x, & \forall x < 0 \end{cases}$$

ولرسم الدالة $f(x) = |x|$ بيانياً استخدم جدول القيم.

x	-2	-1	0	1	2
x	2	1	0	1	2

خصائص منحنى دالة القيمة المطلقة الأم:

(1) مجال الدالة هو R ومدى الدالة $[0, \infty)$.

(2) المنحنى متماثل حول محور y .

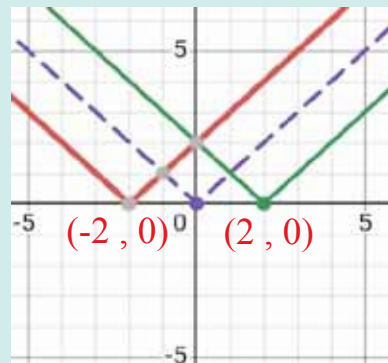
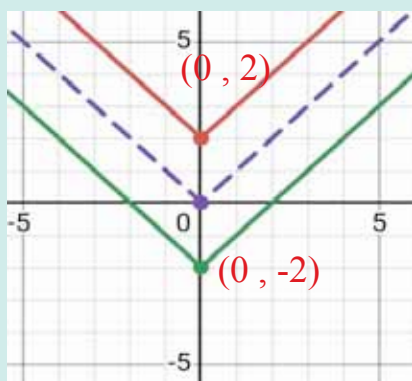
(3) رأس الدالة هي النقطة $(0,0)$.

[1-5-2] التحويلات الهندسية للدالة المطلقة الرئيسية (الأم) وتمثيلها

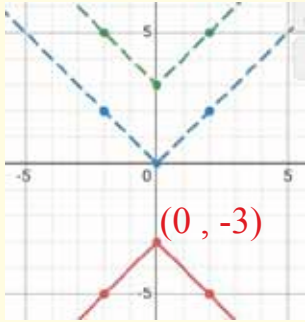
Geometric Trransfers of Main Absolute Function and Its Representaion

الصيغة العامة للدالة المطلقة تكون بالشكل $f(x)=a|x+b|+c$ ، حيث $a \neq 0$ ومن خلال الرسم البياني للدالة الرئيسية $f(x)=|x|$ يمكن الحصول على الرسم البياني لأي دالة مطلقة.

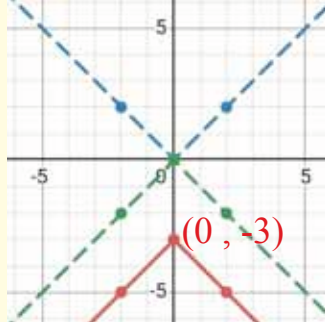
$f(x) = x - 2 $ انسحاب للأسفل على محور Y نقطة الرأس هي $(0, -2)$	$f(x) = x + 2$ انسحاب للأعلى على محور Y نقطة الرأس هي $(0, 2)$	$f(x) = x - 2 $ انسحاب لليمين على محور X نقطة الرأس هي $(2, 0)$	$f(x) = x + 2 $ انسحاب لليسار على محور X نقطة الرأس هي $(-2, 0)$
---	--	--	---



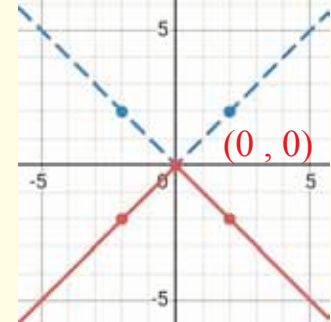
نلاحظ أن الدالة $y = -|x| - 3$ هي نفسها الدالة $y = -(|x| + 3)$ وهي انعكاس للدالة $y = |x| + 3$ على محور X ونقطة الرأس هي $(0, -3)$



