4

نهاية متتالية

1. نهاية متتالية : تذكرة
2. مبرهنات تخصّ النهايات
3. تقارب المتتاليات المطّردة
4. متتاليات متجاورة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- نهاية متتالية وقواعد حسابها.
- المتتاليات المطردة، وتقارب المحدودة منها، مبرهنة فايرشتراس.
- المتتاليات المتجاورة: إثبات التجاور واستخلاص النتائج.
- تطبيقات على دراسة بعض المتتاليات المعرفة تدريجياً.

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. نعلم أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]-10^{-3},10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$.

الحل حدود المتتالية موجبة فالشرط $u_n \in]-10^{-3},10^{-3}[$ يُكافئ $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} < \dfrac{1}{10^3}$ أو $n^3 > 10^6$ وأخيراً $n > 100$. إذن باختيار $n_0 = 100$ نضمن أنّ جميع الحدود u_n حيث $n > n_0$ تقع في المجال المطلوب.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]2.98,3.02[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل هنا الشرط $u_n \in]2.98,3.02[$ يعني $2.98 < u_n < 3.02$ أو $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$. ولكن

$$u_n - 3 = \frac{4}{n-1}$$

إذن $u_n - 3$ مقدار موجب، و تتحقّق المتراجحة $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$ إذا وفقط إذا كان

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

وهذا يكافئ $n - 1 > 200$ أو $n > 201$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 201$ تحقق المطلوب.

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. نعلم أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل الشرط $u_n > 10^6$ يكافئ $n\sqrt{n} > 10^6$ أي $n^3 > 10^{12}$ أو $n > 10^4$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 10000$ تحقق المطلوب.

④ احسب نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $x_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$.

الحل المتتالية $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = 1.5 > 1$ فهي تسعى إلى $+\infty$ لأن أساسها أكبر تماماً من الواحد.

بالمثل المتتالية $u_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = \dfrac{1}{1.01}$ فهي تسعى إلى 0 لأن أساسها يحقق $-1 < q < 1$.

⑤ ليكن $-1 < q < 1$، ولنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n واستنتج قيمة $S = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

الحل هذا مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأوّل 1. إذن

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \times q^n$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ لأنّ $-1 < q < 1$، ومن ثمّ $S = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1-q}$

⑥ نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$x_0 = 3$، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ و $y_n = x_n + 3$.

❶ a. أثبت أنّ المتتاليةَ $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b. احسب y_n ثمّ x_n بدلالة n.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a. احسب كلّاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

الحل ❶ نحسب

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3}y_n$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأوّل $y_0 = x_0 + 3 = 6$. إذن $y_n = \frac{6}{3^n}$، ومن ثمّ $x_n = \frac{6}{3^n} - 3$.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$، فيكون

$$S_n = \frac{6}{3^0} + \frac{6}{3^1} + \cdots + \frac{6}{3^n} = 6\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 9\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 9 - \frac{3}{3^n}$$

و

$$\begin{aligned} S'_n &= x_0 + \cdots + x_n = (y_0 - 3) + (y_1 - 3) + \cdots + (y_n - 3) \\ &= y_0 + \cdots + y_n - 3(n+1) = S_n - 3n - 3 = -3n + 6 - \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-3n + 6 - \frac{3}{3^n}\right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(9 - \frac{3}{3^n}\right) = 9$$

⑦ نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، معرّفة وفق العلاقة التدريجية $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_0 = s$.

❶ نفترض أنّ $a = 1$، تيقّن أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة، واحسب u_n بدلالة n و b و s في هذه الحالة.

❷ هنا نفترض أنّ $a \neq 1$. ونضع ℓ الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$.

a نعرّف $(t_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = t_n - \ell$. برهن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

b استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة.

c برهن أنّه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، واحسب نهايتها بدلالة a و b و s.

الحل

❶ واضح هنا أنّ المتتالية حسابية في هذه الحالة لأنّ $u_{n+1} - u_n = b$ أياً كانت قيمة n. فحدّها الأوّل $u_0 = s$ وأساسها b إذن $u_n = s + bn$ أياً كان n.

❷ لأنّ $a \neq 1$ للمعادلة $x = ax + b$ حلٌّ وحيد هو $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. تعريفاً لدينا $\ell = a\ell + b$ ومن جهة أخرى $u_{n+1} = au_n + b$ فإذا طرحنا الأولى من الثانية وجدنا

$$u_{n+1} - \ell = au_n - a\ell = a(u_n - \ell)$$

أو $t_{n+1} = at_n$ فالمتتالية $\left(t_n\right)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة $t_n = u_n - \ell$ متتالية هندسية أساسها a وحدها الأوّل $t_0 = u_0 - \ell = s - \ell$. إذن، مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$t_n = (s-\ell)a^n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

في حالة $-1 < a < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ ومن ثمّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. ولكن $u_n = \ell + t_n$ إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$$

تَدرَّبْ صفحة 123

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقَّق أنّ $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقَّق أنّ $n \leq u_n \leq n + 2$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

③ فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها:

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$
2. $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$
3. $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$
4. $u_n = \dfrac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$
5. $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$
6. $u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{2n}{n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2+1}$
8. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$
9. $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$
10. $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+1}}$
11. $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$
12. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$
13. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$
14. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$
15. $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$
16. $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$
17. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$
18. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$
19. $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$
20. $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
21. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

الحل الإجابات:

1. $\frac{2}{3}$	2. $\frac{5}{3}$	3. $+\infty$
4. 5	5. $-\frac{3}{2}$	6. $+\infty$
7. 0	8. $+\infty$	9. 2
10. $+\infty$	11. $-\frac{1}{2}$	12. 1
13. $\frac{2}{3}$	14. 0	15. 1
16. 0	17. 0	18. $+\infty$
19. $+\infty$	20. 0	21. 0

في حالة المتتالية 14. نكتب $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$

$$u_n = \frac{n^2+n-(n+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{n^2+n}+4n+2}$$

المقام يسعى إلى $+\infty$ والبسط ثابتٌ. إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

وفي حالة 15. نلاحظ أنّ $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$ إذن $1-u_n = \dfrac{2}{n!}$ ولأنّ $0 \leq 1-u_n = \dfrac{2}{n!} < \dfrac{2}{n}$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(1-u_n) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

وفي حالة 19- $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)$ نلاحظ أنّ

$$\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}=\frac{1}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)}\geq\frac{1}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\geq\frac{1}{4n}$$

إذن $u_n \geq \frac{n}{4}$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

تَدرَّبْ صفحة 128

① في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ثمَّ خمِّنْ جهة اطردها إذا كانت مطّردة ونهايتها المحتملة.

❶ $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$.

❷ $u_0=1$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n$.

❸ $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n+2$.

الحل تمرين بسيط ومتروك للقارئ.

② تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $u_n=5-\frac{10}{n^2}$. بيّن أيُّ الأعداد الآتية راجحٌ عليها: 0، 6، 4.99999، 5 ؟

الحل يكون عددٌ راجحاً على متتالية إذا كان أكبر من جميع حدودها. هنا العددان 6 و 5 راجحان على $(u_n)_{n\geq 1}$ في حين لا يكون العددان 0 و 4.99999 راجحين عليها لأنّه إذا اخترنا $n=10000$ مثلاً كان $u_{10000}=4.9999999$ وهو أكبر من كلا العددين 0 و 4.99999.

③ تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $u_n=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. أثبت أنَّ $1\leq u_n\leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n.

الحل

في الحقيقة

$$u_n-1=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}-1=\frac{2n}{1+n(n-1)}\geq 0$$
$$3-u_n=3-\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\frac{2(n-1)^2}{1+n(n-1)}\geq 0$$

ومنه يكون $1\leq u_n\leq 3$، أياً كانت n.

