7

التكامل والتوابع الأصلية

1 التوابع الأصلية

2 بعض قواعد حساب التوابع الأصلية

3 التكامل المحدّد وخواصه

4 التكامل المحدّد وحساب المساحة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف التوابع الأصلية، والتمكن من بعض طرائق حسابها
- صلة التوابع الأصلية بمفهوم التكامل المحدّد
- بعض طرائق حساب التكامل المحدّد، وخصوصاً التكامل بالتجزئة
- التكامل المحدّد وحساب المساحة وتطبيقات أخرى

تَدرَّبْ صفحة 222

① في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I.

❶ $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\tan x-x$, $f(x)=\tan^2 x$

❷ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=x\cos x$, $f(x)=\cos x-x\sin x$

❸ $I=]0,+\infty[$, $F(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$, $f(x)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$

❹ $I=]0,1[$, $F(x)=\frac{-1}{x(x-1)}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

❺ $I=]0,+\infty[$, $F(x)=x\ln x-x$, $f(x)=\ln x$

❻ $I=]1,+\infty[$, $F(x)=\ln(\ln x)$, $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

❼ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=x-\ln(1+e^x)$, $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

❽ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{e^x}$, $f(x)=\sqrt{e^x}$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' والتيقّن أنّه يساوي f.

② في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

❶ $I=]1,+\infty[$, $G(x)=\frac{x^2+7x-5}{x-1}$, $F(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}$

❷ $I=\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ $F(x)=\tan^2 x$

❸ $I=\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$, $G(x)=\frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$, $F(x)=\frac{2x^2-3x+7}{4x-5}$

❹ $I=\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$ $F(x)=\frac{1}{x^2+1}$

❺ $I=\mathbb{R}$, $G(x)=2-\cos^2 x$, $F(x)=\sin^2 x$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' و G' والتيقّن أنّهما متساويان.

③ أيكون التابعان F و G الآتيان تابعين أصليين للتابع f ذاته على $\mathbb{R}$ ؟

$F(x) = \sin(3x) - 2\sin x$ و $G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$.

الحل

إذا افترضنا أنّ F و G تابعان أصليان للتابع f ذاته وجب أن يكون

$$F'(x) = 3\cos(3x) - 2\cos x = f(x)$$
$$G'(x) = \cos x - 9\sin^2 x\cos x = f(x)$$

وعلى الخصوص يجب أن يكون $F'(\frac{\pi}{6}) - G'(\frac{\pi}{6}) = 0$ وهذا غير صحيح لأننا نجد بحساب بسيط أنّ $F'(\frac{\pi}{6}) - G'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \neq 0$. إذن الجواب هو لا.

تَدرَّبْ صفحة 227

① في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$

❷ $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

❸ $I =]-\infty, 0[$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^2}$

❹ $I =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x + x^2}$

❺ $I =]-\infty, -1[$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

❻ $I =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2 - x}}$

❼ $I =]-\infty, \frac{3}{4}[$, $f(x) = \dfrac{5}{4x-3}$

❽ $I =]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x}$

❾ $I =]-\infty, 2[$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

❿ $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

الحل

❶ $F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$

❷ $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$

❸ $F(x) = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{x}$

❹ $F(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

❺ $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x}$

❻ $F(x) = 4\sqrt{x^2 - x}$

❼ $F(x) = \dfrac{5}{4}\ln(3-4x)$

❽ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln x$

❾ $F(x) = x + 3\ln(2-x)$

❿ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\cdot\ln(2x-1)$

② في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 3x$

❷ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^4 x$

❸ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$

❹ $I =]0, \pi[$, $f(x) = \cot^2 x$

❺ $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $f(x) = \tan x$

❻ $I =]0, \pi[$, $f(x) = \cot x$

❼ $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$

❽ $I =]-\infty, \frac{3}{2}[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$

❾ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

❿ $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$

الحل

❶ $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}\sin(6x)$

❷ $F(x) = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{32}\sin(4x)$

❸ $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{8}\sin(4x)$

❹ $F(x) = -x - \cot(x)$

❺ $F(x) = -\ln(-\cos x)$

❻ $F(x) = \ln(\sin x)$

❼ $F(x) = \dfrac{1}{5}(2x-1)^{5/2}$

❽ $F(x) = -\sqrt{3-2x}$

❾ $F(x) = \dfrac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}$

❿ $F(x) = -\sqrt{3-x^2}$

تَدرَّبْ صفحة 235

① احسب التكاملات الآتية:

❶ $I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos 2x}\, dx$

❷ $J = \int_{-1}^{2} x|x-1|dx$

❸ $K = \int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-2x})\, dx$

❹ $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} dx$

❺ $M = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\, dx$

❻ $N = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $2-2\cos 2x = 4\sin^2 x$ ولكن $\sin x < 0$ عندما $2\pi < x < \frac{2\pi}{3}$ إذن في هذه الحالة لدينا

$$I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-2\sin x)dx = \Big[2\cos x\Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 2$$

❷ إشارة $|x-1|$ ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$، إذن استناداً إلى علاقة شال نكتب

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} x|x-1|dx + \int_{1}^{2} x|x-1|dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x-x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2-x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

❸ $K = -1 + \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$.

❹ بكتابة $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ نجد $L = 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

❺ $M = \frac{1}{2}\ln(3)$.

❻ لاحظ أنّ $(\cos x + \sin x)' = \cos x - \sin x$ ومنه $N = \frac{1}{2}\ln(2)$.

② احسب التكاملات الآتية باستعمال التكامل بالتجزئة.

❶ $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

❷ $J = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x \, dx$

❸ $K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

❹ $L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx$

❺ $M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$

❻ $N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

مساعدة: احسب M و N في آن معاً.

الحل

❶ $I = \int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$

❷ $J = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x \, dx = \left[(x-1)\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -2$

❸ $K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx = \left[(x+2)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 2e-1$

❹ $L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx = \left[x\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \cos(3x) \, dx = \frac{\pi}{9}$

❺ و ❻ هنا لدينا

$$M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = \left[\cos x \, e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sin x)e^x \, dx = -e^{\pi} - 1 + N$$

$$N = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = \left[\sin x \, e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\cos x)e^x \, dx = -M$$

إذن $M = -\frac{1+e^{\pi}}{2}$ و $N = \frac{1+e^{\pi}}{2}$.

③ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \cos x$

❷ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin 2x$

❸ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$

❹ $I =]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

❺ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \sin 2x$

❻ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \cos 3x$

الحل

❶ لمّا كان $\int_0^x t\cos t\,dt = \Big[t\sin t\Big]_0^x - \int_0^x \sin t\,dx = x\sin x + \cos x - 1$ استنتجنا أنّ التابع $x \mapsto F(x) = x\sin x + \cos x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\cos x$ على $\mathbb{R}$.

❷ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\sin(2x)$ على $\mathbb{R}$.

❸ هنا نكتب

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^t\,dt &= \Big[t^2\ e^t\Big]_0^x - \int_0^x 2te^t\,dx\\ &= x^2e^x - 2\left(\Big[t\,e^t\Big]_0^x - \int_0^x e^t\,dx\right)\\ &= x^2e^x - 2\Big(xe^x - e^x + 1\Big) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2\end{aligned}$$

فنستنتج أنّ التابع $x \mapsto F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

❹ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\ln x$ على $]0,+\infty[$.

❺ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\sin(2x)$.

❻ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{27}(9x^2 - 2)\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\cos(3x)$.

④ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I =]1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$

❷ $I =]-\infty,-2[$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

❸ $I =]-2,3[$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6}$

❹ $I =]-1,0[$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$

❺ $I =]2,+\infty[$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$

❻ $I =]-\infty,-2[$ $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$

ملاحظة: التكامل الأخير ليس من النوع الذي درسناه بل هو أبسط من ذلك!

الحل

❶ $F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$.

❷ $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{4}\ln(x^2-4)$.

❸ $F(x) = \frac{3}{5}\ln(3-x) + \frac{2}{5}\ln(x+2)$.

❹ $F(x) = 3\ln(x+1) - \ln(-x)$.

❺ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

❻ $F(x) = \dfrac{5}{x+2} + \log\Big((x+2)^2\Big)$.

أنشطة

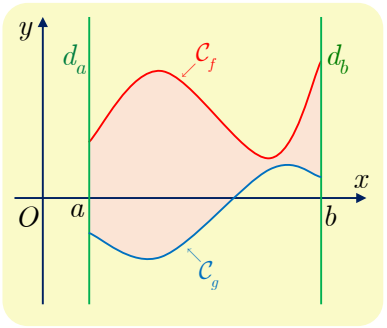
نشاط 1 حساب مساحة سطح مستو

❶ مساحة السطح المحصور بين منحنيين

لنتأمّل الخطين البيانيَّيْن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ للتابعين $f : x \mapsto e^x$ و $g : x \mapsto e^{-x}$ المعرّفين على $\mathbb{R}$.

① ارسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

② احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي. (ناقش تبعاً لإشارة λ).



نقبل عموماً أنّه إذا كان $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الخطين البيانيين لتابعين مستمرين f و g على مجال I، وكان a و b عددين من I يحقّقان $b > a$. عندئذ $\int_a^b |f - g|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.

يتطلّب هذا الحساب دراسة إشارة الفرق $f - g$ على $[a, b]$.

❷ منحن ومقارب مائل

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x(1 + e^{-x})$. وليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني المُمثّل للتابع f. الهدف من هذا النشاط دراسة مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $\mathcal{C}_f$ ومُقاربه.

① a. ادرس نهايات التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$. واكتب جدول تغيرات f. (استعمل f'' لدراسة إشارة المشتق f').

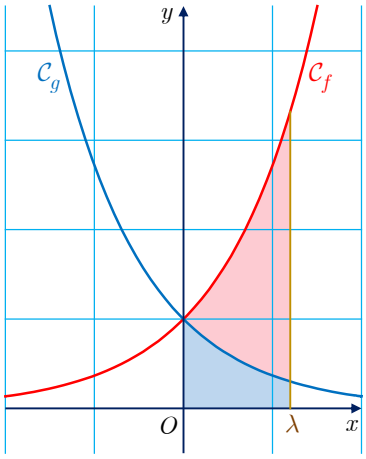
b. تحقّق أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$. وادرس وضع $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المقارب Δ.

c. ارسم Δ و $\mathcal{C}_f$.

② a. ليكن λ عدداً حقيقياً موجباً تماماً. احسب $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و Δ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$.

b. ما نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ عندما تسعى λ إلى $+\infty$؟

الحل



❶ لنرمز بالرمز $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x=\lambda$. في حالة $\lambda>0$ يقع $\mathcal{C}_f$ فوق $\mathcal{C}_g$ على المجال $[0,\lambda]$ ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda} e^x dx-\int_0^{\lambda} e^{-x}dx=e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2$$

في حالة $\lambda<0$ يقع $\mathcal{C}_g$ فوق $\mathcal{C}_f$ على المجال $[\lambda,0]$ ومن ثَمّ

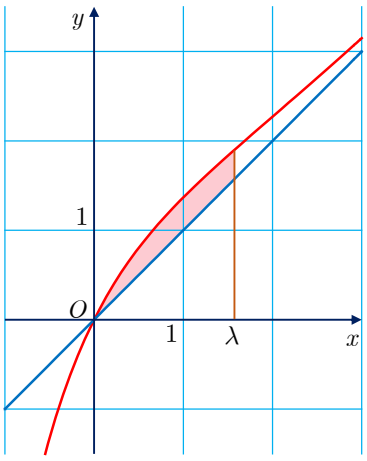
$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{0} e^{-x} dx-\int_{\lambda}^{0} e^{x}dx=e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2$$

إذن أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}$ كان $\mathcal{A}(\lambda)=e^{\lambda}+e^{-\lambda}-2$.

❷ هنا $f(x)=x(1+e^{-x})$.

