6

التابع الأسي

1. تعريف التابع الأسي النيبري
2. خواص التابع الأسي
3. دراسة التابع الأسي
4. نهايات مهمة تتعلّق بالتابع الأسي
5. دراسة التابع $x \mapsto a^x, (a > 0)$
6. معادلات تفاضلية بسيطة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع الأسي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع الأسي
- اطراد التابع الأسي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة التابع الأسي
- حل معادلات ومتراجحات تحوي تابعاً أسياً
- دراسة توابع تضم التابع الأسي في علاقة ربطها.
- حل بعض المعادلات التفاضلية البسيطة من المرتبة الأولى بأمثال ثابتة.

تَدرَّبْ صفحة 186

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ ❷ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

❸ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ ❹ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

الحل

❶ $A = 5$ ❷ $B = 7$

❸ $C = 2$ ❹ $D = 1$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

❶ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

❷ $B = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \frac{1}{x}$

❸ $C = \ln(e^{1/x}) + e^{-\ln x}$

الحل

❶ على $]0,+\infty[$ لدينا $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x) = -\ln 2$.

❷ على $]1,+\infty[$ لدينا $B = 1$.

❸ على $]0,+\infty[$ لدينا $C = \frac{2}{x}$.

③ حلّ المعادلات أو المتراجحات الآتية:

❶ $e^{3-x} = 1$ ❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ ❸ $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$

❹ $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ ❺ $\ln(e^x-2) = 3$ ❻ $\ln(2-e^x) \geq 3$

❼ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ ❽ $(e^x-1)(e^x-4) < 0$ ❾ $e^{2x^2-1} \geq 3$

الحل

❶ $e^{3-x} = 1$ تكافئ $3-x = \ln(1) = 0$ ومنه $x = 3$.

❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ تكافئ $2x^2+3 = 7x$ أو $(x-3)(2x-1) = 0$ ومنه $x \in \{3, \frac{1}{2}\}$.

❸ $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$ تكافئ $e^x = \frac{5}{11}$ ومنه $x = \ln\left(\frac{5}{11}\right)$.

❹ $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ تكتب $\frac{2}{e^x} = \frac{1}{e^x+2}$ فهي تكافئ $e^x + 4 = 0$ وهذه مستحيلة لأنّ $e^x > 0$ أياً كانت قيمة x.

❺ $\ln(e^x-2)=3$ هذه تكافئ $e^x-2=e^3$ ومنه $x=\ln(2+e^3)$.

❻ $\ln(2-e^x)\geq 3$ هذه تكافئ $2-e^x\geq e^3$ أو $2-e^3\geq e^x$ وهذه مستحيلة لأنّ $2-e^3<0$.

❼ $e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$ تُكافئ $x^2-2\leq 4-x$ أو $x^2+x-6\leq 0$ إذن $x\in[-3,2]$.

❽ $(e^x-1)(e^x-4)<0$ هذه تُكافئ $1<e^x<4$ أو $0=\ln 1<x<2\ln 2$.

❾ $e^{2x^2-1}\geq 3$ تكافئ $2x^2-1\geq \ln(3)$ ومنه $x\in\left]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}},+\infty\right[$

④ اشرح لماذا تتّفق إشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2). ثُمّ حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$.

الحل

لأنّ $e^x-\frac{4}{e^x}=(1+\frac{2}{e^x})(e^x-2)$ والمقدار $1+\frac{2}{e^x}$ موجبٌ تماماً. وعليه تكافئ المتراجحةُ $e^x-\frac{4}{e^x}<0$ المتراجحةَ $e^x<2$ أو $x<\ln 2$.

تَدرَّبْ صفحة 190

① أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين على $\mathbb{R}$.

❶ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$ ❷ $\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^{-x}}$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $e^{-x}+1=\frac{1}{e^x}+1=\frac{e^x+1}{e^x}$ إذن $\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}=e^x$ الطرفان موجبان وبأخذ اللوغاريتم نجد $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$.

❷ لقد رأينا أنّ $e^{-x}+1=\frac{e^x+1}{e^x}$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد $\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}$.

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A=\ln\sqrt{e^5}$ ❷ $B=\frac{e}{e^{2+\ln 3}}$ ❸ $C=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

❹ $D=\frac{e^{4x}}{e\times(e^x)^2}$ ❺ $E=(e^{2x})^3\times(e^{-x})^6$ ❻ $F=\frac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$

❼ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ ❽ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ ❾ $I=\sqrt[6]{27}\times 3^{\frac{1}{2}}$

الحل

❶ $A=\frac{5}{2}$ ❷ $B=\frac{1}{3e}$ ❸ $C=\frac{2}{e}$

❹ $D=e^{2x-1}$ ❺ $E=1$ ❻ $F=e^{\pi}$

❼ $G=128\sqrt{2}$ ❽ $H=\frac{1}{e}$ ❾ $I=3$

③ أثبت أنّ التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

الحل

بفكّ التربيع أو باستعمال متطابقة فرق مربعين نجد $f(x)=4$ أياً كانت قيمة x.

④ حل المعادلات الآتية:

❶ $e^{2x}-5e^x+4=0$ ❷ $e^{2x}-e^x-6=0$

❸ $4e^{2x}-e^x+2=0$ ❹ $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

الحل

❶ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-1)(e^x-4)=0$ إذن $x\in\{\ln 1,\ln 4\}$ أو $x\in\{0,2\ln 2\}$.

❷ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إذن أو $x=\ln 3$، لأنّ $e^x+2>0$ أياً كانت x.

❸ المعادلة تكتب بالشكل $(2e^x-1)^2+3e^x+1=0$ وهذه المعادلة مستحيلة لأنّ مجموع مقادير موجبة لا ينعدم إلاّ إذا انعدمت جميعها.

❹ المعادلة تكتب بالشكل $(e^{-x}-1)(e^{-x}-6)=0$ إذن $x\in\{0,-\ln 6\}$.

⑤ حل المتراجحات الآتية:

❶ $e^x-4e^{-x}\le 0$ ❷ $(e^x-2)e^x>2(e^x-2)$

❸ $e^{x+2}\ge\dfrac{3}{e^x}$ ❹ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

❺ $e^{x+\ln 4}>\dfrac{2}{3}$ ❻ $e^x+4e^{-x}\le 5$

الحل

❶ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x نجد أنّ المتراجحة تكافئ $(e^x-2)(e^x+2)\le 0$ أو $e^x-2\le 0$ لأنّ $e^x+2>0$ دوماً. ومنه $x\in]-\infty,\ln 2]$.

❷ بإصلاح المتراجحة نجدها تكافئ $(e^x-2)^2>0$ ومنه $x\neq\ln 2$.

❸ المتراجحة $e^{x+2}\ge\dfrac{3}{e^x}$ تكافئ $e^{2x+2}\ge 3$ أو $2x+2\ge\ln 3$ أي $x\ge\frac{1}{2}\ln 3-1$.

❹ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x ووضع $X=e^x$ تأخذ المتراجحة الصيغة المُكافئة $X^3-3X-2<0$ ولكنّ X^3-3X-2 كثير حدود من الدرجة الثالثة، ونظرة سريعة تبيّن لنا أنّ كلاً من $X=2$ و $X=-1$ جذرٌ له فهو يقبل القسمة على $(X-2)(X+1)$ وهذا يتيح لنا تحليله لنجد $X^3-3X-2=(X+1)^2(X-2)$. إذن المتراجحة المعطاة تكافئ $(e^x+1)^2(e^x-2)<0$ ولكنّ المقدار $(e^x+1)^2$ موجب تماماً، إذن هي تُكافئ $e^x-2<0$ أو $x<\ln 2$.

❺ $e^{x+\ln 4}>\frac{2}{3}$ تكافئ $x>-\ln 6$.

❻ المتراجحة $e^x+4e^{-x}\le 5$ تكافئ $(e^x-1)(e^x-4)\le 0$ ومنه $x\in[0,2\ln 2]$.

تَدرَّبْ صفحة 194

① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. أشر إلى قيمة حديّة للتابع.

❸ اكتب معادلةً للمماس d للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$.

❹ جد إحداثيات النقطتين اللتين ينعدم فيهما $f''(x)$، واكتب معادلتي المماسين d_1 و d_2 فيهما.

❺ ادرس وضع الخط البياني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى كلٍّ من d و d_1 و d_2.

❻ ارسم d و d_1 و d_2 ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❶ لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f.

❷ نلاحظ أنّ $f'(x)=-2xe^{\frac{1}{2}-x^2}$. إذن إشارة f' تعاكس إشارة x على $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

إذن يبلغ f قيمة حديّة كبرى شاملة (أومحلية) عند $x=0$.

❸ لمّا كان $f(0)=\sqrt{e}$ و $f'(0)=0$ استنتجنا أنّ $y=\sqrt{e}$ هي معادلة المماس d في النقطة التي ينعدم عندها f'.