④ فيما يأتي أعطِ متتاليتين $(t_n)_{n\geq 2}$ و $(s_n)_{n\geq 2}$، تختلفان عن $(u_n)_{n\geq 2}$ وتحقّقان $t_n \leq u_n \leq s_n$ أياً يكن $n \geq 2$.

❶ $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ ❷ $u_n = \dfrac{5n+1}{n+1}$

❸ $u_n = \dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$ ❹ $u_n = \dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$

❺ $u_n = \sqrt{2+n}$ ❻ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$

الحل هنا المطلوب أمثلة، ولا يوجد حلول وحيدة

	t_n	$\leq$	u_n	$\leq$	s_n
❶	$\dfrac{n}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{n+2}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{n+2}{n}$
❷	$\dfrac{5n}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{5n+1}{n+1}$	$\leq$	6
❸	$\dfrac{2n-3}{n(n+2)}$	$\leq$	$\dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$	$\leq$	$\dfrac{2}{n-1}$
❹	$\dfrac{n^2-4n}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{n^2+7}{n}$
❺	$\sqrt{n}$	$\leq$	$\sqrt{2+n}$	$\leq$	n
❻	$\dfrac{1}{n}$	$\leq$	$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$	$\leq$	1

⑤ فيما يأتي، بيّن إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

.1 $u_n = \sin n$ .2 $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ .3 $u_n = \dfrac{1}{n+2}$

.4 $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ .5 $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ .6 $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

.7 $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ .8 $u_n = n\sqrt{3} - 2$ .9 $u_n = n^2 + n - 1$

.10 $u_n = \dfrac{1}{n+1} + n^2$ .11 $u_n = n + \cos n$ .12 $u_n = (-1)^n \times n^2$

الحل

.1 محدودة لأنّ $-1 \leq \sin n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

.2 محدودة لأنّ $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n^2} \leq 2$ أياً كانت $n \geq 1$.

.3 محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{n+2} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

.4 محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{2}$ أياً كانت $n \geq 1$.

5. محدودة لأنّ $0 \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

6. محدودة لأنّ $0 \leq \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

7. محدودة لأنّ $-1 \leq \frac{-2}{\sqrt{2n+3}} \leq 0$ أياً كانت $n \geq 1$.

8. محدودة من الأدنى فقط لأنّ $n\sqrt{3}-2 \geq -2$ أياً كانت $n \geq 1$، ولكنها غير محدودة من الأعلى لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{3}-2) = +\infty$.

9. محدودة من الأدنى بالعدد -1 وغير محدودة من الأعلى.

10. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

11. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

12. غير محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى.

⑥ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n، أنّ $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

❷ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

❶

- لتكن $E(n)$ الخاصة $2^n \geq n$.
- الخاصتان $E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ $2^0 \geq 0$ و $2^1 \geq 1$.
- لنفترض صحة $E(n)$ في حالة عدد $n \geq 1$. عندئذ $2^{n+1} = 2\times 2^n \geq 2n \geq n+1$

فالخاصة $E(n+1)$ محققة أيضاً، فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $2^n \geq n$ أياً كانت n.

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k في بسط كل كسر بالقوة 2^k لنجد

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n} \\ &\leq \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n : \quad q = \frac{2}{3} \\ &= q\frac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq 2 \end{aligned}$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2.

① لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1}$. أثبت أنهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1}-t_n$ و $s_{n+1}-s_n$ ثُمّ تعيين نهاية $(s_n-t_n)_n$. نجد $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

② لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = \dfrac{n-1}{n}$ و $s_n = 1+\dfrac{1}{n^2}$. أثبت أنّهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1}-t_n$ و $s_{n+1}-s_n$ ثُمّ تعيين نهاية $(s_n-t_n)_n$. نجد $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$.

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، تبيَّنْ إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

❶ $x_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ ، $y_n = x_n + \dfrac{1}{4n}$،

❷ $x_n = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$ ، $y_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$،

❸ $x_n = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ ، $y_n = x_n + \dfrac{1}{n}$،

❹ $x_n = 2-\dfrac{1}{n}$ ، $y_n = 2+\dfrac{1}{n^2}$،

الحل

❶ هنا

$$x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

إذن

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

ونجد

$$y_{n+1}-y_n = x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4(n+1)}-\frac{1}{4n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{2n(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

وأخيراً $y_n - x_n = \frac{1}{4n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❷ هنا

$$x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

إذن

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

وكذلك

$$y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

إذن

$$y_{n+1}-y_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

وأخيراً $x_n - y_n = \frac{1}{2n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❸ هنا $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ والمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة. ونجد أيضاً

$$y_{n+1}-y_n = x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

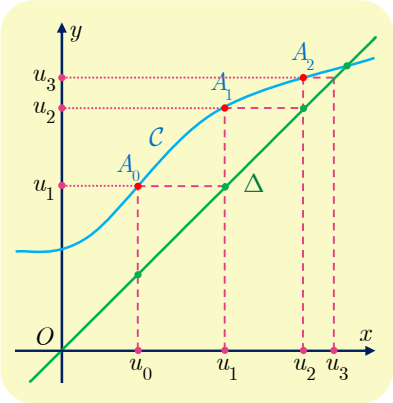
فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة. وأخيراً $y_n - x_n = \frac{1}{n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❹ بسيط ومتروك للقارئ.

أنشطة

نشاط 1 تمثيلٌ هندسي لمتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ المبدأ



في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f في معلمٍ متجانس. نوضّع العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمَّ النقطة A_0 ذات الفاصلة u_0 على الخط البياني $\mathcal{C}$، نرمز إلى ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

نوضّع u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع Δ والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من الخط C، التي فاصلتها u_1، بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نوضّع u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$.

❷ تمرين

في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المشار إليها، ثمَّ خمِّنْ جهة تغيرها ونهايتها المحتملة.

① $u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad u_0 = 1$

② $u_{n+1} = u_n^2 - 1, \quad u_0 = 1$

③ $u_{n+1} = u_n^2 - 1, \quad u_0 = 0$

④ $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}, \quad u_0 = 1$

⑤ $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n, \quad u_0 = 1$

⑥ $u_{n+1} = u_n^2, \quad u_0 = 1$

الحل

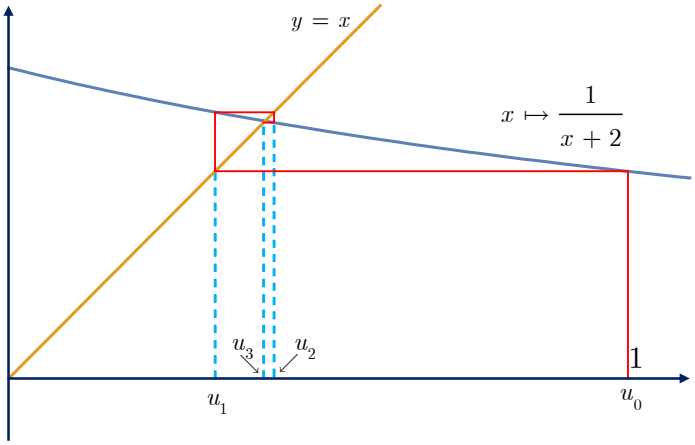
① متتالية ثابتة. وهي تسعى إلى 1

② الحدود ذات الدليل الفردي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الزوجي تساوي -1 بدءاً من الدليل 2 أي $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = 0$ و $u_2 = u_4 = \cdots = u_{2m} = -1$. وهي إذن غير متقاربة.

③ الحدود ذات الدليل الزوجي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الفردي تساوي -1 أي $u_0 = u_2 = \cdots = u_{2m} = 0$ و $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = -1$.

وهي إذن غير متقاربة.

