5

التابع اللوغاريتمي النيبري

1. التابع اللوغاريتمي النيبري
2. لوغاريتم جداء ضرب
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$
4. اشتقاق تابع مركب من النمط $\ln \circ u$
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع اللوغاريتمي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع اللوغاريتمي
- اطراد التابع اللوغاريتمي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة لوغاريتم تابع
- حل معادلات ومتراجحات تحوي لوغاريتم
- دراسة توابع تضم التابع اللوغاريتمي في علاقة ربطها.

تَدرَّبْ الصفحة 154

① في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

❶ $\ln(x^2)$ ❷ $\ln(1-x)$ ❸ $\ln(x-3)$

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ ❺ $\frac{1}{\ln x}$ ❻ $\ln(x^2+4x)$

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ ❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ ❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

الحل

① ❶ $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2>0$، أي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

❷ $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x\in\left]-\infty,1\right[$.

❸ $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x\in\left]3,+\infty\right[$.

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x\in\ ]-1,+\infty[\setminus\{0\}\ =\ ]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

❺ $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x\neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x\in\ ]0,+\infty[\setminus\{1\}\ =\ ]0,1[\cup]1,+\infty[$$

❻ $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. x^2+4x ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و -4، فتتحق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنَّ $x\mapsto\ln(x^2+4x)$ معرف على $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ معرف عندما $x^2-3x+2>0$. أي على $\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $\left]2,3\right[$.

② f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2+\ln x$. بيّن أنّ f اشتقاقي على I، واحسب $f'(x)$، واكتب معادلةً لمماس الخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

- التابع $x\mapsto\ln x$ اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ والتابع الثابت $x\mapsto 2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع f اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ بصفته مجموع هذين التابعين.

• التابع المشتق للتابع f هو $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. لإيجاد معادلة المماس، نبحث عن نقطة التماس وميل المماس. إنّ m ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 1 يساوي $m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

ولأنّ فاصلة نقطة التماس $x_0 = 1$، فترتيبها $y_0 = f(1) = 2$. فمعادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 1 هي $y = 2 + 1(x-1)$ أو $y = x + 1$.

③ f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

❶ أثبت أنّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظّم جدولاً باطراد f.

❸ استنتج من جدول الاطراد أنّ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

الحل

❶ f هو مجموع التابعين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكل منهما اشتقاقي على I، فالتابع f اشتقاقي على I. التابع المشتق للتابع f هو:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

❷ إشارة $f'(x)$ فتماثل إشارة $-1+x$ لأنّ $x^2 > 0$ على I. وبهذا ننظم الجدول الآتي باطراد f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

نجد من الجدول أنّ f متناقص تماماً على المجال $]0,1]$ ومتزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

❸ نقرأ في الجدول أنّ جميع قيم f أكبر من 1، أي $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

④ حلّ المعادلات الآتية:

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$ ❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$ ❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

الحل

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $2x > 0$ و $x > 0$ و $2x = x^2 - 1$. أي $x^2 - 2x - 1 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط موجب تماماً هو $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. (والآخر سالب هو $1 - \sqrt{2}$ ولا يحقق الشرط الأوّل).

❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $-3x > 0$ و $x^2 - 4 = -3x$. أي $x < 0$ و $x^2 + 3x - 4 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط سالب تماماً هو $x_0 = -4$. (والآخر موجب هو 1 ولا يحقق الشرط الأوّل).

❸ $\ln(x - 2) = \ln 2$.

هذه المعادلة تكافئ $x - 2 = 2$ أي $x = 4$.

❹ $\ln(x - 2) = \ln(x^2 - 2)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $x - 2 > 0$ و $x^2 - 2 = x - 2$. أي $x > 2$ و $x(x - 1) = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران 0 و 1 وكلاهما لا يحقق الشرط الأوّل. فمجموعة حلول هذه المعادلة خالية.

⑤ حلّ المتراجحات الآتية:

❶ $\ln(x - 2) \leq \ln(2x - 1)$ ❷ $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$

❸ $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln x$ ❹ $\ln x \leq \ln(x^2 - 2x)$

الحل

❶ $\ln(x - 2) \leq \ln(2x - 1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x - 2 > 0$ و $2x - 1 \geq x - 2$ معاً. أي $x > 2$ و $x > -1$. إذن $\mathcal{S} =]2, +\infty[$.

❷ $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x^2 - 1 > 0$ و $2x \geq x^2 - 1$ معاً. أي $x^2 - 1 > 0$ و $x^2 - 2x - 1 \leq 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط خارج المجال $[-1, 1]$ والثانية محققة فقط في المجال $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$. إذن $\mathcal{S} =]1, 1 + \sqrt{2}]$.

❸ $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln x$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $1 + \frac{2}{x} \geq x$ معاً. أي $x > 0$ و $x^2 - x - 2 \leq 0$. وأخيراً $x > 0$ و $(x + 1)(x - 2) \leq 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط في المجال $]0, +\infty[$ والثانية محققة فقط في المجال $[-1, 2]$. إذن $\mathcal{S} =]0, 2]$.

❹ $\ln x \leq \ln(x^2 - 2x)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $x^2 - 2x \geq x$ معاً. أي $x > 0$ و $x(x - 3) \geq 0$. وأخيراً $x > 0$ و $x - 3 \geq 0$. إذن $\mathcal{S} = [3, +\infty[$.

تَدرَّبْ الصفحتان 157 و 158

① بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

❶ $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$ ❷ $b = \ln \frac{1}{16}$ ❸ $c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

الحل

❶ $a = \ln 3 - \ln 3 = 0$

❷ $b = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4 \ln 2$

❸ $c = \frac{1}{2} \times \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ln 2 = \frac{1}{4} \ln 2$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$:

❶ $a = \ln 50$ ❷ $b = \ln \frac{16}{25}$ ❸ $c = \ln 250$

الحل

❶ $a = \ln(2 \times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2 \ln 5$

❷ $b = \ln \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 2 \ln \left(\frac{4}{5}\right) = 2(\ln 4 - \ln 5) = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$

❸ $c = \ln(2 \times 5^3) = \ln 2 + \ln 5^3 = \ln 2 + 3 \ln 5$

③ أثبت أنَّ $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = 0$.

الحل

$$\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) = \ln\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)$$
$$= \ln(4 - 3) = \ln 1 = 0$$

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln 5, \quad y = \ln 2 + \ln 3$

❷ $x = 2 \ln 3, \quad y = 3 \ln 2$

الحل

❶ $y = \ln(2 \times 3) = \ln 6 > \ln 5 = x$. إذن $y > x$.

❷ $x = \ln 3^2 = \ln 9$ و $y = \ln 2^3 = \ln 8$. إذن $x > y$.

⑤ فيما يأتي بسِّط كتابة كلٍ من a و b.

❶ $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27}$

❷ $b = \ln \sqrt{216} + \ln \sqrt{75} - \ln 15 - \ln \sqrt{27}$

الحل

❶

$$a = \ln\left(\frac{567\times 8}{72\times 7\times 27}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{7}\times 81\times \cancel{8}}{\cancel{8}\times 9\times \cancel{7}\times 27}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

❷

$$b = \frac{1}{2}\left(\ln 216 + \ln 75 - \ln 225 - \ln 27\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8\times \cancel{27}\times \cancel{75}}{\underset{3}{\cancel{225}}\times \cancel{27}} = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\ln 2 - \ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$$

⑥ أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$.

❶ $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

❷ $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

الحل

❶ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز A، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$A = \ln x + \ln(\tfrac{x+1}{x}) = \cancel{\ln x} + \ln(1+x) \cancel{-\ln x} = \ln(1+x)$$

❷ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز B، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$B = \ln(x^2) + \ln(\tfrac{x^2+1}{x^2}) = \cancel{\ln x^2} + \ln(1+x^2) \cancel{-\ln x^2} = \ln(1+x^2)$$

⑦ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تُحقّق المساواة.

❶ $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

❷ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

الحل

❶ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x > 0$ و $x-1 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

❷ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x-1 > 0$ و $x+2 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

⑧ جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $2^n \le 100$ ❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-2}$ ❸ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ❹ $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \ge 2$

الحل

❶ $2^6 = 64 < 100$ و $2^7 = 128 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

❷ المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$ تكافئ $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100}$، إذن $3^n \geq 100$. ولكن $3^4 = 81 < 100$ و $3^5 = 242 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n > 4$.

❸ المتراجحة $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ تكافئ $\ln(0.2) \geq n\ln(0.4)$ ولأنّ $\ln(0.4) < 0$ هذه الأخيرة تكافئ $n \geq \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \approx 1.76$. إذن مجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n \geq 2$.

يمكن أن نتحقق دون آلة حاسبة أنّ $1 < \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} < 2$ لأنّ هذه المتراجحة تكافئ $1 < 2$ و $5 < 4$.

❹ المتراجحة $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$ تكافئ $n \times \ln\left(1 + \frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$ لأنَّ التابع $\ln$ متزايد تماماً. وهذه تكافئ $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n التي تحقق المتراجحة هي $n \geq 24$.

⑧ حل كلّ متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

❶ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ ❷ $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

❸ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$ ❹ $\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$

❺ $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$ ❻ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

❼ $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$ ❽ $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

❾ $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$ ❿ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل

❶ المعادلة $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

الطرف الأيسر معرّف فقط في حالة $x > 0$، وعندها يكون الطرف الأيمن معرفاً لأن $2x > 0$ و $x + 4 > 0$. ولأنّ $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ نجد المعادلة المعطاة تكافئ $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x+4)$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{x}{2} = (x+4)$ فنجد حلها $x = -8$ ومن ثمّ مجموعة حلول المعادلة المعطاة خالية.

❷ المعادلة $2\ln x = \ln(2x^2 + x)$

مجموعة تعريف المعادلة هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x > 0$ و $2x^2 + x > 0$ فهي إذن $D =]0,+\infty[$. وعلى المجموعة D، تُكتب المعادلة (E) بالشكل $\ln x^2 = \ln(2x^2 + x)$. نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 = 2x^2 + x$ التي تعطي بعد الإصلاح $x(x+1) = 0$ وهذا مستحيل في حالة $x > 0$. فمجموعة حلول المعادلة خالية.

❸ المعادلة $\ln(x+11)=\ln(x+3)+\ln(x+2)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحات $x+11>0$ و $x+3>0$ و $x+2>0$، فهي إذن $I=]-2,+\infty[$. وعلى I، لدينا:

$$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ أو $x^2+4x-5=0$ أو $(x-1)(x+5)=0$. لهذه المعادلة جذران حقيقيان: $x_1=-5\notin I$ و $x_2=1\in I$. فللمعادلة (E) حل وحيد $x=1$.

❹ المعادلة $\ln(x+11)=\ln[(x+3)(x+2)]$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x+11>0$ و $(x+3)(x+2)>0$ فهي إذن $I=]-11,-3[\cup]-2,+\infty[$. وعلى I، تكتب (E) بالصيغة:

$$\ln\big((x+3)(x+2)\big)=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ فنجد لها جذرين حقيقيين: $x_1=-5\in I$ و $x_2=1\in I$.

فمجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{-5,1\}$.

❺ المعادلة $\ln 4+\ln 2=\ln(x-6)+\ln(x+1)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x>6$ و $x>-1$، فهي $I=]6,+\infty[$. وعلى I، تكتب المعادلة $\ln(4\times 2)=\ln[(x-6)(x+1)]$ أو $\ln(x^2-5x-6)=\ln 8$. نحلّ إذن المعادلة $x^2-5x-6=8$ فنجد لها جذرين $x_1=7\in I$ و $x_2=-2\notin I$. فللمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=7$.

❻ المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً $x>0$ و $x<3$ و $x>-1$، فمجموعة تعريفها $I=]0,3[$. وعلى المجال I، تكتب المعادلة (E) بالصيغة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$، أو بعد الإصلاح $\ln(2x^2+2x)=\ln(x^2-6x+9)$. نحلّ إذن المعادلة $2x^2+2x=x^2-6x+9$ التي تكافئ $(x+9)(x-1)=0$. فنجد لها، حلّين $x_1=-9\notin I$ و $x_2=1\in I$. إذن للمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=1$.