❹ هنا $f''(x)=2(2x^2-1)e^{\frac{1}{2}-x^2}$ إذن $f''(x)=0$ يكافئ $x\in\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. ونلاحظ أنّ

- لمّا كان $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2-\sqrt{2}\,x$ هي معادلة المماس d_1 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ولمّا كان $f(\frac{-1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{-1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2+\sqrt{2}\,x$ هي معادلة المماس d_2 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

❺ لما كان $f(x)\le\sqrt{e}$ على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

▪ ليكن $g(x) = f(x) - \left(2 - \sqrt{2}\,x\right)$. نلاحظ أنّ $g''(x) = f''(x)$ ، إذن إشارة g'' معروفة. وكذلك

نلاحظ أنّ $g'(x) = -2\sqrt{e} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}} + \sqrt{2}$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \sqrt{2}$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = \sqrt{2}$

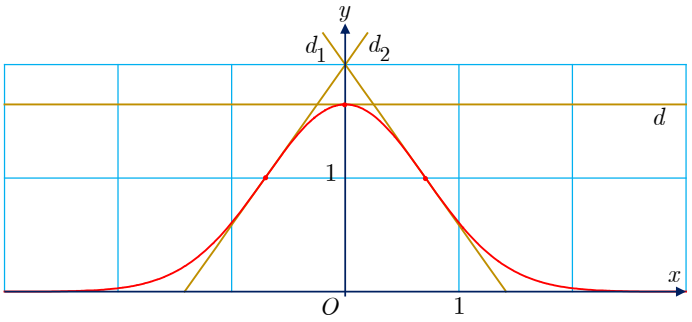
لأنّ $\lim\limits_{X \to \infty} \frac{X}{e^X} = 0$. ومنه جدول تغيرات g' الآتي

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g'(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

نلاحظ من الجدول أنّ g' موجب على كامل $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلاّ عند $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. إذن g تابعٌ متزايدٌ على $\mathbb{R}$ ولأنّ $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ استنتجنا أنّ $g(x) < 0$ على $\left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وأنّ $g(x) > 0$ على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$. إذن $\mathcal{C}$ يقع تحت d_1 على $\left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وفوقه على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

ونبرهن بالمثل، أو بالاستفادة من كون التابع المدروس زوجياً، أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d_2 على $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وتحته على $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

❻ تتيح الدراسة السابقة رسم $\mathcal{C}$ بدقة:



② f و g هما التابعان المعرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ و $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. و h هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $h = \frac{g}{f}$. احسب كلّاً من $f'(x)$ و $g'(x)$. وأثبت أنّ $h' = \frac{1}{f^2}$.

الحل

بحساب بسيط نلاحظ أنّ $f'(x) = g(x)$ و $g'(x) = f(x)$ وأخيراً

$$f'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = \frac{f^2(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$$

ولكن $f^2(x) - g^2(x) = 1$ أياً كانت x (تدرب ③ صفحة 190) إذن $h' = \frac{1}{f^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 199

① ادرس نهاية كلٍّ من التابعين f و g عند حدود مجموعة تعريفه.

❶ $f(x)=\ln x-e^x$ ❷ $g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

الحل

❶ التابع $x\mapsto f(x)=\ln x-e^x$ معرّف على $]0,+\infty[$.

- عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين نزيلها بإخراج e^x خارج قوسين فنكتب

$$f(x)=e^x\left(\frac{\ln x}{e^x}-1\right)=e^x\left(\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{e^x}-1\right)$$

الآن لدينا $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

- عند الصفر الأمر سهل لأنّ $\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.

❷ التابع $x\mapsto g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- عند $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$.

- عند $+\infty$، لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X-1}{X+1}=1$ إذن نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1$.

② ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(3-x)e^x$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

❶ التابع $x\mapsto f(x)=(3-x)e^x$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x)=-e^3\,Xe^X$ حيث $X=x-3$. ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)=-\infty$ وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}Xe^X=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

- نلاحظ أنّ $f'(x)=(2-x)e^x$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

❷ نلاحظ أنّ $f''(x) = (1-x)e^x$، وهو ينعدم فقط عند $x = 1$. ولدينا $f(1) = 2e$ و $f'(1) = e$ إذن معادلة المماس d الذي يمس $\mathcal{C}$ في النقطة $x = 1$ هي $y = e(x+1)$.

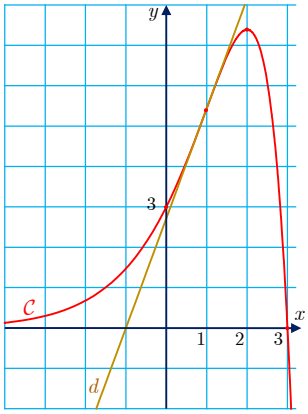
ملاحظة. مع أنّه غير مطلوب في صيغة السؤال، قد يرغب المرء بدراسة الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ والمماس d، فنضع

$$h(x) = f(x) - e(x+1) = 3e^x - e - x(e^x + e)$$

من غير الواضح كيف نعين إشارة h. وخاصّة أنّ اشتقاقه يُبقي على الحد xe^x في صيغة المشتق، يمكننا إذن أن نفكّر بإخراج أمثال x وهي $(e^x + e)$ خارج قوسين وبخاصة أنّ هذا المقدار موجب ولا يؤثر في تعيين إشارة h فنكتب إذن $h(x) = (e^x + e)g(x)$ وقد عرّفنا

$$g(x) = \frac{3e^x - e}{e^x + e} - x$$

وهنا نحسب: $g'(x) = \dfrac{4e \cdot e^x}{(e^x+e)^2} - 1 = -\dfrac{(e^x - e)^2}{(e^x + e)^2}$ فنستنتج أنّ g' سالب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x = 1$. إذن التابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ولكن $g(1) = 0$ (هذه نتيجة معروفة بالنسبة إلينا لأنّ h يمثّل الفرق بين التابع والمماس في النقطة التي فاصلتها 1، فلا بد للفرق أن ينعدم عند $x = 1$).



إذن $g(x) > 0$ على $]-\infty, 1[$، و $g(x) < 0$ على $]1, +\infty[$. وعليه يقع $\mathcal{C}$ فوق المماس d على المجال $]-\infty, 1[$، ويقع تحته على $]1, +\infty[$.

❸ الرسم مبين في الشكل المجاور.

③ جد نهاية كلٍّ من التوابع الآتية عند a:

❶ $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$, $a = 1$

❷ $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$, $a = +\infty$

❸ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$, $a = 0$

❹ $f(x) = 2xe^{-x}$, $a = +\infty$

❺ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x-1}$, $a = +\infty, -\infty$

❻ $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$, $a = +\infty, -\infty$

❼ $f(x) = \ln(e^x + 2)$ $a = +\infty, -\infty$

❽ $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $a = -\infty$

❾ $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^x - 1)$ $a = 0, +\infty$

❿ $f(x) = e^{1/x}$ $a = +\infty, 0, -\infty$

الحل

❶ نضع $u(x) = x - 1$ ونحسب

$$\ln f(x) = -3\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولكن لدينا $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = 0$ و $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim\limits_{x\to 1} \ln f(x) = -3$ وأخيراً $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = e^{-3}$.

❷ نضع $u(x) = \frac{3}{x+1}$ ونحسب

$$\ln f(x) = -\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ و $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = -1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$.

❸ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

❺ واضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e\cdot\frac{e^{x-1}}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❻ هنا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ وضوحاً. أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e^x(e^x - 1) + 3$$

لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❼ هنا $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + 2) = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 2) = +\infty$ إذن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❽ نكتب $f(x) = e^{-x}\cdot(2xe^x - e^x + 1)$ لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❾ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

❿ $f(x) = e^{1/x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

تَدرَّبْ صفحة 203

① بسّط كتابة كل من العددين $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ و $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

الحل

$A = e^{-1}$ و $B = \sqrt{e}$.

② حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

❶ $7^{x-1} = 3^x$ ❷ $3^x = 4^{2x+1}$ ❸ $3^x > 4$

❹ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$ ❺ $5^{-x} < 5^{2x}$ ❻ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

الحل

❶ $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$ ❷ $x = \frac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2}$ ❸ $x > \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

❹ $x < -\frac{2\ln 2}{\ln 3}$ ❺ $x > 0$ ❻ $x < -1$

③ فيما يأتي حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة:

❶ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$.

❷ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$.

❸ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$.

الحل

❶ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $X^2 + 2X - 3 = 0$ أو $(X+3)(X-1) = 0$، ولكنّ العدد $X = 2^x$ موجبٌ إذن تكافئ المعادلة المعطاة $X = 1$ أو $x = 0$.

أمّا المتراجحة $(X+3)(X-1) \leq 0$ فتكافئ $X \leq 1$ أي $2^x \leq 1$ أو $x \in]-\infty, 0]$.

❷ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $2X - 10X + 12 = 0$ أو $X = \frac{3}{2}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$. أمّا المتراجحة فتصبح $X \leq \frac{3}{2}$ أي $x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$.

❸ بوضع $X = 3^x$ تصبح المعادلة $3X + \frac{2}{X} = 7$ أو $X \in \{2, \frac{1}{3}\}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x \in \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}, -1\right\}$. أمّا المتراجحة فتصبح $3X^2 - 7X + 2 \geq 0$ (لأنّ $X = 3^x > 0$)، ومنه $x \in]-\infty, -1[\cup]\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$.

④ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

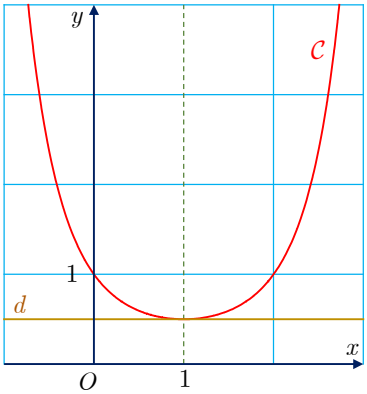
❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ ، وله الصيغة المُكافئة $f(x) = e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$. ولأنّ

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-2x) = +\infty$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x) = (2\ln 2)(x-1)e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$ ومنه

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



❷ النقطة التي ينعدم عندها المشتق الأوّل تمثّل قيمة محلية صغرى للتابع f ، فالمماس عندها أفقي ومعادلته $y = \frac{1}{2}$.

