3

التوابع : الاشتقاق

1. تعاريف (تذكرة)
2. مشتقات بعض التوابع المألوفة (تذكرة)
3. تطبيقات الاشتقاق
4. اشتقاق تابع مركّب
5. المشتقات من مراتب عليا

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التذكرة بتعريف الاشتقاق، ومشتقات التوابع المألوفة.
- اشتقاق التوابع المركبة.
- تطبيقات الاشتقاق في دراسة التوابع وحلّ المعادلات.
- أمثلة على مشتقات من مراتب عليا.

تَدرَّبْ صفحة 84

① فيما يأتي C_f هو الخط البياني لتابع f. اكتب معادلةً لمماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4.

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ❷ $f(x)=x^2$

❸ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

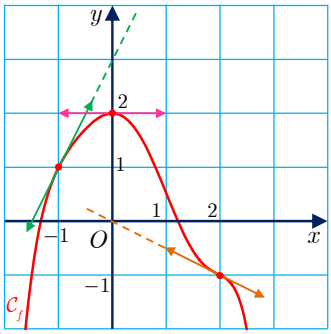
الحل

معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 4 هي $y=f(4)+f'(4)(x-4)$ ومنه

❶ $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}x$ ❷ $y=-16+8x$

❸ $y=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}x$ ❹ $y=\frac{9}{25}-\frac{x}{25}$

② في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابعٍ f. تأمّل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية :



❶ عيّن ما كلاً من $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x)=0$.

الحل

❶

a	-1	0	2
$f'(a)$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$f(a)$	1	2	-1

❷ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان، أحدهما في المجال $[-2,-1]$ والآخر في المجال $[1,2]$.

③ فيما يأتي، احسب التابع المشتق للتابع f مبيّناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.

▪1 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ▪2 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{4}$ ▪3 $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$

▪4 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-x$ ▪5 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ ▪6 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

▪7 $f(x)=x\cos x$ ▪8 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ▪9 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

▪10 $f(x)=\sin x\cos x$ ▪11 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$ ▪12 $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

الحل

▪1 على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=2x^2-x+1$.

▪2 على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

3 ▪ على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=4x^3-3\sqrt{x}$. وإذا كتب الطالب $[0,+\infty[$ بدلاً من $]0,+\infty[$ فهذا صحيح أيضاً ولا يطلب تعليله، فقد جرت دراسته في مثال سابق.

4 ▪ على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}-1$.

5 ▪ على $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$.

6 ▪ على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

7 ▪ على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\cos x-x\sin x$.

8 ▪ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

9 ▪ على أي مجال لا يحوي مضاعفاً فردياً للعدد $\frac{\pi}{2}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

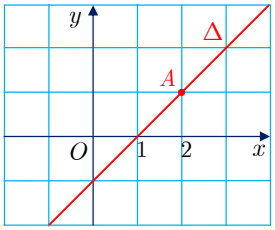
10 ▪ على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

11 ▪ على أي مجال لا يحوي عدداً من الصيغة $\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$ لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{\sin x-1}$.

12 ▪ على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 87

① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عيّن a و b علماً أنَّ المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماسٌ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A. تحقّق أنَّ التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.



الحل

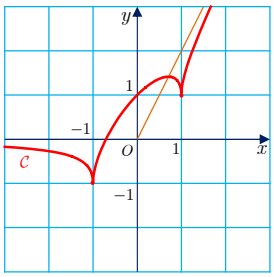
$\mathcal{C}$ يمرّ بالنقطة $A(2,1)$ إذن $f(2)=1$. وميل المماس في A هو $f'(2)$ وهو يساوي ميل المستقيم Δ أي $f'(2)=1$. ولكن $f'(x)=\dfrac{-ax^2+a-2bx}{(x^2+1)^2}$ إذن من $f(2)=1$ و $f'(2)=1$ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{5}(2a+b)=1$$
$$\frac{1}{25}(-3a-4b)=1$$

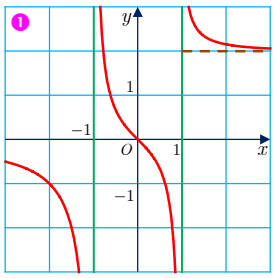
وبالحل المشترك نجد $a=9$ و $b=-13$. ونتحقّق بسهولة أنّ A تقع على الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع $x\mapsto\dfrac{9x-13}{x^2+1}$ وأنّ Δ الذي معادلته $y=x-1$ مماس للخط $\mathcal{C}$.

② في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

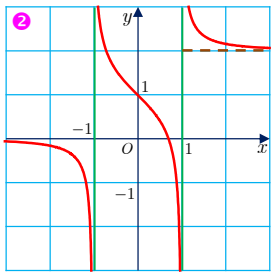
أيُّ الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثّل الخط البياني للتابع المشتق f' ؟



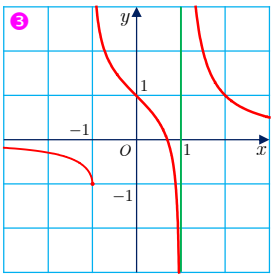
❶



❷



❸



الحل

في الشكل ❶ الخط البياني للتابع المرسوم يمر بالمبدأ. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(0,1)$ أفقياً وهذا خُلفٌ. إذن لا يمكن أن يمثل ❶ الخط البياني للتابع f'.

في الشكل ❸ الخط البياني للتابع المرسوم يقترب من -1 عندما تسعى x إلى $(-1)^-$. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون ميل المماس من اليسار للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(-1,-1)$ مساوياً -1 وهذا خُلفٌ أيضاً لأنّ $\mathcal{C}$ له مماس شاقولي في هذه النقطة. وكذلك نلاحظ أنّ المماس للخط $\mathcal{C}$ عندما تسعى x إلى اللانهاية يصبح موازياً للمقارب الذي ميله 2، وهذا يوحي بأنّ للخط البياني للمشتق f' مقارب أفقي معادلته $y=2$. إذن في جميع الأحوال لا يمكن أن يمثل ❸ الخط البياني للتابع f'.

إذن الشكل ❷ هو الخط البياني للتابع f'.

③ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$. عيّن العدد الحقيقيّ a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x=1$.

الحل

يجب أن يكون $f'(1)=0$ ومنه $a=-1$.

④ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$، حيث a و b عددان حقيقيّان. نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقّق الشرطان الآتيان:

- $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع.
- هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.

❶ لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$ ؟

❷ عيّن a و b، ثمَّ تحقق أنَّ التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

الحل

❶ • $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع، إذن $f'(-1)=0$.

• هذه القيمة الحدية محلياً معدومة، إذن $f(-1)=0$.

❷ ولكن $f'(x)=a-\dfrac{a+b+1}{(x-1)^2}$ إذن من $f(-1)=0$ و $f'(-1)=0$ نستنتج أنّ

$$\tfrac{1}{2}(-a+b-1)=0$$
$$\tfrac{1}{4}(3a-b-1)=0$$

وبالحل المشترك نجد $a=1$ و $b=2$. وفي هذه الحالة يكون $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ وهو ينعدم هو ومشتقه عند $x=-1$.

⑤ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+5$.

❶ ادرس تغيرات f ونظّمْ جدولاً بها.

❷ تحقق أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2. احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

❶ هنا $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. ولدينا $f'(x)=3(x^2-1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

❷ على المجال $[-1,+\infty[$ الحد الأدنى للتابع f يساوي 3، فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل على المجال $[-1,+\infty[$.

والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]-\infty,-1[$ ويحقّق $f(]-\infty,-1[)=\,]-\infty,7[$. ولأنّ $0<7$ استنتجنا أنّه يوجد حلّ وحلٌّ واحد فقط α للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$. فإذا استفدنا من النقطة السابقة استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

وعلاوة على ذلك، نرى أنّ $f(-2)=3$ و $f(-3)=-13$، إذن $\alpha\in[-3,-2]$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(-2.2)=0.952>0$ و $f(-2.3)=-0.267<0$ نرى أنّ $-2.3<\alpha<-2.2$.

تَدرَّبْ صفحة 94

① في التمرينات الآتية، احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

❶ $D=\mathbb{R}$, $f(x)=(2x^3-1)^5$

❷ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$

❸ $D=\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

❹ $D=\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

❺ $D=\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

❻ $D=\mathbb{R}\setminus[-1,2]$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

❼ $D=[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\sqrt{\cos x}$

❽ $D=[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$

❾ $D=[0,\frac{\pi}{6}[$, $f(x)=\tan(3x)$

❿ $D=[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\tan^2 x$

الحل

❶ $f'(x)=30x^2(1-2x^3)^4$

❷ $f'(x)=\dfrac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

❸ $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{6}(3x+\pi)\right)$

❹ $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

❺ $f'(x)=\dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$

❻ $f'(x)=-\dfrac{3}{2\sqrt{(x-2)^3(x+1)}}$

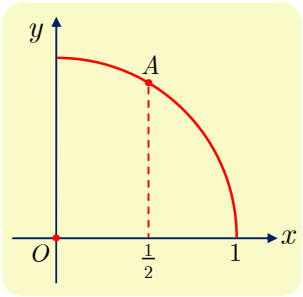
❼ $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

❽ $f'(x)=\dfrac{(\sin x)(3-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$

❾ $f'(x)=3(1+\tan^2(3x))$

❿ $f'(x)=2(\tan x+\tan^3 x)$

② في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $x^2+y^2=1$ هي معادلةٌ للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1. وعليه فإنّ ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق، هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.