① .a لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. ونجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$. ليس من السهل تعيين إشارة $f'(x)$ مباشرة لذلك نتأمّل مشتقه $f''(x)=(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$. إذن f' متناقصٌ تماماً على $]-\infty,2[$ ومتزايدٌ تماماً على $]2,+\infty[$، فهو يبلغ قيمة حدية صغرى تساوي $f'(2)=1-e^{-2}>0$ عند $x=2$. نستنتج إذن أنّ f' موجبٌ تماماً على كامل $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



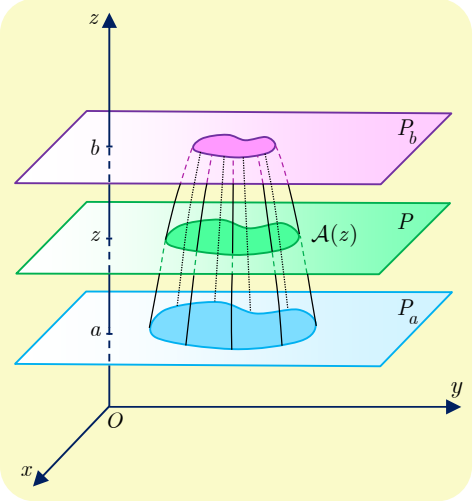
① .b لنضع $g(x)=f(x)-x=xe^{-x}$ نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f. ولأنّ إشارة g تماثل إشارة x استنتجنا أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المقارب Δ على $]0,+\infty[$ ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

② لدينا

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda}(f(x)-x)dx=\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$$
$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda} e^{-x}dx=1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1$.

نشاط 2 حساب حجم مجسم

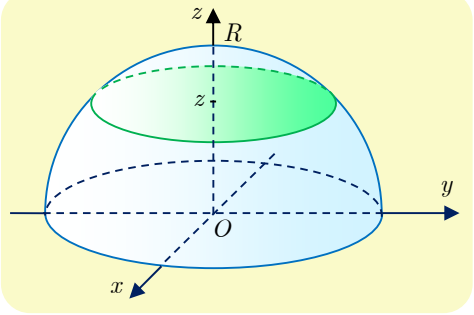


ليكن $\mathbb{S}$ مجسماً يحدّده مستويان P_a و P_b معادلتاهما بالترتيب $z=a$ و $z=b$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم هذا المجسم، وبالرمز $\mathcal{A}(z)$ إلى مساحة مقطع هذا المجسم بالمستوي P الذي يوازي كلاً من P_a و P_b وراقمه يساوي z $(a \le z \le b)$. نقبل أنّ $\mathcal{V}$ يُحسب بالعلاقة:

$$\mathcal{V}=\int_a^b \mathcal{A}(z)\,dz \qquad (*)$$

نجد فيما يأتي عدداً من الأمثلة على استعمال هذه العلاقة.

❶ حجم كرة نصف قطرها R

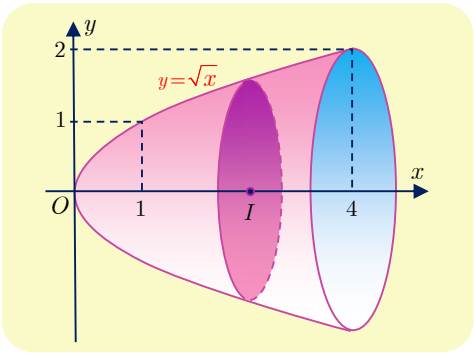


يكفي حساب حجم نصف الكرة ثُمّ نضرب الناتج بالعدد 2.

① اشرح باستعمال رموز الشكل، لماذا $\mathcal{A}(z)=\pi(R^2-z^2)$ ؟

② استنتج مجدداً العبارة $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi R^3$

❷ حجم مجسم دوراني



نجد في الشكل المجاور الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على المجال $[0,4]$ بالصيغة $f(x)=\sqrt{x}$. عندما يدور $\mathcal{C}$ دورة كاملة حول محور الفواصل، يولّد مجسماً دورانياً $\mathcal{S}$.

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ $(0 \le x \le 4)$؟

② عبّر عن $\mathcal{A}(x)$، مساحة هذا المقطع، بدلالة x.

③ استنتج $\mathcal{V}$ حجم المجسم $\mathcal{S}$.

الحل

❶ ① استناداً إلى الشكل، وعملاً بمبرهنة فيثاغورث، يكون نصف قطر القرص $\sqrt{R^2-z^2}$ فمساحته تساوي $\mathcal{A}(z)=\pi(R^2-z^2)$.

② وعليه يعطى حجم الكرة $\mathcal{V}=2\int_0^R \pi(R^2-z^2)dz=2\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_0^R=\frac{4\pi}{3}R^3$.

❷ المقطع دائرة نصف قطرها $\sqrt{x}$، ومن ثَمّ تعطى مساحتها بالصيغة $\mathcal{A}(x) = \pi x$. أمّا حجم المجسّم فيساوي $\mathcal{V} = \int_0^4 \mathcal{A}(x)dx = 8\pi$. وندعو القارئ ليقارن نتيجة هذه النشاط بنتيجة النشاط 2 من الوحدة الرابعة.

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I =]0, +\infty[$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

② $I =]-\infty, \frac{1}{2}[$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}}$

③ $I =]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

④ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-1)^3$

⑤ $I =]-\infty, \frac{1}{3}[$, $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

⑥ $I =]-1, 3[$, $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

الحل

① $F(x) = x + \frac{1}{x} + 3\ln x$

② $F(x) = -2\sqrt{1-2x}$

③ $F(x) = 2\sqrt{x^2-1}$

④ $F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$

⑤ $F(x) = \frac{1}{3(1-3x)}$

⑥ $F(x) = -\frac{1}{2(x^2-2x-3)}$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x(\sin^2 x - 3\sin x)$

② $I =]4, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x-4}$

③ $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$

④ $I =]-\infty, 4[$, $f(x) = \frac{1}{x-4}$

⑤ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{3x-1}$

⑥ $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

الحل

① $F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} + \frac{3\cos^2(x)}{2}$

② $F(x) = \ln(x-4)$

③ $F(x) = 2\tan(x) - x$

④ $F(x) = \ln(4-x)$

⑤ $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-1}$

⑥ $f(x) = 2x - 3\ln(x+1)$

3 في كلٍّ من الحالات الآتية، هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على مجالٍ I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

① $F(1)=0,\quad f(x)=\dfrac{2}{x^2}+x$

② $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

③ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

④ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$

⑤ $F(1)=1,\quad f(x)=\dfrac{-1}{3-x}$

⑥ $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

الحل

① $x>0,\quad F(x)=\dfrac{x^3+3x-4}{2x}$

② $x>-\frac{1}{2},\quad F(x)=\dfrac{x}{2x+1}$

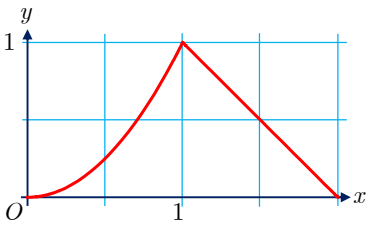
③ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\dfrac{1}{4}\left(-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\right)$

④ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$

⑤ $x<3,\quad F(x)=\ln(3-x)+1-\ln 2$

⑥ $x\in]-1,1[,\quad F(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x^2)}$

4 نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.