❸ الرسم. يوحي لنا الرسم الأوّلي وكأنّ الخط البياني يقبل المستقيم الذي معادلته $x = 1$ محور تناظر. ويمكننا التيقن من ذلك بملاحظة $f(1-h) = f(1+h)$ أيّاً كانت قيمة h .

⑤ جد التابع المشتق لكلٍ من التوابع الآتية:

❶ $f(x) = x^x$ ❷ $f(x) = 3^{x^2}$ ❸ $f(x) = \pi^{\ln x}$.

الحل

❶ $f'(x) = (1+\ln x)x^x$ ❷ $f'(x) = (2\ln 3)x3^{x^2}$ ❸ $f'(x) = (\ln \pi)x^{\ln \pi - 1}$.

⑥ حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$3^x \times 3^y = 9 \qquad (1)$$
$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

الحل

بوضع $a = 3^x$ و $b = 3^y$ نستنتج أنّ a و b هما جذرا المعادلة $T^2 - 4\sqrt{3}T + 9 = 0$ إذن

$$(a,b) \in \left\{(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}), (3\sqrt{3}, \sqrt{3})\right\}$$

ومنه $(x,y) \in \left\{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})\right\}$.

⑦ إذا علمت أنّ $a > 0$ و $b > 0$ ، فهل صحيح أنّ $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ؟

الحل

هذا صحيح لأنّ كلا المقدارين يساوي $e^{(\ln a)(\ln b)}$.

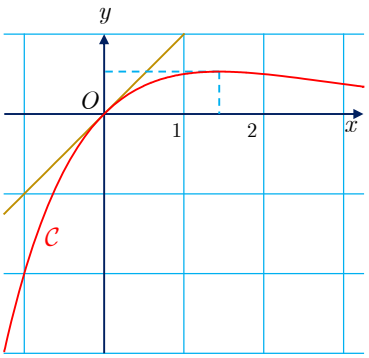
⑧ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x \cdot 2^{-x}$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x) = x \cdot e^{-(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} Xe^{-X} = 0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x) = (1 - (\ln 2)x)2^{-x}$ ومنه

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e \ln 2}$	$\searrow$	0



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يمر بالمبدأ حيث مماسه هو منصف الربع الأوّل.

الرسم مبين جانباً.

⑨ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

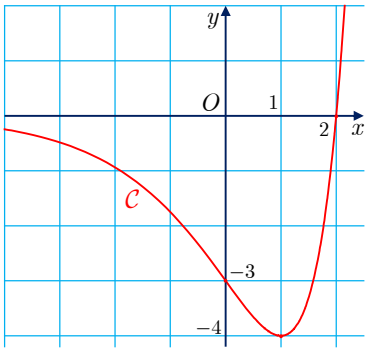
التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة

$$f(x) = 2^x(2^x - 4) = e^{(2\ln 2)x} - 4 \cdot e^{(\ln 2)x}.$$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x) = 2(\ln 2) \cdot 2^x(2^x - 2)$ وهو ينعدم فقط عند $x = 1$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



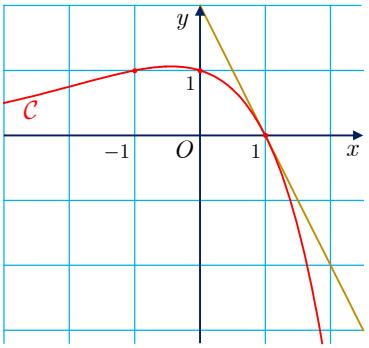
وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = 2$.

⑩ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1-x)\times 2^x$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=(1-x)\cdot e^{(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(\ln 2-1-(\ln 2)x)2^x$ ومنه

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب جانباً، وهو يمر بالنقطة $(1,0)$ حيث مماسه هو المستقيم الذي معادلته $y=2-2x$.

تَدرَّبْ صفحة 205

① حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=3y$ ❷ $y'+2y=0$

❸ $3y'=5y$ ❹ $2y'+3y=0$

الحل

❶ $y=ke^{3x}$ ❷ $y=ke^{-2x}$ ❸ $y=ke^{\frac{5}{3}x}$ ❹ $y=ke^{-\frac{3}{2}x}$

② في كلّ حالة عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

❶ $y'=2y$ ، والحل f يحقق الشرط $f(0)=1$.

❷ $y'+5y=0$ ، والخط البياني $\mathcal{C}$ للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

❸ $y'+2y=0$ ، وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل

❶ $f(x)=e^{2x}$ ❷ $f(x)=e^{-5(x+2)}$ ❸ $f(x)=-\frac{1}{4}e^{-2(x+2)}$

③ حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=2y+1$ ❷ $y+3y'=2$

❸ $2y'=y-1$ ❹ $2y+3y'-1=0$

الحل

❶ $y=-\frac{1}{2}+ke^{2x}$ ❷ $y=2+ke^{-x/3}$ ❸ $y=1+ke^{x/2}$ ❹ $y=\frac{1}{2}+ke^{-2x/3}$

أنشطة

نشاط 1 إحاطة العدد النيبري e

نهتمّ في هذا النشاط بإحاطة العدد النيبري e باستعمال متتاليات، ونهتم بسرعة تقارب هذه المتتاليات.

❶ إحاطة العدد e

ليكن f التابع المعرّف على $]-1,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\ln(1+x)-x$.

① ادرس تغيرات التابع f، واستنتج أنّ $\ln(1+x)\leq x$ في حالة $x>-1$.

② ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

a. تحقّق أنّ $\frac{1}{n}$ عنصر من $]0,1[$، وأنّ $\frac{-1}{1+n}$ عنصر من $]-1,0[$.

b. بالاستفادة من نتيجة ① استنتج أنّ

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$ ومن ثَمّ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$.
- $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\leq-\frac{1}{n+1}$ ومن ثَمّ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\frac{1}{n+1}$، وأخيراً $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\geq e$. إذن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad(*)$$

③ ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. وليكن g و h التابعين المعرّفين على $[0,1]$ وفق

$$g(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$$

a. ادرس اطراد كلٍّ من التابعين g و h على $[0,1]$، واستنتج أنّ $h(1)\geq 1\geq g(1)$.

b. استنتج أنّ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leq e\leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot(n!)}\qquad(**)$$

❷ تطبيق

لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ الآتيتين: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $v_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

① أثبت أنّ $0\leq e-u_n\leq\frac{u_n}{n}\leq\frac{3}{n}$ بالاعتماد على $(*)$.

② استنتج من $(**)$ أنّ $0\leq e-v_n\leq\frac{1}{n(n!)}$. أيُّ المتتاليتين أفضل لحساب تقريب للعدد e؟

الحل

❶ ① هذا سؤال تقليدي، ومررنا به سابقاً، نترك تفاصيله إلى القارئ.

② باختيار $x=\frac{1}{n}$ في المتراجحة $\ln(1+x)\le x$ نستنتج أنّ $\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$ أي $\ln((1+\frac{1}{n})^n)\le 1$ ومنه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$. ثُمّ باختيار $x=\frac{-1}{n+1}$ في المتراجحة نفسها نجد $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\le-\frac{1}{n+1}$ وهذا يُكافئ $\ln(\frac{n}{n+1})\le-\frac{1}{n+1}$ أو $\frac{1}{n+1}\le-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ أي $1\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ومن ثَمّ $e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. فنكون قد أثبتنا صحة (*).

③ نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\\&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\\&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\end{aligned}$$

إذن $g'(x)$ سالب على المجال $[0,1]$ فالتابع g متناقصٌ على المجال $[0,1]$.

من ناحية أخرى، لأنّ $h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}h'(x)&=g'(x)-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\&=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}\left(-n-x+n+1\right)=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}(1-x)\end{aligned}$$

إذن $h'(x)$ موجبٌ على المجال $[0,1]$ فالتابع h متزايدٌ على المجال $[0,1]$. إذن

$$h(1)\ge h(0)=1=g(0)\ge g(1)$$

وتنتج المتراجحة (**) من $h(1)\ge 1\ge g(1)$ بضرب الطرفين بالعدد e.

❷ ① نستنتج من (*) أنّ $0\le e-u_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}u_n$. وتنتج المتراجحة المطلوبة من ملاحظة أنّ $u_n\le e<3$ أو أنّ $u_n\le e\le\left(1+\frac{1}{5}\right)^6<3$.

② هذه مجرد عملية طرح، ولكن النتيجة مهمة؛ فإذا أردنا حساب e لثلاثة أرقام بعد الفاصلة أي بخطأ أصغر تماماً من 10^{-3} علينا حساب u_{3000}، في حين يكفي أن نحسب v_6 لنحصل على المطلوب. إذن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ أسرع تقارباً من $(u_n)_{n\ge1}$ نحو العدد e.

تمرينات ومسائل

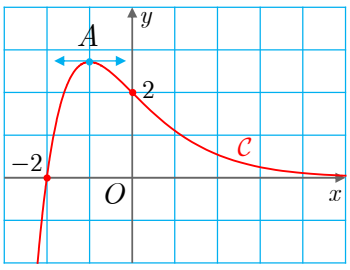
1 في كلٍ من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها.