❶ احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$.

❷ استنتج معادلةً للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\dfrac{1}{2}$.

❸ تحقّق أنّ المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

الحل

❶ $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

❷ $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ إذن معادلة المماس T في $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ هي $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$. وميله $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

❷ معادلة (OA) $y = \sqrt{3}x$ وميله $m' = \sqrt{3}$. ونرى أنّ $mm' = -1$ إذن $T \perp (OA)$.

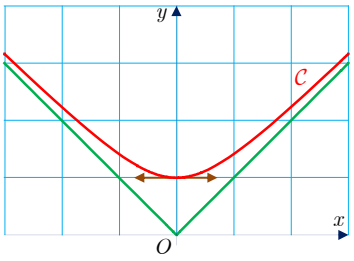
③ في الشكل المرافق نجد الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

❶ تحققْ أنَّ f تابعٌ زوجي.

❷ احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❸ علّل كون المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$؟

❹ ادرس تغيرات f. هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي تستخلصها من الخط البياني؟



الحل

❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ فالشرط الأوّل محقّق حكماً. وكذلك فإنّ

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

إذن f تابعٌ زوجي.

❷ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❸ لنضع $g(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ وأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت قيمة x. إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب للخط البياني C. والخط C يقع دوماً فوق Δ.

❹ لمّا كان $x \mapsto x^2$ متناقصاً تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}_+$، والتابع $x \mapsto \sqrt{x+1}$ متزايد تماماً استنتجنا أن تركيب هذين التابعين f متناقص تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$، ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ونلاحظ انسجام هذه النتائج مع الخط البياني المرسوم للتابع f.

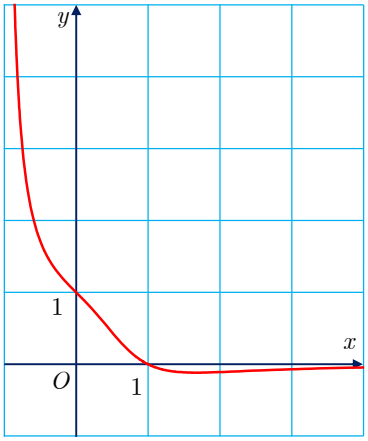
أنشطة

نشاط 1 دراسة تابع، التوابع المُساعدة

❶ دراسة تابع

في الحالة العامة، المقصود بدراسة تابع f هو تعيين مجموعة تعريفه D_f، وحساب نهاياته عند أطراف المجالات المكوِّنة لمجموعة تعريفه والبحث عن مقاربات خطه البياني C_f، ودراسة تغيراته، وأخيراً رسم خطه البياني. وأحياناً، نكتشف بسهولة أنَّ f زوجي، أو فردي، أو دوري، مما يفيد في جعل دراسة التابع تقتصر على مجموعة جزئية من D_f ثُمّ تُمدّد الدراسة إلى كامل D_f مستفيدين من طبيعة الخاصة التي يتمتع بها التابع.

❷ دراسة تابع كسري



لنتأمّل التابع الكسري f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$. لقد رسمنا باستعمال برنامج متخصص الخط البياني C للتابع f في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ستسمح الدراسة الآتية بتعرّف صفات f ومن ثمَّ توضيح كيفية الوصول إلى رسم خطه البياني C دون استعمال أي برنامج وخصوصاً سير الخط البياني على المجال $[0,1]$. في الحقيقة، لا يعطي الخط المرسوم باستعمال الحاسوب دائماً، جميع المعلومات المتعلقة بالتابع، لكنّه يزودنا بتصور مفيد جداً عن تلك المعلومات.

① احسب $f'(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$ وتحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.



في حالة تعذر تعيين إشارة $f'(x)$ جبرياً، ندرس تغيراتِ تابعٍ مساعدٍ g نستنتج منه الإشارة المطلوبة.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a. ادرس تغيرات g.

b. أثبت أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-1,+\infty[$، وأنَّ α ينتمي إلى المجال $[1.6,1.7]$.

c. استنتج إشارة $g(x)$.

③ بالاستفادة من النتائج السابقة، نظّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ اكتب معادلةً للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وادرس الوضع النسبي للخط C ومماسه Δ على المجال $[-1,1]$.

⑤ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق المستقيم d مماسه في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

⑥ ارسم Δ و d ثمَّ ارسم C.

الحل

① لدينا $f'(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$، إذن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.

② *a.* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $g(-1)=-6$. وكذلك فإنّ $g'(x)=6x(x-1)$ إذن للتابع g جدول التغيرات الآتي:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b. نستنتج من الجدول أنّ $g([-1,1])=]-6,-1]$ فالتابع g لا ينعدم على $[-1,1]$. أمّا على $[1,+\infty[$ فالتابع g تابعٌ مستمرٌ ومطردٌ تماماً ويحقّق $g([1,+\infty[)=[-2,+\infty[$. إذن للمعادلة $g(x)=0$ حلٌ واحد α في المجال $[1,+\infty[$. ولمّا كان g لا ينعدم على $[-1,1]$، استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$. وعلاوة على ذلك، انطلاقاً من الصيغة $g(x)=(2x-3)x^2-1$، نحسب:

$$g(1.6)=0.2\times 2.56-1=0.512-1<0$$
$$g(1.7)=0.4\times 2.89-1=1.156-1>0$$

إذن $1.6<\alpha<1.7$.

c. نستنتج من الدراسة السابقة أنّ $g<0$ على $]-1,\alpha[$ و $g>0$ على $]\alpha,+\infty[$.

③ لمّا كان $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ استنتجنا أنّ المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني C. وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. واستناداً إلى دراسة إشارة المشتق التي أنجزناها سابقاً يمكن أن نكتب جدول التغيرات الآتي للتابع f :

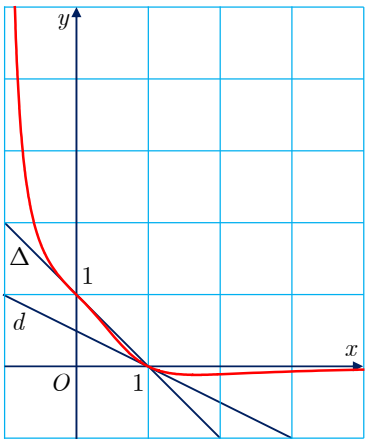
x	-1			α		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

حيث $f(\alpha)\approx -0.12$ استناداً إلى القيمة التقريبية التي حسبناها للعدد α.

④ لما كان $f(0)=1$ و $f'(0)=-1$ استنتجنا أنّ $y=1-x$ هي معادلة للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وفوق ذلك نرى أنّ

$$f(x)-(1-x)=-\frac{x^3(1-x)}{x^3+1}=\frac{x^2}{x^3+1}\cdot x(x-1)$$

إذن تتفق إشارة $f(x)-(1-x)$ مع إشارة $x(x-1)$ على $]-1,1[$، إذن يقع C فوق Δ على $]-1,0[$، وتحته على $]0,1[$، وهو يتقاطع معه مجدداً في النقطة $(1,0)$.



⑤ لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-\frac{1}{2}$ إذن $y=\frac{1}{2}(1-x)$ هي معادلة للمماس d للخط البياني C في النقطة التي فاصلتُها 1.

وعلاوة على ذلك نرى أنّ

$$f(x)-\frac{1}{2}(1-x)=\frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)}$$

إذن إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(1-x)$ موجبة على $]-1,+\infty[$، والخط C يقع فوق d على $]-1,+\infty[$.

نشاط 2 مماس شاقولي

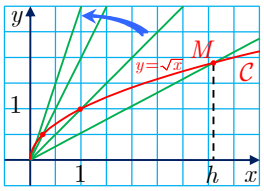
❶ الحالة العامة

لنتأمّل تابعاً f مستمراً عند نقطةٍ a تنتمي إلى أحد مجالات D_f. إذا كان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

قَبِلَ الخط البياني C_f للتابع f، في معلمٍ متجانس مماساً شاقولياً في النقطة $A(a,f(a))$. هندسياً، يفسَّرُ الشرطان « f مستمر عند a و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ » بأنَّ ميل القاطع للخط C_f في النقطة $A(a,f(a))$ يسعى إلى $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي إنَّ القاطع يسعى إلى المستقيم الذي معادلته $x=a$.

❷ حالة التابع $f:x\mapsto\sqrt{x}$



تعلم أنَّ f مستمرٌ عند الصفر، لكنه غير اشتقاقي عند الصفر. أثبت أنَّ محور التراتيب مماس لخطه البياني في مبدأ المعلم.

❸ دراسة التابع $f:x\mapsto x\sqrt{x(2-x)}$

① a. تحقّق أنَّ f معرف على المجال $[0,2]$.

b. أثبت أنَّ f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال.

② ما نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

③ ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$؟

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع f، في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، بالرمز $\mathcal{C}$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. عيّن مماسَي $\mathcal{C}$ في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

c. ارسم مماسي $\mathcal{C}$ في A و B ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❷ هذا صحيح لأنّ $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=+\infty$.