تحقّق أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f المعرّف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$، هو الخط المرسوم في الشكل المجاور. احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$، وقلْ ماذا يمثل هذا العدد ؟

احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)dx$ و $\int_0^1 h(x)dx$ في حالة

$g(x)=1-|1-x|$ و $h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$

بعد رسم خطيهما البيانيين على مجال المُكامَلة.

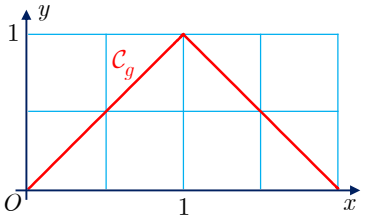
الحل

لاحظ أنّ المتراجحة $x^2\le 2-x$ تكافئ $(x+2)(x-1)\le 0$ أي $x\in[-2,1]$. إذن في حالة x من $[0,2]$ يكون $x^2\le 2-x$ على $[0,1]$ ويكون $2-x\le x^2$ في حالة $x\in[1,2]$ ومنه نرى أنّ

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : 0\le x\le 1\\ 2-x & : 1\le x\le 2\end{cases}$$

إذن $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{6}$

وهو يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع f ومحور الفواصل.



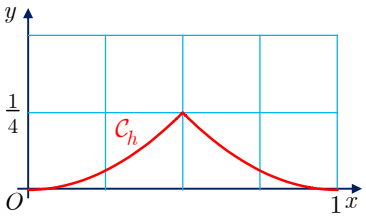
وبالمثل في حالة $g(x)=1-|1-x|$ على المجال $[0,2]$ نجد

$$g(x)=\begin{cases} x & : \ 0\le x\le 1 \\ 2-x & : \ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^1 x dx+\int_1^2 (2-x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2=1$$

وكذلك في حالة $h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$ على المجال $[0,1]$ نجد



$$h(x)=\begin{cases} x^2 & : \ 0\le x\le \frac{1}{2} \\ (1-x)^2 & : \ \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^{1/2} x^2dx+\int_{1/2}^1 (1-x)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_{1/2}^1=\frac{1}{12}$$

5 احسب التكاملات الآتية:

① $I=\int_2^{-1}(x^2-4x+3)\,dx$	② $I=\int_2^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$
③ $I=\int_1^2\left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$	④ $I=\int_0^3\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$
⑤ $I=\int_1^2\frac{x^3}{x^4+2}dx$	⑥ $I=\int_0^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{4})dx$
⑦ $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}dx$	⑧ $I=\int_0^1 te^{t^2-1}dt$
⑨ $I=\int_0^2\sqrt{2x+1}\,dx$	⑩ $I=\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

الحل

① $I=-6$	② $I=\frac{63}{4}$
③ $I=\frac{23}{6}-\ln(2)$	④ $I=2$
⑤ $I=\frac{1}{4}\ln(6)$	⑥ $I=\sqrt{2}$
⑦ $I=1+\ln(8)$	⑧ $I=\frac{e-1}{2e}$
⑨ $I=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$	⑩ $I=\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

6 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J=\int_2^0 f(x)\,dx$.

الحل

① بإجراء قسمة إقليدية للبسط على المقام نجد مباشرة $4x^2-5x+1=(x+3)(4x-17)+52$

ومنه

$$f(x)=4x-17+\frac{52}{x+3}$$

② إذن

$$J=\left[2x^2-17x+52\ln(3+x)\right]_2^0=26+52\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

7 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J=\int_{-3}^0 f(x)\,dx$.

الحل

① الأسهل هنا أن نضع $X=x-1$ متحولاً جديداً فيكون

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}=\frac{(X+1)^2}{X^2}=1+\frac{2}{X}+\frac{1}{X^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

② إذن

$$J=\left[x+2\ln(1-x)-\frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0=\frac{15}{4}-4\ln(2)$$

8 أثبت أنّ $\dfrac{1}{1+e^x}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$، واستنتج قيمة $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+e^x}dx$.

الحل

إثبات المساواة الأولى تحقُّقٌ مباشرٌ، ومنه

$$I=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^1=1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

9 باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$، أو بأية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$، ثُم احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x\, dx$.

الحل

لدينا $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ومنه $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$، ولكن نعلم أيضاً أنّ $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$ إذن

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (*)$$

ومنه نستنتج أنّ

$$I = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/8} = \frac{3\pi}{64} + \frac{1 - 4\sqrt{2}}{32}$$

ملاحظة: يمكن الوصول إلى $(*)$ بالاستفادة من علاقة أويلر:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{4ix}}{16}$$
$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

10 احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

① $I = \int_1^e (x-1)\ln x\, dx$ ② $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2 - 1)e^x\, dx$

③ $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\, dx$ ④ $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}\, dt$

الحل

① $I = \frac{1}{4}(e^2 - 3)$ ② $I = 1 - 2\ln^2(2) + 3\ln^2(3) - 2\ln(\frac{27}{4})$

③ $I = 3 - \frac{5}{e}$ ④ $I = -\frac{1}{4}e^2(e^2 - 3)$

لنتعلّم البحث معاً

11 إثبات متراجحة

نفترض أنَّ a و b عددان حقيقيان وأنَّ $0 \le a < b \le \pi$. أثبت صحة المتراجحة

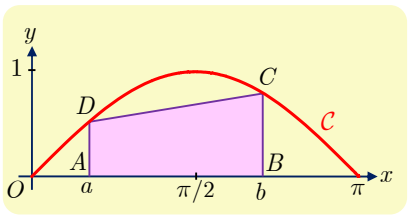
$$\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b - a)\sin b$$

نحو الحلّ

قد نفكر في دراسة تابع، كأنْ نفترض b ثابتاً ونبرهن أنَّ التابع g المعرف وفق الصيغة الآتية موجب على المجال $[0,b]$: $g(x)=\cos x-\cos b-\frac{1}{2}(b-x)\sin b$، ولكن سرعان ما نقتنع أنّ هذا الطريق لا يؤدي إلى إثبات سهل للمتراجحة فإشارة المشتق الأوّل ليست سهلة التعيين.