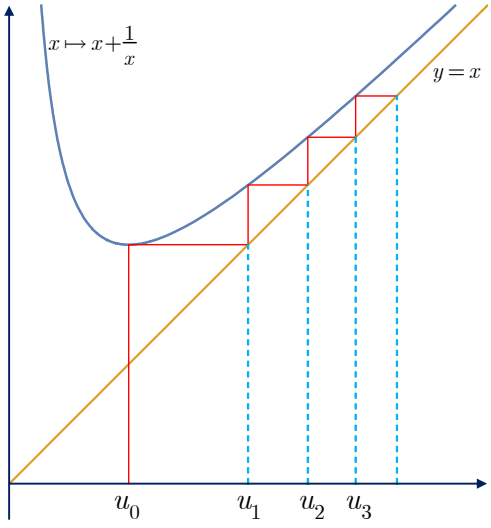
④ نلاحظ من الشكل أنّ متتالية الحدود ذات الدليل الزوجي تتناقص، ومتتالية الحدود ذات الدليل الفردي تتزايد، وأنّ المتتالية تتقارب من ℓ الذي هو الحل الموجب (لأن جميع حدود المتتالية موجبة) للمعادلة $f(x) = x$ أي $x^2 + 2x - 1 = 0$ ومنه $\ell = \sqrt{2} - 1$.



الخلاصة: إذا وضعنا $\ell = \sqrt{2} - 1$، فإننا نلاحظ أنّ $\ell \leq u_{2n+2} \leq u_{2n}$ و $u_{2n-1} \leq u_{2n+1} \leq \ell$ أياً كانت قيمة n وأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2} - 1$.

ملاحظة: هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑤ نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية متزايدة تماماً وتسعى إلى $+\infty$. في الحقيقة، لو تقاربت من عدد موجب تماماً ℓ لوجب أن يحقق المعادلة $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ وهذا تناقض.



ملاحظة: نؤكد هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑥ هنا نلاحظ أنّ المتتالية ثابتة وتسعى من ثمّ إلى 1.

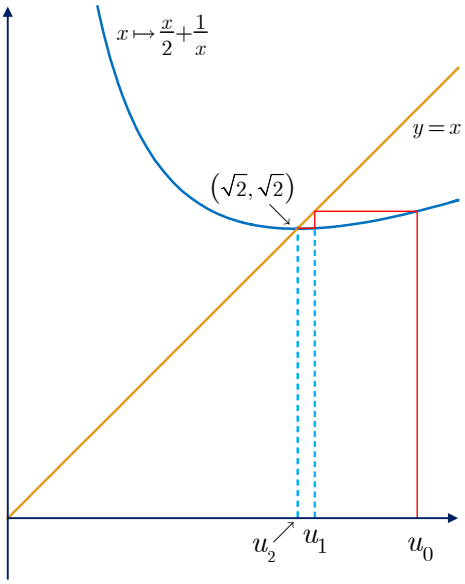
❸ تطبيق

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشرطين $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$. استعمل الطريقة السابقة لتجيب عن الأسئلة الآتية :

① أتكون المتتالية مطّردة ؟ أتكون محدودة من الأدنى ؟ أتكون متقاربة ؟

② برهن صحة النتائج التي توصلتَ إليها إن أمكن.

الحل



① نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$، وأنها تسعى إلى العدد $\sqrt{2}$.

② لنعرّف $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$.

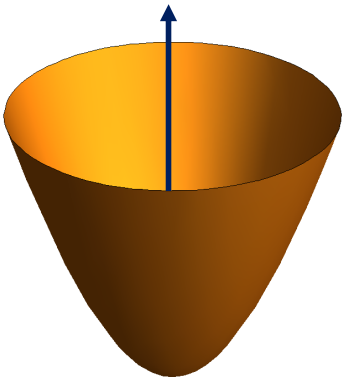
- نلاحظ أنّ $u_1 = 1.5$ إذن إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $\sqrt{2} < 1.5 < 2$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محقّقة. ولنلاحظ أنّ مشتق التابع المعرّف على $[\sqrt{2},+\infty[$ بالصيغة $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ موجب تماماً على المجال المفتوح $]\sqrt{2},+\infty[$، فهو متزايدٌ تماماً على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$، ومن ثَمّ نستنتج من المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$ أنّ $f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$، وهذه تُكافئ المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1}$، فالخاصة $E(n+1)$ محققة. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$. فهي إذن متقاربة من عدد ℓ أكبر أو يساوي $\sqrt{2}$ ويحقق المساواة $\ell = f(\ell)$. وهذان الشرطان يقتضيان أن يكون $\ell = \sqrt{2}$. أي إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومتقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

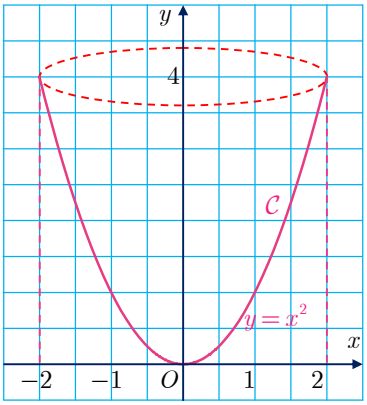
ملاحظة: تسمى هذه الطريقة في حساب العدد $\sqrt{2}$ الطريقة البابليّة، وقد كانت معروفة للبابليين.

نشاط 2 حجم مجسم قطع مكافئ دوراني

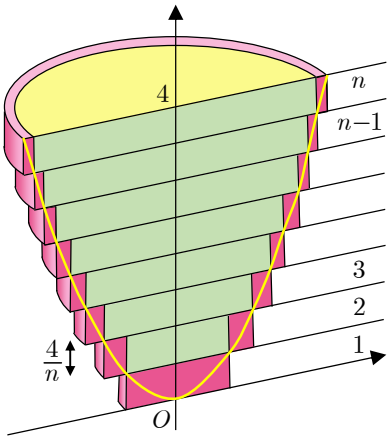
في الشكل نجد الخط البياني للتابع $f : x \mapsto x^2$، الذي يسمى قطعاً مكافئاً معادلته $y = x^2$، وهو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب كما تعلم. نهتم بالجزء $\mathcal{C}$ الموافق لقيم x من المجال $[-2,2]$.

عندما يدور $\mathcal{C}$ في الفراغ دورةً كاملة حول محور التراتيب، نحصل على مجسَّم نسميه **مجسم القطع المكافئ الدوراني**.





نهدف إلى حساب $\mathcal{V}$ حجم هذا المجسّم، في مثل هذه الحالات وفي غياب أية طرائق أخرى نسعى إلى حصر المقدار المجهول، وهو هنا $\mathcal{V}$ بمقادير معلومة ويمكننا حسابها، وفي الوقت نفسه تحصر المقدار المجهول بالدقة التي نريد. لنوضّح المقصود: نحن نعرف كيف نحسب حجم أسطوانة، لنرجع الأمر إلى حساب مجموع حجوم أسطوانات.



ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماماً من 2. ولنفترض أننا حاولنا ملء المجسّم بـ $n-1$ أسطوانة ارتفاع كلّ منها $\frac{4}{n}$، (بالطبع ستبقى بعض الفراغات)، وأننا استطعنا وضع المجسّم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $\frac{4}{n}$ أيضاً، كما في الشكل المجاور.

لنرمز بالرمز V_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الخارجية، وبالرمز v_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الداخلية.

① برهن أنّ

$$v_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1+2+\cdots+(n-1)\big) \quad \text{و} \quad V_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1+2+\cdots+(n-1)+n\big)$$

② برهن أنّ المتتاليتين $(V_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان، واستنتج قيمة $\mathcal{V}$ أي حجم المجسم المطلوب.

الحل

من النص نجد أنه تم وضع المجسم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $h=\frac{4}{n}$، تم تقسيم ارتفاع المجسم $[0,4]$ إلى n جزءاً متساوياً إلى n بواسطة النقاط

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = 4$$

حيث $x_1 = h$، $x_2 = 2h$، وهكذا $x_k = kh$ وأخيراً $x_n = nh = 4$.

هناك n اسطوانة خارجية:

- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.

- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل n يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_n}$ فحجمها $\pi x_n h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الخارجية يساوي

$$V_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + n)$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$. وكذلك

هناك $n-1$ اسطوانة داخلية:

- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل $n-1$ يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_{n-1}}$ فحجمها $\pi x_{n-1} h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الداخلية يساوي

$$v_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$.

② نعرف مجموع متتالية حسابية. إذن

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{و} \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ومنه $V_n = 8\pi\left(\frac{n+1}{n}\right)$ و $v_n = 8\pi\left(\frac{n-1}{n}\right)$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 8\pi$ و لدينا $v_n \le \mathcal{V} \le V_n$ أياً كانت n استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\mathcal{V} = 8\pi$.

تمرينات ومسائل

1 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة وفق $u_n = \frac{1}{n!}$. $(n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$ عندما $n \geq 1)$.

① احسب الحدود الستة الأولى منها.

② تيقّن أنّ $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ثمّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

② من الواضح أنّ جداء ضرب أعداد طبيعية جميعها أكبر من الواحد هو عدد أكبر من الواحد، إذن من الطبيعي أن يكون $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ في حالة $n \geq 2$. وهذا المتراجحة تبقى صحيحة أيضاً في حالة $n = 1$. إذن $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ مهما كانت $n \geq 1$، وهذا يقتضي أن يكون $0 < u_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة مثلاً.

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$.

① أعطِ قيماً تقريبية لحدودها الأولى من u_1 حتى u_{11}.

② أثبت أنّ جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31}، تحقق $u_n \geq 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

الهدف من هذا التمرين هو تنبيه الطالب إلى أنّ قيم حدود المتتالية الأولى يمكن أن تقودنا إلى استنتاجات خاطئة.

①

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	-0.9	0.64	-0.34	0.13	$-\frac{3.1}{10^2}$	$\frac{4.1}{10^3}$	$-\frac{2.2}{10^4}$	$\frac{2.6}{10^6}$	$-\frac{1.0}{10^9}$	$0.$	$\frac{1.0}{10^{11}}$

توحي لنا هذه القيم وكان المتتالية تسعى إلى الصفر، ولكن مهلاً.

② في حالة $n \geq 31$ يكون $\frac{n}{10} - 1 \geq \frac{31}{10} - 1 = 2.1 > 2$، ومن ثمّ $u_n > 2^n$. إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ لأنّ } \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$.

① احسب حدودها الستة الأولى.

② a. أثبت أنّ $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$، أياً يكن $n \geq 4$.

b. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
$u_n = \dfrac{n^3}{n!}$	1	4	$\dfrac{9}{2}$	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{25}{24}$	$\dfrac{3}{10}$

② a.

- لنضع $E(n)$ الخاصة : $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$.
- إنّ $E(4)$ محققة لأنّها تكافئ $4! \geq 4\times 3\times 2\times 1$ وهذه صحيحة.
- لنفترض صحّة $E(n)$ في حالة $n \geq 4$ عندئذ

$$\begin{aligned}(n+1)! = (n+1)\times n! &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\underbrace{(n-3)}_{\geq 1}\\ &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= (n+1)(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة المطلوبة في حالة $n \geq 4$.

② b. نستنتج إذن أنّه في حالة $n \geq 4$ يكون لدينا

$$0 \leq u_n = \frac{n^3}{n!} \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{1}{n-3}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-3} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-2} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1} = 1$ إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة نستنتج استناداً إلى مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

4 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad w_n = x_n - n,\quad t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1}$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = -1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \dfrac{0-1}{-1-1} = \dfrac{1}{2}$.

5 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad y_n = x_n\sqrt{n}, \quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = -\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$.

6 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1}, \quad y_n = \frac{x_n}{n}, \quad u_n = x_n - 3n$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$ و $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -3$.

7 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $0 < u_n \leq 1$، أياً يكن n.

② *a.* أثبت أنه إذا كان $n > 10^4$، كان $0 < u_n < 10^{-2}$.

b. أثبت أنه إذا كان $n > 10^8$، كان $0 < u_n < 10^{-4}$.

c. كيف نختار n كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$؟

③ ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

الحل

① تابع الجذر التربيعي متزايد إذن $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq \sqrt{0+1}+\sqrt{0} = 1$ ومن ثَمّ

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \in]0,1]$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

② *a.* إذا كان $n > 10^4$ كان $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^4} = 10^2$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{100}$$

② *b.* إذا كان $n > 10^8$ كان $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^8} = 10^4$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 10^{-4}$$

② *c.* يكفي أن نختار $n > 10^{16}$ كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$، لأنّه مهما صَغُر العدد ε الموجب تماماً يكفي أن نختار n_0 بحيث $n_0 > \varepsilon^2$ لتتحقق المتراجحة $u_n \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ في حالة $n > n_0$.

8 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $y_n = \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ العدد 1 راجحٌ على $(x_n)_{n\geq 1}$.

② أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

③ أيُّ النتيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

الحل

① و ② هذا واضح لأنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا $1 \leq n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1}$ ومن ثَمّ

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} < \frac{1}{n} \leq 1$$

أي $x_n < y_n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

③ إنّ الخاصة ② أكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيد في إثبات أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

9 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$.

① أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② أثبت أنَّ $x_n \geq \dfrac{1}{5}y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

الحل

① نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$y_n - x_n = \frac{10n^2+5n-2n^2-5n-3}{2n+1} = \frac{8n^2-3}{2n+1} \geq \frac{8-3}{2n+1} = \frac{5}{2n+1} > 0$$

إذن $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$x_n - \frac{1}{5}y_n = \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1} > \frac{4n+2}{2n+1} = 2 > 0$$

إذن $x_n \geq \dfrac{1}{5}y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$. أثبت أنَّها محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $n \geq 4$ لدينا $n^2-5n+6 = (n-2)(n-3) \geq (4-2)(4-3) = 2$ إذن،

$$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6} \leq \frac{1}{2}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 عندما تفرض المناقشة نفسها

ليكن a و b عددين يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

ادرس تقارب هذه المتتالية.

نحو الحلّ

في عبارة u_n، نجدُ فقط حدوداً من النمط q^n، وإذ لدينا معرفة بنهاية المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$، نفكر بالاستفادة من مبرهنات العمليات على النهايات. ولكنَّ a و b غير معروفين، فعلينا أن نتوقع التعرض لصيغة عدم تعيين.

1. تحقق من التعرض لصيغة عدم تعيين في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

❶ $a > 1$ و $b > 1$ ❷ $a > 1$ و $b < 1$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لماذا تفيد مبرهنات النهايات في تعيين نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

قد تفيد دراسة حالة خاصة في تعرف الحالة العامة. لنختر، مثلاً، في حالة $a = 3$ و $b = 2$، لدينا $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$. وعندما تكون قيم n كبيرة، تكون قيم 3^n و 2^n غاية في الكبر. لمقارنة مرتبتي كبرهما عندما تسعى n إلى $+\infty$. ندرس نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{2^n}{3^n}$.

1. لماذا لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ؟
2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$. إذن ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

نستشف من المثال السابق أهمية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ودورها في الوصول إلى النتيجة المرجوة.