❸ ① *a.* f معرف على المجال $[0,2]$ لأنّ $x(2-x)$ موجب على هذا المجال.

b. على $]0,2[$ التابع $u: x\mapsto x(2-x)$ تابع اشتقاقي وموجب تماماً إذن $x\mapsto\sqrt{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على $]0,2[$، وكذلك يكون $x\mapsto x\sqrt{u(x)}$، وفي حالة x من $]0,2[$:

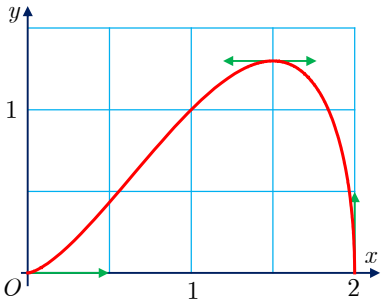
$$f'(x)=\sqrt{u(x)}+x\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

② في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{x(2-x)}$، إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. فالتابع f اشتقاقي عند 0 و $f'(0)=0$

③ في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$، إذن $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$.
فالتابع f ليس اشتقاقياً عند 2 ولكن يقبل خطّه البياني مماساً شاقولياً عند 2.

④ *a.* جدول تغيرات f هو

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



④ *b.* مماس $\mathcal{C}$ في $A(0,0)$ هو محور الفواصل، ومماس $\mathcal{C}$ في $B(0,2)$ هو المستقيم الذي معادلته $x=2$.

④ *c.* الرسم مبينٌ في الشكل المجاور.

نشاط 3 دراسة تابع مثلثاتي

❶ كيف ندرس تابعاً مثلثاتيّاً ؟

تذكَّرْ

- التابعان $\sin$ و $\cos$ دوريان ويساوي الدورُ الأصغر لكل منهما 2π. لأنَّ:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \quad \text{و} \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

- التابع $\tan$ دوري ويساوي دوره الأصغر π. لأنَّ:

$$\tan(x+\pi)=\tan x \quad \text{حيث} \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z}$$

- التابعان $x\mapsto\sin(ax+b)$ و $x\mapsto\cos(ax+b)$ والدورُ الأصغر لكل منهما هو $\dfrac{2\pi}{|a|}$.

غالباً، ما تفيد الصفات الخاصة بالتوابع المثلثاتيّة في استنتاج مجال دراسة تابعٍ f معرّف على D_f:

- إذا كان T دوراً للتابع f، كان T موجباً تماماً، وأياً كان العدد الحقيقي x،

إذا كان $x\in D_f$ كان $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$

في هذه الحالة يمكن أن ندرس التابع على مجالٍ طوله T.

- إذا كان f زوجياً أو فردياً، يكفي أن ندرسه على $D_f\cap\left[0,\frac{T}{2}\right]$، ثُمّ:
  - إذا كان f زوجياً، أعطى التناظر المحوري بالنسبة إلى محور التراتيب الخط البياني على $D_f\cap\left[-\frac{T}{2},0\right]$.
  - وإذا كان f فردياً، أعطى التناظر بالنسبة إلى المبدأ O الخط البياني على $D_f\cap\left[-\frac{T}{2},0\right]$.
- بعدئذ، يسمح الانسحابان اللذان شعاعاهما $T\vec{i}$ و $-T\vec{i}$ بالحصول على الخط البياني على مجالات أخرى.

وخلاف ذلك، تجري دراسة التوابع المثلثاتيّة بمثل دراسة التوابع الأخرى.

❷ دراسة التابع $x\mapsto 2\sin x+\sin 2x$

لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

① تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

② أثبت أنّه، في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

③ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

مساعدة: ستحتاج إلى حل المتراجحة $\cos x>\frac{1}{2}$. لهذا، يمكن استعمال الدائرة المثلثاتيّة، أو الخط البياني للتابع $x\mapsto\cos x$ على المجال $[0,\pi]$. وكذا الأمر عند دراسة إشارة $\cos x+1$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

① التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، ونلاحظ أنّه مهما كانت x كان

$$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi) = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$$

فالتابع f تابع دوري ويقبل العدد 2π دوراً. فتكفي مثلاً دراسته على المجال $[-\pi, \pi]$. ولدينا أيضاً

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$$

وذلك مهما كانت قيمة x، إذن f تابعٌ فردي. فتكفي دراسته على المجال $[0, \pi]$.

② من ناحية أخرى لدينا

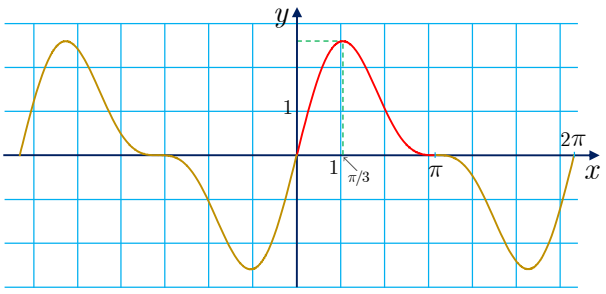
$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$$
$$= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

إنّ $1 + \cos x \geq 0$ دوماً إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2\cos x - 1)$، وعلى المجال $[0, \pi]$، للمعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ حل وحيد هو $x = \frac{\pi}{3}$.

③ إذن للتابع جدول التغيرات الآتي على المجال $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

④ الرسم.



نشاط 4 نهايات ومشتقات

❶ المبدأ

ليكن g تابعاً ما، وليكن f تابعاً يحقق عند كل x من مجال مفتوح يحوي a و $x \neq a$ العلاقة

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

ثُمّ لنفترض إضافةً إلى ذلك أنَّ التابع g اشتقاقي عند a، عندئذ يقبلُ f نهايةً عند a ويكون

$$\lim_{x \to a} f(x) = g'(a).$$

إذن، لإزالة حالة عدم التعيين من الصيغة « $\frac{0}{0}$ » لتابعٍ f عند نقطةٍ a، يمكن أن نحاول كتابة f بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ حيث g اشتقاقي عند a. عندئذ يكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g'(a)$.

❷ تطبيقات

① ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. يقودنا البحث عن نهاية f عند الصفر إلى إحدى صيغ عدم التعيين. ضعْ $g(x)=\sqrt{x+4}$ لكي تتمكن من حساب نهاية f عند الصفر. ثُمّ احسب هذه النهاية.

② ننوي دراسة نهاية التابع $f: x\mapsto \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$.

a. تحقّق أنّ الحساب المباشر يقود إلى صيغة عدم تعيين.

b. لاحظ أنّ $\cos\frac{\pi}{2}=0$، واستنتج أنّ نهاية f عند $\frac{\pi}{2}$ تساوي العدد المشتق للتابع $x\mapsto\cos x$ عند $\frac{\pi}{2}$، ماذا تساوي هذه النهاية؟

③ ادرس، في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، نهاية التابع f في النقطة التي يشار إليها.

a. $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$.

b. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$.

الحل

❷ ① بوضع $g(x)=\sqrt{x+4}$ نلاحظ أنّ $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x}$. ولكنّ التابع g اشتقاقي على $]-4,+\infty[$ ومشتقه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$، وبوجه خاص $g'(0)=\frac{1}{4}$ إذن نستنتج من كون

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\frac{1}{4}$$

أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{4}$.

❷ ② هنا أيضاً $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

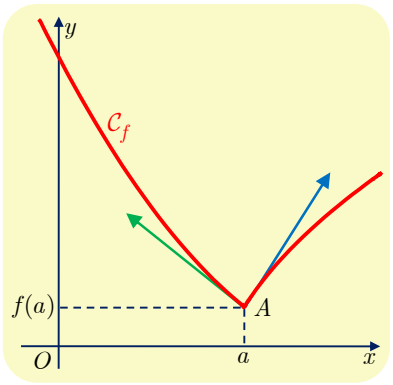
❷ ③ هنا نجد بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\tan'(\frac{\pi}{4})=1+\tan^2(\frac{\pi}{4})=2$

وبوضع $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ نجد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

نشاط 5 الاشتقاق من اليمين ومن اليسار

❶ حالة عامة: تعريف نصف المماس

عندما يكون التابع f مستمراً على مجالٍ يحوي a، ويقبلُ التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايةً ℓ من اليمين عند a، نقول عندئذ إنَّ التابع f **اشتقاقيٌ من اليمين** عند a، ونسمي ℓ العدد المشتق من اليمين للتابع f في a، ونرمز إليه بالرمز $f'(a^+)$. نعرِّف بأسلوب مماثل **الاشتقاق من اليسار** عند a ونرمز إلى العدد المشتق من اليسار بالرمز $f'(a^-)$ في حال وجوده.



في حال وجود $f'(a^+)$ و $f'(a^-)$ نقول إنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f يقبل في النقطة $A(a,f(a))$ نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار. ويكون $f'(a^+)$ ميلَ نصف المماس من اليمين، و $f'(a^-)$ ميلَ نصف المماس من اليسار.

❷ دراسة مثال

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|+1}$.

① ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

② ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$.

③ ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f على المجال $[-2,2]$.

الحل

❷ ① في حالة $x>0$ لدينا $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+2}{x+1}-2\right)=\dfrac{-1}{x+1}$، إذن

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

ومعادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني هي $y=2-x$.

❷ ② في حالة $x<0$ لدينا $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+2}{-x+1}-2\right)=\dfrac{3}{1-x}$، إذن

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$$

ومعادلة نصف المماس من اليسار للخط البياني هي $y=2+3x$.