❼ المتراجحة $\ln 3\leq\ln(5-x)+\ln(x-1)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، فمجموعة تعريفها $I=]1,5[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln 3\leq[\ln(5-x)(x-1)]$ أو $\ln 3\leq\ln(-x^2+6x-5)$ فهي تكافئ

$$(x-2)(x-4)\leq 0$$

فمجموعة حلول المتراجحة الأصلية هي المجال $[2,4]$ المحتوى في I.

❽ المتراجحة $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x>0$ و $3x^2-x>0$، أي $x>0$ و $x(3x-1)>0$، أو $x>0$ و $3x-1>0$. فمجموعة تعريف المتراجحة المدروسة هي $I=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln x+\ln(3x-1) \leq \ln x+\ln 2$ أو $\ln(3x-1) \leq \ln 2$. وهذه تكافئ $0<3x-1 \leq 2$ أو $\frac{1}{3}<x \leq 1$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $\left]\frac{1}{3},1\right]$.

❾ المتراجحة $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2-x-2)$

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي قيم x التي تحقق $0<6x+4 \leq 3x^2-x-2$ فهي إذن مجموعة قيم x التي تحقق في آن معاً

$$0<3x+2 \quad \text{و} \quad 0 \leq 3x^2-7x-6=(3x+2)(x-3).$$

أو $x>-\frac{3}{2}$ و $x \geq 3$، أي $x \geq 3$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $\left[3,+\infty\right[$.

❿ المتراجحة $3\ln x > \ln(3x-2)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x>0$ و $3x-2>0$. أي $x>\frac{2}{3}$. وفي هذه الحالة هي تكافئ

$$0<3x-2 \quad \text{و} \quad 3x-2<x^3$$

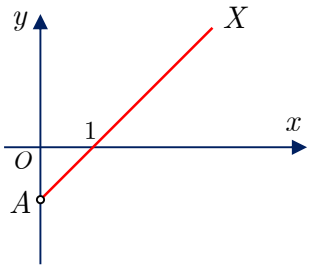
ولكن $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. إذن عندما $x>\frac{2}{3}$ يكون $x^3-3x+2 \geq 0$ ولا تتحقق المساواة إلّا في حالة $x=1$. فمجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $\left]\frac{2}{3},1\right[\cup]1,+\infty[$.

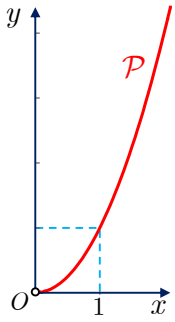
⑨ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحقّقة للشرط المشار إليه.

❶ $\ln x=\ln(y+1)$ ❷ $\ln y=2\ln x$ ❸ $\ln x+\ln y=0$

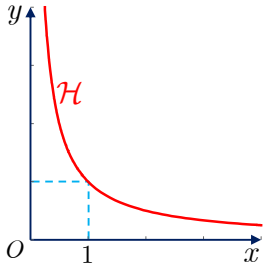
الحل

❶ العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ معرفة في حالة $x>0$ و $y>-1$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ تكافئ $x=y+1$ أو $y=x-1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف المستقيم $[AX)$ المحمول على الخط البياني للتابع $x \mapsto x-1$ دون طرفه $A(0,-1)$.





❷ العلاقة $\ln y = 2\ln x$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y = 2\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln(x^2)$ أو $y = x^2$.
فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف القطع المكافئ $(\mathcal{P})$ المرسوم في الربع الأول عدا ذروته $O(0,0)$.



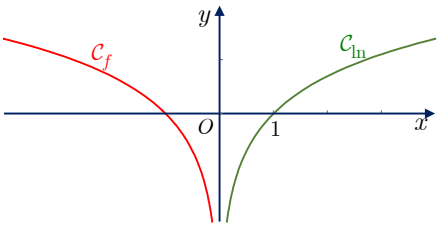
❸ العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$.
مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ أو العلاقة $\ln y = -\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ وتكافئ $y = \frac{1}{x}$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي فرع القطع الزائد $(\mathcal{H})$ الذي معادلته $xy = 1$ والمرسوم في الربع الأول.

تَدرَّبْ الصفحة 162

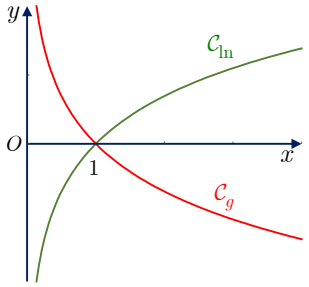
① انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :
$x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1 + \ln x$.

الحل

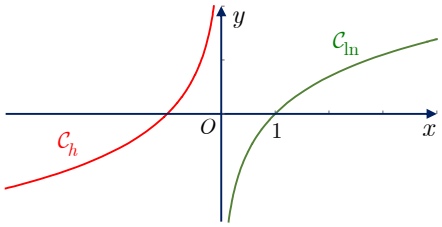
نرمز إلى الخط البياني للتابع ln بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



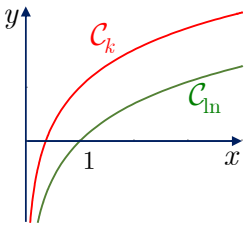
- التابع f : $f(x) = \ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور التراتيب.



- التابع g : التابع $g(x) = -\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_g$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- التابع h : $h(x) = -\ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_h$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



- التابع k : $k(x)=1+\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_k$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y)\to(x,1+y)$ فهو ناتج من $\mathcal{C}_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

② أثبت أنَّ $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$. واستنتج أنّ $2<e<4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

الحل

ندرس اطراد التابع $f: x\mapsto \ln x-2\sqrt{x}+2$ المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$. نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\frac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$$

إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1-x$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

- نقرأ في الجدول أنَّ $f(x)\le 0$ أياً يكن $x>0$. أي $\ln x\le 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$. وأنّ المساواة تقع فقط عندما $x=1$.
- باختيار $x=e$ نستنتج أنّ $1\le 2(\sqrt{e}-1)$ أو $\frac{3}{2}\le\sqrt{e}$ وأخيراً $2<\left(\frac{3}{2}\right)^2\le e$.
- وباختيار $x=\frac{1}{e}$ نستنتج أنّ $-1\le 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$ أو $\sqrt{e}\le 2$ وأخيراً $e\le 4$.
- وباختيار $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ نستنتج أنّ $e<\frac{2^8}{3^4}=\frac{256}{81}=3+\frac{13}{81}<4$.

③ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x=\ln e^3-2, y=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ❷ $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل

❶ $x=\ln e^3-2=1$ و $y=\ln(e\times e^{\frac{1}{2}})=\ln(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}$ إذن $x<y$.

❷ $x=\ln\frac{1}{e^3}=-\ln e^3=-3$ و $y=(-\ln e)^2=(-1)^2=1$ إذن $x<y$.

④ حلّ كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

❶ $\ln(1-x)=-2$ ❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

❸ $(\ln x)^2=16$ ❹ $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

❺ $\ln(2-x)\geq 1$ ❻ $\ln\dfrac{1}{x}>2$

الحل

❶ $\ln(1-x)=-2$

المعادلة المدروسة تكافئ $1-x=e^{-2}$ إذن $x=1-e^{-2}$.

❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

كلّ حل x لهذه المعادلة يحقق الشروط $x-2>0$ و $x+1>0$ و $\ln\dfrac{x-2}{x+1}=2$ أي

$$x>2 \quad \text{و} \quad x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$$

وهذا مستحيل لأنّ $\dfrac{e^2+2}{1-e^2}<0$ فليس لهذه المعادلة حلول.

❸ المعادلة $(\ln x)^2=16$

تكتب هذه المعادلة بالشكل $(\ln x-4)(\ln x+4)=0$. فإما $\ln x-4=0$، ومنه $x=e^4$. وإما $\ln x+4=0$، إذن $\ln x=-4$، ومنه $x=e^{-4}$. فمجموعة حلول المعادلة هي $\{e^4,e^{-4}\}$.

❹ المعادلة $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

إما $\ln x-1=0$، إذن $\ln x=1$، ومنه $x=e$. وإما $\ln x+2=0$، إذن $\ln x=-2$، ومنه $x=e^{-2}$. فللمعادلة المدروسة جذران $x_1=e$ و $x_2=e^{-2}$.

❺ المتراجحة $\ln(2-x)\geq 1$

هذه المتراجحة تكافئ $2-x\geq e$، إذن $x\leq 2-e$. فمجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,2-e]$.

❻ المتراجحة $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)>2$

هذه المتراجحة تكافئ $\dfrac{1}{x}>e^2$، إذن $0<x<\dfrac{1}{e^2}$. فمجموعة حلول المتراجحة هي المجال $]0,e^{-2}[$.

تَدرَّبْ الصفحة 165

① جد كلاً من النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\times0=0$.

❷ $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)$

لاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا: $(x^2-x)\ln x=(x-1)(x\ln x)$. ولكن

$\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$

إذن $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)=-1\times0=0$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}=\dfrac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{\ln u}$، وقد وضعنا $u=u(x)=\sqrt{x}$. ولكن

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}=+\infty$.

② فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$
3. $f(x)=x-\ln x$
4. $f(x)=x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$
6. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$
7. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
8. $f(x)=x(1-\ln x)$
9. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$
11. $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$
12. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

الحل

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ وهي نهاية f عند $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

2. $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=1-\dfrac{\ln x}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$.

3. $f(x)=x-\ln x$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$ ، ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4. $f(x)=x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. مجموعة تعريف f هي $I=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

- لحساب نهاية التابع f في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$ وعند -1 ، نكتب

$$f(x)=x+\frac{\ln(1+u)}{u}\quad\text{و}\quad u(x)=\frac{1}{x}.$$

نظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+1=-\infty$.

وبالمثل $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+1=+\infty$.

وأخيراً لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\big(1+u(x)\big)=0^+$ ، وجدنا $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=+\infty$ إذن

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-1+\infty=+\infty.$$

- لحساب نهاية التابع f عند 0 نكتب في حالة $x>0$ ما يأتي:

$$f(x)=x+x\ln(1+x)-x\ln x$$

ونظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ ، و $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+x)=0\times0$ نجد $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

5. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

6. $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{1}=0$.
- لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

7. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0^+$.

8. $f(x)=x(1-\ln x)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\ln x)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty$ ،

نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

- لحساب نهاية f عند الصفر، نكتب $f(x)=x-x\ln x$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0-0=0$

9. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$.

f معرف على مجموعة قيم x التي تحقق $\frac{x+1}{x-4}>0$. أي $I=]-\infty,-1]\cup]4,+\infty[$.

لنضع $u(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}u(x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{u\to0}\ln(u)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to4^+}u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-1)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ و نستنتج أنَّ

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

لحساب نهاية f في جوار $+\infty$، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0-0=0$.

11. $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x}{\ln x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$. وأخيراً $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

12. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي $I=]0,+\infty[$. نكتب $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ، ونضع $u=\dfrac{x+1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(x)=0$. نستنتج أنَّ

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$.

1. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

2. ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل

1. ليكن g التابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $g(x)=f(x)-(x+1)$، أي

$$g(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}-(x+1)=-\frac{\ln x}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. فالمستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

2. لدراسة الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ندرس إشارة $g(x)$، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$+$	0		$-$	

نستخلص من الجدول:

- في النقطة $(1,2)$: يتقاطع الخطان d و $\mathcal{C}$.
- على المجال $]0,1[$ لدينا $g(x)>0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم d.
- على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $g(x)<0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت المستقيم d.

④ في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

❶ $I=]2,+\infty[,\quad f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)$

❷ $I=]1,+\infty[,\quad f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

❸ $I=]0,+\infty[,\quad f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

❹ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\ln(1+x^2)$

الحل

❶ التابع $x\mapsto\ln(x-2)$ اشتقاقي على $I_1=]2,+\infty[$ والتابع $x\mapsto\ln(x+2)$ اشتقاقي على $I_2=]-2,+\infty[$، و f هو مجموع هذين التابعين، فهو اشتقاقي على $I_1\cap I_2=]2,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}.$$

❷ على $]1,+\infty[$ التابع $x\mapsto u(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً واشتقاقي، فالتابع f اشتقاقي على I.