ولكنّ المقدار $\cos a-\cos b$ يدفعنا إلى التفكير بالتكامل $\cos a-\cos b=\int_b^a f(t)\,dt$ حيث $f(t)=\cos' t=-\sin t$ أو $\cos a-\cos b=-\int_b^a \sin t\,dt=\int_a^b \sin t\,dt$.

1. ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $x\mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$. برِّر كون $\int_a^b \sin t\,dt$ هو مساحة منطقة عليك تحديدها. نرمز إلى تلك المساحة بالرمز $\mathcal{A}$. علل كون $\mathcal{A}$ أكبر من مساحة شبه المنحرف $ABCD$ المبيّن في الشكل.



2. احسب مساحة شبه المنحرف $ABCD$ وتحقّق أنها أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.
3. تيقّن أنّ المتراجحة صحيحة في حالة $a=0$ و $b=\pi$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أنّ $\int_a^b \sin t\,dt$ يمثل $\mathcal{A}$ مساحة السطح الذي يعينه الخط البياني للتابع sin ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ بالترتيب، وهذا السطح يحوي شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الرسم، إذن $\mathcal{A}$ أكبر أو يساوي مساحة $ABCD$.

ولكن $AD=\sin a$ و $BC=\sin b$ والارتفاع AB يساوي $(b-a)$ إذن مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تساوي $\frac{\sin a+\sin b}{2}(b-a)$. وهذا أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$ لأنّ $\sin a\geq 0$. نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{A}\geq\frac{1}{2}(b-a)\sin b$. ولكن

$$\mathcal{A}=\int_a^b \sin t\,dt=\cos a-\cos b$$

فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $\cos a-\cos b\geq\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

لاحظ أنّه في حالة $a=0$ تصبح المتراجحة $1-\cos b\geq\frac{1}{2}b\sin b$ وهي تكافئ $\tan\frac{b}{2}\geq\frac{b}{2}$ التي أثبتنا صحتها سابقاً. أمّا في حالة $b=\pi$ فتؤول المتراجحة إلى المتراجحة المعروفة $\cos a+1\geq 0$.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\sin x$. عيّن تابعاً أصلياً F للتابع f.

نحو الحلّ

التابع المدروس مستمر فله تابع أصلي، ولكننا لا نتعرّف على صيغته بين الصيغ المألوفة لدينا، لذلك نسعى لكتابته بالشكل $F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$، آملين أن تفيدنا مُكاملة بالتجزئة لأنّ للتابع المُكامل شكل جداء ضرب.

أثبت أنّ

$$F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt$$

التكامل في الطرف الأيمن يشبه التكامل المطلوب ولكن استبدل فيه تابع التجيب بتابع الجيب. ومنه تأتي فكرة إجراء مُكاملة بالتجزئة ثانية، إذ نتوقّع أن يظهر التابع F مجدداً.

1. أثبت أنّ $\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt=\frac{1}{2}e^{2x}\cos x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(x)$
2. استنتج عبارة F.

طريقة ثانية. قد يخطر لنا أن نقحم المشتقات المتتالية للتابع f ونبحث عن علاقة بين f و f' و f''.

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. جد العددين الحقيقيّين a و b اللذين يحقّقان $f(x)=af'(x)+bf''(x)$.
3. استنتج عبارة $F(x)$ حيث F تابعٌ أصلي للتابع f.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

ليكن $F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$، بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt=\left[\frac{e^{2t}}{2}\sin t\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{2t}}{2}\cos t\,dt\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\cos t\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{2t}}{2}(-\sin t)dt\right)\\&=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt\end{aligned}$$

إذن

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}F(x)$$

ومنه

$$F(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + \frac{1}{5}$$

طريقة ثانية. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}\sin x \\ f'(x) &= e^{2x}(\cos x + 2\sin x) \\ f''(x) &= e^{2x}(4\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

إذن $4f'(x) - f''(x) = 5e^{2x}\sin x = 5f(x)$ ومنه نستنتج أنّ

$$f = \frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f'' = \left(\frac{4}{5}f - \frac{1}{5}f'\right)'$$

إذن

$$x \mapsto \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

هو تابع أصلي للتابع f.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرفعلى $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$. أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$؟

نحو الحلّ

التحليل: لنفترض وجود كثير الحدود P هذا.

1. أثبت أنّ كون F تابعاً أصلياً للتابع f يقتضي أن يكون

$$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad (*)$$

2. لماذا يجب أن يكون $\deg P = 3$؟

3. بوضع $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عيّن اعتماداً على $(*)$ الأمثال a و b و c و d.

التركيب: أثبتنا أنّه إذا كان P موجوداً فمن الواجب أن يكون له الصيغة التي وجدناها أعلاه. وبالعكس تحقّق أنّ التابع F الذي وجدته تابعٌ أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لنفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f عندئذ من $F' = f$ نستنتج أنّ $\big(P'(x) - P(x)\big)e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$ أي

$$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

ولكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P فدرجة الطرف الأيسر تساوي درجة P في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3. إذن لا بدّ أن يكون $\deg P = 3$. هذا يجعلنا نفترض أنّ

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

وبالتعويض في (*) نجد

$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d = x^3 + x^2 + x + 1$$

تتحقّق العلاقة (*) إذا تحققت الشروط

$$c - d = 1, 2b - c = 1, 3a - b = 1, a = -1$$

أي $a = -1, b = -4, c = -9, d = -10$.