❷ ③ بملاحظة أنّ

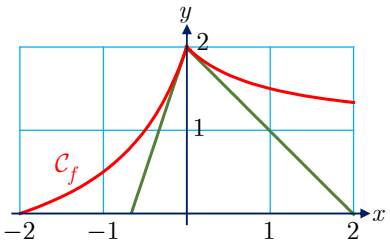
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{1+x} & : \quad x\geq 0\\ \frac{2+x}{1-x} & : \quad x\leq 0\end{cases}$$

نستنتج أنّ

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{(1+x)^2} & : \quad x>0\\ \frac{3}{(1-x)^2} & : \quad x<0\end{cases}$$

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[-2,2]$:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	$3 \parallel -1$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$



نشاط 6 تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

❶ تمهيد

لنتأمّل تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ولنفترض أنّ

$f'(x)\leq g'(x)$ أياً يكن x من D .

بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ أثبت أنّ:

$$(*) \qquad f(x)-f(0)\leq g(x)-g(0)$$

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① $a.$ أثبت أنّ $\sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

$b.$ باختيار $f(x)=-\cos x$ ، و $g(x)=\frac{x^2}{2}$ برهن مستفيداً من التمهيد أنّه في حالة $x\in\mathbb{R}$

$$(\triangle) \qquad 1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1$$

② $a.$ أثبت أنّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

$b.$ وأنّ $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، أياً يكن $x\in\mathbb{R}$.

$c.$ وأخيراً بين أنّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

❸ تطبيقات

① استنتج مما سبق أنّ العدد $1-\frac{x^2}{2}$ تقريبٌ للعدد $\cos x$ بخطأ لا يتجاوز $\frac{x^4}{24}$. ما الخطأ الذي نرتكبه عندما نكتب $\cos(0.1)=0.995$ ؟

② احسب نهاية $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

③ احسب نهاية $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل

❶ نلاحظ أنّ $h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$ على $D = [0, +\infty[$، فالتابع h متناقص على D. ولكن $h(0) = 0$، إذن $h(x) \leq h(0) = 0$ أياً كانت x من D. وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ نستنتج من كون $\cos x \leq 1$ أنّ $\sin x \leq x$ في حالة $x \geq 0$.

① b. بتطبيق التمهيد على $f(x) = -\cos x$ و $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ نستنتج من كون $\sin x \leq x$ على D أنّ $1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2}$ في حالة $x \geq 0$. ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة (Δ) على $\mathbb{R}$.

② a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$ نستنتج من كون $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ على D أنّ $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$ في حالة $x \geq 0$، ولقد أثبتنا في ① a. أنّ $\sin x \leq x$ في هذه الحالة أيضاً وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

② b. نستنتج من ② a. أنّ $-\sin x \leq -x + \dfrac{x^3}{6}$ على D. إذن بتطبيق التمهيد على $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ نستنتج أنّ $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ على D. أمّا المتراجحة الأخرى فتنتج من (Δ). وبسبب كون طرفي المتراجحة زوجيان، نستنتج أنها تبقى صحيحة على $\mathbb{R}$.

② c. أصبح الأمر سهلاً. نطبّق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ مستفيدين من نتيجة ② b.

❸ تطبيقات

① هذا لأنّ $0 \leq \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) \leq \dfrac{x^4}{24}$.

ففي حالة $x = 0.1$ يكون لدينا $0 \leq \cos(0.1) - 0.995 \leq 4.167 \times 10^{-6}$. في حين تعطي الآلة الحاسبة: $\cos(0.1) - 0.995 \approx 4.165 \times 10^{-6}$.

② بالاستفادة من ② b لدينا في حالة $x \neq 0$ المتراجحة $-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}$،

وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

③ في حالة $x > 0$ نستنتج من ② c. أنّ

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x > 0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x < 0$ أيضاً.

إذن مهما تكن $x \neq 0$ فلدينا $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

تمرينات ومسائل

1 اكتب معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

① $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$, $a = 0$ ② $f(x) = x\sqrt{x}$, $a = 1$

③ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $a = 0$ ④ $f(x) = \frac{x}{x - 1}$, $a = 0$

⑤ $f(x) = \cos x$, $a = 0$ ⑥ $f(x) = x \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$

الحل

① $y = -3\,x$ ② $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $y = x$ ④ $y = -x$

⑤ $y = 1$ ⑥ $y = \frac{\pi^2 - 4(\pi - 4)x}{16\sqrt{2}}$

2 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$.

① اكتب معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f(x)=x-4+\frac{5}{x+1}$ ومن ثَمّ $f'(x)=1-\frac{5}{(1+x)^2}$.

① لما كان $f(1)=-\frac{1}{2}$ و $f'(1)=-\frac{1}{4}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=-\frac{1}{4}(x+1)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$ أي ميله -4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $1-\frac{5}{(1+x)^2}=-4$ أو $x^2+2x=0$. لهذه المعادلة حلان. إذن الجواب في هذه الحالة هو: نعم.

③ بالمثل، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$ أي ميله $\frac{3}{2}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=\frac{3}{2}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $(1+x)^2+10=0$ وهي مستحيلة الحل لأنّ مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $m<1$.

3 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$.

① أعطِ معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f'(x)=\frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$.

① لمّا كان $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f'(1)=\frac{1}{9}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=\frac{1}{9}(x+2)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$ أي ميله $-\frac{1}{4}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-\frac{1}{4}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $x^4+12=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

③ يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=4x$ أي ميله 4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $4x^4+17x^2+14=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل (مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها). إذن الجواب في هذه الحالة أيضاً هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $-\frac{1}{16}\leq m\leq\frac{1}{2}$.

4 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+1$.

① ادرس تغيرات f ونظّمْ جدولاً بها.

② تحقّق أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثةَ جذور. واحصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.


هنا نجد رمزاً جديداً:  يعني هذا الرمز أنّ استعمال الآلة الحاسبة أو الحاسوب **مسموح**، ولكن **ليس ضرورياً**.

الحل

① جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات f مطّرد تماماً على كل من المجالات $]-\infty,-1[$ و $]-1,1[$ و $]1,+\infty[$، وعلاوة على ذلك

$$f(]-\infty,-1[)=]-\infty,3[\quad \text{و} \quad f(]-1,1[)=]-1,3[\quad \text{و} \quad f(]1,+\infty[)=]-1,+\infty[$$

- لأنّ 0 ينتمي إلى $]-\infty,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_1 في المجال $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_2 في المجال $]-1,1[$ للمعادلة $f(x)=0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ فيوجد حلّ وحيد x_3 في المجال $]1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$.

هذا يبرهن أنّ للمعادلة $f(x)$ ثلاثة جذور حقيقية هي $\{x_1,x_2,x_3\}$.

علينا إذن حصر هذه الجذور بمجالات طولها 10^{-1}.

نلاحظ أنّ $f(-2)=-1$ و $f(-1)=3$ إذن $-2<x_1<-1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، حيث بدأنا من العدد -2 الذي قيمة التابع f عنده أقرب إلى الصفر ورحنا نحسب قيمة f عند الأعداد -1.9 و -1.8، ولكن سرعان ما نجد f يغير إشارته، فنستنتج أنّ $-1.9<x_1<-1.8$.

x	$f(x)$
-2	-1
-1.9	-0.159
-1.8	0.568

وبالمثل، نلاحظ أنّ $f(0)=1$ و $f(1)=-1$ إذن $0<x_2<1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، لنجد أنّ $0.3<x_2<0.4$.

x	$f(x)$
0	1
0.1	0.701
0.2	0.408
0.3	0.127
0.4	-0.136

وأخيراً، نلاحظ أنّ $f(2)=3$ و $f(1)=-1$ إذن $1<x_3<2$. ثمّ نحسب كما في السابق، لنجد أنّ $1.5<x_3<1.6$.

ملاحظة. يمكن لمن يرغب أن يتحقّق أنّ $x_1=2\cos\frac{8\pi}{9}$ و $x_2=2\cos\frac{4\pi}{9}$ وأخيراً $x_3=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

5 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

① ادرس تغيرات f ونظّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3\}$ تحقّق

$-0.9 < x_1 < -0.8$ و $0.4 < x_2 < 0.5$ و $1.4 < x_3 < 1.5$.

6 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

① ادرس تغيرات f ونظّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ أربعة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ تحقّق

$-2.8 < x_1 < -2.7$ و $-0.6 < x_2 < -0.5$ و $0.7 < x_3 < 0.8$ و $1.2 < x_4 < 1.3$.

7 في كل حالة من الحالات الآتية، احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها. وحدِّدْ في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

① $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

② $f(x) = x\sqrt{x}$

③ $f(x) = \frac{1}{x-1}$

④ $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

⑤ $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

⑥ $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

الحل

① $D = \mathbb{R}$,
$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
$f'(x) = 3x^2 - x + 1$
$f''(x) = 6x - 1$
$f'''(x) = 6$

② $D =]0, +\infty[$,
$f(x) = x\sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$
$f'''(x) = -\frac{3}{8x\sqrt{x}}$

③ $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$,
$f(x) = \frac{1}{x-1}$
$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$
$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$

④ $D = \mathbb{R}$,
$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$
$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(2x)$
$f''(x) = -4\cos(2x) - 4\sin(2x)$
$f'''(x) = -8\cos(2x) + 8\sin(2x)$

⑤ $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = \frac{1}{\cos x}$
$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$f''(x) = \frac{2}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$
$f'''(x) = \frac{6\sin x}{\cos^4 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

⑥ $D =]0, \pi[$
$f(x) = \frac{1}{\sin x}$
$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$f''(x) = \frac{2}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x}$
$f'''(x) = -\frac{6\cos x}{\sin^4 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

ملاحظة. لم يطلب السؤال تحديد أكبر مجموعة تكون هذه الحسابات صحيحة عليها، بل طلب من الطالب أن يحدد هو مجموعةً تكون حساباته عليها صحيحة. فمثلاً في ② يمكن أن يضيف الطالب أنّ f اشتقاقي أيضاً عند الصفر، ولكن f' ليس كذلك، ولكن هذا غير مطلوب في صيغة السؤال. وكذلك يمكنه في ⑤ أن يختار D لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل $\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$، أو أن يختار D في ⑥ لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل πk حيث $k \in \mathbb{Z}$. الهدف من التمرين هو التدرّب على إجراء العمليات على الاشتقاق، وليس على تعيين مجموعات التعريف.