ويكون

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{x^2-1}$$

❸ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$، وكذلك فإنّ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I. نستنتج إذن أنّ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \ln u(x)$ اشتقاقي على I وأنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-1/x^2}{1+1/x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}$$
$$= \frac{-1}{x^2(1+x)}$$

❹ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + x^2$ موجب تماماً واشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. ونجد $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2}$.

أنشطة

نشاط 1 تتمات عن التابع اللوغاريتمي ln

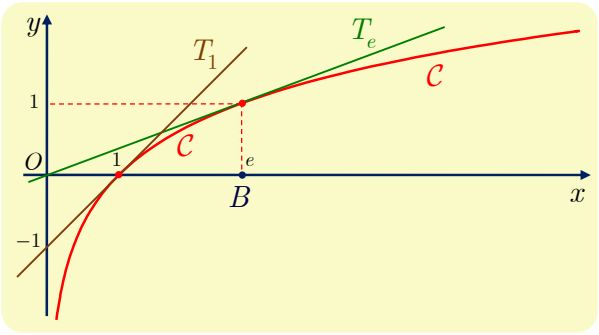
فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع ln في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

A نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها $a > 0$، و T_a هو المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

① a. أثبت أنّ $y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$ معادلةٌ للمماس T_a.

b. تحقّق أنّ المماس T_e للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $B(e,1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



② ليكن g التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$.

a. أثبت أنّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ وادرس إشارة $g'(x)$.

b. استنتج جدولاً باطراد g ومن ثمّ إشارة g.

③ استنتج مما سبق أنّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① استنتج من الفقرة السابقة أنَّه مهما كان $a>0$ و $x>0$ كان $\ln x \le \ln a + \dfrac{x-a}{a}$ (1)

② استنتج من (1) أنَّه مهما كان $a>0$ كان $\ln(a+1) - \ln a \le \dfrac{1}{a}$ (2)

③ *a.* يبدو الخط $\mathcal{C}$ على المجال $[10,11]$ وكأنه قطعة مستقيمة أفقية، لماذا؟

b. ما فاصلتا النقطتين I و J من الخط $\mathcal{C}$ اللتين ترتيباهما على التوالي 10 و 15؟ أمن الممكن وضع هاتين النقطتين على الخط $\mathcal{C}$؟ لماذا؟



تُفَسّر المعلومات السابقة أنَّ التابع $\ln$ «يسعى ببطء إلى $+\infty$».

الحل

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

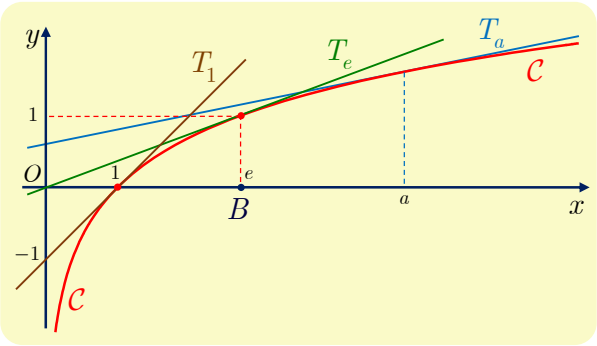
① *a.* بوجه عام معادلة المماس T_a للخط البياني $\mathcal{C}_f$ لتابع اشتقاقي f في النقطة التي فاصلتها a هي

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

في حالتنا $f(a) = \ln a$ و $f'(a) = \dfrac{1}{a}$. إذن معادلة T_a، هي $y = \ln a + \dfrac{1}{a}(x-a)$ أو

$$y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a .$$

b.



في حالة $a=e$ لدينا $\ln e = 1$ فتصبح معادلة المماس T_e في النقطة $B(e,1)$، كما يأتي: $y = \dfrac{1}{e}x$. وهي معادلة مستقيم مار بالمبدأ $O(0,0)$.

② بهدف تعيين الوضع النسبي للخط البياني للتابع اللوغاريتمي ومماسه في النقطة التي فاصلتها a منه، نصطنع التابع g الذي يمثل الفرق بين ترتيب نقطة فاصلتها x من T_a وترتيب النقطة التي فاصلتها x من $\mathcal{C}$، وليكن التابع $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$ المعطى في النص.

التابع g معرف على المجال $]0,+\infty[$ وهو اشتقاقي على هذا المجال وضوحاً. ولدينا

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}$$

إذن إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة $x-a$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نستنتج من جدول اطراد g أنَّه موجبٌ على $]0,+\infty[$ ولا ينعدم إلّا عند $x=a$. إذن يقع الخط البياني $\mathcal{C}$ تحت T_a ولا يشترك معه إلّا عند نقطة التماس التي فاصلتها $x=a$.

③ نستنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① المتراجحة (1) تعبّر عن المتراجحة $g(x)\geq 0$، التي أثبتنا صحتها.

② باختيار $x=a+1$ في المتراجحة (1) والإصلاح نحصل على (2).

③ *a.* استناداً إلى (2)، لدينا $0<\ln(11)-\ln(10)\leq\frac{1}{10}$ أي إن تغيّر ترتيب التابع اللوغاريتمي يكون صغيراً على المجال $[10,11]$ وهذا ما يجعل خطه البياني يبدو وكأنه قطعة مستقيمة أفقية.

b. من $\ln x_I=10$، و $\ln x_J=15$. نستنتج أنّ

$$x_I=e^{10}\approx 22\,026 \quad \text{و} \quad x_J=e^{15}\approx 3\,269\,017$$

وعليه، مهما اخترنا واحدة للقياس على محور الفواصل، فستكون x_J أبعد من x_I عن O بحوالي 148 مرة. وهذا يجعل الرسم غير ممكن على ورقة كتاب عادية الأبعاد.

نشاط 2 تابع اللوغاريتم العَشري log

① احسب $\log(1)$ و $\log(10)$، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

② نضع $k=\frac{1}{\ln(10)}$. أثبت أنَّ $0<k<1$.

③ باستعمال المساواة $\log x=k\ln x$، تحقّق من أنَّ التابع $\log$ يتمتع بجميع خواص التابع $\ln$.

④ ارسم في معلم متجانس واحد الخطّين البيانيين للتابعين $\log$ و $\ln$.

الحل

① نعلم أنَّ $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$، إذن، $\log(10^n)=\frac{\ln 10^n}{\ln 10}=\frac{n\ln 10}{\ln 10}=n$ ومنه

$\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$.

② لمّا كان $e<3$ استنتجنا أنّ $e<10$ ومنه $1<\ln 10$ أي $0<k=\frac{1}{\ln 10}<1$.

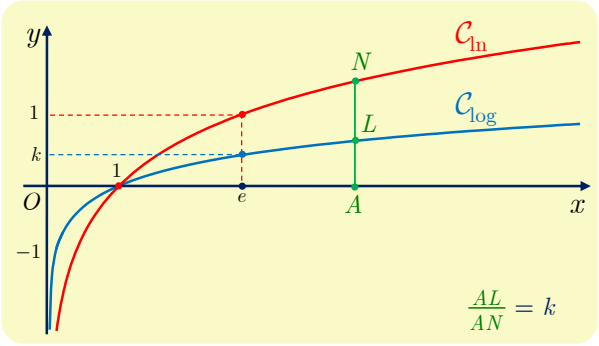
في الحقيقة، لمّا كان $e^2<10$ نستنتج أنّ $0<k<\frac{1}{2}$.

③ لما كان k ثابتاً عددياً، فمجموعة تعريف $\log$ هي نفسها مجموعة تعريف $\ln$ أي $]0,+\infty[$.

ولأنّ $k > 0$ استنتجنا من خواص التابع اللوغاريتمي $\ln$ أنّ $\log$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ وأنّ

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty .$$

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع $\log$ بالرمز $\mathcal{C}_{\log}$ وإلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



نشاط 3 حصر المقدار $\ln(1+x)$

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

① ادرس على $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f : x \mapsto \ln x + 1 - x$، واستنتج في حالة $x > 0$ صحة المتراجحة

$$\ln x \leq x - 1 \cdots (1)$$

② a. بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t > -1$، يكون $\ln(1+t) \leq t$.

b. وكذلك باختيار $x = \frac{1}{1+t}$، أثبت أنّه في حالة $t \geq -1$، يكون $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة:

في حالة $t > -1$ لدينا $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t \cdots (2)$

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $x = \frac{1}{p}$.

① أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.

② نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

a. أثبت أنّ $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

b. استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

c. احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n = 10$.

الحل

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

①

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ ، فلدينا

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1\right).$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\times(-1)=-\infty$.

- يحسب مشتق f بسهولة بالعلاقة $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ ، فإشارته تتفق مع إشارة $(1-x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

نجد من جدول تغيرات f أنّ $f(x)\le 0$ أياً كان x من $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $\ln x+1-x\le 0$. ومنه المتراجحة (1) .

ملاحظة. كان بالإمكان إثبات هذه المتراجحة مباشرة اعتماداً على خاصة كون الخط البياني للتابع اللوغاريتمي يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها تساوي 1 .

② $a.$ في حالة $t>-1$ يكون $x=t+1>0$ وبالتعويض في (1) ، فنحصل على $\ln(1+t)\le t$.

$b.$ وكذلك يكون $x=\frac{1}{1+t}>0$ ، وبالتعويض في (1) ، نحصل على $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\frac{1}{1+t}-1$ ،

أي $-\ln(1+t)\le-\frac{t}{1+t}$ أو $\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)$ ، وتنتج (2) من المتراجحتين السابقتين.

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

① نختار $t=\frac{1}{p}$ في المتراجحة (2) ، فنحصل على

$$\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$$

② $a.$ نلاحظ أولاً أنّ u_n هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين $n+1$ و $2n$.

ينتج من ذلك وباستعمال الطرف الأيسر أي $\frac{1}{p+1} \le \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ من المتراجحة السابقة أنّ

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{p=n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{p=n+1} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{p=2n-2} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{p=2n-1} \\ &\le \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\ &= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2 \end{aligned}$$

وبالمثل، بالاستفادة من الطرف الأيمن أي $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$ من المتراجحة السابقة، وملاحظة أنّ $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$، ومن ثمّ فإنّ $u_n + \frac{1}{2n}$ هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين n و $2n-1$. نجد

$$\begin{aligned} u_n + \frac{1}{2n} &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{p=n} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{p=n+1} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-2}}_{p=2n-2} + \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{p=2n-1} \\ &\ge \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\ &= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2 \end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$ في حالة $n \ge 1$.

b. يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالصيغة $\ln 2 - \frac{1}{2n} \le u_n \le \ln 2$، وباستعمال مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

c. نستعمل المتراجحة السابقة بوضع $n = 10$، فنحصل على $u_{10} \le \ln 2 \le u_{10} + \frac{1}{20}$، نستعمل آلة حاسبة لحساب $u_{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}$، فنجد $0.668 \le u_{10} \le 0.669$ إذن $0.668 \le \ln 2 \le 0.669 + 0.05$، ومن ثَمّ $0.669 \le \ln 2 \le 0.719$.

نشاط 4 دراسة تابع

ليكن g التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $g(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$.

وليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني المُمثّل للتابع g.

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x>0$.

② a. أثبت أنّ g مستمرٌ عند الصفر.

b. ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخط $\mathcal{C}$ عند مبدأ الإحداثيات.

③ a. ما نهاية g عند $+\infty$؟

b. احسب $g'(x)$ في حالة $x>0$، ثُمّ ادرس تغيرات g.

c. أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

① نعلم أن الخط البياني للتابع اللوغاريتمي $\ln$ يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي المستقيم الذي معادلته $y=x-1$، ومنه $\ln x\leq x-1$ في حالة $x>0$ وهذا يُكافئ قولنا $x-\ln x\geq 1$ في حالة $x>0$. إذن مقام g لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع g معرّف إذن في هذه الحالة.