1. أوجد نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ تبعاً لقيم a و b.
2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$ واستفد من حصيلة الأسئلة السابقة للوصول إلى الهدف المنشود.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. في حالة $a > 1$ و $b > 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = +\infty$، إذن يظهر في بسط المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ صيغة عدم تعيين من النمط $(+\infty) - (+\infty)$. وفي حالة $a > 1$ و $b < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$، إذن يظهر عند حساب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ عدم تعيين من النمط $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ ، إذن نستنتج من المساواة

$$u_n = \frac{1-b^n}{1-b^n}$$

أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

1. المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{2^n}{3^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3} < 1$، إذن

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}} = \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

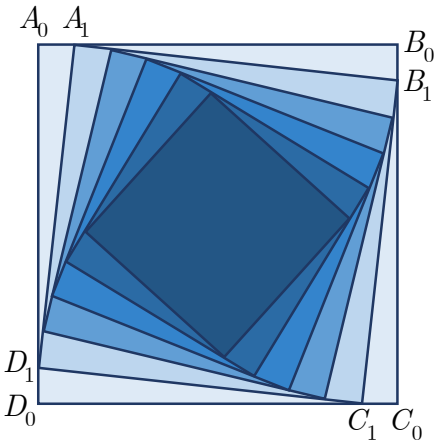
1. في حالة العامة المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{b^n}{a^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{b}{a} < 1$، لأنه لدينا فرضاً $a > b > 0$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{b^n}{a^n}}{1+\frac{b^n}{a^n}} = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

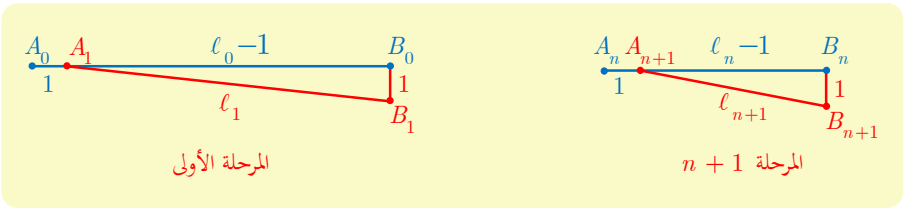
12 دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز إلى المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز $\mathcal{S}_0$، وإلى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع $\mathcal{S}_0$ (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز $\mathcal{S}_1$ حيث $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها $\mathcal{S}_1$ انطلاقاً من $\mathcal{S}_0$، نرسم $\mathcal{S}_2$ انطلاقاً من $\mathcal{S}_1$ ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منتهٍ من المرات. نرمز إلى طول ضلع المربع $\mathcal{S}_n$ بالرمز ℓ_n . نهدف إلى دراسة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ وتعيين نهايتها.

نحو الحلّ

لنتفحّص كيف يجري الإنشاء: يُرسم كلُّ مربع انطلاقاً من سابقه. فالمتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ هي إذن متتالية تدريجية.



علّل صحة المتراجحة $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$ أياً كان العدد الطبيعي n؟

لماذا يمكن استنتاج أنَّ المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟

أثبت أنَّ $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n-1)^2}$.

يبقى تحديد العدد ℓ، نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$. إحدى الطرق العامة لذلك هي الاستعانة بالتابع f المعرف بالعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$.

عيِّنْ التابع f المستعان به.

أثبت أنَّ ℓ حلٌّ للمعادلة $x = \sqrt{1+(x-1)^2}$.

استنتج من ذلك قيمة النهاية ℓ.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ طول الوتر أكبر من طول أيّ من الضلعين القائمتين وبوجه خاص يكون $A_{n+1}B_{n+1} > B_nB_{n+1}$ أي $\ell_{n+1} > 1$. ومن جهة أخرى طول أي ضلع أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الأخريين إذن $A_{n+1}B_{n+1} < A_{n+1}B_n + B_nB_{n+1}$ أي

$$\ell_{n+1} < \ell_n - 1 + 1 = \ell_n$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$، أياً كانت قيمة n.

المتتالية $(\ell_n)_n$ هي إذن متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فلا بُدّ أن تكون متقاربة. لنرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ.

وأخيراً، بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ نستنتج أنّ

$$\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n-1)^2}$$

إذا عرّفنا $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$ كانت المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجياً بالشرط $\ell_0 = 10$ والعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$. ولأنّ $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \ell_n$ استنتجنا أنّ ℓ هي حلٌّ للمعادلة $x = f(x)$. وحل هذه المعادلة بسيط ويعطي $\ell = 1$. إذن $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 1$.

13 مجموع عدد غير منته من الحدود

ليكن $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n. وليكن

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

نحو الحلّ

يبدو من غير الممكن الاستفادة من تطبيقات مباشرة لمبرهنات مألوفة. ولكن معرفة قيم بضعة حدود أولى من متتالية قد تتيح تصورَ خواصٍ لها من قبيل: جهة الاطراد، العناصر الراجحة عليها أو القاصرة عنها، أو إيجاد علاقة بين حدها ذي الدليل n والدليل ذاته n، أو بين هذا الحد والحد الذي يليه. احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 بصيغة كسور مختزلة.

تُظهر النتائج أنَّ دليل S_n، أي n، يظهر في عبارة S_n. وتحديداً يبدو أنَّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

تحقّق أنّك ستحصل على النتيجة ذاتها عند $n = 5$ وعند $n = 6$.

أثبت صحة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ بالبرهان بالتدريج.

ثمة حلٌّ آخر، يتمثل في تعيين عددين a و b يحقّقان $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. جد هذين العددين ثُمّ استنتج عبارة S_n.

ملاحظة: عند دراسة متتاليةٍ $(u_n)_{n\geq 0}$، من المهم، في أكثر الحالات، تعرُّف الحدود الأولى منها، ومعرفة ما إن كانت هذه الحدود تتيح رؤية علاقةٍ بين u_n و n.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

لنثبت بالتدريج أنّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$>

- نعرّف الخاصة $E(n)$ بأنها $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
- الخاصة $E(1)$ محققة وضوحاً إذ تنص على أنّ $S_1 = \dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{1+1}$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ ولنلاحظ أنّ S_{n+1} تنتج من S_n بإضافة u_{n+1} إليها إذن

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+1+1} \end{aligned}$$

إذن $E(n+1)$ محققة. فنكون بذلك قد أثبتنا صحة المساواة $S_n = \frac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$.

لنبحث عن عددين a و b بحيث تتحقق المساواة $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ أياً كانت n. نلاحظ أنّ هذا يُكافئ $(a+b)n + a = 1$ مهما كانت n. إذن $a = 1$ و $b = -1$. ومنه

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

إذن

$$\begin{array}{rrcrcl} & u_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2} \\ & u_2 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} \\ & u_3 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ & u_{n-1} & = & \frac{1}{n-1} & - & \frac{1}{n} \\ + & u_n & = & \frac{1}{n} & - & \frac{1}{n+1} \\ \hline & S_n & = & 1 & - & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

لاحظ وجود العديد من الاختصارات، إذ تُختصر جميع الحدود باستثناء 1 و $-\frac{1}{n+1}$. ونحصل مجدداً على الصيغة المطلوبة.

14 دراسة متتاليتين في آن معاً

ليكن a و b عددين يُحقّقان $0 < a < b$. ولنتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $x_0 = a$ و $y_0 = b$ وعند كل عدد طبيعي n:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ في آن معاً.

نحو الحلّ

لنتفحص الفرْضَ كي نرى إنْ كانت ثمة نتائج مباشرة تفيد في الحل. يمكن ملاحظة أنَّ مقام x_{n+1} يساوي بسط y_{n+1}، فنستنتج أنَّ:

$$x_{n+1}\times y_{n+1}=x_n\times y_n=ab \qquad (*)$$

ونلاحظ أيضاً أنَّ x_n و y_n موجبان. تحقق من المساواة $(*)$.

أثبت، بالتدريج، صحة الخاصة « $E(n)$: $x_n>0$ و $y_n>0$ » ، أيّاً يكن العدد الطبيعي n.

لتحقيق فهم أفضل، قد يكون مفيداً تعرُّف بضعَ حدود أولى من المتتالية. ولمّا كان a و b غير معلومين، نتأمّل مثلاً الحالة الخاصة $a=1$ و $b=3$.

احسب حدوداً أولى من كلٍّ من $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.

وضِّعْ هذه الحدود على محور الأعداد الحقيقية، ماذا تلاحظ ؟

ربما علينا إذن إثبات أنَّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. ولتحقيق ذلك علينا بدايةً دراسة اطِّراد هاتين المتتاليتين. علينا إذن دراسة إشارة كلٍّ من $x_{n+1}-x_n$ و $y_{n+1}-y_n$.