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

① تحقّق أنّ $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج أنّ $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هذا تحقّق مباشر إذ إنّ $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ومن ثَمّ $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$.

② باشتقاق طرفي المساواة السابقة $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + \sqrt{1+x^2} f''(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} f(x)$

وهذا يعطي المساواة المطلوبة بضرب الطرفين بالمقدار $\sqrt{1+x^2}$.

9 في كلٍّ من الحالات الآتية، ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

① $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ② $f(x)=x|x|$ ③ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

الحل

① هنا f معرّف على $[0,+\infty[$، وفي حالة $x>0$ لدينا $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sqrt{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$، والتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

② هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وعندما $x\neq 0$ لدينا $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=|x|$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

③ هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وفي حالة $x\neq 0$ لدينا

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & : \ x>0\\[2mm] \dfrac{x-1}{x^2+1} & : \ x<0\end{cases}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}t(x)=1$ ، و $\lim\limits_{x\to 0^-}t(x)=-1$. فالتابع f ليس اشتقاقياً عند الصفر. ولكن له مشتق من اليمين ومشتق من اليسار عند الصفر. ولدينا $f'(0^+)=1$ و $f'(0^-)=-1$.

10 التابع f معرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq 0$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟ علّل إجابتك.

② احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل

① عندما $x\neq 0$ لدينا $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\cos x$ إذن $|t(x)|\leq|x|$ لأنّ $|\cos x|\leq 1$. ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

② في حالة $x\neq 0$ يمكن تطبيق قواعد الاشتقاق:

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\&=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 محلّ هندسي

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0 \leq m \leq 3$، و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n \geq 0$، النقطتان M و N تحققان $MN = 3$. وأخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تُحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

نحو الحلّ

هذه مسألةٌ في دراسة المحل الهندسي تحليلياً. سنسعى بدايةً إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة J بدلالة m. يمكن التفكير بمبرهنة تالس، لكنْ يبدو الأمر أيسرَ باستعمال الأشعة.

① أثبت أنَّ $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.

② أثبت أنَّ $n = \sqrt{9-m^2}$. واستنتج (x,y) إحداثيّتي للنقطة J بدلالة m.

للحصول على معادلة للمحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J، نبحث عن علاقةٍ بين الإحداثيّتين x و y للنقطة J مستقلةٍ عن الوسيط m. أثبت أنَّ $y = 2\sqrt{1-x^2}$، عندها تنتمي J إلى الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

يبقى أن نجيب عن السؤال: أترسم J الخط البياني $\mathcal{C}$ كاملاً عندما تتحول m على المجال $[0,3]$؟

① لماذا تنتمي x إلى المجال $[0,1]$؟

② ما هو إذن المحل الهندسي للنقطة J؟

③ ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند 1. وأخيراً ارسم $\mathcal{L}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

① من تعريف J نرى أنّ $\overrightarrow{MJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ ومنه $3\overrightarrow{OJ} - 3\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM}$ وهي تكافئ المساواة $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.

② من $MN = 3$ لدينا $m^2 + n^2 = 9$ ولأنّ $n \geq 0$ يمكننا حساب $n = \sqrt{9-m^2}$. ونستنتج من المساواى الشعاعية السابقة السابقة أنّ $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$، إذن $x = \frac{m}{3}$ و $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$.

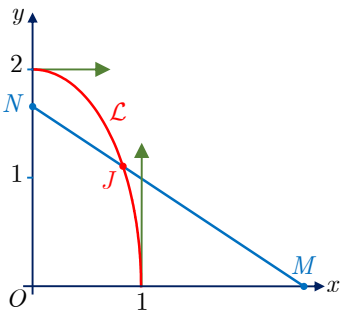
تُكتب العلاقتان السابقتان بالشكل $x = \frac{m}{3}$ و $y = 2\sqrt{1-\left(\frac{m}{3}\right)^2}$ إذن $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

① استناداً إلى الفرْض تتحوّل m في المجال $[0,3]$، إذن تتحولّ $x=\frac{m}{3}$ في المجال $[0,1]$.

② رأينا أنّ المحل الهندسي $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $f:x\mapsto 2\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$، وبالعكس إذا كانت (x,y) نقطة من $\mathcal{C}$، كانت $m=3x\in[0,3]$، وانطبقت النقطة الموافقة J من $\mathcal{L}$ على (x,y). إذن جميع نقاط $\mathcal{C}$ هي نقاط من المحل الهندسي $\mathcal{L}$.

③ التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,1]$، وله جدول التغيرات الآتي

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0



وفي حالة $0<x<1$ لدينا $t(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ إذن $\lim\limits_{x\to 1}t(x)=-\infty$، والخط البياني للتابع f يقبل مماساً شاقولياً عند 1.

12 توابع ومجموعات نقطية

في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:

$$(*)\qquad x^2-2x+4y^2=3$$

نهدف إلى إثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثمَّ رسمُ $\mathcal{E}$.

نحو الحلّ

بحثاً عن طريق. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ من النقاط $M(x,y)$ تساوي $C_1\cup C_2$. يجب إذن إثبات أنّ القول « تنتمي M إلى $\mathcal{E}$ » يكافئ « تنتمي M إلى $C_1\cup C_2$ » أو « تنتمي M إلى C_1 أو إلى C_2 »، حيث C_1 و C_2 هما خطّان بيانيان لتابعين f_1 و f_2 فتكون معادلتاهما

$$y=f_1(x)\quad\text{و}\quad y=f_2(x)$$

يتعلق الأمر إذن بإيجاد تابعين f_1 و f_2 تكون معهما المقولتان الآتيتان متكافئتين:

- « إحداثيّتا M تحققان $x^2-2x+4y^2=3$ »
- « إحداثيّتا M تحققان $y=f_1(x)$ أو $y=f_2(x)$ ».

① تحقق أنّ العلاقة $(*)$ تكافئ $y^2=\dfrac{-x^2+2x+3}{4}$.

② تعلم أنَّ « $y^2=a$ » تكافئ « $y=\sqrt{a}$ أو $y=-\sqrt{a}$ » فقط عندما يكون $a\geq 0$. ما قيم x التي تحقّق $-x^2+2x+3\geq 0$؟

تبقى دراسة تغيرات f_1 و f_2، ثمّ رسم خطيهما البيانيين C_1 و C_2. نرمز بالرمز f_1 إلى التابع المعرف على $[-1,3]$ وفق $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{2}$.

① أثبت أنّ f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$. احسب $f_1'(x)$ على $]-1,3[$.

② ادرس قابلية f_1 للاشتقاق عند -1 وعند 3. ثُمّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f_1. وارسمْ C_1.

يمكن، لكي نرسم C_2، أن ندرس تغيرات f_2. ولكن هنا، لدينا: $f_2(x)=-f_1(x)$، أياً تكن x من $[-1,3]$. وفق أيّ تحويلٍ هندسي يكون C_2 صورة C_1؟ ارسم C_2.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

العلاقة $(*)$ تُكافئ $y^2=\frac{1}{4}\left(3+2x-x^2\right)$ وضوحاً. ولأنّ $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$، فقيم x التي تجعل $3+2x-x^2\geq 0$ هي $[-1,3]$. وعليه تنتمي $M(x,y)$ إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى C_1 أو إلى C_2 حيث C_1 و C_2 هما بالترتيب الخطان البيانيان للتابعين:

$f_1:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$ و $f_2:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_2(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$

التابع $u:x\mapsto 3+2x-x^2$ تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$، وهو موجب تماماً على $]-1,3[$، إذن f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$، ولدينا

$$f_1'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

قابلية الاشتقاق عند -1. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون $1+x>0$ ومنه $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$ إذن:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$$

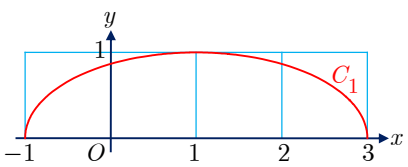
وعليه $\lim\limits_{x\to -1}t(x)=+\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند -1 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(-1,0)$.

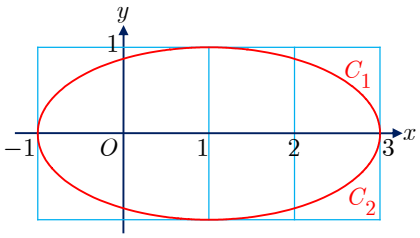
قابلية الاشتقاق عند 3. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون لدينا بمثل ما سبق:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to 3}t(x)=-\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند 3 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(3,0)$. يمكننا إذن وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f_1.

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0





الخط البياني C_2 هو صورة C_1 وفق التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه، نجد الرسم البياني للمجموعة $\mathcal{E}$ التي نسميها قطعاً ناقصاً.