وبالعكس، نتيقن مباشرة أنّ

$$\Big((-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}\Big)' = f(x).$$

الجواب إذن: نعم يوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

قُدُماً إلى الأمام

13 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{(2x^2 - 2x + 1)^3}$

② $I =]-\pi, 0[$, $f(x) = \cot x$

③ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

④ $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$

⑤ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - 2x)^4$

⑥ $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{2}{x}}$

⑦ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{2-3x}$

⑧ $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$

⑨ $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\sin x - x \cos x}{x^2}$

⑩ $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$

الحل

① $I=\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}$

② $I=\left]-\pi,0\right[$, $f(x)=\ln(-\sin(x))$

③ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=-\sqrt{x^2-2x+2}$

④ $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(\tan x)$

⑤ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{10}(2x-1)^5$

⑥ $I=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{e^{-2/x}}{2}$

⑦ $I=\mathbb{R}$, $F(x)=-\dfrac{2}{3}e^{2-3x}$

⑧ $I=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$

⑨ $I=\mathbb{R}_+^*$, $F(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x}$

⑩ $I=\left]-1,+\infty\right[$, $f(x)=x\sqrt{x+1}$

14 في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

① $I=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-1}dx$

② $I=\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{4x-5}{2x+1}dx$

③ $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-9}dx$

④ $I=\displaystyle\int_{0}^{3}\frac{x+2}{(x+1)^4}dx$

⑤ $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{2x^3-3x-4}{x-2}dx$

⑥ $I=\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{8x^2-4}{4x^2-1}dx$

الحل

① $I=2-\ln(3)$

② $I=4-\frac{7}{2}\ln(5)$

③ $I=-\ln\left(\frac{8}{5}\right)$

④ $I=\frac{51}{64}$

⑤ $I=\frac{23}{3}-6\ln(2)$

⑥ $I=2-\dfrac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$

15 في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

① $f(x)=\cos^3 x$ ② $f(x)=\sin x+\sin^3 x$ ③ $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$

الحل

① هنا

$$f(x)=\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\sin' x=\left(\sin x-\tfrac{1}{3}\sin^3 x\right)'$$

إذن $F:x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto\cos^3 x$.

② هنا

$$f(x)=\sin x+\sin^3 x=(\cos^2 x-2)\cos' x=(\tfrac{1}{3}\cos^3 x-2\cos x)'$$

إذن $F:x\mapsto\frac{1}{3}\cos^3 x-2\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto\sin x+\sin^3 x$.

③ هنا

$$f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x=(\cos^4 x-\cos^2 x)\cos' x=(\tfrac{1}{5}\cos^5 x-\tfrac{1}{3}\cos^3 x)'$$

إذن $F:x\mapsto \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto \sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

16 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$.

② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin^4 x\\ f'(x)&=4\sin^3 x\cos x\\ f''(x)&=12\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\\ &=3\sin^2 2x-4f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-4f(x)\end{aligned}$$

②نستنتج مما سبق أنّ

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}f''(x)=\left(\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}f'(x)\right)'$$

إذن $F:x\mapsto \frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\sin^3 x\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto \sin^4 x$.

17 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3e^{2x}$، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=P(x)e^{2x}$، حيث P تابع كثير حدود.

الحل

باتباع أسلوب التمرين 12 نبحث عن F بالصيغة $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}$. الشرط $F'=f$ يُكافئ: $(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3$ أو

$$(2a-1)x^3+(2b+3a)x^2+2(c+b)x+2d+c=0$$

وعليه يكفي أن نختار $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{4},c=\frac{3}{4},d=-\frac{3}{8}$. لنجد أنّ

$$x\mapsto F(x)=\tfrac{1}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$$

تابع أصلي للتابع $x\mapsto f(x)=x^3e^{2x}$.

18 نريد حساب $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$، ثُم $I+J$، واستنتج I.

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} I+J&=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx+\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\\ &=\int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

إذن $I=\frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right)$.

19 نريد حساب $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$، ثُم $I+J$، واستنتج I.

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\ln 3$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} I+J&=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx+\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx\\ &=\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\pi/2} \cos x dx=1\end{aligned}$$

إذن $I=1-\frac{1}{2}\ln 3$.

20 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

② عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ أياً كان x.

③ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$f(x) = e^{2x}\cos x$$
$$f'(x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$$
$$f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$$

② علينا حذف الحد الذي يحوي $\sin x$ من صيغتي $f'(x)$ و $f''(x)$ فنجد

$$4f'(x) - f''(x) = e^{2x}(5\cos x) = 5f(x)$$

③ نستنتج إذن أنّ $f(x) = \left(\frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)\right)'$ وهذا يبرهن أنّ

$$x \mapsto F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x) = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\cos x + \sin x\right)$$

هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto f(x) = e^{2x}\cos x$ على $\mathbb{R}$.

21 F و G تابعان أصليّان للتابعين $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ و $g : x \mapsto \sin(\ln x)$ على $]0,+\infty[$، ينعدمان عند $x = 1$. انطلاقاً من الصيغتين

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \quad \text{و} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$$

① أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ:

$$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad \text{و} \quad G(x) = x\sin(\ln x) - F(x).$$

② استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

الحل

① من جهة أولى

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)dt = \Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(-\sin(\ln t))\frac{1}{t}dt$$
$$= x\cos(\ln x) - 1 + \int_1^x \sin(\ln t)dt = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$$
$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt = \Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(\cos(\ln t))\frac{1}{t}dt$$
$$= x\sin(\ln x) - \int_1^x \cos(\ln t)dt = x\sin(\ln x) - F(x)$$

إذن

$$\begin{cases} F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1 \\ F(x) + G(x) = x\sin(\ln x) \end{cases}$$

② وبالحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين نجد

$$F(x) = \frac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - 1)$$
$$G(x) = \frac{1}{2}(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1)$$

22 إثبات متراجحة

① تيقّن أنّه في حالة $0 < x < a$ يكون $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$.

② استنتج أنّ $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ في حالة $a > 0$.

الحل

① التابع $x \mapsto x+1$ متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$، فيكون $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ متناقصاً على $\mathbb{R}_+$، وينتج من ذلك أنّه في حالة $0 < x < a$ لدينا $g(a) \leq g(x) \leq g(0)$ وهي المتراجحة المطلوبة.

② إذن في حالة $a > 0$ لدينا

$$\int_0^a \frac{1}{1+a}dx \leq \int_0^a \frac{1}{1+x}dx \leq \int_0^a dx$$

أي $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

23

فيما يأتي، ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ الذي يُمثّل التابع f، ثُمّ احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

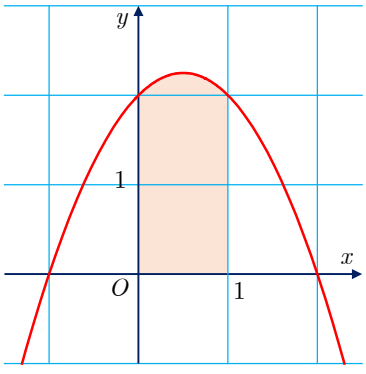
① $a = 0,\quad b = 1,\quad f(x) = 2 + x - x^2$

② $a = 1,\quad b = 4,\quad f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$