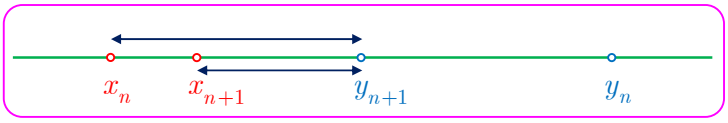
أثبت أنَّ:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(y_n-x_n)}{x_n+y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1}-y_n=\frac{x_n-y_n}{2}.$$

لاحظ أنّ إشارتي x_n و x_n+y_n معلومتان، فإشارتا $x_{n+1}-x_n$ و $y_{n+1}-y_n$ تتعلقان بإشارة y_n-x_n. يُتوقع استناداً إلى أنْ يكون y_n-x_n موجباً. احسب $y_{n+1}-x_{n+1}$ واستنتج أنَّ $y_{n+1}-x_{n+1}$ موجب.

استنتج اطِّراد كلٍّ من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.

يبقى علينا إثبات أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$. ولذلك سنسعى إلى تعريف متتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $0<y_n-x_n<t_n$، وبحيث يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$. يبدو إنجاز ذلك صعباً انطلاقاً من العبارة $y_{n+1}-x_{n+1}$ التي أثبتناها سابقاً فلنرسم مخططاً يساعدنا:



أثبت إذنْ أنَّ $y_{n+1}-x_{n+1}\leq y_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(y_n-x_n)$.

أثبت، مستخدماً البرهان بالتدريج، أنَّ $y_n-x_n\leq\frac{1}{2^n}(y_0-x_0)$.

أثبت أنَّ المتتاليتين تتقاربان إلى النهاية ℓ ذاتها.

استفدْ من العلاقة $(*)$ لإثبات أنَّ $\ell^2=ab$ ثمَّ $\ell=\sqrt{ab}$.

الحل

نتحقّق أولاً أنّ

$$x_{n+1}\cdot y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\cdot\frac{x_n+y_n}{2}=x_n\cdot y_n$$

إذن المتتالية $(x_ny_n)_{n\geq 0}$ ثابتة وحدها الأوّل يساوي ab فجميع حدودها تساوي ab.

لنبين بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$: «$x_n>0$ و $y_n>0$».

- إنّ $E(0)$ صحيحة فرضاً، لأنّ $x_0=a>0$ و $y_0=b>0$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ يكون كل من x_n+y_n و x_ny_n موجباً تماماً، وعندئذ يكون كذلك كل من $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ و $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$. فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

وهكذا يكون $x_n>0$ و $y_n>0$ أياً كانت n.

نختار $a=1$ و $b=3$. ونحسب

n	0	1	2	3	4
x_n	1	1.5	1.7143	1.73196	1.732050805
y_n	3	2.0	1.7500	1.73214	1.732050810

نلاحظ وكأنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. الأولى متزايدة والثانية متناقصة والمسافة بينهما تسعى إلى الصفر.

لنثبت إذن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

نلاحظ أولاً أنّ

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n=\frac{x_n-y_n}{2} \qquad (1)$$

وأنّ

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}-x_n=\frac{x_ny_n-x_n^2}{x_n+y_n}=\frac{x_n}{x_n+y_n}\left(y_n-x_n\right) \qquad (2)$$

في الحالتين إشارة الفرق y_n-x_n هي التي تعطي للفرقين السابقين إشارتهما، لنحسب إذن

$$\begin{aligned}y_{n+1}-x_{n+1}&=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}\\&=\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}\geq 0\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ المقادير (y_n-x_n) موجبة في حالة $n\geq 1$، وهذا محقّق أيضاً في حالة $n=0$ لأننا افترضنا بداية أنّ $b-a>0$. إذن مهما كانت n كان $y_n-x_n\geq 0$. وبالعودة إلى (1) و (2) نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة، والمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

لقد رأينا أنه مهما تكن n يكن

$$x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n$$

عندئذ من الواضح أنّ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \le y_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

- لنضع إذن $E(n)$ دلالة على الخاصة $y_n - x_n \le \dfrac{y_0 - x_0}{2^n}$.
- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأنّ $2^0 = 1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \le \frac{1}{2}(y_n - x_n) \le \frac{1}{2}\left(\frac{y_0 - x_0}{2^n}\right) = \frac{y_0 - x_0}{2^{n+1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. ونكون قد أثبتنا، مهما كان العدد الطبيعي n

$$0 \le y_n - x_n \le \frac{b-a}{2^n}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$ إذن نستنتج مما سبق أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\ge 0}$ و $(y_n)_{n\ge 0}$ متجاورتان. وهما من ثَمّ تتقاربان من النهاية ℓ نفسها.

ولكن رأينا أنّ $x_n y_n = ab$ مهما كانت قيمة n، فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية استنتجنا أنّ $\ell^2 = ab$، ولكن العدد ℓ موجب لأنّه يحقق $a = x_0 \le \ell \le y_0 = b$. إذن $\ell = \sqrt{ab}$.



قُدُماً إلى الأمام

15 ادرس تقارب كلٍّ من المتتاليتين:

① $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ② $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$.

الحل

نكتب

$$x_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

ونتذكّر أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ في حالة $|q| < 1$، لنستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

16 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = \frac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

② *a.* أثبت أنَّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

b. استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة؟

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $1 \leq u_n \leq 2$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = 1.5 \in [1,2]$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ $1 \leq u_n \leq 2$ ومن ثَمّ $0 \leq u_n - 1 \leq 1$ إذن

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

ولكن هذه هي تحديداً الخاصة $E(n+1)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. فنكون قد أثبتنا أنّ $1 \leq u_n \leq 2$ مهما كانت قيمة n.

ملاحظة: يمكن أيضاً ملاحظة أنّ التابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ متزايد على المجال $[1,+\infty[$ ومن ثَمّ إذا كان $1 \leq u_n \leq 2$ كان $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

② نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 1)(u_n - 2) \end{aligned}$$

واستناداً إلى نتيجة ① إشارة المقدار $u_{n+1} - u_n$ سالبة أياً كانت n فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. وهي محدودة من الأدنى بالعدد 1. إذن هي متقاربة من عدد ℓ.

ملاحظة: هنا تنتهي الإجابة عن السؤال المطروح. ولكن يمكننا في الحقيقة تعيين ℓ. إذ نعلم أنّ $1 \leq u_n \leq u_0$ مهما كانت n لأن المتتالية متناقصة. ومن ثَمّ $\ell \in [1,1.5]$، ونستنتج من المساواة $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$، إذن إمّا أن يكون $\ell = 1$ أوأن يكون $\ell = 2$ ولكن هذه الأخيرة مستحيلة لأنّ $\ell \in [1,1.5]$. إذن $\ell = 1$، والمتتالية تسعى إلى الواحد.

17 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

② استنتج أنَّ العدد 3 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

③ أثبت أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n \ge 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{1!} = 1 = \frac{1}{2^0}$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$، عند قيمة $n \ge 1$. ننتقل من $\frac{1}{n!}$ إلى $\frac{1}{(n+1)!}$ بقسمة الأوّل على $n+1$ إذن

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \overset{(1)}{\le} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \overset{(2)}{\le} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

حيث استعملنا صحة $E(n)$ في (1)، واستعملنا أنّ $n \ge 1$ في (2). إذن $E(n+1)$ صحيحة.

فنكون قد أثبتنا أنّ $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ مهما كانت قيمة $n \ge 1$.

② نكتب استناداً إلى ما أثبتناه

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\le 1 + \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \quad \text{☞} \quad q = \frac{1}{2} \\ &\le 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

③ يكفي أن نلاحظ أن المتتالية متزايدة، إذ رأينا سابقاً أنّها محدودة من الأعلى. ولكن ننتقل من u_n إلى u_{n+1} بإضافة الحد $\frac{1}{(n+1)!}$ إلى الأوّل. إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$، والمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة تماماً، فهي متقاربة لأنّها محدودة من الأعلى بالعدد 3.