② a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ ولدينا $g(0)=0$، فالتابع g مستمرٌ عند الصفر.

b. ليكن t تابع معدل تغير g عند الصفر، أي التابع المعرّف في حالة $x>0$ بالصيغة

$$t(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\dfrac{x}{x-\ln x}-0}{x}=\frac{1}{x-\ln x}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$ فالتابع g اشتقاقي عند الصفر و $g'(0)=0$. ولأنّ $g(0)$ استنتجنا أنّ محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مماس للخط البياني للتابع g في المبدأ.

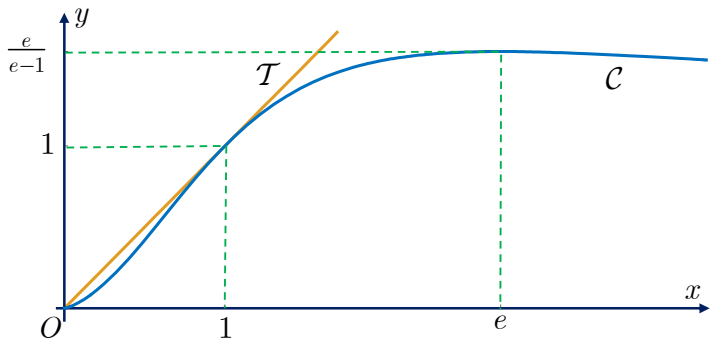
③ a. في حالة $x>0$ لدينا $g(x)=\dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.

b. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$، وهو ينعدم عند $x=e$. وبهذا نجد الجدول الآتي بتغيرات g:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

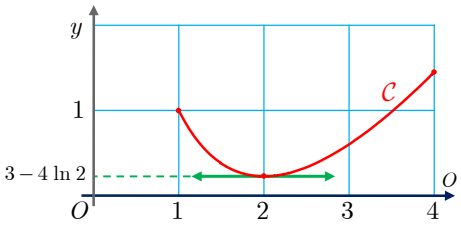
c. لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1، فيكون ترتيبها $g(1) = \frac{1}{1-0} = 1$، إذن إحداثيتا A هما $(1,1)$. أمّا معادلة المماس في A فهي $y = g(1) + g'(1)(x-1) = x$

ونجد في الشكل الآتي الخط البياني للتابع g والمماس $\mathcal{T}$:



تمرينات ومسائل

1 نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



① أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

② استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات أنَّ:

$a+b=1$ و $2a+c=0$ و $2a+b+c\ln 2=3-4\ln 2$.

③ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل

① f هو مجموع تابعين، أحدهما $x\mapsto ax+b$ وهو تابع اشتقاقي على $[1,4]$، والآخر $x\mapsto \ln x$ وهواشتقاقي على $[1,4]$ أيضاً. نستنتج أنَّ f اشتقاقي على $[1,4]$. ولدينا

$$f'(x)=a+c\times\frac{1}{x}=a+\frac{c}{x}.$$

② لدينا من الشكل:

- $f(1)=1$، إذن $1=a+b+c\ln(1)$، أي $a+b=1$ (1)
- $f(2)=3-4\ln 2$، إذن $3-4\ln 2=2a+b+c\ln 2$ (2)
- $f'(x)=a+\frac{c}{x}$ والمماس في النقطة $(2,1)$ أفقي، أي $f'(2)=0$، ومنه $a+\frac{c}{2}=0$ إذن $2a+c=0$ (3)

③ بحل جملة المعادلات الثلاث نجد $(a,b,c)=(2,-1,-4)$ ومنه عبارة f :

$$f(x)=2x-1-4\ln x.$$

2 ليكن a و b عددين حقيقين. في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من $\mathcal{C}$، والمماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$. استفدْ من هذه المعطيات لتعيّن a و b.

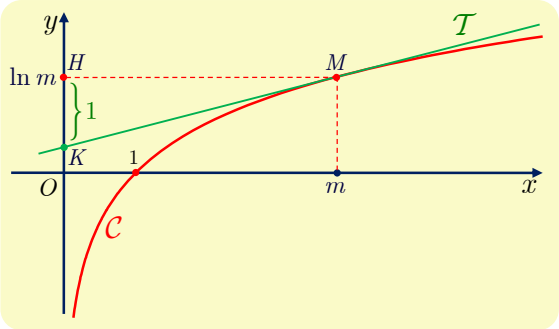
الحل

$A(1,0)$ نقطة من $\mathcal{C}$، إذن $f(1)=0$ إذن $a+b=0$. أما مشتق f فيعطى بالصيغة

$$f'(x)=a+\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

ميل المماس في النقطة $A(1,0)$ يساوي ميل المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$، أي $f'(1)=3$، إذن $a+1=3$ ومنها $a=2$. ومن العلاقة $a+b=0$ نحصل على $b=-2$.

3 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m.



① جد، بدلالة m، معادلةً للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

② لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ مع هذا المحور.

a. أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m-1$، أياً يكن $m>0$.

b. استنتج أنَّ $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$.

c. استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

الحل

① إنّ $\mathcal{T}$ يقبل $y=\underbrace{\ln m}_{f(m)}+\underbrace{\frac{1}{m}}_{f'(m)}(x-m)$ أو $y=\frac{x}{m}+\ln m-1$ معادلة له.

② *a.* يقطع $\mathcal{T}$ محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

b. لمّا كانت إحداثيتا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنَّ $H(0,\ln m)$. ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

c. لتكن M نقطة كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(m+1)=0$ جذران مختلفان؟

الحل

المعادلة معرفة بشرط $m+1>0$. وهي في هذه الحالة تكافئ $(x-1)^2=1-\ln(m+1)$. فلها جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $1-\ln(m+1)>0$ أو $m<e-1$. ومنه علينا أن نختار m من المجال $]-1,e-1[$ ليكون للمعادلة المعطاة جذران حقيقيان مختلفان.

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

a. أثبت أنّ $S_n=\ln(n+1)$.

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

الحل

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 1=0$.

② *a.* لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n=\ln(n+1)$.

الخاصة $E(1)$ محققة لأنّ $S_1=u_1=\ln 2=\ln(1+1)$. لنفترض أنّ $E(n)$ محقّقة عندئذ

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\ln(n+1)+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\ln\left((n+1)\times\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln(n+2)$$

فالخاصة $E(n+1)$ محقّقة، ونكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $S_n=\ln(n+1)$ أياً كان $n\geq 1$.

② *b.* لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

6 أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع

$$f:x\mapsto x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$. (ضع $X=\frac{1}{x}$).

الحل

نلاحظ أنّ

$$f(x)-(x-1)=1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{\ln(1+X)}{X}$$

إذ وضعنا $X=\dfrac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to\infty}X(x)=0$ و $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ إذن

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=\lim_{X\to0}\left(1-\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=1-1=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 نتأمّل التابع f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}=x(1-\ln x)=x-x\ln x$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ ، استنتجنا $\lim\limits_{x\to0}t(x)=0$ ، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$.

8 التوابع الآتية معرفة على $I=\mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ ② $f:x\mapsto x-x\ln x$

③ $f:x\mapsto x\ln x$ ④ $f:x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x}$

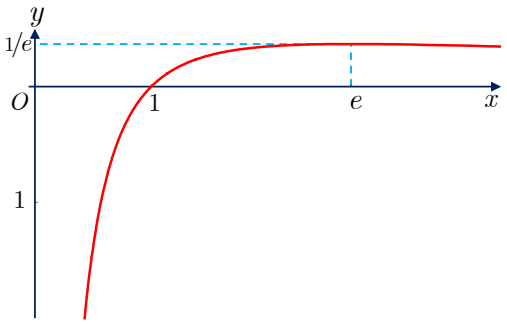
⑤ $f:x\mapsto x-\ln x$ ⑥ $f:x\mapsto x^2-8x+8+6\ln x$

الحل

① $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنَّ المحورين الإحداثيين خطان مقاربان للخط $\mathcal{C}$.
- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x=e$.
- جدول تغيرات f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

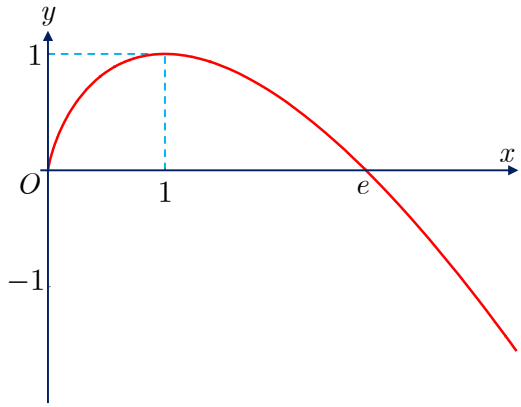


- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

② $f(x)=x-x\ln x$

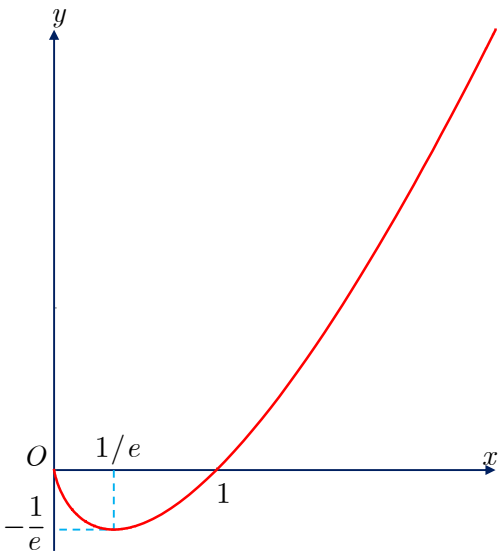
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ $f(x)=x\big(1-\ln x\big)$
و $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1-\ln x\big)=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $f'(x)=-\ln x$ ينعدم f' فقط عند $x=1$.
- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$



- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1-\ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=+\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.



③ $f(x) = x\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \ln x + 1$ ينعدم f' فقط عند $x = 1/e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

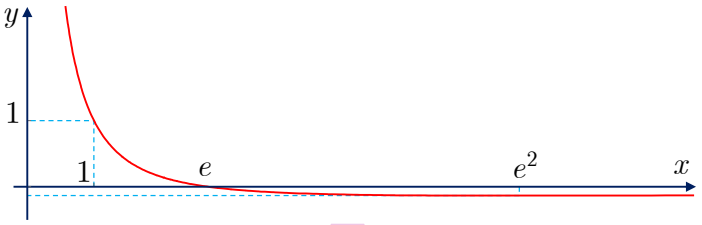
ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = -\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.

④ $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$. وكذلك $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$. وينعدم f' فقط عند $x = e^2$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	0

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$.



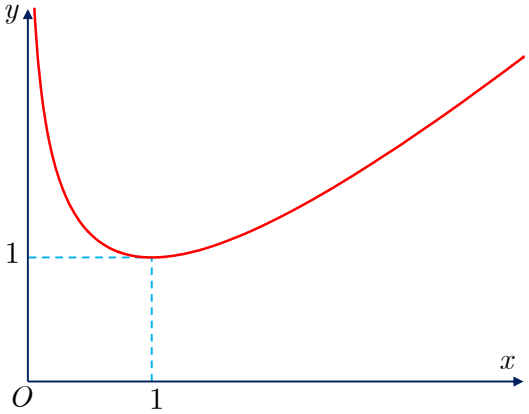
⑤ $f(x) = x - \ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

- $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$، وينعدم f' فقط عند $x = 1$.
- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



- الخط البياني في الشكل المجاور.

⑥ $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 8x + 8) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

- حساب المشق:

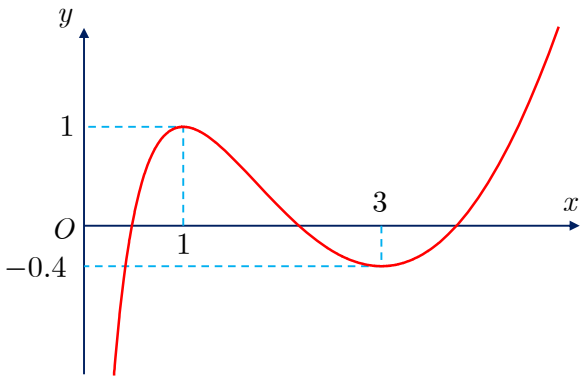
$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{x} = \frac{2(x-1)(x-3)}{x}$$

ينعدم f' فقط عند $x = 1$ و $x = 3$.