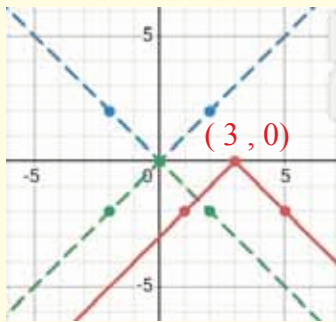
الدالة $y = -|x| - 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب للأسفل على محور Y ونقطة الرأس هي $(0, -3)$



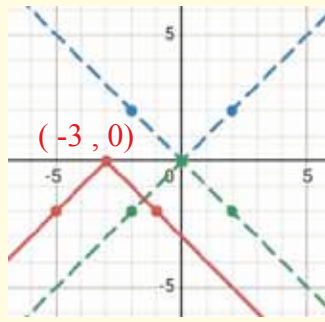
الدالة $y = -|x|$ هي انعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X وهو منحنى وهو منحنى مقلوب للأسفل ونقطة الرأس هي $(0, 0)$



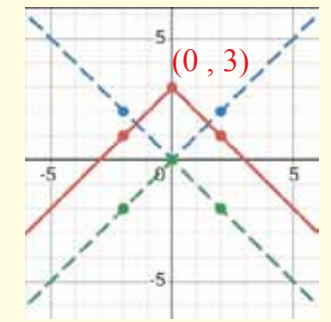
الدالة $y = -|x - 3|$ هي انعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب لليمين على محور X ونقطة الرأس هي $(3, 0)$



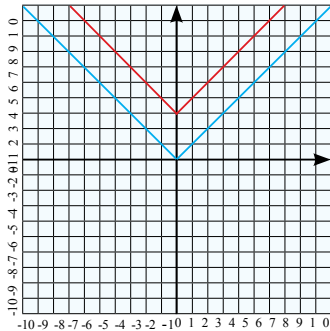
الدالة $y = -|x + 3|$ هي انعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب لليسار على محور X ونقطة الرأس هي $(-3, 0)$



الدالة $y = -|x| + 3$ هي انعكاس للدالة الأم $y = |x|$ على محور X مع سحب للأعلى على محور Y ونقطة الرأس هي $(0, 3)$



مثال (2) ارسم بيان الدالة $g(x) = |x| + 3$ وقارن ذلك مع بيان الدالة الرئيسية $f(x) = |x|$ وحدد مجال الدالة ومداها.



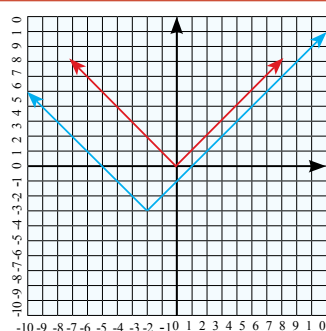
x	f(x)= x	g(x)= x +3
2	2	5
1	1	4
0	0	3
-1	1	4
-2	2	5

الجدول للاطلاع فقط

نعمل جدول القيم ثم نرسم بيانياً وعليه فإن كل قيمة للمتغير x تكون قيمة الدالة $g(x) = |x| + 3$ أكبر من قيمة الدالة الرئيسية $f(x) = |x|$ بثلاث وحدات وبذلك فإن الرسم البياني للدالة $g(x) = |x| + 3$ هو نفس الدالة الرئيسية $f(x) = |x|$ بعد سحبه للأعلى بثلاث وحدات.

مجال الدالة $g(x)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

مدى الدالة $g(x)$ هو $\{y: y \geq 3\}$



مثال (3) ارسم بيان الدالة $g(x) = |x + 2| - 3$ وقارن ذلك مع بيان الدالة الرئيسية $f(x) = |x|$ وحدد مجال الدالة ونرسم بيانياً