③ $a = 0,\quad b = \frac{\pi}{4},\quad f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

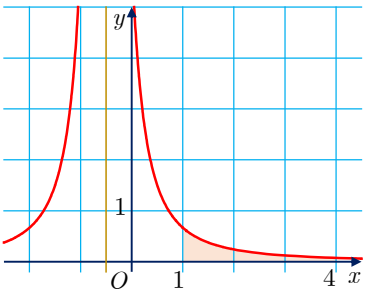
④ $a = -1,\quad b = \ln 2,\quad f(x) = (x+1)e^{-x}$

الحل



① الخط البياني للتابع f قطع مكافئ فتحته نحو الأسفل ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x = \frac{1}{2}$، وخطه البياني $\mathcal{C}$ يقطع محور الفواصل عند $x = 2$ و $x = -1$. وعلى المجال $[0,1]$ يقع الخط البياني للتابع f فوق محور الفواصل. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^1 (2 + x - x^2)dx = \frac{13}{6}$.

② هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$، ويحقّق $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني،

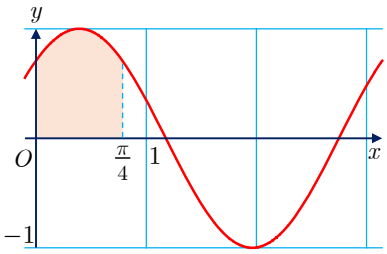


وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to-1/2} f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وأخيراً نجد بحساب بسيط للمشتق أنّ f متناقص تماماً على كل من المجالين $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{2},+\infty[$. وهو موجب على كامل مجموعة الدراسة. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_1^4 \frac{6}{(1+2x)^2}dx=\frac{2}{3}$.

③ هنا التابع f تابع دوري ويقبل العدد π دوراً. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$. المشتق $f'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ ينعدم على مجال الدراسة فقط عند $x=\frac{\pi}{8}$ و $x=\frac{5\pi}{8}$، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

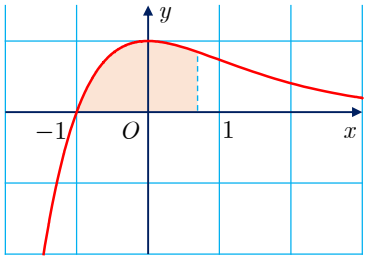


التابع f موجبٌ على المجال $[0,\frac{\pi}{4}]$. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^{\pi/4}\cos(2x-\frac{\pi}{4})dx=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

④ هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}$، ويحقّق $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني.

أمّا المشتق فيعطى بالصيغة $f'(x)=-xe^{-x}$ فإشارته تعاكس إشارة x، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

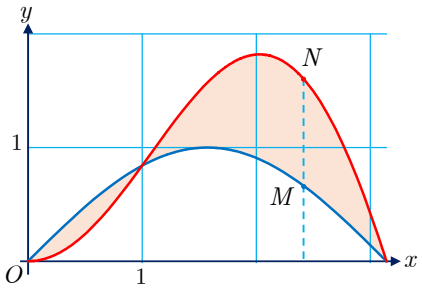


الخط البياني للتابع f يقع فوق محور الفواصل على المجال $]-1,+\infty[$، إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\int_{-1}^{\ln 2}(x+1)e^{-x}dx=\left[-(x+1)\,e^{-x}\right]_{-1}^{\ln 2}+\int_{-1}^{\ln 2}e^{-x}dx=e-1-\tfrac{1}{2}\ln 2.$$

24 ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين للتابعين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x\sin x$ على المجال $[0,\pi]$. ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على المجال $[0,\pi]$.

الحل



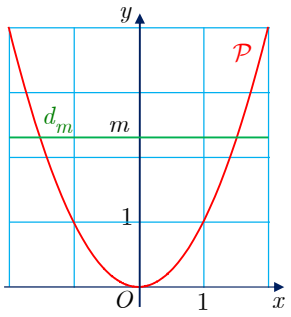
الخط البياني للتابع $x \mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$ معروف.
ويوافق أية نقطة $M(x,\sin x)$ من هذا الخط توافقها نقطة $N(x,x\sin x)$ من الخط البياني للتابع $x \mapsto x\sin x$. النقطة N تقع تحت M في حالة $0<x<1$ وتقع فوقها في حالة $1<x<\pi$. هذه الملاحظة تفيد في إعطاء الرسم المبين في الشكل المجاور.

إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\pi} \left|\sin x - x\sin x\right| dx = \int_0^{\pi} \left|1-x\right|\sin x dx \\ &= \int_0^{1} (1-x)\sin x\, dx + \int_1^{\pi} (x-1)\sin x\, dx \\ &= \Big[(1-x)(-\cos x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \cos x\, dx + \Big[(x-1)(-\cos x)\Big]_1^{\pi} + \int_1^{\pi} \cos x\, dx \\ &= \pi - \Big[\sin x\Big]_0^1 + \Big[\sin x\Big]_1^{\pi} = \pi - 2\sin(1)\end{aligned}$$

25 ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y=m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إلى منطقتين.

عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



الحل

لتكن $\mathcal{A}(m)$ مساحة الجزء من داخل القطع الذي يحدّه المستقيم d_m. d_m يقطع القطع في النقطتين اللتين فاصلتاها $-\sqrt{m}$ و $\sqrt{m}$. وعليه

$$\mathcal{A}(m) = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} (m-x^2)dx = \frac{4}{3}m\sqrt{m}$$

يتحقّق الشرط المعطى عند قيمة m التي تحقّق $\mathcal{A}(m) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(4)$، وهذا يكافئ $m = 2\sqrt[3]{2}$.

26 ليكن f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(2-x)e^x$. وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في جملة متجانسة.

① ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

② ليكن $\mathcal{C}_1$ الجزء من الخط البياني $\mathcal{C}$ المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$، وليكن $\mathcal{S}$ السطح المحصور بين $\mathcal{C}_1$ ومحور الفواصل. احسب مساحة $\mathcal{S}$.

③ عندما يدور السطح $\mathcal{S}$ حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.

a. عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $G: x\mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto (f(x))^2$.

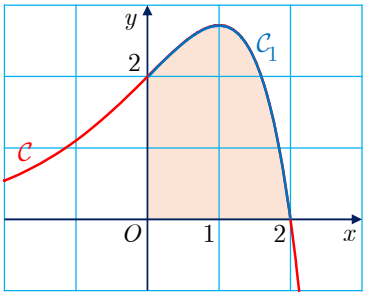
b. استنتج قيمة $\mathcal{V}$.

الحل

① لدينا من جهة أولى $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$، ومن جهة ثانية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $f(x)=e^2Xe^{-X}$ حيث $X=2-x$. و $\lim\limits_{X\to\infty} Xe^{-X}=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.

وكذلك $f'(x)=(1-x)e^x$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



ونلاحظ على الخصوص أنّ $\mathcal{C}$ يتقاطع مع محور الفواصل في $(2,0)$. ومنه الرسم البياني المرافق.

② لدينا: $\mathcal{A}(\mathcal{S})=\int_0^2 (2-x)e^x dx=\Big[(2-x)e^x\Big]_0^2+\int_0^2 e^x dx=e^2-3$.

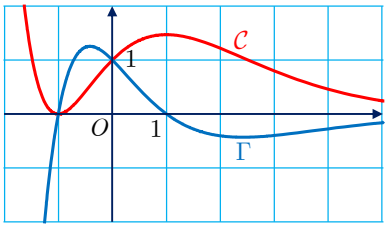
③ يكون $G: x\mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto (f(x))^2=(x^2-4x+4)e^{2x}$ إذا وفقط إذا تحقّق أياً كانت x المساواة: $2(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=(x^2-4x+4)$ أو

$$(2a-1)x^2+2(b+a+2)x+2c+b-4=0$$

إذن نأخذ $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}, c=\frac{13}{4}$، نستنتج أنّ $x\mapsto G(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}$ هو تابع أصلي للتابع $x\mapsto (f(x))^2$. إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{A}(x)$ إلى مساحة مقطع المجسم الدوراني المدروس بالمستوي العمودي على محور الدوران المار بالنقطة التي فاصلتها x استنتجنا أنّ $\mathcal{A}(x)=\pi(f(x))^2$ إذن حجم المجسم المدروس يساوي

$$\mathcal{V}=\int_0^2 \pi(f(x))^2 dx=\Big[\pi G(x)\Big]_0^2=\frac{\pi(e^4-13)}{4}$$

27 مسألة مركّبة



❶ في معلم متجانس رسمنا الخطّين البيانيَّيْن $\mathcal{C}$ و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ أحدهما مشتقٌ للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و g'.

① بيّن مُعلّلاً أيٌّ هذين الخطّين هو الخط البياني للتابع g وأيُّهما لمشتقه.

② ما ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

❷ نتأمّل المعادلة التفاضلية : $(E) : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2+2x)e^{-x}$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$. أثبت أنّ « f حلٌّ للمعادلة (E) » يُكافئ « $u = f - f_0$ حلٌّ للمعادلة (E') ». ثُمّ حلّ (E') واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

③ إذا علمتَ أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حلٌّ للمعادلة (E)، فأعط صيغة $g(x)$ بدلالة x.

④ عيّن h حلّ المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$.

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$.

② ليكن $\mathcal{C}'$ الخط البياني الذي يمثّل f في معلم متجانس. اكتب معادلة للمماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1. وارسم $\mathcal{C}'$ و T.

③ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ثُم احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\mathcal{C}'$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

الحل

❶ ① لو افترضنا جدلاً أنّ Γ هو الخط البياني للتابع g لوجدنا g يبلغ قيمة عظمى محلياً عند نقطة من المجال $]-1,0[$، ولوجب أن ينعدم مشتقه عندها، أي وجب أن يقطع الخط البياني $\mathcal{C}$ للمشتق محور الفواصل في نقطة من هذا المجال وهذا يناقض الرسم المعطى. إذن لا بدَّ أن يكون $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع g، و Γ هو الخط البياني للتابع g'.

② نقرأ من الرسم أنّ ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي الواحد أي $g'(0) = 1$.

❷ ① نلاحظ أنّ

$$f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+2x)e^{-x} + (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$$

إذن f_0 هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② نلاحظ أنّ

$$u(x)+u'(x)=f(x)+f'(x)-f_0(x)-f_0'(x)=f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}$$

إذن $u(x)+u'(x)=0$ يكافئ $f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}=0$. أي يكون $u=f-f_0$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E') إذا وفقط إذا كان f حلاً للمعادلة التفاضلية (E). ولكن لأي حلّ للمعادلة التفاضلية (E') الصيغة $u(x)=ke^{-x}$ حيث k ثابتٌ حقيقي. إذن $f(x)=(x^2+2x+k)e^{-x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

③ التابع g هو حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $g(x)=(x^2+2x+\lambda)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت λ بالشرط $g(0)=1$ ومنه $\lambda=1$. إذن $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

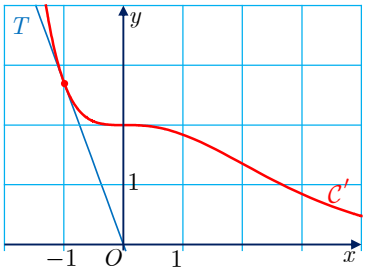
④ التابع g هو أيضاً حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $h(x)=(x^2+2x+\mu)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت μ بالشرط $h'(0)=0$. ولكن من (E) لدينا $h(0)+h'(0)-2=0$، أي $\mu=h(0)=2$، ومنه $h(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

❸ ① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. ومن جهة أخرى، لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$ أياً كانت $n\geq 0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}'$ للتابع f. ومن جهة أخرى

$$f'(x)=(2+2x)e^{-x}-f(x)=-x^2e^{-x}$$

وهو موجب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا في حالة $x=0$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0



② لدينا $f(-1)=e$ و $f'(-1)=-e$، إذن معادلة المماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1 هي $y=-ex$.

③ إنّ مشتق $F:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{-x}$ يساوي f إذا وفقط إذا كان

$$(a+1)x^2+(2+b-2a)x+2+c-b=0$$

أياً كانت قيمة x، وهذا يكافئ $a=-1,b=-4,c=-6$. إذن $F:x\mapsto(-x^2-4x-6)e^{-x}$ هو تابع أصلي للتابع f.

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x)dx=F(\alpha)-F(0)=6-(\alpha^2+4\alpha+6)e^{-\alpha}$$

وهي النتيجة المطلوبة. لاحظ بوجه خاص أنّ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=6$.