- جدول تغيرات f:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$\underset{\approx -0.4}{6\ln 3 - 7}$	↗	$+\infty$

- الخط البياني في الشكل الآتي:



ماذا نستنتج بشأن تقاطع هذا الخط مع محور الفواصل؟

9 في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

الحل

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

التابع للوغاريتمي $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي وموجبٌ تماماً على $I=]e,+\infty[$ المعطى، إذن يكون التابع $u:x\mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقياً على I ومشتقه $u'(x)=\dfrac{\ln' x}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$. وهو أيضاً موجبٌ تماماً على I (لأنّ $x>e$ يقتضي $\ln x>\ln e=1$ ومنه $u(x)=\ln(\ln x)>\ln 1=0$)، إذن يكون التابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقياً على I ومشتقه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

التابع $u:x\mapsto\dfrac{x+1}{\ln x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي عليه ومشتقه $u'(x)=\dfrac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}$.

فالتابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقي على $I=]1,+\infty[$. ومشتقه

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\times\frac{\ln x}{x+1}=\frac{x\ln x-x-1}{x(x+1)\ln x}$$

ملاحظة. على المجال $I=]1,+\infty[$ المقداران $\ln x$ و $x+1$ موجبان تماماً ومن ثَمّ استناداً إلى قواعد اللوغاريتم يكتب f بالصيغة المُكافئة $f(x)=\ln(x+1)-\ln(\ln x)$، وعندئذ نستنتج من كون كلٍّ من التابعين $x\mapsto\ln(\ln x)$ و $x\mapsto\ln(x+1)$ اشتقاقياً على I أنّ f نفسه اشتقاقي على I ونحسب

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x\ln x}$$

على I. هنا نعلّل اشتقاقية $x\mapsto\ln(\ln x)$ على I بكون $x\mapsto\ln x$ اشتقاقياً وموجباً تماماً على I.

لنتعلّم البحث معاً

10 حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}\qquad (1)$$

احسب $\dfrac{a}{b}$.

نحو الحلّ

يؤكد النص على وجود عددين a و b يحققان العلاقة (1) (وليس مطلوباً حسابهما). بل حساب قيمة $\frac{a}{b}$. علينا إذن استبعاد اللوغاريتمات من العلاقة، ولهذا سنسعى للوصول إلى علاقة من النمط $\ln A = \ln B$، ومن ثم نستنتج أنَّ $A = B$.

1. أثبت أنَّ $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$.
2. استنتج أنَّ $a + b = 3\sqrt{ab}$، ومن ثم $a^2 + b^2 - 7ab = 0$ (2).

لاستنتاج قيمة $\frac{a}{b}$، يمكننا التفكير بالآتي:

- القول إنَّ a حلٌّ للمعادلة $x^2 - 7bx + b^2 = 0$ مما يسمح بحساب a بدلالة b. ثم استنتاج $\frac{a}{b}$ بالتقسيم على b.
- تسمية النسبة المجهولة $k = \frac{a}{b}$، فيكون $a = bk$ والسعي للحصول على مساواة لا تحوي إلا k. أثبت أنَّ $k^2 - 7k + 1 = 0$ ثم أكمل (لا تنسَ أنَّ $k > 0$).

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. لمّا كان $a > 0$ و $b > 0$، كان $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$.

2. العلاقة (1) تكافئ إذن $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{ab}$ أو $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ وهي تُكافئ بعد الإصلاح والتربيع $(a+b)^2 = 9ab$ أو $a^2 - 7ab + b^2 = 0$، وهي العلاقة (2).

لتكن $k = \frac{a}{b}$ النسبة المطلوبة. نستنتج من (2) بعد تعويض $a = kb$ أنّ $(k^2 - 7k + 1)b^2 = 0$ ولكن b لا يساوي الصفر إذن $k^2 - 7k + 1 = 0$. لهذه المعادلة جذران موجبان هما $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$، وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $k = a/b$.

11 حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy = a^2 & (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & (2) \end{cases}$$

نحو الحلّ

إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $x>0$ و $y>0$. (لماذا؟). يمكننا التفكير كمافي السابق بالسعي لاستبعاد اللوغاريتمات من المعادلة (2) وكتابها بالصيغة $\ln A=\ln B$ التي تقتضي $A=B$. عندها سنكون في مواجهة جملة معادلتين بالمجهولين x و y فقط. ولكن ليست هناك أية قاعدة تفيد في تبسيط $(\ln x)^2+(\ln y)^2$ فهذه المحاولة عقيمة. يمكننا أيضاً التفكير بتعويض $y=\frac{a^2}{x}$ في المعادلة (2)، ولكن النتيجة ليست مشجعة.

لنفكر إذن بتحويل العلاقة (1) إلى العلاقة اللوغاريتمية $\ln xy=\ln a^2$، عندها سنحصل على جملة معادلتين بالمجهولين $\ln x$ و $\ln y$.

افترضْ أنَّ (x,y) حلٌّ للجملة، ثم تحقّق أنَّ $\ln x+\ln y=2\ln a$.

نضع إذن $X=\ln x$ و $Y=\ln y$، ثم نحسب منهما x و y. كما نضع تبسيطاً للكتابة $\ln a=A$. (نذكّر أنّ حل المعادلة $\ln t=T$ هو $t=e^T$).

1. أثبت، وفق تلك الإجراءات، أنَّ $Y=2A-X$ وأنَّ $4X^2-8AX+3A^2=0$.
2. استنتج أنَّ X تقبل قيمتين $X_1=\frac{A}{2}$ و $X_2=\frac{3A}{2}$، ثم استنتج قيم Y الموافقة.
3. تحقّق أنَّ $(x=\sqrt{a}$ و $y=a\sqrt{a})$ أو $(y=\sqrt{a}$ و $x=a\sqrt{a})$.

وبالعكس تحقّق أنّ كلاً من $(x,y)=(a,a\sqrt{a})$ و $(x,y)=(a\sqrt{a},a)$ هو حلّ للجملة المعطاة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لدينا $x>0$ و $y>0$. نظراً إلى وجود المقدارين $\ln x$ و $\ln y$ في المعادلة (2). بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (1) نجد لها الصيغة المكافئة $\ln x+\ln y=2\ln a$.

نضع $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ و $\ln a=A$ فنكون بهذا الترميز أمام الجملة:

$$\begin{cases} X+Y=2A & ① \\ X^2+Y^2=\frac{5}{2}A^2 & ② \end{cases}$$

من المعادلة ① نجد $Y=2A-X$. نعوض في المعادلة ② فنحصل على

$$X^2+(2A-X)^2=\frac{5}{2}A^2$$

أو $4X^2-8AX+3A^2=0$.

نلاحظ أنّ $4X^2-8AX+3A^2=(2X-A)(2X-3A)$ إذن تقبل الجملة المدروسة حلّين هما

$$(X,Y)=\left(\frac{A}{2},\frac{3A}{2}\right) \text{ و } (X,Y)=\left(\frac{3A}{2},\frac{A}{2}\right)$$

وبالعودة إلى x و y نجد الحلين

$$(x,y)=\left(\sqrt{a},a\sqrt{a}\right) \text{ و } (x,y)=\left(a\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$$

12 مسألة وجود

أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{a}{b}$ (1) ؟

نحو الحلّ

- الفكرة المفيدة في البحث عن عددين a و b، تعتمد على تجميع كل ما يتعلّق بالعدد a من جهة وكل ما يتعلّق بالعدد b من جهة أخرى. نبحث إذن عن a و b، بحيث $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$. هذا يوحي إلينا أن ندرس التابع f المعرَّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. وتعود المسألة إلى البحث عن عددين مختلفين a و b يحققان $f(a)=f(b)$.

1. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها (النهايات عند طرفي مجموعة التعريف وجهة التغير).
2. ارسم الخط البياني للتابع f.

- لندرس استناداً إلى جدول التغيرات أو بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x)=m$. وذلك تبعاً لقيم m.

1. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في حالة $m>1/e$، $m=1/e$، $0<m<1/e$ وأخيراً $m<0$.
2. استنتج الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان.
3. استنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$، يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- المساواة (1) تكافئ $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$، يوحي لنا هذا بدراسة تغيرات التابع $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

- **النهايات.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

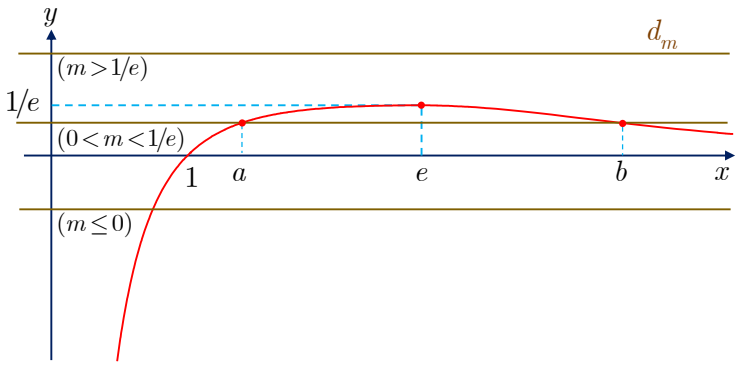
نستنتج أنَّ المحورين الإحداثيين مستقيمان مقاربان للخط البياني للتابع.

- **المشتق.** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. وينعدم f' عند $x=e$.

● **جدول التغيرات.**

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

● **الخط البياني.**



✌ لنرمز بالرمز $S(m)$ إلى مجموعة حلول المعادلة $f(x)=m$. نستنتج من الرسم البياني للتابع f ما يأتي:

❶ في حالة $m>\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\varnothing$ ، فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الصفر.

❷ في حالة $m=\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\{e\}$ فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

❸ في حالة $0<m<\frac{1}{e}$ $S(m)=\{a,b\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$ وبالرمز b إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]e,+\infty[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي اثنين.

❹ في حالة $m\leq 0$ ، $S(m)=\{a\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

نستنتج أنَّ الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان هو $0<m<\frac{1}{e}$.

نستنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$ ، فيوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

13 إثبات متراجحة

أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ محققة، أيّاً يكن x من $]0,1[$.

نحو الحلّ

✌ توحي إلينا المتراجحة $\ln x\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ أن ندرس التابع f المعرَّف على $]0,1[$ بالعلاقة $f(x)=\ln(x)\cdot\ln(1-x)$. أثبت أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على المجال $]0,1[$.

✌ لندرس إذن التابع $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على $]0,1[$.

1. احسب $g'(x)$ واستنتج إشارة g على كل من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
2. استنتج دراسة تغيرات التابع f، وأثبت المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ في أغلب الحالات يؤول إثبات متراجحة إلى دراسة تغيّرات تابع. لندرس التابع f المعرَّف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\ln x\ln(1-x)$.

▪ نلاحظ أوّلاً أنّ الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$، والنقطة $\frac{1}{2}$ هي منتصف المجال $]0,1[$، ومهما تكن x من $]0,1[$ يكن

$$f(1-x)=\ln(1-x)\ln x=\ln x\ln(1-x)=f(x)$$

إذن يكفي أن ندرس اطراد التابع f عندما تتحول قيم x في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

▪ لدراسة اطّراد التابع f على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ نحسب المشتقّ فنجد:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln x\times\frac{-1}{1-x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$$

المقام موجبٌ تماماً على مجال الدراسة، إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $g(x)$ حيث g هو التابع المعرّف على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بالعلاقة $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

✌ دراسة إشارة $g(x)$.