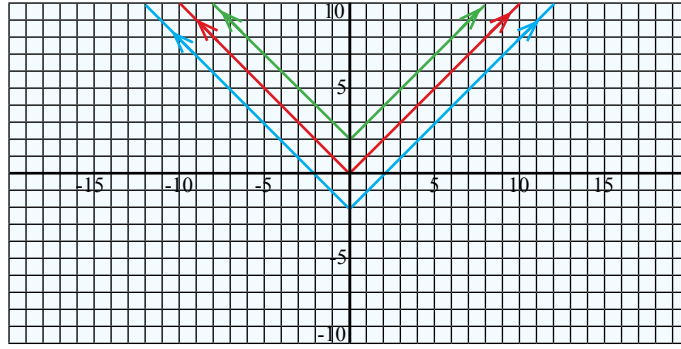
منحنى الدالة $g(x) = |x + 2| - 3$ عبارة عن انسحاب الدالة بثلاث وحدات الى الأسفل ووحدتين الى جهة اليسار بالنسبة للدالة الرئيسية $f(x) = |x|$.

مجال الدالة $g(x)$ هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية.

مدى الدالة $g(x)$ هو $\{y: y \geq -3\}$

مثال (4)

ارسم بيان كل من الدالة $f_1(x)=|x|+2$ والدالة $f_2(x)=|x|-2$ مع إيجاد المجال والمدى لهما وقرن ذلك مع الدالة الرئيسة $f(x)=|x|$.



نلاحظ أن لكل قيمة للمتغير x تكون قيمة الدالة $f_1(x)=|x|+2$ أكبر وينتج انسحاب بمقدار وحدتين الى اعلى الدالة $f(x)=|x|$. أما بالنسبة للدالة $f_2(x)=|x|-2$ فيكون انسحاباً بمقدار وحدتين الى اسفل الدالة. مجال الدالة $f_1(x)$ و $f_2(x)$ هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية.

مدى الدالة $f_1(x)$ هو $\{y: y \geq 2\}$

مدى الدالة $f_2(x)$ هو $\{y: y \geq -2\}$

الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(1) الرسم البياني للدالة $y=|x-2|$ ثم انسحابه وحدتين الى الأسفل و 3 وحدات الى اليمين فإن الدالة الناتجة هي:

- a) $y=|x-5|-2$ b) $y=|x-5|+2$ c) $y=|x+5|+2$ d) $y=|x+3|-2$

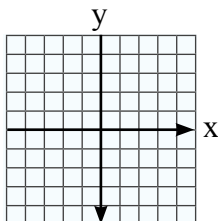
(2) الرسم البياني للدالة $y=|x|+7$ يمثل أنسحاب للدالة الأم $y=|x|$ بمقدار:

- a) 7 وحدات نحو الاعلى على محور x b) 7 وحدات نحو الاسفل على محور x
c) 7 وحدات نحو اليسار على محور x d) 7 وحدات نحو اليمين على محور x

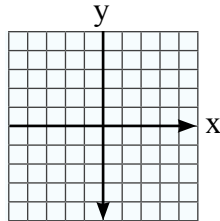
التمرينات

ضع جدول قيم لكل دالة، ثم ارسمها بيانياً.

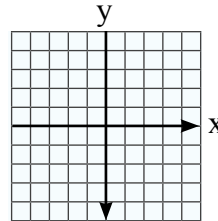
3) $f(x) = |x-1|$



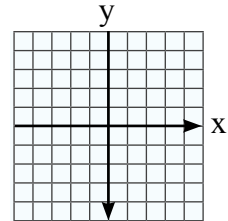
4) $f(x) = |x|-1$



5) $f(x) = 2|x|+5$



6) $f(x) = 3|x+2|$



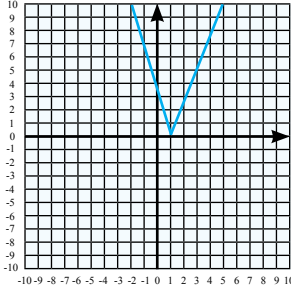
اختر الحرف الدال على بيان كل دالة مما يأتي:

7) $f(x) = |x| - 4$ _____

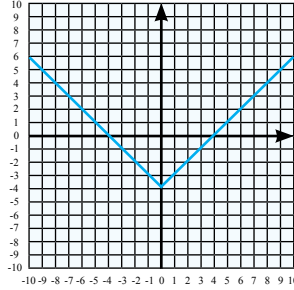
8) $f(x) = |3x - 4|$ _____

9) $f(x) = |x-4| + 3$ _____

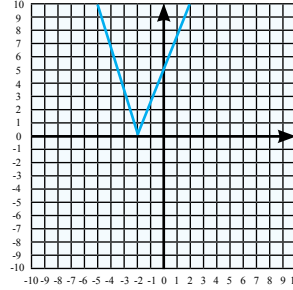
10) $f(x) = |3x+5|$ _____



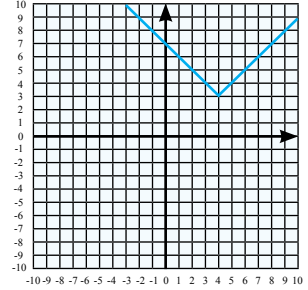
a



b



c



d

مثل كل دالة بيانياً مستخدماً الدالة الرئيسية (الأم) والانسحاب.

11) $y = |x-5|$

12) $y = |x|-5$

13) $y = |x+6|$

14) $y = |x|-6$

15) $y = |x+2|-3$

مثل كل دالة بيانياً مستخدماً الدالة الرئيسية (الأم) والانعكاس.

16) $y = 6 - |x|$

17) $y = -|x+1|$

18) $y = -5 - |x|$

19) $y = -|x-4|$

مسائل حياتية



(20) **أنواء جوية:** ضربت عاصفة ممطرة مدينة الموصل في العراق حيث بدأت العاصفة الممطرة برداذ، ومن ثم تراكمت إلى أمطار غزيرة، ثم هدأت لتسقط مرة أخرى إلى رذاذ. يتم إعطاء معدل سقوط المطر r في الساعة بالدالة $r = -3|t-1| + 3$ حيث t يمثل الزمن بالساعة، ارسم مخططاً بيانياً للدالة وبين علاقتها بدالة الأم $r = |t|$.



(21) **هندسة:** صُممت واجهة خيمة التخيم بقياسات معينة على النحو التالي $y = -1.4|x - 2.5| + 3.5$ حيث يستخدم القدم كوحدة قياس x و y ويمثل المحور x الأرض. ارسم مخططاً بيانياً للدالة ومدى الدالة وبين علاقتها بدالة الأم $y = |x|$.

Chapter Test

اختبار الفصل

جد اوسع مجال للدوال الآتية:

1 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

3 $f(x) = \sqrt[4]{x - 2}$

4 $f(x) = \frac{2}{x^2 - 25}$

5 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 3}$

جد مجموعة حل المتباينات الآتية:

6 $4x^2 + 2x - 6 < 0$

7 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

8 $|x - 2| \leq 3$

9 $|x + 2| \leq -3$

10 $|x + 5| + 2 > 5$

11 $|x + 2| \geq -3$

ارسم بيان الدوال الآتية:

12 $f(x) = 2x + 3$

13 $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

14 $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

15 $f(x) = \lfloor 3x \rfloor$

ارسم بيان الدوال التالية وبين نوع التحويلة لكل دالة بالنسبة للدالة الأم :

16 $y = x^2 + 6$

17 $y = (x - 4)^2$

18 $y = x^2 - 6$

19 $y = x^3 - 6$

20 $y = (x + 4)^3$

21 $y = (x - 4)^3$

22 $y = 7 - x^2$

23 $y = 8 - x^3$

24 $y = |x| + 4$

25 $y = |x| - 4$

26 $y = |x + 4|$

27 $y = |x - 4|$

28 $y = -|x - 4|$

29 $y = -|x + 4|$

30 $y = -|x| - 4$