① $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x)e^x$	② $I=]0,+\infty[$, $f(x)=e^{-x}\ln x$
③ $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$	④ $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$
⑤ $I=\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$	⑥ $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=xe^{1/x}$
⑦ $I=\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+e^x)$	⑧ $I=]0,+\infty[$, $f(x)=e^{x\ln x}$
⑨ $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(\sin x+\cos x)e^x$	⑩ $I=\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

الحل

① $f'(x)=(x^2-2)e^x$	② $f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$
③ $f'(x)=-(x^2-3x+2)e^{-x}$	④ $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}e^x$
⑤ $f'(x)=\dfrac{(e^{3x}+e^x+2)}{\left(e^x+1\right)^2}$	⑥ $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$
⑦ $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$	⑧ $f'(x)=x^x(\ln x+1)$
⑨ $f'(x)=2e^x\cos x$	⑩ $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$

2 $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(ax+b)e^{-x}$، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



① احسب قيمة كلٍ من a و b.

② احسب $f'(x)$، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f.

③ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

الحل

① من الشكل نلاحظ أنّ $f(-2)=0$ و $f(0)=2$. ومنه $a=1$ و $b=2$.

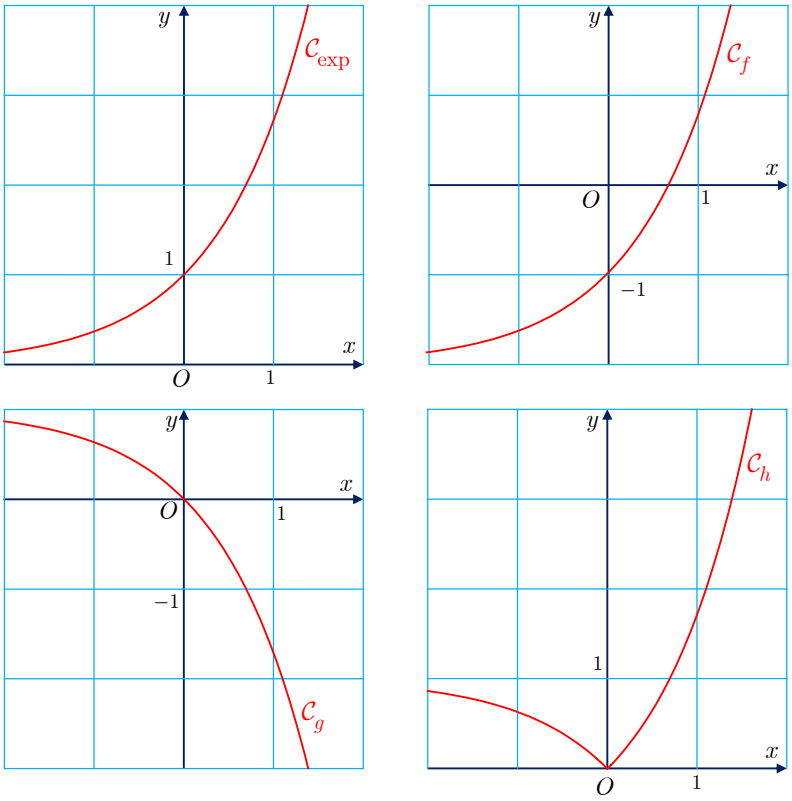
② لدينا $f(x)=(x+2)e^{-x}$ ومنه $f'(x)=-(x+1)e^{-x}$. والتابع يبلغ قيمة حدية كبرى عند $x=-1$ تساوي $f(-1)=e$.

③ هذا واضحٌ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ يقتضي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3 ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع الأسي $\exp$. ثُمّ استنتج رسم الخط البياني لكلٍ من التوابع الآتية:

① $f: x\mapsto e^x-2$ ② $g: x\mapsto 1-e^x$ ③ $h: x\mapsto |1-e^x|$

الحل



4 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

① ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

② ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

③ g هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. أثبت أنَّ $g(x)=f(-x)$، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من $\mathcal{C}$.

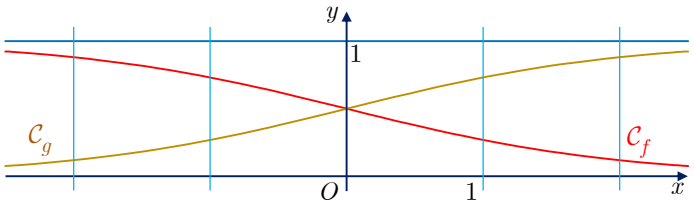
الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

② نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{C}$ يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيماً مقارباً في جوار $+\infty$ ، والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيماً مقارباً في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك التابع الأسي متزايدٌ تماماً ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$ والتابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ إذن f تابعٌ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	0

③ واضحٌ أنّ $g(x) = f(-x)$ أياً كانت قيمة x إذن $\mathcal{C}_g$ هو نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى محور التراتيب. ومنه الرسم البياني المبين أدناه.



5 في الحالات الآتية بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

① $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ ② $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$ ③ $f(x) = x + 2 + xe^x$

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x-1) = e^{-2x}$ يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

② نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x+1) = 4e^{-x}$ يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

③ نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x+2) = xe^x$ يحقّق $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 2$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ إشارة $g(x)$ تماثل إشارة x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d على $]0,+\infty[$ ، ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

6 بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x)=\ln(3+e^x)$ يقبل خطين مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يُطلب تعيينهما.

الحل

لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln(3)$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y=\ln(3)$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$، فيكون العدد 3 صغيراً جداً أمام e^x ومن ثمّ نتوقّع أن يكون $\ln(e^x+3)$ قريباً من $\ln(e^x)=x$، وللتأكد من صحة توقعنا نتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-x$ فنلاحظ أنّ

$$g(x)=\ln(e^x+3)-x=\ln(e^x+3)-\ln(e^x)$$
$$=\ln\left(\frac{e^x+3}{e^x}\right)=\ln\left(1+3e^{-x}\right)$$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ln(1)=0$ ، إذن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$.

① لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y=2$ و d_2 الذي معادلته $y=-3$ مقاربان للخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$م ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{2X-3}{X+1}=2$ ، اعتماداً على خاصة نهاية تابع مركّب نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، فالمستقيم d_1 الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ ، فالمستقيم d_2 الذي معادلته $y=-3$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

② نلاحظ بسهولة أنّ $f'(x)=\dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$ وهو موجب دوماً، فالتابع f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

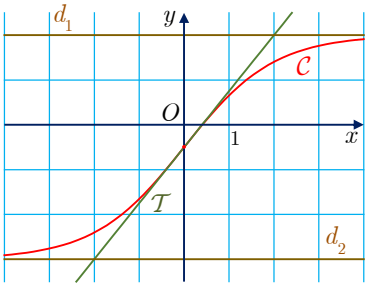
③ يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور التراتيب في النقطة $(0,-\frac{1}{2})$، وميل المماس عندها $f'(0)=\frac{5}{4}$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في نقطة التقاطع مع محور التراتيب هي $y=-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x$.

④ لنتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x\right)$ فنلاحظ أنّ

$$g(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}-\frac{x}{2}\right)$$

ومنه

$$g'(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

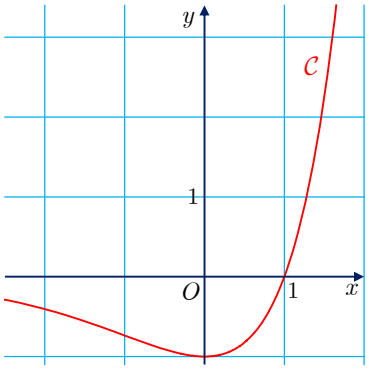


إذن g' سالب على $\mathbb{R}$، والتابع g متناقص تماماً عليها. ولكن $g(0)=0$. إذن $g(x)>0$ على $]-\infty,0[$ و $g(x)<0$ على $]0,+\infty[$. فالخط البياني $\mathcal{C}$ يكون فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]-\infty,0[$ وتحته على $]0,+\infty[$.

8 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x-1)e^x$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

- ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x)=eXe^X$ حيث $X=x-1$. ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}Xe^X=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.
- نلاحظ أنّ $f'(x)=xe^x$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

9 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x-x$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

③ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم d و $\mathcal{C}$.

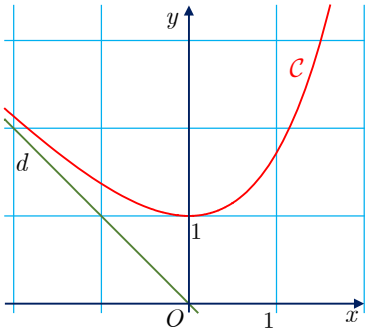
الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$ ، وكذلك لأنّ $f(x) = e^x(1 - xe^{-x})$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) + x = e^x$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

③ نلاحظ أنّ $f'(x) = e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = 0$ ، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

10 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ أثبت أنَّ المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

④ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑤ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

⑥ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثُم ارسم في معلم متجانس d و d' و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وكذلك نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

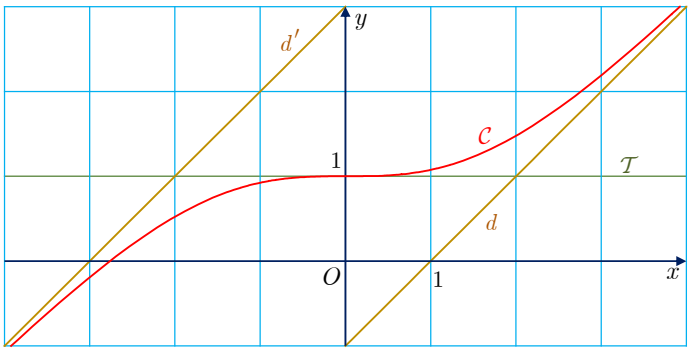
③ بوضع $h(x) = f(x) - (x + 3) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. إذن المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $h(x) < 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d'.