18 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تحقّق الشرط التي: يوجد عدد حقيقي $\ell > 0$ يحقق عند كل n العلاقة

$$0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}(u_n - \ell).$$

أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة إلى ℓ. بافتراض أنّ $u_0 = 1$ عيّن عدداً طبيعيّاً N يحقق $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$ عند كل $n \ge N$.

الحل

- لتكن $E(n)$ الخاصة $0 \le u_n - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$.
- باختيار $n = 0$ في الفرض $0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}(u_n - \ell)$ نستنتج مباشرة أنّ $0 \le u_0 - \ell$، ومن ثمّ تكون المتراجحة $0 \le u_0 - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 (u_0 - \ell)$ محققة وضوحاً، إذن $E(0)$ محققة.
- نفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}(u_n - \ell) \le \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - \ell)$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. إذن مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$0 \le u_n - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$$

لمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأنّ $0 \le \frac{2}{3} < 1$ استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة ومستفيدين من مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - \ell) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

في حالة $u_0 = 1$ نستنتج من كون $u_0 - \ell \ge 0$ أنّ $\ell \le 1$، ولدينا فرضاً $0 < \ell$. إذن $u_0 - \ell \le 1$.

من ناحية أخرى

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = \left(\frac{4}{9}\right)^{10} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

(الفكرة هنا هي السعي لإظهار القوة العاشرة للعدد 2 وهي قريبة من 1000). إذن في حالة $n \ge 20$ يكون لدينا

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) \le \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \times 1 < 10^{-3}$$

ومن ثَمّ $0 \le u_n - \ell < 10^{-3}$ أي $u_n \in]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}[$. يمكن إذن أن نأخذ $N = 20$، أو أي عدد طبيعي أكبر منه.

19 المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنّ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثمّ استنتج أنّ $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة نحو الصفر.

② المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a. استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\ge 1}$.

الحل

① بملاحظة أنّ $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1$ نستنتج مباشرة أنّ

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ولأنّ المقام يسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

②

$$\begin{array}{rrrr} & u_0 & = & \sqrt{1} & -0 \\ & u_1 & = & \sqrt{2} & -\sqrt{1} \\ & u_2 & = & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ & u_3 & = & \sqrt{4} & -\sqrt{3} \\ & \vdots & & \vdots & \\ & u_{n-2} & = & \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-2} \\ + & u_{n-1} & = & \sqrt{n} & -\sqrt{n-1} \\ \hline & v_n & = & \sqrt{n} & \end{array}$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة $v_n=\sqrt{n}$ ، ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n . انطلاقاً من هذه الصيغة للحد v_n نرى مباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$.

20 ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟ تحقّق من إجابتك في كل حالة.

① إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n+v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

② إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

③ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\cdot v_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ ، كان $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

④ إذا كان لمتتالية عنصرٌ قاصر عنها، كان لها عنصرٌ راجح عليها.

الحل

① صحيح. لأنّ $v_n=(v_n+u_n)-u_n$ ، فإذا افترضنا أنّه كان لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell'\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell\in\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\ell'-\ell\in\mathbb{R}$ وهذا خُلفٌ.

② خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=\frac{1}{n+1}$ التي تحقق $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0=\ell\in\mathbb{R}$ ، وخذ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=(-1)^n$. ليس للمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ نهاية ومع ذلك $\lim\limits_{n\to\infty}(u_nv_n)=0$.

③ صح، لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((v_nu_n)\times\frac{1}{u_n}\right)=\ell\times 0=0$.

④ خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = n$. الصفر عنصر قاصر عن $(u_n)_{n\geq 0}$، وليس لهذه المتتالية عنصر راجح عليها.

21 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② *a.* أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

b. ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

① للانتقال من الحد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} نجمع إلى u_n العدد الموجب تماماً أي $\frac{1}{(n+1)^2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② *a.* لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $u_1 = \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ وهذه صحيح وضوحاً.
- لنفترض إذن صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{A} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

إذن $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. أي إنّ الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

② *b.* نستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

ملاحظة. يُبرهن أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ وترجع هذه النتيجة إلى أويلر.

22 ليكن عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبِّرْ عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

الحل

① $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$.

②

$$\begin{array}{rcll} u_0 & = & \frac{\frac{1}{2}}{-1} & -\frac{\frac{1}{2}}{1} \\ u_1 & = & \frac{\frac{1}{2}}{1} & -\frac{\frac{1}{2}}{3} \\ u_2 & = & \frac{\frac{1}{2}}{3} & -\frac{\frac{1}{2}}{5} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{n-1} & = & \frac{\frac{1}{2}}{2n-3} & -\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} \\ u_n & = & \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} & -\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \\ + & & & \\ \hline S_n & = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4n+2} \end{array}$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} = -\frac{2n+3}{4n+2}$$

ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n. انطلاقاً من هذه الصيغة للحد S_n نرى مباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\dfrac{1}{2}$.

23 لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أنَّ $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

③ أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$، أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

④ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية؟

الحل

① ننتقل من الحد u_n إلى الحد u_{n+1} الذي يليه بإضافة $\frac{1}{n+1}$ إلى u_n أي

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

هذا يبرهن على أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② u_{2n} يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى $2n$ و u_n يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى n إذن $u_{2n} - u_n$ يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من $n+1$ إلى n أي

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

هناك n حدّاً وأصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{2n}$. إذن

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

③ لتكن $E(n)$ الخاصة $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ في حالة $n \geq 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّها تنص على أنّ $u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ: $u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2\times 2^n} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ أياً كانت $n \geq 1$.

④ لو افترضنا أنّ لهذه المتتالية نهاية حقيقية ℓ لكانت محدودة بهذه النهاية لأنها متزايدة. ولكن النتيجة السابقة تقول إنّ هذه المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ غير محدودة. فليس للمتتالية نهاية حقيقية.

24 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

① أثبت أنّ $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+1}$ إذن

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$$

② اعتماداً على مبرهنة الإحاطة، نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ لأنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

25 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① أثبت أنّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ وأكبرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ إذن

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

② لمّا كان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

استنتجنا من مبرهنة الإحاطة أن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

26 بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ الآتيتين متجاورتان

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

الحل

نحسب

$$\begin{aligned}
y_n - x_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0 \\
x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n} \geq 0
\end{aligned}$$

فنستنتج أنّ $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة، و $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$، فالمتتاليتان متجاورتان.

27 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$.

① أثبت أنّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

③ استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة $u_n > 0$ في حالة $n \geq 0$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأن $u_0 = 3 > 0$ فرضاً.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ $u_n + 1 > 0$ ومن ثَمّ $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1} > 0$، فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$.

② نحسب

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2}{u_n + 1} - 1}{\dfrac{2}{u_n + 1} + 2} = \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{2(u_n + 1)} = -\frac{1}{2} t_n$$

فنستنتج أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{2}$ وحدها الأوّل $t_0 = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5}$. وبوجه خاص لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ لأنّ $|q| < 1$.

③ من المساواة $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ نستنتج أنّ $u_n = \dfrac{1 + 2t_n}{1 - t_n}$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

① أثبت أنّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية معرّفة بصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$، عيّن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$.

a. ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ومقارباته، وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلته $y = x$، بعد أن تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع $\mathcal{C}_f$.

b. بيّن أنّ ما سبق يفيد في إثبات أنّ f متزايد على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.

③ استفد من الرسم لتُنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة. أتجدها مطّردة؟ ما جهة اطرادها؟ أهي محدودة؟ ثُم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من ② *b*. لتبرهن بالتدريج أنّ : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كان العدد n.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① تدريج بسيط: مقلوب عدد موجب موجب، وكذلك يكون نصفه وكذلك يكون مجموعهما.