13 متراجحة هويغنز *Huygens*

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x + \tan x \geq 3x$ أياً يكن x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

نحو الحلّ

يبدو حل هذه المتراجحة مثلثاتياً شبه مستحيل. لذا نلجأ إلى دراسة التابع f المعرف على I وفق $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. تحقّق أنّ إشارة $f'(x)$ على المجال I تماثل إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

يمكنك أن تضع $\cos x = t$، ثم تدرس إشارة كثير الحدود $P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ مع t من $]0,1]$. ادرس تغيرات P على المجال $]0,1]$، وتحقق أنّ P موجب على هذا المجال.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة x من I لدينا $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$، ولأنّ المقام موجب في هذه العبارة، تتفق إشارة $f'(x)$ مع إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

بوضع $t = \cos x \in]0,1]$ نلاحظ أنّ $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = P(t)$ حيث

$$P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

ولدينا $P'(t) = 6t(t-1)$ إذن $P'(t) \leq 0$ على المجال $]0,1]$ فالتابع $t \mapsto P(t)$ متناقصٌ تماماً على المجال $]0,1]$، ولكن $P(1) = 0$، نستنتج أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$، ومن ثَمّ نستنتج أنّ $f'(x) \geq 0$ على المجال I، فالتابع f تابعٌ متزايد على I. ولكن $f(0) = 0$، إذن $f(x) \geq 0$ في حالة x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$. وهذا يثبت صحة المتراجحة المطلوبة.

ملاحظة. كان بالامكان الاستفادة من المساواة $P(t) = (t-1)^2(2t+1)$ في إثبات أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$.

قُدُماً إلى الأمام

14

التابع f معرفٌ على المجال $[0,1[$ وفق $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟

② احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

الحل

① في حالة $0 < x < 1$ لدينا $\sqrt{x^2} = x$ ومنه $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$، ومنه نرى أنّ $\lim\limits_{x \to 0} t(x) = 0$. إذن f اشتقاقي عند $x = 0$. و $f'(0) = 0$.

② على $]0,1[$ يمكننا تطبيق قواعد الاشتقاق إذ نلاحظ أنّ $f(x) = \sqrt{u(x)}$ حيث $u(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$، ولكن $u'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$ إذن :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3-2x}{2(1-x)} \cdot \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

15 نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

① احسب التابع المشتق للتابع f.

② استنتج مشتق كلٍّ من التوابع الآتية:

❶ $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ ❷ $h : x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

❸ $\ell : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ❹ $k : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$

الحل

① بملاحظة أنّ $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$ نجد مباشرة أنّ $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

② ❶ هنا $g(x) = f(\sqrt{x})$ إذن $g'(x) = \left(1 - \dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)^2}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

❷ هنا $h(x) = f(x^2)$ إذن $h'(x) = \left(1 - \dfrac{2}{(x^2-1)^2}\right) \cdot 2x$.

❸ هنا $\ell(x) = \sqrt{f(x)}$ إذن $\ell'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$.

❹ هنا $k(x) = f(\sin x)$ إذن $k'(x) = \left(1 - \dfrac{2}{(\sin x - 1)^2}\right) \cdot \cos x$.

ملاحظة. هنا لا يطلب تحديد المجموعات التي تكون التوابع اشتقاقية عليها.

16 فيما يأتي، أوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق.

① $f(x) = \cos^2 3x$ ② $f(x) = \sin^3 2x$

③ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ④ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 2x}$

الحل

① على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\cos^2 3x$ من ثَمّ $f'(x)=-6\cos 3x\cdot\sin 3x$.

② على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\sin^3 2x$ ومن ثَمّ $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x$.

③ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{3}k : k\in\mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ومن ثَمّ $f'(x)=-6\dfrac{\cos 3x}{\sin^3 3x}$.

④ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}(1+2k) : k\in\mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$ ومن ثَمّ $f'(x)=-6\dfrac{\sin 2x}{\cos^4 2x}$.

ملاحظة. يمكن أن يذكر الطالب أي مجال مناسب في ③ أو ④.

17 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عيِّن التابع المشتق f' للتابع f.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$. أثبت أنَّ g اشتقاقي على I ثمَّ احسب $g'(x)$ على I.

③ نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$. أثبت أنَّ h اشتقاقي على J ثمَّ احسب $h'(x)$ على J.

الحل

① $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② هنا $x\mapsto\sin x$ اشتقاقي على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x\mapsto g(x)=f(\sin x)$ اشتقاقي على I و $g'(x)=f'(\sin x)\cos x=\dfrac{-5\cos x}{(\sin x-1)^2}$.

③ هنا $x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $J=]1,+\infty[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x\mapsto h(x)=f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J و $h'(x)=f'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-5}{2(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$.

18 a و b عددان حقيقيان، و $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل $\mathcal{C}$ مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

الحل

الشرطان المعطيان يُكافئان $f(1)=2$ و $f'(1)=0$. أي

$$a+b=1 \quad \text{و} \quad 3a+2b=0$$

ومنه $(a,b)=(-2,3)$.

19 a و b عددان حقيقيان، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عيّن a و b لتكون $y=4x+3$ معادلةً للمماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

الحل

الشرط المعطى يُكافئ $f(0)=3$ و $f'(0)=4$. أي $b=3$ و $a=4$.

ملاحظة. عند حساب $f'(0)$ نجرى الحساب مباشرة عند الصفر، فإذا كان البسط g والمقام h كتبنا

$$f'(0)=\frac{g'(0)h(0)-h'(0)g(0)}{\big(h(0)\big)^2}=\frac{a\times 1-0\times b}{1^2}=a.$$

20 a عددٌ حقيقيٌّ، و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=ax^3+3x^2+3x$. هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدّية محلية عند $x=1$؟

الحل

شرط لازم. إذا بلغ التابع قيمة حدية عند $x=1$ وجب أن يكون $f'(1)=0$ وهذا يقتضي أن يكون $a=-3$.

الشرط كاف. لنفترض أنّ $a=-3$ عندئذ

$$f'(x)=-9x^2+6x+3=-3(3x^2-2x-1)=-3(x-1)(3x+1)$$

إذن للتابع f' جدول الاطراد الآتي على المجال $[0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

فالتابع f يبلغ قيمة كبرى محلية عند $x=1$. الجواب إذن : نعم.

21 f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. إضافةً إلى ذلك نفترض أنّ:

- $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
- f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$.

ارسمْ خطاً بيانياً $\mathcal{C}$ يمكن أن يمثل التابع f.

الحل

هناك الكثير من التوابع المرشحة لتؤدي دور f'، نبحث عن تابع متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$، ويأخذ القيمة 1 عند الصفر. أي تابع من الشكل $x\mapsto ax^2+1$ (حيث a عدد كيفي موجب) يفي بالغرض. إذن نريد تابعاً f يكون لمشتقه هذه الصيغة وينعدم عند الصفر. أي تابع $f:x\mapsto bx^3+x$ (حيث b عدد كيفي موجب) يحقق الشرطين المطلوبين. مثلاً $x\mapsto x$.

22 في كلٍّ من الحالات الآتية، احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

① $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ $\quad a=0$ $\qquad$ ② $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ $\quad a=0$

③ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\quad a=1$ $\qquad$ ④ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ $\quad a=1$

الحل

① $x\mapsto\cos x$ اشتقاقي ومشتقه $x\mapsto-\sin x$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=\cos'(0)=-\sin 0=0$.

② $x\mapsto\tan x$ اشتقاقي على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ومشتقه $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^2 x}$ إذن

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\tan'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}=1.$$

③ $g:x\mapsto\sqrt{x+1}$ اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ومشتقه $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ إذن

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

④ $g:x\mapsto\sqrt{x^2+x+2}$ اشتقاقي ومشتقه $x\mapsto\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$ إذن

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{3}{4}.$$

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثمَّ احسب قيمةً تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^5-x^3+x-5=0$ $\qquad$ ② $x(2x+1)^2=5$

③ $x^4-\dfrac{1}{2}x+1=0$ $\qquad$ ④ $\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3+1=0$

الحل

① التابع $x\mapsto f(x)=x^5-x^3+x-5$، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً عليها. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، أي $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد في $\mathbb{R}$. وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ $f(1)=-4$ و $f(2)=21$. إذن $1<\alpha<2$.

ثمّ نحسب بعض القيم المتتالية لنجد أنّ $1.4<\alpha<1.5$

x	$f(x)$
1	-4
1.1	-3.62049
1.2	-3.03968
1.3	-2.18407
1.4	-0.96576
1.5	0.71875

② للتابع $x \mapsto f(x) = x(2x+1)^2 - 5$ جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\frac{1}{6}, +\infty[$، وعلاوة على ذلك $f(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{16} < 0$ و $f(\frac{4}{5}) = \frac{51}{125} > 0$. إذن $0.75 < \alpha < 0.8$.

③ التابع $x \mapsto f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حلولٌ في $\mathbb{R}$.

④ التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$f(x)$
-2	-2.73333
-1.9	-1.66586
-1.8	-0.83517
-1.7	-0.20205
-1.6	0.26818

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty, -1[$، وعلاوة على ذلك $f(-2) = -\frac{41}{15}$. إذن $-2 < \alpha < -1$. ثُمّ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور نجد أنّ $-1.7 < \alpha < -1.6$.

24 ليكن f التابع المعرّف على المجال $[1, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$.