④ نلاحظ أنّ $f'(x) = 1 - 4\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ وهو ينعدم فقط عند $x = 0$، دون أن يغير إشارته الموجبة. وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ واضحٌ أنّ $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$. إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب هي $y = 1$.

⑥ التابع f متزايدٌ تماماً ويحقق $f(0) = 1$، إذن $f(x) < 1$ في حالة $x < 0$ و $f(x) > 1$ في حالة $x > 0$. وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت $\mathcal{T}$ على $]-\infty, 0[$ وفوقه على $]0, +\infty[$، ومنه الرسم المبين.



11 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ استنتج من ② أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

④ نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة $f(x) = 0$ بالرمز α. أثبت أنَّ $-2 < \alpha < -1$.

⑤ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا من المساواة $f(x) = e^x(2 - xe^{-x}) - 2$ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

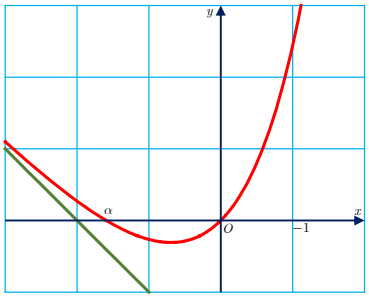
② نلاحظ أنّ $f'(x) = 2e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = -\ln 2$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty,-\ln 2[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد α ينتمي إلى $]-\infty,-\ln 2[$ للمعادلة $f(x)=0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متزايدٌ تماماً على $]-\ln 2,+\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد β ينتمي إلى $]-\ln 2,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$. وأخيراً لمّا كان $f(0)=0$ استنتجنا أنّ $\beta = 0$.

④ نلاحظ أنّ $f(-1) = 2e^{-1} - 1 < 0$ و $f(-2) = 2e^{-2} > 0$، إذن $-2 < \alpha < -1$.



⑤ التابع f تابعٌ مستمرٌ ينعدم فقط عند 0 و α، فهو يحافظ على إشارة ثابتة على كل مجال من $\mathbb{R}\setminus\{\alpha,0\}$، وتحديداً لدينا

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

لنتعلّم البحث معاً

12 مماسات مشتركة

ليكن $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ الخطان البيانيان للتابعين الأسي exp واللوغاريتمي ln بالترتيب. أيقبل هذان الخطان مماسات مشتركة ؟

نحو الحلّ

لنرسم الخطين $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ ثم لنتأملهما. كم مماساً مشتركاً لهذين الخطين برأيك؟ حاول أن ترسم مماسين مشتركين أترى غيرهما ؟

لنتأمّل مماساً T_E يمس $\mathcal{C}_E$ في النقطة $A(a,e^a)$، ومماساً T_L يمس $\mathcal{C}_L$ في النقطة $B(b,\ln b)$، $b>0$. ثم لنبحث عن الشروط على a و b التي يجب أن يحققاها كي ينطبق المستقيمان T_E و T_L.

1. اكتب بالصيغة $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ معادلةً للمستقيم T_E وأخرى للمستقيم T_L.
2. أثبت إذن أنّ العبارتين الآتيتين متكافئتان:

❶ المستقيمان T_E و T_L منطبقان ❷ $b = e^{-a}$ و $e^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1}$

يبقى علينا معرفة إن كان ثمة عدد حقيقي a يحقّق $e^{-a}=\dfrac{a-1}{a+1}$. لا تُحل هذه المعادلة جبرياً.

هذا يدفعنا للتفكير بدراسة التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=e^{-x}-\dfrac{x-1}{x+1}$.

1. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
2. استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّين فقط a_1 و a_2.
3. أثبت أنّ

$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^{x}f(x)=0$$

في حالة $x\notin\{1,-1\}$

ثُمّ بين أنّ $a_1=-a_2$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

هذه محاولة مطلوبة من القارئ، الهدف منها إعطاء فكرة عمّا نريد البحث عنه.

1. معادلة T_E هي $y=e^{a}+e^{a}(x-a)$ أو $e^{a}x-y+e^{a}(1-a)=0$. ومعادلة T_L هي $y=\ln b+\dfrac{1}{b}(x-b)$ أو $\dfrac{1}{b}x-y+\ln b-1=0$.
2. وعليه ينطبق المستقيمان T_L و T_E إذا تناسبت أمثالهما، أي إذا تحقق الشرطان

$$e^{a}=\frac{1}{b}\quad\text{و}\quad e^{a}(1-a)=\ln b-1$$

ولكنّ المساواة الأولى تقتضي $\ln b=-a$ فتصبح الثانية $(a+1)e^{-a}=a-1$ ولأنّ $a=-1$ ليس حلاً لهذه المعادلة استنتجنا أنّ المستقيمين T_L و T_E ينطبقان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$e^{-a}=\frac{a-1}{a+1}\quad\text{و}\quad b=e^{-a}.$$

1. من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ فالخط البياني للتابع f يقبل مقارباً المستقيم الذي معادلته $y=-1$ في جوار $+\infty$. وكذلك

$$\lim_{x\to(-1)^{+}}f(x)=+\infty\quad\text{و}\quad\lim_{x\to(-1)^{-}}f(x)=-\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f. وعلاوة على ذلك لدينا

$$f'(x)=-e^{-x}-\frac{2}{(x+1)^{2}}$$

فالتابع f' سالبٌ دوماً، ومنه جدول التغيرات الآتي:

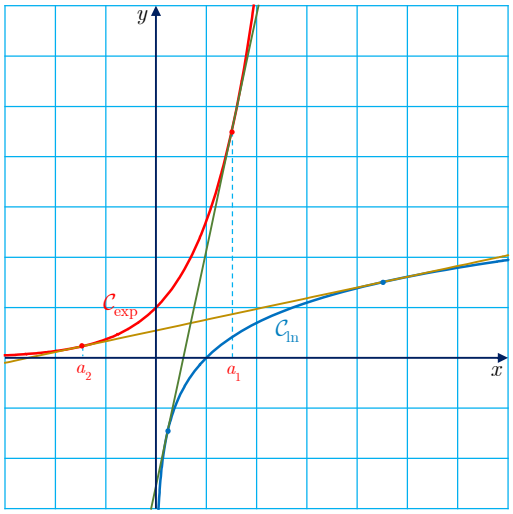
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

2. نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متناقصٌ تماماً على $]-1,+\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_2 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$. إذن تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين هما a_1 و a_2.

3. نفترض أنّ $x \notin \{-1,1\}$ ونحسب

$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x f(x)=\left(e^x-\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x\left(e^{-x}-\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=e^x-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}-e^x=0$$

وعليه نستنتج من كون $f(a_1)=0$ –وبالاستفادة من المساواة السابقة– أنّ $f(-a_1)=0$ ولكن $-a_1 \in]-1,+\infty[$ لأنّ $a_1<-1$، وعلى هذا، كلٌّ من a_2 و $-a_1$ جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$، ولأننا أثبتنا أنّ لهذه المعادلة جذرٌ وحيدٌ في هذا المجال استنتجنا أنّ $a_2=-a_1$.



13 تابع القوّة

ليكن α عدداً حقيقياً غير معدوم. نهدف إلى دراسة التابع P_α المعرّف على $]0,+\infty[$ بالصيغة $P_\alpha(x)=x^\alpha$.

نحو الحلّ

تذكّر أنّ $P_\alpha(x)=e^{\alpha \ln x}$ فالتابع P_α من النمط $x \mapsto e^{u(x)}$ حيث $u(x)=\alpha \ln x$.

1. عيّن، تِبعاً لإشارة α، جهة اطراد التابع u، واستنتج جهة اطراد P_α.
2. ادرس تِبعاً لإشارة α نهاية P_α عند طرفي مجموعة تعريفه. وبيّن أنّه في حالة $\alpha>0$ يمكننا أن نعرّف $P_\alpha(0)=0$ فنحصل على تابع مستمرّ على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

لندرس اشتقاقية التابع P_α.

1. أثبت أنّ P_α اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وأنّ $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$ أو كما جرت العادة أن نكتب $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. نفترض أنّ $0 < \alpha < 1$. وأنّنا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$. احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto t(x) = \dfrac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x}$ عند الصفر. ماذا تستنتج ؟
3. أعد السؤال السابق في حالة نفترض أنّ $1 < \alpha$.

أثبت $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\beta}$. وبوجه خاص $P_{1/\alpha}$ هو التقابل العكسي للتابع P_α. في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n نسمّي التابع $P_{1/n}$ تابع الجذر من المرتبة n، ونرمز عادة إلى $x^{1/n}$ بالرمز $\sqrt[n]{x}$، فيكون $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ التقابل العكسي للتابع $x \mapsto x^n$ المعرّفين على المجال $]0,+\infty[$.

مقارنة تابع القوّة بالتابعين الأسّي واللوغاريتمي.

1. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^\alpha \ln x\right) = 0$.
2. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^\alpha e^{-x}\right) = 0$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. التابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن في حالة $\alpha > 0$ يكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متزايداً تماماً، ومن ثَمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متزايداً تماماً. أمّا في حالة $\alpha < 0$ فيكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متناقصاً تماماً، ومن ثَمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متناقصاً تماماً أيضاً.
2. في حالة $\alpha < 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = +\infty$ ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} P_\alpha(x) = +\infty$$

و في حالة $\alpha > 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = -\infty$ ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} P_\alpha(x) = 0$$

فإذا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$ كان $\lim\limits_{x\to 0} P_\alpha(x) = P_\alpha(0) = 0$ وصار P_α مستمراً على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

1. التابع $u : x \mapsto u(x) = \alpha \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ إذن التابع $x \mapsto e^{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على المجال ذاته ومشتقه

$$P'_\alpha(x) = u'(x)e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{-\ln x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha P_{\alpha-1}(x)$$

2. في حالة $0 < \alpha < 1$ لدينا

$$t(x) = \frac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha - 1 < 0$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = +\infty$، فالتابع ليس اشتقاقياً في هذه الحالة عند الصفر، ولكن لخطه البياني مماس شاقولي في النقطة $(0,0)$.

3. أمّا في حالة $\alpha > 1$ فلدينا

$$t(x) = \frac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha - 1 > 0$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$، فالتابع P_α في هذه الحالة اشتقاقي عند الصفر ومشتقه معدوم عند الصفر. أي تبقى العلاقة $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ صحيحة في هذه الحالة على $[0,+\infty[$.

في حالة $x > 0$ لدينا

$$P_\alpha(P_\beta(x)) = \exp\left(\alpha \ln(e^{\beta \ln x})\right) = \exp\left(\alpha\beta \ln x\right) = P_{\alpha\beta}(x)$$

وهي تكتب بالصيغة المألوفة $(x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}$.

في حالة $\alpha > 0$ لدينا $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$، ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

وكذلك لأنّ $x^\alpha \ln x = -\dfrac{\ln t}{t^\alpha}$ حيث $t = \dfrac{1}{x}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = -\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

ومن جهة أخرى نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ إذن في حالة $\alpha > 0$ لدينا أيضاً $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/\alpha}}{x} = +\infty$،

ولأنّ $\lim\limits_{X\to+\infty} P_\alpha(X) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = +\infty$ وهذا يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

أو $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$.



قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

① $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2$

② $4e^{2x} + e^{-2x} \le 5$

③ $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

④ $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

⑤ $e^x + \dfrac{e}{e^x} = 1 + e$

⑥ $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$

⑦ $\dfrac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}$

الحل

① $x = -\ln 2$ ② $x \in]-\ln 2, 0[$ ③ $x = 0$ ④ $x = \{1, 1+\ln 2\}$ ⑤ $x \in \{0,1\}$ ⑥ $x = 2$ ⑦ $x > \ln 3$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$ ② $\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

الحل

① $(x,y) = (\ln 2, 1)$ ② $(x,y) \in \{(-1,2), \{\frac{1}{2}, -4\}$ ③ $(x,y) = (2,-1)$

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

① a. بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

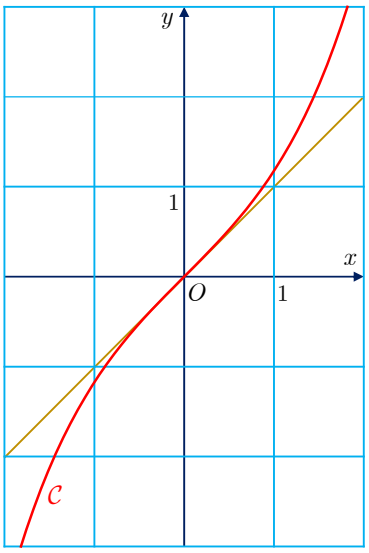
b. اكتب معادلة المماس d للخط $\mathcal{C}$ في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

② a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$، ثم استنتج أنَّ $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2+1})$.

الحل

① a. التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، لدينا $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$، فالتابع فردي. وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ.



ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

من ناحية أخرى، لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ وهو موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$، فالتابع f متزايدٌ تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ونجد في الشكل المجاور خطه البياني $\mathcal{C}$.

① b. لمّا كان $f(0)=0$ و $f'(0)=1$، استنتجنا أنّ معادلة المماس في المبدأ هي $y=x$، وإذا عرّفنا $g(x)=f(x)-x$ استنتجنا أنّ

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)$$
$$=\frac{1}{2e^{x}}\left(e^{2x}-2e^{x}-1\right)=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{2e^{x}}$$

هذا يبرهن أنّ التابع $g'(x)$ موجبٌ على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x=0$. فالتابع g متزايدٌ تماماً، ولأنّ $g(0)=0$ استنتجنا أنّ إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة x. فالخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس في المبدأ على $]0,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,0[$.

② a. لمّا كان f مستمراً ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$، استنتجنا أنّ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$، فمهما كانت قيمة m من $\mathbb{R}$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ في $\mathbb{R}$ وهذا الحل وحيدٌ لأنّ التابع f مطردٌ تماماً. ليكن α هذا الحل.

② b. المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{x}-e^{-x}=2m$ أو $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ وأخيراً

$$e^{x}\in\{m-\sqrt{m^{2}+1},m+\sqrt{m^{2}+1}\}$$

ولكن $m-\sqrt{1+m^{2}}\le 0$ فلا يمكن أن يكون مساوياً للمقدار الموجب تماماً e^{x}، إذن لا بدّ أن يكون $e^{x}=m+\sqrt{m^{2}+1}$ أو $x=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$. هذا يبرهن أنّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$.

ملاحظة: يسمى هذا التابع: تابع الجيب الزائدي hyperbolic sine ورمزه sinh.

17 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=e^{x}+\ln|x|$. وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=xe^{x}+1$.

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② ادرس تغيرات f وارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلّين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. وكذلك نلاحظ أنّ $g'(x)=e^{x}(x+1)$ إذن إشارة $g'(x)$ تتفق مع إشارة $(x+1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

إذن التابع g موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ينتج من ذلك أنّ إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ تتفق مع إشارة x على $\mathbb{R}^{*}$.

② هنا لدينا $f(x)=e^x+\ln(x)$ في حالة $x>0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن ناحية أخرى، لدينا $f(x)=e^x+\ln(-x)$ في حالة $x<0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أيضاً.

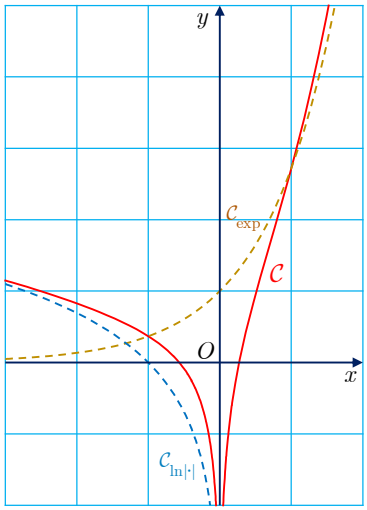
أمّا عند الصفر، فلدينا $\lim\limits_{x\to0}\ln|x|=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$. فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f .

نلاحظ أيضاً أنّ

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+\dfrac{1}{x} & : \quad x>0 \\ e^x+\dfrac{-1}{-x} & : \quad x<0 \end{cases}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ أياً كانت x من $\mathbb{R}^*$. ولقد درسنا سابقاً إشارة هذا المقدار لنجد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	‖	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	‖	$-\infty$	



ومنه الخط البياني المبين في الرسم المجاور.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على $]-\infty,0[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ a في المجال $]-\infty,0[$. وبالمثل نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ b في المجال $]0,+\infty[$. وعليه، مهما كان m من $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x)=m$ حلّان حقيقيان أحدهما موجبٌ تماماً والآخر سالبٌ تماماً.

18 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$.

① تحقّق من كلٍ من المقولات الآتية:

a. f معرّف على $\mathbb{R}$.

b. يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

c. المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$.

d. الخط $\mathcal{C}$ يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

④ ارسم كلّاً من d و Δ و $\mathcal{T}$ ، ثم ارسم $\mathcal{C}$ في المعلم ذاته.

الحل

① $a.$ نلاحظ أنّ $e^{2x}-e^{x}+1=(e^{x}-\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}>0$ فالمقدار $e^{2x}-e^{x}+1$ موجب تماماً مهما كانت قيمة x، والتابع f معرّف على كامل $\mathbb{R}$.

① $b.$ لأنّ $e^{2x}-e^{x}+1=e^{2x}(1-e^{-x}-e^{-2x})$ إذن $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

① $c.$ بوضع $g(x)=f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ln(1)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

① $d.$ نجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}(2e^{x}-1)}{e^{2x}-e^{x}+1}$ إذن $f'(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $e^{x}=\frac{1}{2}$ أو $x=-\ln 2$.

② لمّا كان $f(x)=2x+g(x)$ حيث g معرّف في ① $c.$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. ولقد وجدنا أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

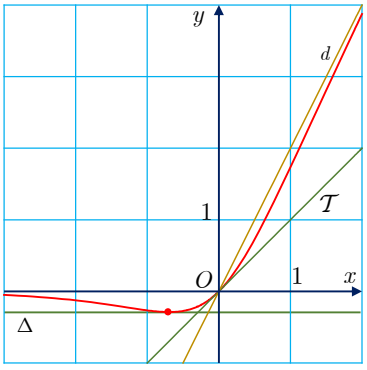
ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln(1)=0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

علاوة على ما سبق، لقد رأينا أنّ $f'(x)$ يحافظ على إشارة ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,-\ln 2[$ و $]-\ln 2,+\infty[$، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

③ هنا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$.

④ الرسم.



19 ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$.

① ادرس تغيرات $g: x \mapsto e^x f'(x)$.

② استنتج دراسة تغيرات f.

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x)=e^x f'(x)=-3-\ln x+\dfrac{1}{x}$. ولدينا

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع g. ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنّ g يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما $x \mapsto -3+\dfrac{1}{x}$ و $x \mapsto -\ln x$، فالتابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

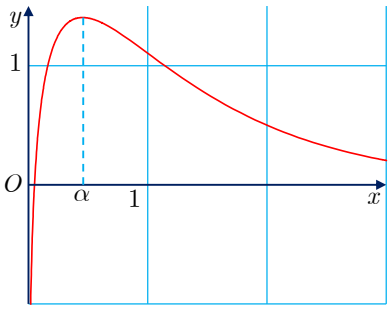
نلاحظ بوجه خاص أنّ التابع المستمر g متناقص تماماً ويغير إشارته على المجال $]0,+\infty[$، فيوجد حلّ وحيد α للمعادلة $g(x)=0$ ويكون $g(x)>0$ على $]0,\alpha[$ و $g(x)<0$ على $]\alpha,+\infty[$. وكذلك نلاحظ أنّ $g(0.4)\approx 0.416>0$ و $g(0.5)\approx -0.307<0$ إذن $\alpha \in]0.4,0.5[$، ويمكن أن نعتبر $\alpha \approx 0.45$.

② لدراسة f نلاحظ أولاً أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. ومن ناحية أخرى $f(x)=3e^{-x}+\dfrac{x}{e^x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$ ونعلم أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

ومن ناحية أخرى، $f'(x)=e^{-x}g(x)$، وكنا قد درسنا إشارة g في الطلب السابق، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

حيث $f(\alpha)\approx 1.4$. ونلاحظ أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقطع محور الفواصل عند $(e^{-3},0)$. ومنه الرسم البياني للتابع f.



20 ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

الحل

- لمّا كان

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to1^-}\frac{1+x}{1-x}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}\frac{1+x}{1-x}=-\infty$$

استنتجنا أنّ

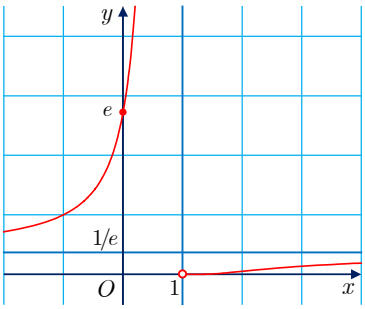
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}f(x)=0$$

نستنتج أنّ المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f. وكذلك أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$، وأخيراً أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

- من ناحية أخرى التابع $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ متزايدٌ تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ وعليه يكون التابع f متزايداً تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$، لأنّ التابع الأسي متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}

- الرسم:



21 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

① *a.* جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط $\mathcal{C}$ مقاربات غير مائلة؟

b. أثبت أنّ $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$.

c. استنتج أنّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d، في جوار $-\infty$.

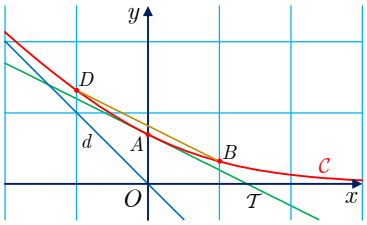
② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد d ثم $\mathcal{C}$.

③ نرمز إلى نقاط $\mathcal{C}$ التي فواصلها 0 و 1 و -1 على التوالي بالرموز A و B و D. أثبت أنّ مماس $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم (BD).

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ فالخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مقارباً أفقياً. وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. ولكن $e^{-x} + 1 = e^{-x}(1 + e^{x})$ إذن $f(x) = -x + \ln(1 + e^{x})$، ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) = \ln(1) = 0$. هذا يبرهن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.

② التابع $x \mapsto e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}} + 1$ تابعٌ متناقصٌ تماماً، والتابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن التابع f متناقص تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي:



x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

③ ميل المماس $\mathcal{T}$ في النقطة $A(0,\ln(2))$ يساوي $f'(0) = -\frac{1}{2}$. وميل المستقيم (BD) يساوي

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{-1} + 1}{e + 1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}$$

ولمّا كان للمستقيمين $\mathcal{T}$ و (BD) الميل نفسه استنتجنا توازيهما: $\mathcal{T} \parallel (BD)$.

22 محل هندسي

نتأمّل التابعين $f_1 : x \mapsto e^{x}$ و $f_2 : x \mapsto e^{-x}$، وخطاهما البيانيان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في معلمٍ متجانس $\big(O;\vec{i},\vec{j}\big)$. يقطع المستقيم المرسوم من $A(m,0)$ موازياً محور التراتيب الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N . بالترتيب.

① ارسم $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

② نرمز بالرمزين T_1 و T_2 إلى مماسي $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N بالترتيب. اكتب معادلةً لكل من T_1 و T_2. واستنتج أنَّ T_1 و T_2 متعامدان.

③ أثبت أنَّ إحداثيتي P، نقطة تقاطع T_1 و T_2، هما $\left(m - \dfrac{e^{m} - e^{-m}}{e^{m} + e^{-m}}, \dfrac{2}{e^{m} + e^{-m}}\right)$.

④ لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a. احسب، بدلالة m، إحداثيي النقطة I.

b. جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في $\mathbb{R}$.

c. ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ *a.* احسب، بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{IP}$ و $\overrightarrow{AP}$.

b. استنتج أنَّ المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I، وأنَّ الطول AP ثابت.

الحل

① تذكّر أنّ $\mathcal{C}_2$ نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى محور التراتيب.

② إحداثيّتا M هما (m,e^m) وإحداثيّتا N هما (m,e^{-m}).

- معادلة المماس T_1 للخط $\mathcal{C}_1$ في M هي $y=e^m+e^m(x-m)$.
- معادلة المماس T_2 للخط $\mathcal{C}_2$ في N هي $y=e^{-m}-e^{-m}(x-m)$.

وعلى الخصوص ميل T_1 يساوي e^m وميل T_2 يساوي $-e^{-m}$ وجداء ضرب هذين الميلين يساوي -1، فالمماسان متعامدان.

③ إذا كانت $P(x,y)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين T_1 و T_2 كان

$$\begin{cases} y=e^m+e^m(x-m) \\ y=e^{-m}-e^{-m}(x-m) \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد

$$x_P=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}} \quad \text{و} \quad y_P=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$$

④ لمّا كانت I منتصف $[MN]$ استنتجنا أنّ

$$x_I=m \quad \text{و} \quad y_I=\frac{e^m+e^{-m}}{2}$$

وعليه عندما تتحوّل m في $\mathbb{R}$ ترسم I الخطّ البياني Γ للتابع $x\mapsto g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

التابع g زوجي، إذن Γ متناظرٌ بالنسبة إلى محور التراتيب، وكذلك فإنّ $g'(x)$ موجب على $]0,+\infty[$ فالتابع g متزايدٌ تماماً على $[0,+\infty[$. أمّا رسم g فبسيط استناداً إلى رسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ نجد بحساب بسيط أنّ

$$\overrightarrow{AP}=\left(x_P-x_M,y_p-y_M\right)=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)$$
$$\overrightarrow{IP}=\left(x_P-x_I,y_p-y_I\right)=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},-\frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\right)$$

نحسب من $\overrightarrow{IP}$ ميل المستقيم (IP) فنجد

$$\frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\cdot\frac{e^m+e^{-m}}{e^m-e^{-m}}=\frac{e^m-e^{-m}}{2}$$

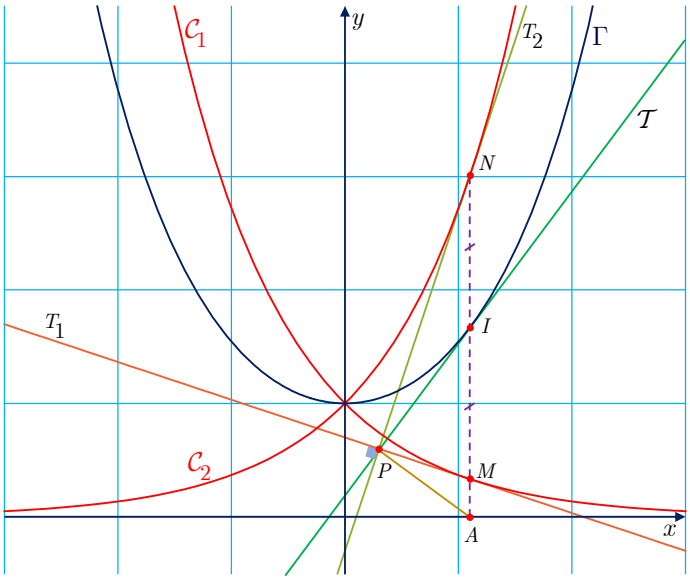
أمّا ميل المماس T للمنحني Γ في النقطة I التي فاصلتها m فيساوي $g'(m) = \dfrac{e^m - e^{-m}}{2}$،

نستنتج أنّ كلا المستقيمين (IP) و T يمران بالنقطة I ولهما الميل نفسه $\dfrac{e^m - e^{-m}}{2}$ فهما منطبقان.

ومن جهة أخرى نحسب

$$AP^2 = \left(\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)^2 = \frac{e^{2m} + 2 + e^{-2m}}{(e^m + e^{-m})^2} = 1$$

فنجد أنّ طول AP يبقى ثابتاً عندما تتحوّل m.



23 ابحث عن نهاية كلٍّ من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية:

❶ $u_n = \dfrac{e^{-n} + 1}{e^{-n} + 3}$ ❷ $u_n = \dfrac{e^{2n}}{(1+n)^2}$ ❸ $u_n = \ln(2 + e^{-n})$

❹ $u_n = e^{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$ ❺ $u_n = n(e^{1/n} - 1)$ ❻ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

الحل

❶ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$ ❷ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ❸ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln(2)$

❹ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e$ ❺ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ ❻ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^2$

24 المشتق من المرتبة n

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=(x^2+x-1)e^x$. ولتكن $f^{(1)}=f'$ و $f^{(2)}=f''$ و $f^{(3)}$ و ... و $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n\geq 1)$.

① احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$.

② a. أثبت أنّ $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ مع $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=b_n+a_n$.

b. استنتج أنّ a_n و b_n أعداد عادية.

③ في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n.

a. أثبت أنّ المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n.

b. تحقّق من أنّ $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ (أياً يكن $n\geq 1$) ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n.

الحل

① هذا حساب بسيط :

$$f(x)=(x^2+x-1)e^x$$
$$f^{(1)}(x)=(x^2+3x)e^x$$
$$f^{(2)}(x)=(x^2+5x+3)e^x$$

② الخاصة $E(n)$ هي :

"يوجد عددان a_n و b_n يحققان $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ أياً كان x".

يبيّن ما سبق أنّ $E(1)$ صحيحة حيث $a_1=3$ و $b_1=0$، وكذلك $E(2)$ صحيحة حيث $a_2=5$ و $b_2=3$. وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'(x)=(x^2+a_nx+b_n)(e^x)'+(x^2+a_nx+b_n)'e^x\\&=(x^2+a_nx+b_n)e^x+(2x+a_n)e^x\\&=\left(x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n)\right)e^x\\&=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً حيث $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$. وهذا يثبت صحة الخاصة $E(n)$ أياً كانت قيمة n.

لنضع $\tilde{E}(n)$ دلالة على الخاصّة "a_n و b_n عددان عاديان".

وجدنا سابقاً أنّ $(a_1,b_1)=(3,0)$ فالخاصة $\tilde{E}(1)$ صحيحة. وإذا افترضنا أنّ $\tilde{E}(n)$ صحيحة، استنتجنا من المساواتين $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$ أنّ $\tilde{E}(n+1)$ صحيحة أيضاً، فالخاصة $\tilde{E}(n)$ صحيحة أياً كانت قيمة n.

③ نستنتج من المساواة $a_{n+1}-a_n=2$ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها a_1 يساوي 3. إذن من $a_n-a_1=2(n-1)$ نستنتج أنّ $a_n=2n+1$.

ونستنتج من المساواة $b_{n+1}=b_n+a_n$ أياً كانت n أنّ

$$\begin{aligned} b_2-b_1&=a_1\\ b_3-b_2&=a_2\\ b_4-b_3&=a_3\\ &\vdots\\ b_n-b_{n-1}&=a_{n-1}\end{aligned}$$

وبالجمع نجد $b_n-b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$. ولكن $b_1=0$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} b_n&=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)\frac{a_1+a_{n-1}}{2}\\ &=(n-1)\frac{3+2n-1}{2}=n^2-1\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

25 معادلة تفاضلية

① لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y'+3y=0$. عيّن جميع حلول (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$.

a. عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E').

b. بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E').

c. استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E').

الحل

① الشكل القانوني لهذه المعادلة هو $y'=-\frac{3}{2}y$ وحلولها هي التوابع $x\mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

② يكون $x\mapsto ax^2+bx+c$ حلاً للمعادلة (E') إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$2(ax^2+bx+c)'+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$$

أو $(3a-1)x^2+(3b+4a)x+2b+3c-1=0$. وهذا يكافئ $a=\frac{1}{3},b=-\frac{4}{9},c=\frac{17}{27}$. إذن كثير الحدود $x\mapsto f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ هو حلٌّ للمعادلة (E').

نعلم من جهة أولى أنّ

$$2f'(x)+3f(x)=x^2+1 \qquad (*)$$

فإذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان

$$2g'(x)+3g(x)=x^2+1 \qquad (**)$$

وبطرح المساواتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً من طرف نجد $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي إنّ الفرق $g-f$ حلٌّ للمعادلة (E).

وبالعكس، إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي

$$2g'(x)+3g(x)=2f'(x)+3f(x)=x^2+1$$

أي إنّ g حلٌّ للمعادلة (E').

إذن g حلٌّ للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $g-f$ حلّاً للمعادلة (E) أي إذا وجد k في $\mathbb{R}$ بحيث $g(x)-f(x)=ke^{-\frac{3}{2}x}$ أي إنّ مجموعة حلول المعادلة (E') هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{4}{9}x+\tfrac{17}{27}+ke^{-\frac{3}{2}x} : k\in\mathbb{R}\right\}$$

26 نتأمّل المعادلة التفاضلية (E) : $y'+3y=2e^{-x}$.

① عيّن العدد a ليكون التابع $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

② ليكن a العدد الذي وجدناه في ①، وليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$. نعرّف التابع $h : x\mapsto g(x)-ae^{-x}$ أثبت أنّ التابع g حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E)، إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية (F) : $y'+3y=0$.

③ حلّ المعادلة التفاضلية (F)، واستنتج مجموعة حلول (E).

الحل

① يكون $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$(ae^{-x})'+3(ae^{-x})=2e^{-x}$$

أو $a=1$.

② لنحسب:

$$h'(x)+3h(x)=(g(x)-e^{-x})'+3(g(x)-e^{-x})=g'(x)+3g(x)-2e^{-x}$$

إذن g حلٌّ للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان h حلّاً للمعادلة (F) : $y'+3y=0$.

③ ولكن مجموعة حلول المعادلة (F) هي $\{x\mapsto ke^{-3x} : k\in\mathbb{R}\}$. إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{x\mapsto e^{-x}+ke^{-3x} : k\in\mathbb{R}\}$.

27 ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

a. حلّ المعادلة التفاضلية (1) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=0$.

b. نتأمّل المعادلة التفاضلية (2) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=-\dfrac{x+1}{n(n+1)}$. عيّن عددين a و b ليكون التابع $x\mapsto g(x)=ax+b$ المعرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2).

c. ❶ أثبت أنّه ليكون تابع h معرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2) يلزم ويكفي أن يكون $h-g$ حلاً للمعادلة (1).

❷ استنتج من ذلك حلول المعادلة (2).

❸ ومن بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0)=0$.

② نتأمّل التابع f_n المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_n(x)=1+\dfrac{x}{n+1}-e^{x/n}$.

a. ادرس إشارة f_n' ، واستنتج جدول تغيرات التابع f_n. أثبت على الخصوص أنّ التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماماً يطلب تعيينها.

b. أثبت أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n يقبل مُقارباً مائلاً d_n. أعطِ معادلةً للمستقيم d_n. وارسم كلاً من d_2 و $\mathcal{C}_2$.

الحل

① a. حلول (1) هي $x\mapsto ke^{x/n}$ حيث k من $\mathbb{R}$.

① b. يكون $x\mapsto g(x)=ax+b$ حلاً للمعادلة (2) إذا تحقق، مهما كانت قيمة x المساواة

$$(ax+b)'-\frac{1}{n}(ax+b)=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

ومنه $a=\frac{1}{n+1}$ و $b=1$. فالتابع $x\mapsto g(x)=\frac{x}{n+1}+1$ حلٌّ للمعادلة التفاضلية (2).

① c. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}(h-g)'(x)-\frac{1}{n}(h-g)(x)&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)-\left(g'(x)-\frac{1}{n}g(x)\right)\\&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)+\frac{x+1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حلاً للمعادلة (1)، ولكن حلول الأخيرة معروفة وقد وجدناها في ① a. إذن h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا وجد عدد k من $\mathbb{R}$ يحقق $h(x)-g(x)=ke^{x/n}$ مهما كانت قيمة x. أي إنّ مجموعة حلول (2) هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{n+1}x+1+ke^{x/n}\ :\ k\in\mathbb{R}\right\}$$

والحل الوحيد الذي ينعدم عند الصفر هو التابع الموافق لقيمة $k=-1$ أي

$$x\mapsto f(x)=\frac{x}{n+1}+1-e^{x/n}$$

② لدراسة التابع f_n نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=-\infty$ ، ولأنّ

$$f_n(x)=1+e^{x/n}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x}{n}\cdot e^{-x/n}-1\right)$$

نستنتج من $\lim\limits_{X\to\infty}Xe^{-X}=0$ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{n}e^{-x/n}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=-\infty$.

ومن جهة أخرى $f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}e^{x/n}$ وهو ينعدم فقط في حالة $x = \alpha_n = n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ومنه جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\searrow$	$-\infty$

فالتابع f_n يبلغ قيمة كبرى $M = f(\alpha_n)$ على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أنّ $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ إذن $\alpha_n < 0$ ولكن التابع f_n متناقصٌ تماماً على المجال $]\alpha_n, +\infty[$ إذن $M = f(\alpha_n) > f_n(0) = 0$ فالقيمة الكبرى M موجبة تماماً، كما هو مطلوب. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$M = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

وأخيراً بوضع $h(x) = f_n(x) - \left(\frac{x}{n+1} + 1\right) = -e^{x/n}$، نرى أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ فنستنتج أنّ المستقيم d_n الذي معادلته $y = \frac{x}{n+1} + 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n في جوار $-\infty$، والخط $\mathcal{C}_n$ يقع دوماً تحت d_n لأنّ $h(x) < 0$ على $\mathbb{R}$.

وفيما يأتي نجد الرسم البياني لكل من d_2 و $\mathcal{C}_2$.