1. نلاحظ أنّ إشارة g على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ ليست واضحة، فعلينا إذن دراسة التابع g لتعيينها. ولكن نلاحظ أنّ g اشتقاقي على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ وأنّ:

$$g'(x)=-2-\ln(1-x)-\ln x=-\ln\left(e^2x(1-x)\right)$$

التابع g' ينعدم مرة واحدة في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ عند ما $e^2x(x-1)=1$ أي عند

$$x=\alpha=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^{-2}}\right)$$

وعليه يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات g كما يأتي

x	0		α		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	$+$		0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

إذ استفدنا من كون $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. النتيجة المهمة هي أنّ g موجب تماماً على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، أي إنّ $f'(x)=\frac{1}{x(1-x)}g(x)$ موجب تماماً على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، فالتابع f متزايدٌ

على المجال $]0,\frac{1}{2}]$. وبسبب تناظر الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى المستقيم $x=\frac{1}{2}$ نستنتج أنّ f متناقص تماماً على $[\frac{1}{2},1[$، و=أخيراً نلاحظ أنّ في حالة $x\in]0,1[$ لدينا

$$f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{-x}\times x\ln x$$

ولكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$، وبسبب التناظر لدينا أيضاً $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln^2 2$	$\searrow$	0

ومنه

$$\forall x\in]0,1[,\ \ \ln x\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

الحل

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$.

المعادلة معرّفة على $I=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. وهي تكافئ $|x-2||x+2|=1$ أو $|x^2-4|=1$. فإمّا أن يكون $x^2=5$ أو يكون $x^2=3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$S=\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

المعادلة معرّفة على $I=]-4,2[\cup]2,+\infty[$. وهي تُكافئ على هذه المجموعة

$$|x-2|(x+4)=8$$

- فإما أن يكون $x>2$ و $x^2+2x-16=0$، ومنه $x=\sqrt{17}-1$ (الجذر الآخر مرفوض لأنه سالب ولا يحقق $x>2$).
- أو يكون $x<2$ و $x^2+2x=0$، ومنه $x=0$ و $x=-2$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ② هي $\{-2,0,\sqrt{17}-1\}$.

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

مجموعة المعادلة ③ هي $I=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},0,1\}$. وهي تكافئ عندئذ $|2x^2+x-3|=x^2$

- فإما أن يكون $x^2+x-3=0$، ومنه $x\in\left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.
- أو يكون $3x^2+x-3=0$، ومنه $x\in\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right\}$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ③ هي

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ \ln x+\ln y=\ln 3\end{cases}$ ② $\begin{cases}2\ln x+\ln y=7\\ 3\ln x-5\ln y=4\end{cases}$ ③ $\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=-12\\ \ln(xy)=1\end{cases}$

الحل

① هنا الجملة تكافئ $x>0$ و $x^2+y^2=10$ و $xy=3$. إذن العددان x و y موجبان ومربع مجموعهما يساوي $(x+y)^2=10+2xy=10+6=16$. إذن $x+y=4$ و $xy=3$. فالعددان x و y هما جذرا المعادلة $T^2-4T+3=0$. فمجموعة حلول ① هي $\{(1,3),(3,1)\}$.

② نضع $\ln x=a$ و $\ln y=b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases}2a+b=7\\ 3a-5b=4\end{cases}$ وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد $(a,b)=(3,1)$ ومنه $(x,y)=(e^3,e)$، وهو الحل المطلوب.

③ نضع مجدداً $\ln x=a$ و $\ln y=b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases}ab=-12\\ a+b=1\end{cases}$ إذن a و b هما جذرا المعادلة $T^2-T-12=0$ أو $(T-4)(T+3)=0$. إذن $(a,b)\in\{(4,-3),(-3,4)\}$ ومنه $(x,y)\in\{(e^4,e^{-3}),(e^{-3},e^4)\}$، وهو الحل المطلوب.

16 حلّ كلاً من المعادلة $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$، والمتراجحة $(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$.

مساعدة: ضع $X=\ln x$.

الحل

نضع $X = \ln x$ فتصبح

- المعادلة $X^2 - 2X - 3 = 0$ أو $(X-3)(X+1) = 0$. إذن $X \in \{-1, 3\}$ ومنه $x \in \{e^{-1}, e^3\}$.
- تصبح المتراجحة $X^2 - 2X - 3 \geq 0$ أي $X \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$، ومنه $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left[e^3, +\infty\right[$.

17 ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

① a. تحقّق أنّ $P(-1) = 0$.

b. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

c. حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$.

الحل

① a. هذا تعويض مباشر.

b. لمّا كان $P(-1) = 0$ استنتجنا أنّ $P(x)$ يقبل القسمة الإقليدية على $x+1$ ويكون $Q(x)$ خارج هذه القسمة. وبإجراء القسمة نجد $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$، أي $P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$.

c. بملاحظة أنّ $Q(x) = (x+2)(2x-1)$، نستنتج أن $P(x) = (x+1)(x+2)(2x-1)$. وهذا يتيح لنا وضع جدول إشارة $P(x)$ كما يأتي :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومن ثم نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$ هي $\left]-\infty, -2\right] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

② المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

تُكافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

كافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

$$\ln(x^2(2x+5)) \leq \ln(2-x) \quad \text{و} \quad 2x+5 > 0 \quad \text{و} \quad x > 0$$

أو

$$x^2(2x+5) \leq 2-x \quad \text{و} \quad x > 0$$

وأخيراً

$$P(x) \leq 0 \quad \text{و} \quad x > 0$$

واستناداً إلى دراستنا السابقة مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المتراجحتين هي $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I=]-1,1[$ وفق $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

① أثبت أنَّ f تابع فردي.

② a. أثبت أنَّ f اشتقاقي على I.

b. ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع f.

الحل

① مجال التعريف $I=]-1,1[$ متناظر بالنسبة إلى الصفر. وفي حالة x من I لدينا

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$$

فالتابع f فردي.

② a. التابع $u:x\mapsto\dfrac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I، إذن $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقي على I. ولدينا $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2}{1-x^2}$.

b. من الواضح أنّ $f(0)=0$ و $f(x)$ يكتب على I بالصيغة المُكافئة

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

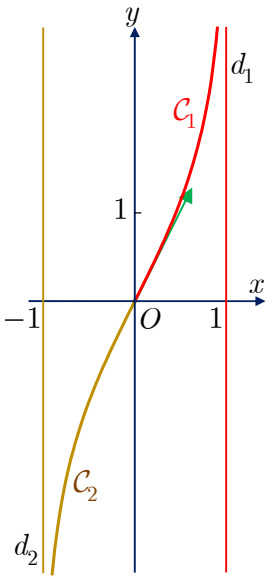
ولكن $\lim\limits_{x\to1}\ln(1-x)=\lim\limits_{t\to0^+}\ln t=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم d_1 الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك، من صيغة $f'(x)$، نرى أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,1[$، فللتابع f جدول التغيرات الآتي على $[0,1[$:

جدول بتغيرات f:

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

③ الخط البياني للتابع f.

المطلوب هو رسم الخط البياني للتابع f على مجموعة تعريفه I، وليكن هذا الخط $\mathcal{C}$. لكننا درسنا التابع على المجال $I_1=[0,1[$، فلنرسم الخط البياني $\mathcal{C}_1$ للتابع f على المجال I_1 منطلقاً من المبدأ O ومتفقاً مع تزايد التابع ليقارب المستقيم d_1. ولما كان التابع f فردياً، كان خطه البياني $\mathcal{C}$ متناظراً بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات. فلرسم $\mathcal{C}$ يكفي أن نرسم $\mathcal{C}_2$، نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى المبدأ O، فيكون $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$.



19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $I=]1,+\infty[, \quad f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

② $I=\mathbb{R}, \quad f(x)=\ln(1+x^2)$

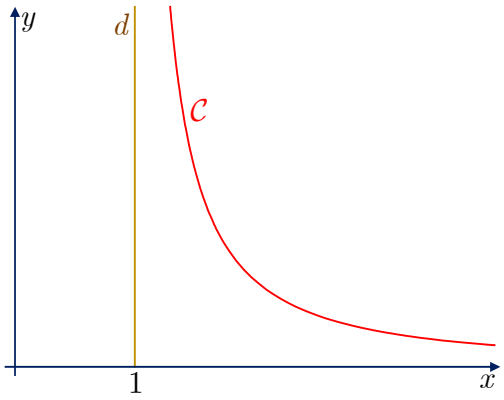
③ $I=]0,+\infty[, \quad f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

الحل

① التابع $x\mapsto f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ على $I=]1,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$، إذن المستقيم d الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.



- التابعان $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto x$ موجبان ومتزايدان تماماً على I، إذن كذلك يكون جداء ضربهما $x\mapsto x\ln x$، وهذا يقتضي أنّ f تابع متناقص تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

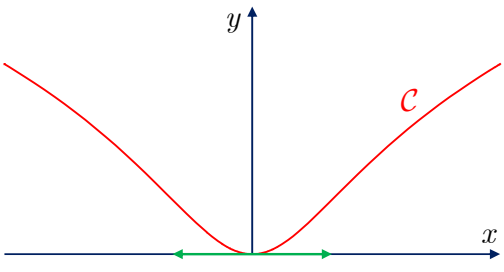
② التابع $x\mapsto f(x)=\ln(1+x^2)$ على $I=\mathbb{R}$.

التابع f تابع زوجي، لأنّه معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ويحقق $f(-x)=f(x)$ أياً كانت x.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، و $f(0)=0$.

- التابع $x\mapsto 1+x^2$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ ويأخذ قيمه في $[1,+\infty[$، والتابع $x\mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $[1,+\infty[$ إذن f تابع متزايد تماماً على $[0,+\infty[$. ولأنّ f زوجي استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

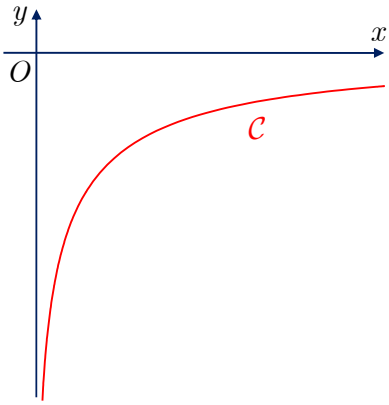
لم نحسب المشتق لدراسة التغيرات، ولكن من المفيد ملاحظة أن كون f اشتقاقياً في المبدأ، وكون التابع زوجياً يجعلان المماس للخط البياني في المبدأ أفقياً. هذه الملاحظة تفيد في جعل الرسم أكثر دقة.

③ التابع $x \mapsto f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ على $I =]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ، إذن نستنتج أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، فمحور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• التابع $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ متزايد تماماً على I ويأخذ قيمه في $]0,1[$، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $]0,1[$ إذن f تابع متزايد تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :



x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

20 في معلمٍ متجانس، $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \le f(x)$ أياً يكن x من I.

② أثبت أنَّ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيرات كلٍ من f و g وارسم الخطين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل

① نتأمّل التابع h المعرّف على I بالصيغة $h(x) = f(x) - g(x)$. نلاحظ أنّ h اشتقاقي على I وأنّ $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنّ $h(x) \ge h(0) = 0$ أياً كانت x من I. إذن $f(x) \ge g(x)$ أياً يكن x من I.

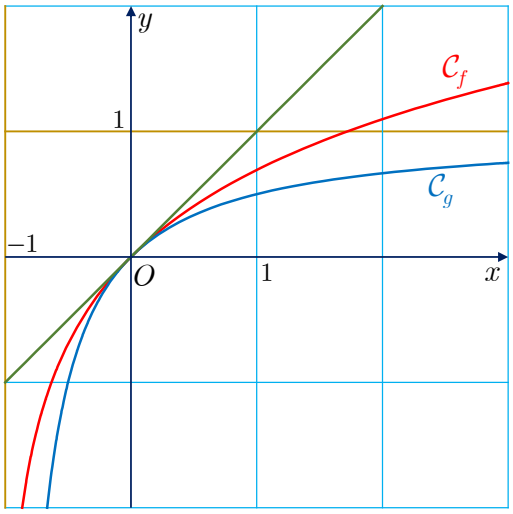
② باستعمال ترميز السؤال السابق نلاحظ أنّ $h(0) = h'(0) = 0$ هذا يبرهن أنّ $f(0) = g(0) = b$ و $f'(0) = g'(0) = a$ ، ومن ثَمّ فالمستقيم الذي معادلته $y = ax + b = x$ هو مماس مشترك للخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ في المبدأ.