① ادرس تغيرات التابع f. أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّاً وحيداً يطلب حساب قيمة تقريبية لهذا الحل على ألّا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

② احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

الحل

① التابع f، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $I = [1, +\infty[$، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً. وهو يحقّق $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$، $f(1) = -3$ أي $f(I) = [-3, +\infty[$. فللمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في I. ونلاحظ أنّ $f(3) = \sqrt{2} - 1 > 0$ و $f(2) = -1$ إذن $2 < \alpha < 3$. وأخيراً نجد $2.6 < \alpha < 2.7$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور.

x	$f(x)$
3	0.41421
2.9	0.27840
2.8	0.14164
2.7	0.00384
2.6	-0.13589

② تُكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة المُكافئة $\sqrt{x-1}=4-x$ فهي إذن تُكافئ

$$4-x\geq 0 \quad \text{و} \quad x-1=x^2-8x+16$$

إذن $x\leq 4$ و $x^2-9x+17=0$ ومنه نستنتج أن $\alpha=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}\approx 2.697\ 224$.

25 ليكن f التابع المعرّف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

① ادرس تغيرات f على I.

② استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$.

③ احسب قيمة تقريبية لهذا الجذر على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

الحل

① التابع f، تابعٌ مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على I، لأنّ مشتقه سالبٌ تماماً، أو لأنه يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ أي $f(I)=\mathbb{R}$.

② فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌ وحيد α في I. وكذلك فإنّ $f(2)=1-\sqrt{2}<0$ إذن $f(]1,2[)=]1-\sqrt{2},+\infty[$، ومنه $1<\alpha<2$.

x	$f(x)$
2	-0.41421
1.9	-0.26729
1.8	-0.09164
1.7	0.12473

③ وأخيراً نجد $1.7<\alpha<1.8$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور.

26 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

② نريد تعيين المماسات للخط البياني $\mathcal{C}$ المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ.)

a. ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلةً للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A\left(a,f(a)\right)$.

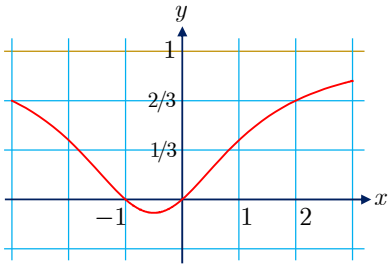
b. فكّرْ في أنَّ T_a يكون أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثُمّ جد معادلة لكل مماس للخط البياني $\mathcal{C}$ يمر بالمبدأ.

الحل

① نلاحظ أوّلاً أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، فالمستقيم الأفقي الذي معادلته $y=1$ مستقيم مُقاربٌ في جوار كلٍّ من $+\infty$ و $-\infty$.

ولأنّ $f(x)=1-\dfrac{3}{x^2+x+3}$ سَهُلَ حساب $f'(x)$ لنجد $f'(x)=\dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$، فإشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2x+1)$.

ومنه جدول التغيرات والرسم البياني المطلوبين:



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1

② $a.$ معادلة T_a هي $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ أي

$$y = \frac{a^2+a}{a^2+a+3} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

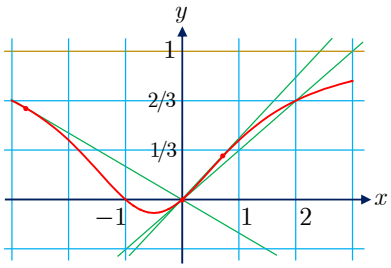
أو

$$y = \frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

② $b.$ يمر T_a بالمبدأ إذا حققت النقطة $(0,0)$ معادلته وهذا يكافئ $a^2(a^2+2a-2)=0$. إذن إمّا أن يكون $a=0$ وعندها T_0 هو المماس في المبدأ وهو من ثَمّ غير مطلوب. أو أن يكون $a=-1-\sqrt{3}$ أو $a=-1+\sqrt{3}$. ولكن في حالة $a \in \left\{-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right\}$ لدينا $a^2 = 2-2a$. إذن

$$(a^2+a+3)^2 = (5-a)^2 = 27-12a$$

وعليه إذا كان $a=-1+s\sqrt{3}$ حيث $s \in \{-1,1\}$ كان



$$\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2} = \frac{2a+1}{9-4a} = \frac{-1+s2\sqrt{3}}{13-s4\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(-1+s2\sqrt{3})(13+s4\sqrt{3})}{169-48} = \frac{1+s2\sqrt{3}}{11}$$

ومعادلتا المماسين المطلوبين هما

$$T_{-1+\sqrt{3}} : y = \tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}x \quad \text{و} \quad T_{-1-\sqrt{3}} : y = \tfrac{1-2\sqrt{3}}{11}x$$

ملاحظة. في الشكل، الواحدة على محور الفواصل لاتساوي الواحدة على محور التراتيب.

27 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

① أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط $\mathcal{C}$ ؟

④ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

⑤ أثبت أنَّ النقطة $I(-1;-3)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

⑥ ارسم مقاربات $\mathcal{C}$ ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② نضع $g(x)=f(x)-(2x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x)=\dfrac{8}{x+1}$. إذن

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

والمستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مستقيم مقاربٌ للخط $\mathcal{C}$، في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

③ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$. نستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

④ من الصيغة $f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x+1}$ نستنتج أنّ

$$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

مما يفيدنا في إنشاء جدول تغيرات f كما يأتي:

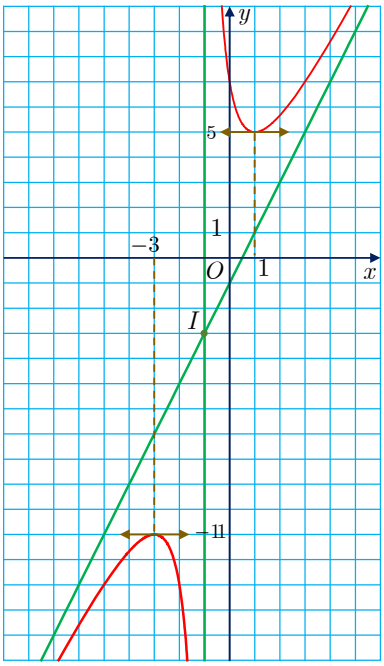
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

⑤ نلاحظ أوّلاً أن المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ متناظرة بالنسبة إلى -1 فإذا كان $-1+h$ في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ كان أيضاً $-1-h$ عنصراً من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. وعلاوة على ذلك:

$$\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=-3$$

إذن $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f.

⑥ الرسم مبين في الشكل المجاور.



28 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$$

① أوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثمَّ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ثمَّ ارسم كلّاً من d و $\mathcal{C}$.

④ حدِّدْ هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. وكذلك نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.
فنستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f . وبالاستفادة من الصيغة $f(x)=x-1+\dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$ أو بحساب مباشر نجد

$$f'(x)=1+\frac{-7x+13}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)^3}$$

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

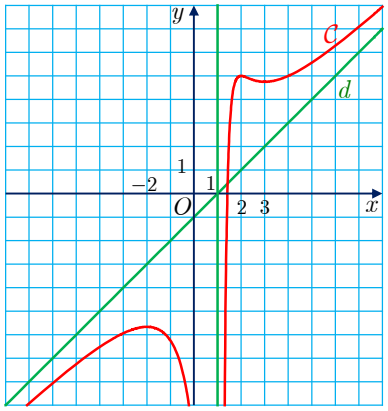
x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{17}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$+\infty$

② نضع $g(x)=f(x)-(x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x)=\dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$. إذن

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .

③ ونستنتج مما سبق أنّ C و d يتقاطعان في النقطة $(\frac{10}{7},\frac{3}{7})$، ويكون C تحت d على المجال $]-\infty,\frac{10}{7}[$ ، وفوق d على المجال $]\frac{10}{7},+\infty[$. يبين الرسم المجاور الخط C ومقارباته.



④ تكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي:

$$x^3-3x^2+10x-11-m(x^2-2x+1)=0 \ .$$

ولأنّ $x=1$ ليس حلاً لهذه المعادلة يمكننا قسمة طرفي المعادلة على $(x-1)^2$ لنجدها تكافئ $f(x)=m$. وهذه يسهل حلها هندسياً من الرسم البياني لنجد:

- في حالة $m\in\{-\frac{17}{3},\frac{19}{4},5\}$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.
- في حالة $-\frac{17}{3}<m<\frac{19}{4}$ أو $m>5$ للمعادلة $f(x)=m$ حلٌ واحدٌ.
- في حالة $\frac{19}{4}<m<5$ أو $m<-\frac{17}{3}$ للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول.

29 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

① احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

② تحقّق أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C.

③ نظّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ ارسم مقاربات C ثمّ ارسم C.

الحل

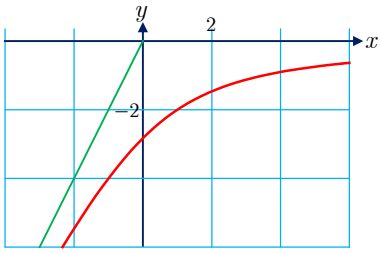
① من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ولمّا كان $f(x)=\dfrac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. ومن جهة

② لنضع $g(x)=f(x)-2x=\dfrac{-8}{\sqrt{x^2+8}-x}$. نلاحظ إذن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g(x)=0$، فالمستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$. ولمّا كان g سالباً، أيّاً كانت قيمة x، استنتجنا أنّ الخط البياني C للتابع f يقع دوماً تحت d.