② التابع موضوع الدراسة هو $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

- هذا تابع مستمرٌ واشتقاقي على مجموعة تعريفه.
- وهو يحقق $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ فهو يقبل محور التراتيب مقارباً شاقولياً.
- وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ، ونلاحظ أنّ $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x}$، إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f كما إنّ $\mathcal{C}_f$ يقع فوق Δ ولا يتقاطع معه.
- نلاحظ أنّ

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{x+\sqrt{2}}{2x^2}\left(x-\sqrt{2}\right)$$

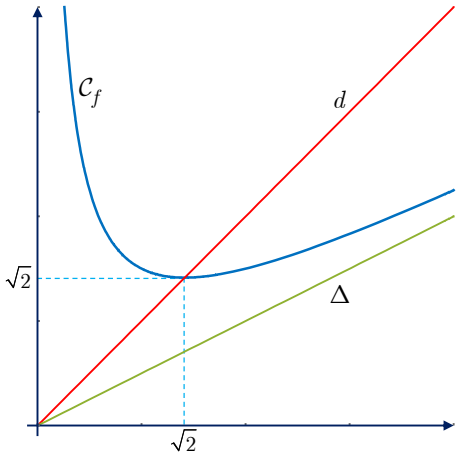
إذن إشارة $f'(x)$ تُماثل إشارة $x-\sqrt{2}$، ومنه جدول تغيرات f الآتي

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

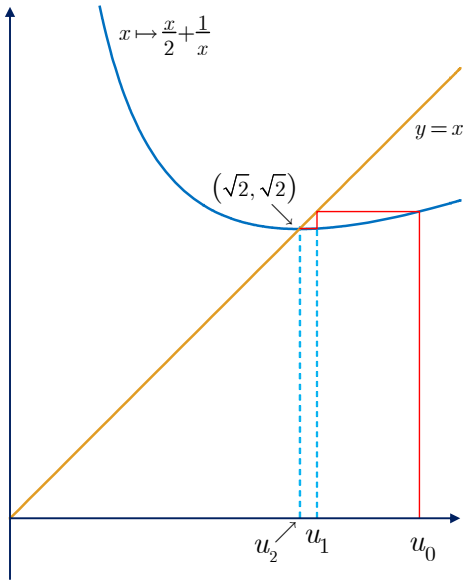
- وأخيراً نلاحظ أنّ

$$f(x) - x = \frac{2-x^2}{2x} = \frac{\sqrt{2}+x}{2x}(\sqrt{2}-x)$$

إذن يتقاطع $\mathcal{C}_f$ مع منصف الربع الأوّل d في النقطة $(\sqrt{2},\sqrt{2})$، ويقع $\mathcal{C}_f$ تحت d على $]0,\sqrt{2}[$ وفوقه على $]\sqrt{2},+\infty[$.



- نستنتج من الدراسة السابقة أنّ f متزايدٌ على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$، وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.



③ يوحي الرسم المجاور أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$.

- لنضع $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- لما كان $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ استنتجنا أنّ

$$\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) \leq u_1 = f(u_0) \leq u_0$$

إذن الخاصة $E(0)$ صحيحة.

- وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$، استنتجنا من كون f متزايداً أنّ

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

أي

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

④ نستنتج إذن أنّ $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كانت قيمة n. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من نهاية $\ell \geq \sqrt{2}$.

من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell = f(\ell)$، إذن ℓ هي فاصلة نقطة تقاطع d و $\mathcal{C}_f$ أي $\ell = \sqrt{2}$. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

29 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$.

① احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5.

② نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a. ادرس تغيرات f ونظّمْ جدولاً بها.

b. أثبت أنّه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$.

③ استنتج من السؤال السابق أنّ:

a. العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

b. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

④ استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أنّ $u_{n+1} = f(u_n)$.

الحل

① نلاحظ من الجدول وكأن المتتالية تتزايد متقاربة من 3.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0.5	0.9167	1.5532	2.3023	2.8377	2.9912

② دراسة f بسيطة، ونجد له جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		0		3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نستنتج أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,3]$، فإذا كان $0 \le x \le 3$ كان

$$0 = f(0) \le f(x) \le f(3) = 3$$

أي $f([0,3]) \subset [0,3]$.

③ لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $0 \le u_n \le 3$.

- الخاصة $E(0)$ محققة لأنّ $u_0 = 0.5$ فرضاً.
- إذا كانت $E(n)$ محقّقة أي $u_n \in [0,3]$ استنتجنا مما سبق أنّ $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,3]$، أي إنّ $E(n+1)$ محققة. فنكون قد أثبتنا أنّ $0 \le u_n \le 3$ مهما كانت n.

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$، والعدد 0 قاصر عنها.

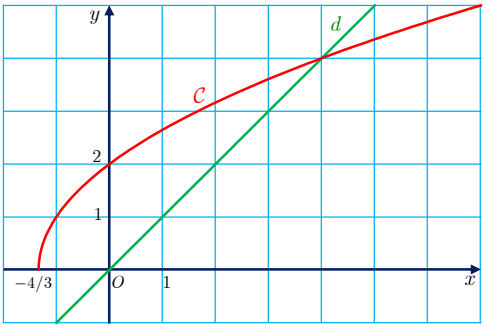
من جهة أخرى لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n - u_n^2 - 3u_n}{3} = \frac{u_n(3-u_n)}{3} \ge 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة.

④ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة. وإذا رمزنا ℓ إلى نهايتها استنتجنا من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ ومن استمرار التابع f أنّ $\ell = f(\ell)$. أي إما أن يكون $\ell = 0$ أو $\ell = 3$. ولكنّ الحالة الأولى مستحيلة، لأنّ كون المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة يجعل جميع حدودها أكبر من الحد الأوّل $u_0 = 0.5$، فلا بُد أن تكون النهاية كذلك أكبر من 0.5 وهي من ثم لا يمكن أن تساوي 0. نستنتج إذن أنّ $\ell = 3$. أي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$.

30 المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n. نجد في الشكل أدناه، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $\left]-\frac{4}{3},+\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$. والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.



① ما إحداثيتا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d ؟

② نفترض في هذا السؤال أنّ $u_0 = 6$.

a. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى.

b. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

c. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

③ *a.* أثبت أنّ هذه النتيجة صحيحة أياً يكن $u_0 > 4$.

b. هل هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$ ؟

الحل

① $(4,4)$.

② لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- من الفرض $u_0 = 6$ و $u_1 = f(6) = \sqrt{22} \in [4,6]$ لأنّ $16 \leq 22 \leq 36$. فالخاصة $E(0)$ صحيحة.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$. نستنتج من كون التابع f متزايداً أنّ $f(4) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ أو $4 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 4 . فهي متقاربة. ولكن لأنّ التابع f مستمرٌ نستنتج من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ أنّ $\ell = f(\ell)$ ، فالعدد ℓ هو فاصلة نقطة تقاطع $\mathcal{C}_f$ مع منصف الربع الأوّل d . إذن $\ell = 4$. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ *a.* المكان الوحيد في البرهان السابق الذي استعملنا فيه قيمة u_0 هو لإثبات صحة $E(0)$ أي أنّ $4 \leq u_1 \leq u_0$. ولكن من الشكل لدينا $f(x) \leq x$ على المجال $[4,+\infty[$ ، والتابع f متزايدٌ على هذا المجال، فإذا بدأنا من $u_0 > 4$ كان $4 = f(4) \leq f(u_0) \leq u_0$. أي كانت الخاصة $E(0)$ محققة. وعندئذ تسري بقية خطوات الحل السابق دون تعديل ونستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى في هذه الحالة وتحقق $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ b. في هذه الحالة لدينا $f(x) \geq x$ على المجال $[-\frac{4}{3}, 4]$، والتابع متزايدٌ أيضاً. نبرهن إذن أنّه في حالة $-\frac{4}{3} \leq u_0 < 4$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وتحقق مجدداً $\lim_{n\to\infty} u_n = 4$.