③ تغيرات f . التابع f تابع متزايد تماماً على I ويسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_f$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تغيرات g . التابع g تابع متزايد تماماً (مشتقه موجب) على I ويسعى إلى 1 عند $+\infty$ ، فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$ ، وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$. ومنه جدول التغيرات الآتي

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	1



الرسم مبين في الشكل المجاور.

21 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ ، كان $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط $\mathcal{C}$ باتجاه التراتيب الموجبة. وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

يُكتب f على مجموعة تعريفه بالصيغة المكافئة : $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ مما يسهل عملية اشتقاقه لنجد

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}=\underbrace{\frac{x+1}{x(x-1)}}_{>0}(x-2)$$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-2)$، لأنَّ الكسر موجب تماماً على المجال I .

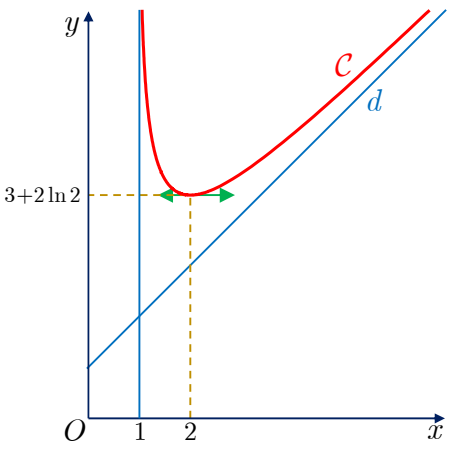
ومنه جدول التغيرات الآتي.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$ ≈ 4.4	$\nearrow$	$+\infty$

② لنتأمّل

$$h(x) = f(x) - (x+1) = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.



③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x-1} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) > \ln 1 = 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

④ نرسم $\mathcal{C}$ مقارباً Δ باتجاه التراتيب الموجبة متفقاً مع تناقص التابع حتى النقطة $M\big(2, f(2)\big)$، ومن ثم نرسمه مقارباً d في جوار $+\infty$ ومتفقاً مع تزايد التابع.

22 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أنّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① التابع $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ موجبٌ ومتزايد تماماً على I (لأنّ مشتقه $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ موجبٌ تماماً)، وعليه يكون $x \mapsto \ln\frac{x}{1+x}$ متزايداً على I، لأنه تركيب تابعين متزايدين تماماً، وكذلك فإنّ $x \mapsto x-4$ تابع متزايدٌ تماماً على I. نستنتج إذن أنّ التابع f متزايدٌ تماماً.

② لنتأمّل

$$h(x) = f(x) - (x-4) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x+1} < 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) < \ln 1 = 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت المقارب d.

④ لإنجاز الرسم يلزمنا استكمال جدول تغيرات f بحساب نهاية التابع عند طرفي مجموعة تعريفه. لمّا كان للتابع f مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y = x-4$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-4) = +\infty$$

ومن جهة أخرى يُكتب f على I بالصيغة المكافئة :

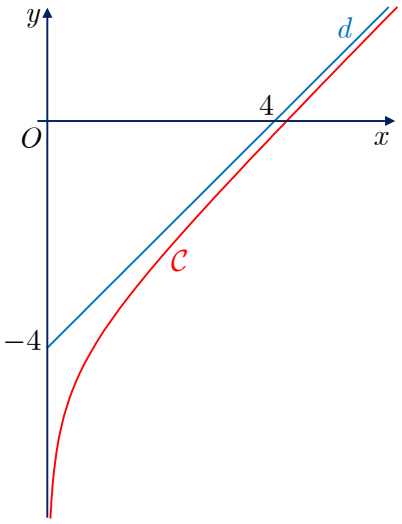
$$f(x) = x - 4 - \ln(1+x) + \ln x$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ لأنّ

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x-4-\ln(1+x)) = -4$.

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



ومنه الرسم المبيّن في الشكل المجاور.

23 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

② أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

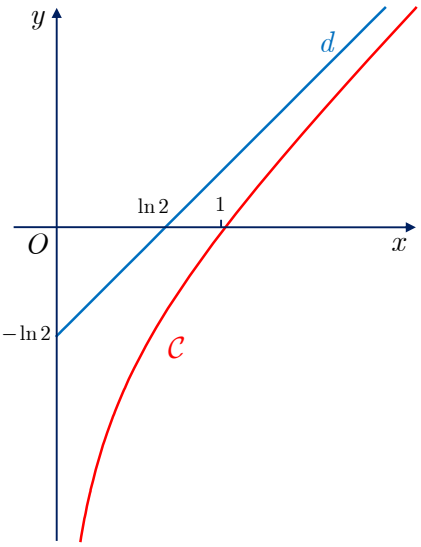
⑤ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$. نستنتج أنّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$. وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln 2$.

التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقص تماماً على I ، ومن اطراد التابع اللوغاريتمي نستنتج أن $x \mapsto \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ متناقص تماماً، وعليه يكون f مجموع تابعين متزايدين تماماً هما $x \mapsto -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ و $x \mapsto x$ ، فهو إذن تابع متزايد تماماً على I . ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f .

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



② لنتأمّل

$$h(x) = f(x) - (x - \ln 2)$$
$$= \ln 2 - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك لأنّ $1+\frac{1}{2x} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) < 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d .

④ التابع f تابعٌ مستمرٌ ومطّرد تماماً على مجموعة تعريفه، وهو يغير إشارته عليها فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α في I وعلاوة على ذلك

$$f(1) = 1 - \ln 3 \quad < 1 - \ln e = 0 \quad \text{و} \quad f(2) = 2 - \ln 2.5 > 2 - \ln e > 0$$

إذن $\alpha \in]1,2[$.

⑤ الرسم مبين في الشكل المجاور .

24 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]4,+\infty[$ وفق

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② ادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ ومقاربه d .

③ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، واحصره في مجال طوله يساوي 1 .

الحل

① لنتأمّل : $h(x)=f(x)-(5-2x)=3\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)=3\ln\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right)$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

② وكذلك لأنّ $1+\dfrac{5}{x-4}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)>0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

③ لما كان $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x+1}{x-4}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to\infty}\ln X=+\infty$ ، استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم Δ الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x=4$ مقارب لخط $\mathcal{C}$.

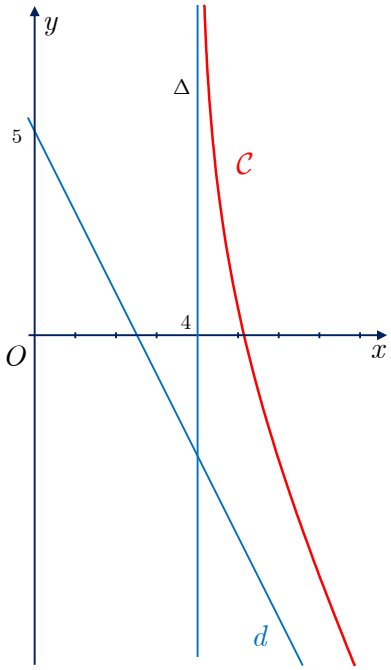
ولما كان $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)=\ln 1=0$ ، و $\lim\limits_{x\to\infty}(5-2x)=-\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

لحساب $f'(x)$ ، نلاحظ أنّ $f(x)=5-2x+3(\ln(x+1)-\ln(x-4))$ ، فيكون:

$$f'(x)=-2+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-4}=-2-\frac{15}{(x+1)(x-4)}<0$$

فالتابع f متناقص تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



④ نجد في جدول تغيرات f أنَّ مجموعة قيم التابع f هي $\mathbb{R}$ ، والتابع متناقص تماماً فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد وليكن α ينتمي إلى المجال I. نحسب

$$f(5)=3\ln 6-5\approx 0.375$$
$$f(6)=3\ln\tfrac{7}{2}-7\approx -3.34$$

إذن $5<\alpha<6$.

25 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+\ln(x^2-1)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α.

③ أثبت أنّ $1<\alpha<\sqrt{1+e^{-1}}$.

الحل

① التابع $x \mapsto x^2-1$ موجبٌ تماماً ومتزايدٌ تماماً على I، وعليه يكون التابع $x \mapsto \ln(x^2-1)$ متزايداً تماماً على I وعليه يكون f متزايداً تماماً على I بصفته مجموع تابعين متزايدين تماماً.

② لمّا كان $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ $f(I) =]-\infty,+\infty[$، فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد α ينتمي إلى I.

③ المتراجحة الأولى أي $\alpha > 1$ واضحة لأنّ $\alpha \in I$. لإثبات المتراجحة الثانية نحسب :

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right) = \sqrt{1+e^{-1}} + \ln e^{-1} = \sqrt{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1} > 0.$$

هذا يبرهن على أنّ $\alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$ (لأنه لو افترضنا أنّ $\alpha \geq \sqrt{1+e^{-1}}$ لنتج من تزايد التابع f أنّ $0 = f(\alpha) \geq f(\sqrt{1+e^{-1}}) > 0$ وهذا تناقض). فنكون قد أثبتنا المتراجحة المطلوبة.

26 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

③ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

④ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① التابع f عندما يكون $\frac{2x}{x-1} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $x(x-1) > 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي خارج المجال $[0,1]$. إذن $D_f =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

② حساب النهايات.

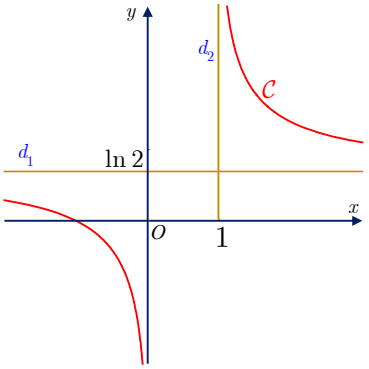
- لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1} = 2$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور الفواصل والذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x}{x-1} = 0$، إذن $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- وأخيراً $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1} = +\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

③ دراسة اطراد f. نلاحظ أنّ : $f'(x) = \frac{x-1}{2x}\left(\frac{2x}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{2x}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$،

فالتابع f متناقص تماماً على كلٍّ من مجالي D_f.

④ لرسم الخط البياني $\mathcal{C}$، ننظم الجدول الآتي بتغيرات f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖		‖		$-$
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	‖		‖	$\searrow$	$\ln 2$



ونجد في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f .

27 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ $(4-x)\in D_f$ ، أياً يكن $x\in D_f$.

③ .a احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x)+f(x)$.

.b استنتج أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

⑤ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑥ ارسم الخط $\mathcal{C}$ في معلمٍ متجانس.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{x-1}{3-x}>0$ وهذا يكافئ قولنا $(x-3)(x-1)<0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجال $]1,3[$. إذن $D_f=]1,3[$.

② التابع $x\mapsto s(x)=4-x$ تابع متناقص تماماً ومنه $s\big(]1,3[\big)=]s(3),s(1)[=]1,3[$ أي إذا كان $x\in D_f$ ، كان $s(x)=(4-x)\in D_f$.

③ .a

$$\begin{aligned}f(4-x)+f(x)&=\ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\\&=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\\&=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\times\frac{x-1}{3-x}\right)=\ln 1=0\end{aligned}$$

.b تكون نقطةٌ $A(x_0,y_0)$ مركز تناظر الخط البياني لتابعٍ f ، إذا تحقق الشرطان:

✌ $x\in D_f\Rightarrow 2x_0-x\in D_f$. هذا الشرط محقّق حيث $x_0=2$.

✌ $f(2x_0-x)=2y_0-f(x)$. هذا الشرط محقّق أيضاً حيث $y_0=0$.

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{3-x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

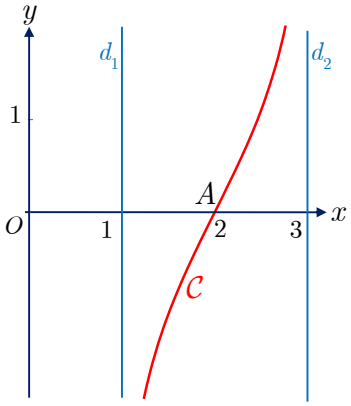
وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{3-x}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

⑤ دراسة تغيرات f:

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)'}{\dfrac{x-1}{3-x}}=\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

إشارة $(x-1)(3-x)$ موجبة تماماً على D_f. فالتابع f متزايد تماماً على D_f. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	1		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖



⑥ الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f. ولقد وضعنا عليه المقاربين ومركز التناظر.

28 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}.$$

① احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

① حساب نهايتي f المطلوبتين. لدينا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$$

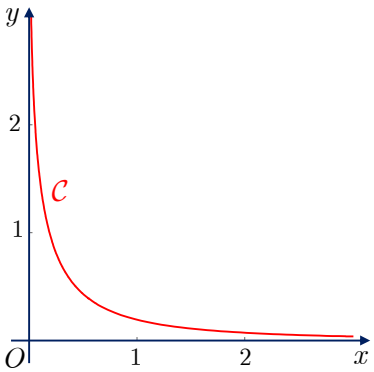
إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{-1}{x(1+x)^2}$$

نستنتج أنّ $f'(x)$ سالب تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.



وبناءً عليه ننظم الجدول الآتي بتغيرات التابع f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f.

29 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f(x)=(x+1)\ln x$.

② $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$.

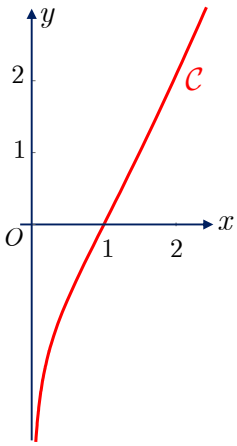
الحل

① دراسة $f(x)=(x+1)\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1\times(-\infty)=-\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- وعلى I لدينا $f'(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب $f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$، بهذا نجد جدول اطراد f' الآتي:



x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

يبين الجدول أنّ $f'(x)\geq 2>0$ على I، فالتابع f متزايد تماماً على I. وله جدول التغيرات الآتي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- الرسم مبين في الشكل المجاور. نلاحظ أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة من الخط البياني تساعد في الرسم.

② دراسة $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

• لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

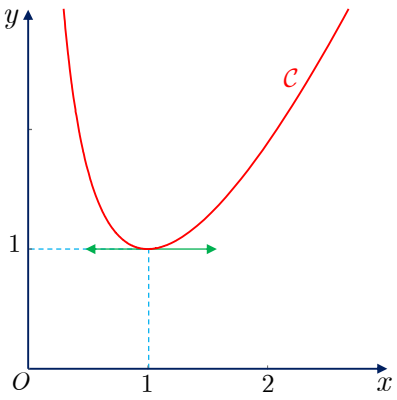
وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• وعلى I لدينا $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$ ، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب على $\mathbb{R}_+^*$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0$$

فالتابع f' تابعٌ متزايدٌ تماماً، ولأنّ $f'(1)=0$ استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



• الرسم مبين في الشكل المجاور.

30 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}.$$

① احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

- M_1 نقطة تقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
- M_2 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
- M_3 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يوازي محور الفواصل.
- M_4 نقطة من $\mathcal{C}$ ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

a. احسب فواصل هذه النقاط.

b. أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. ما أساسها؟

الحل

① • $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

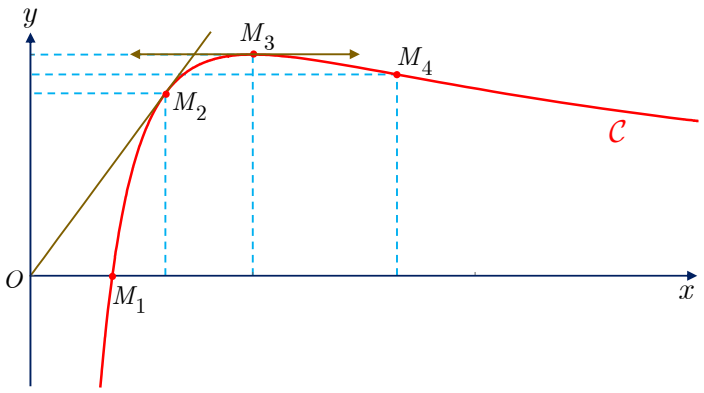
② يعطى مشتق f على المجال I بالعلاقة

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ينعدم $f'(x)$ عند $x=1$. وإشارته تعاكس إشارة $\ln x$ ، نستنتج إذن جدول تغيرات f الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

• رسم $\mathcal{C}$ مبين في الشكل الآتي.



③ .a يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل في M_1 التي تحقق فاصلتها x_1 العلاقة $\ln x_1+1=0$ إذن $x_1=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

• لنرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 ، فيكون ترتيبها $y_2=f(x_2)=\dfrac{1+\ln x_2}{x_2}$ ، ويكون ميل المماس عندها $f'(x_2)=\dfrac{-\ln x_2}{x_2^2}$ فمعادلته $y=y_2+f'(x_2)(x-x_2)$ أي

$$y=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(x-x_2)$$

يمر هذا المماس بالمبدأ، إذا حقَّقت النقطة $(0,0)$ معادلته أي $0=\dfrac{1+\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_2}{{x_2}^2}(0-x_2)$ ، أي $2\ln x_2+1=0$ ، ومنه $x_2=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_2 .

• مماس $\mathcal{C}$ عند $M_3(x_3,y_3)$ يوازي محور الفواصل، إذن $f'(x_3)=0$. إذن $x_3=1$ ، وهي فاصلة M_3 .

• لتكن x_4 فاصلة M_4 . لدينا $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ ، ينعدم $f''(x)$ عند حلول المعادلة $2\ln x=1$ ، ومنه $x_4=e^{1/2}=\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_4 .

إذن فواصل (M_1,M_2,M_3,M_4) هي بالترتيب $x_1=\dfrac{1}{e}$ ، $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ، $x_3=1$ ، $x_4=\sqrt{e}$.

b. نستنتج (x_1,x_2,x_3,x_4) هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. أساسها يساوي $\sqrt{e}$ ، لأنّ $x_k=\dfrac{1}{e\sqrt{e}}e^{k/2}$ في حالة $k=1,2,3,4$.

31 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① *a.* أثبت أنّ $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ ، أياً يكن x من D_f .

b. استنتج أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط $\mathcal{C}$.

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$. وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مقاربه d .

④ ارسم في معلم واحد d ثم $\mathcal{C}$.

الحل

① *a.* لاحظ أنّه إذا كان x مختلفاً عن 0 و 1 كان كذلك المقدار $1-x$. وعليه إذا كان x عنصراً من D_f كان $1-x$ أيضاً عنصراً من D_f وأمكننا حساب

$$f(x)+f(1-x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$
$$=-\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\cdot\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=-\frac{1}{2}$$

ومنه المساواة المطلوبة.

b. ينتج من تحقّق الشرطين : (1) أياً كان x من D_f كان $1-x$ عنصراً من D_f ، و (2) أياً كان x من D_f كان $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

② تكفي الدراسة على كلٍّ من المجالين $\left]\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$، ثُمّ نتممها بالاستفادة من الخاصة التناظرية.

على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{1-x}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(1-x) - \ln x$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

وهو سالب تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لأنه يساوي مجموع ثلاثة مقادير سالبة تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$:

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\frac{9}{2}$	$-$	‖
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

وعلى المجال $]1,+\infty[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(x-1) - \ln x$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2+x-x^2}{2(x-1)x} = \underbrace{\frac{(1+x)}{2(x-1)x}}_{>0}(2-x)$$

على المجال $]1,+\infty[$ ينعدم $f'(x)$ عند $x = 2$. ومنه جدول التغيرات الآتي لـ f على هذا المجال:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\underset{\approx -1.7}{-\ln 2-1}$	$\searrow$	$-\infty$

③ لنلاحظ أنّ

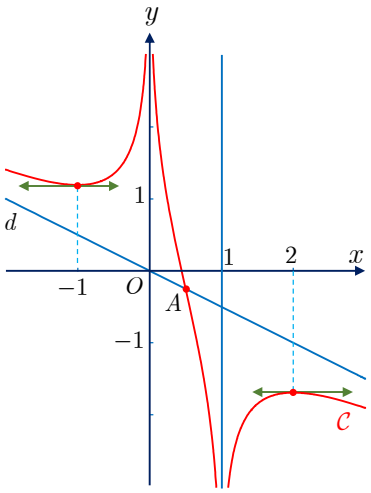
$$f(x) + \frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ فالمستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وأخيراً $f(x)+\frac{x}{2}=0$ إذا وفقط كان $\left|1-\frac{1}{x}\right|=1$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{2}$. إذن يحافظ $f(x)+\frac{x}{2}$ على إشارة ثابتة على كل من المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,\frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ومنه

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\mathcal{C}$		d فوق		d فوق		d تحت		d تحت	

④ نرسم $\mathcal{C}$ على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ونستفيد من الخاصة التناظرية لنتمّم الرسم على كامل مجموعة التعريف.



32 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1.

a. جد معادلةً للمستقيم T_A المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

b. ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات $\mathcal{C}$، ثم $\mathcal{C}$.

③ لتكن B نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها u. أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط $\mathcal{C}$ في النقطة B موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

④ *a.* حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$.

b. استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{C}$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

الحل

①

• لما كان $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$. إذن محور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

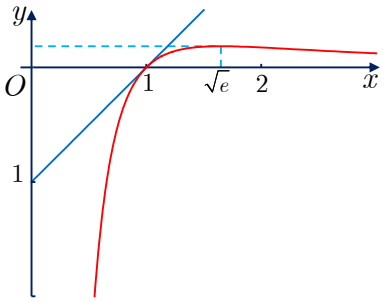
ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• لدراسة التغيرات نحسب المشتق :

$$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

ينعدم المشتق $f'(x)$ عندما $1-2\ln x=0$، أي في حالة $x=\sqrt{e}$. وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0



② معادلة المماس T_A في النقطة التي فاصلتها 1 أي $A(1,0)$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=x-1$.

ونجد في الشكل المجاور الرسم المطلوب.

③ معادلة المماس T_B في النقطة التي فاصلتها u هي $y=f(u)+f'(u)(x-u)$، وميله $f'(u)$. يوازي هذا المماس المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذا كان ميله مساوياً الواحد أي إذا وفقط غذا تحقق الشرط $\dfrac{1-2\ln u}{u^3}=1$ وهذا يكافئ $u^3+2\ln u-1=0$.

④ *a.* لنتأمّل التابع $g(x)=x^3-1+2\ln x$، ولنلاحظ أنّه يساوي مجموع تابعين متزايدين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما التابع $x\mapsto\ln x$ و $x\mapsto x^3-1$، فهو إذن تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. من الواضح أنّ $g(1)=0$، (لأننا نعرف مسبقاً أنّ T_A يوازي منصف الربع الأوّل Δ، إذن $u=1$ حلٌّ للمعادلة المدروسة). وعليه لأنّ التابع g متزايدٌ تماماً كان الحلّ $u=1$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

b. نستنتج مما سبق أنَّ المماس T_A للخط $\mathcal{C}$ في A هو المماس الوحيد الذي يوازي المستقيم Δ.

33 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

① a. احسب نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي في $x=0$.

b. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه، جد معادلةً لهذا المماس.

③ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $[0,+\infty[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

④ ارسم المماس $\mathcal{T}$ ومماسات $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. في حالة $x>0$، المقدار $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ هو معدل تغير f عند 0، نرمز إليه بالرمز $t(x)$، فيكون $t(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x\ln x-\dfrac{3}{2}x\right)$.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0} x=0$، إذن $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\dfrac{1}{2}(0-0)=0$. فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. وجدنا أنَّ $f'(0)=0$. وفي حالة $x>0$، لدينا:

$$f'(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$$

إذن ينعدم $f'(x)$ في حالة $x=0$ وفي حالة $x=e$. ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

② معادلة $\mathcal{T}$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=\frac{1}{4}-x$.

③ نعرّف $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$ فيكون

$$h'(x)=x\ln x-x+1$$
$$h''(x)=\ln x$$

إذن للتابع h' جدول الاطراد الآتي

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنَّ $h'(x)\geq 0$، إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$		$+$	
$h(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ومن هذا الجدول نستنتج أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على $[0,1[$، وأنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]1,+\infty[$.

④ الرسم.