③ لدينا $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ وهو مقدار موجبٌ دوماً لأنّ $\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ إذن

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0



④ الرسم موضح جانباً.

30 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$.

① قارن كلّاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$. استنتج أنّه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أنّ $f'(x)=6\cos x\times\sin x\left(1-2\cos x\right)$، عند كل عدد حقيقي x.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

① نلاحظ أنّ

$$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$
$$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$
$$f(x+2\pi) = 3\sin^2(2\pi + x) + 4\cos^3(2\pi + x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

فالتابع f دوري ويقبل العدد 2π دوراً. إذن تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi, \pi]$.

ولأنّ التابع زوجي فلدراسته على $[-\pi, \pi]$، تكفي دراسته على $[0, \pi]$.

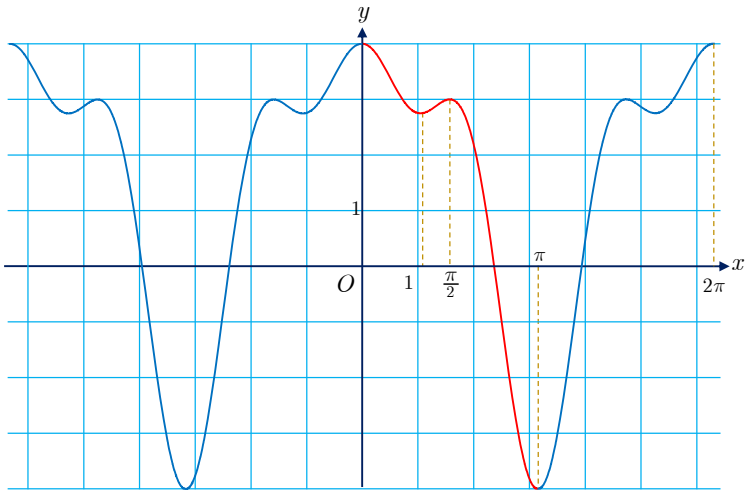
② واضح أنّ

$$f'(x) = 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x$$
$$= 6\sin x \cdot \cos x \cdot (1 - 2\cos x)$$

③ على $]0, \pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x = \frac{\pi}{3}$ (الموافقة لـ $\cos x = \frac{1}{2}$)، وعند $x = \frac{\pi}{2}$ (الموافقة لـ $\cos x = 0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0, \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

④ الرسم مبيّن أدناه.



31 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$.

① أثبت أنّ $f(x) = f(x + 2\pi)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أنّ $f'(x) = 3\sin x\left(2\sin 2x - 1\right)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل

① هذه الخاصة واضحة لأنّ كل من $\sin$ و $\cos$ تابع دوري ودوره 2π.

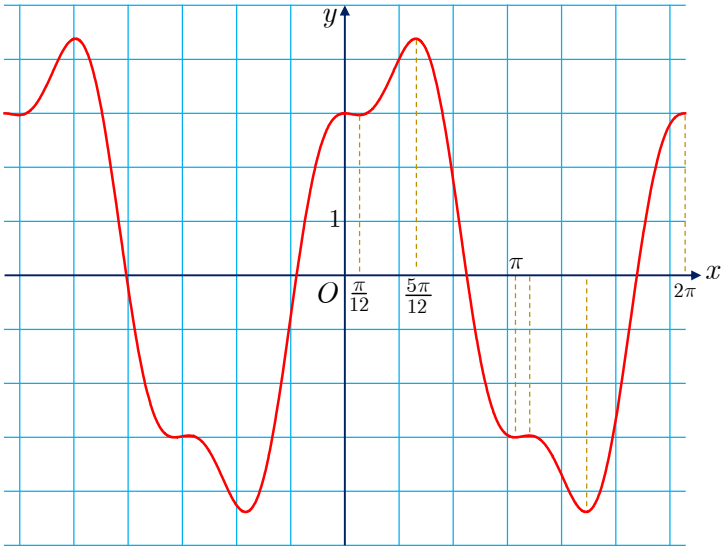
② واضح أنّ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12\sin^2 x\cdot\cos x - 3\sin x \\ &= 3\sin x\cdot\left(4\sin x\cos x - 1\right) \\ &= 3\sin x\left(2\sin 2x - 1\right) \end{aligned}$$

③ على $]0,2\pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x\in\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\}$ (الموافقة لـ $\sin 2x=\frac{1}{2}$)، وعند $x=\pi$ (الموافقة لـ $\sin x=0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0,2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3

ومنه الرسم البياني للتابع f.



32 ليكن f التابع المعرف على المجال $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x)=4x-\tan^2 x$.

① احسب التابع المشتق $f'(x)$. ضعْ $\tan x=t$ وتحقّق أنّ

$$f'(x)=2(1-t)\left(t^2+t+2\right)$$

② استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I.

③ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=-1$، في المجال I جذراً وحيداً α.

الحل

① هنا نتذكّر أن $\tan' = 1 + \tan^2$ فنجد

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - 2\tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \\ &= -2t^3 - 2t + 4 = 2(1-t)(t^2 + t + 2) \end{aligned}$$

حيث وضعنا $t = \tan x$.

② لمّا كان المقدار $t^2 + t + 2$ موجباً في حالة $t \geq 0$ استنتجنا أنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1 - t = 1 - \tan x$. الذي ينعدم على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ فقط في حالة $x = \frac{\pi}{4}$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$ ، فالمستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وهكذا يمكننا إنشاء جدول التغيرات الآتي للتابع f على I.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\pi - 1$	↘	$-\infty$ ‖

③ نرى من جدول التغيرات أنّ $f([0, \frac{\pi}{4}]) = [0, \pi - 1]$ والعدد -1 لا ينتمي إلى $[0, \pi - 1]$ فليس للمعادلة $f(x) = -1$ حلول على المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$. أمّا على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ فالتابع f مستمرّ ومطرد تماماً ويحقّق $f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, \pi - 1[$. ولأنّ $-1 < \pi - 1$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x) = -1$ حلٌّ وحيد على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. بالنتيجة للمعادلة $f(x) = -1$ حلٌّ وحيد α في المجال I. وهذا الحلّ ينتمي إلى المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

33 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت، مستخدماً البرهان بالتدرّج، أنّ مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا:

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right)$$

أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هنا لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cos x \\ f'(x) &= -x\sin x + \cos x \\ f''(x) &= -x\cos x - 2\sin x \\ f'''(x) &= x\sin x - 3\cos x \end{aligned}$$

② في الحقيقة، لنتذكّر أنّ $\cos'(x+a) = -\sin(x+a) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

- لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية:

« مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$. »

- لمّا كان $f'(x) = -x\sin x + \cos x = x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 1\times\cos\left(x+0\times\frac{\pi}{2}\right)$ استنتجنا أنّ $E(1)$ محقّقة.

- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. باشتقاق العلاقة

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

نجد

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= x\cos'\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos'\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

أي إنّ $E(n+1)$ صحيحة. فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n)$ مهما كانت قيمة n.

34 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$، على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

② بالاستفادة مما سبق، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

الحل

① هذا سهل إذ نتيقن بسهولة أنّ $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$.

② وجدنا في دراستنا أنّ

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

إذن

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

35 إيجاد تابع

نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقّق

$f(0)=0$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a. تحقق أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b. احسب $g(0)$ واستنتج أنَّ التابع f فردي.

② ليكن h التابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. تحقق أنَّ h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b. أثبت أنَّ $h(x)=2f(1)$، أياً يكن x من I.

c. استنتج أنَّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d. ماذا تستنتج بشأن الخط البياني $\mathcal{C}$؟

③ ليكن k التابع المعرف على $J=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

a. احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b. احسب $f(1)$.

c. نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني $\mathcal{C}$ وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1، ثُم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

①.a لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $g:x\mapsto f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$$

①.b إذن التابع g تابعٌ ثابتٌ، ولدينا $g(0)=2f(0)=0$ إذن $g=0$ على $\mathbb{R}$. هذا يبرهن أن التابع f تابعٌ فردي.

②.a لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$، وكان التابع $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ اشتقاقياً على $I=]0,+\infty[$، استنتجنا أنّ $h:x\mapsto f(x)+f(1/x)$ اشتقاقي على I ولدينا

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}=0$$

② b. نستنتج إذن أنّ h تابعٌ ثابتٌ على I، ولأنّ $h(1) = 2f(1)$ استنتجنا أنّ $h(x) = 2f(1)$ أياً كانت قيمة x من I.

② c. لمّا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$، فإذا لاحظنا أنّه في حالة $x > 0$ لدينا $f(x) = 2f(1) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2f(1) - 0 = 2f(1)$.

② d. إذن يقبل الخط البياني للتابع f مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = 2f(1)$.

③ a. في حالة x من J لدينا

$$k'(x) = f'(\tan x)\left(1 + \tan^2 x\right) - 1 = \frac{1}{1 + \tan^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right) - 1 = 0$$

إذن التابع k تابعٌ ثابتٌ على J، ولكن $k(0) = f(0) - 0 = 0$، إذن $f(\tan x) = x$ في حالة x من J.

③ b. باختيار $x = \frac{\pi}{4}$ نجد $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

③ c. وبالاستفادة من كون f فردياً يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

③ d. معادلة المماس في $(1, \frac{\pi}{4})$ هي $y = \frac{\pi-2}{4} + \frac{1}{2}x$. ومنه الرسم الآتي:

