الإدارة العامة لمنطقة الجهراء التعليمية
مراقبة التوجيه الفني للرياضيات
نموذج إجابة نموذج امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر علمي
العام الدراسي 2026 / 2027 م
المجال الدراسي : الرياضيات – الزمن ساعتان وخمس واربعون دقيقة

القسم الأول : أسئلة المقال

(أجب عن الأسئلة التالية موضحا خطوات الحل في كل منها)
تراعى الحلول الصحيحة المختلفة قي الاسئلة المقالية

السؤال الأول :

(a) أوجد ان امكن : $\lim_{x\to 0} \frac{(x+4)^2-16}{x}$

الحل : عند التعويض المباشر عن x ب 0 نحصل على صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+4)^2-16}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+4-4)(x+4+4)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x)(x+8)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} (x+8)$$

$$= (0)+8$$

$$= 8$$

تابع السؤال الأول : -

(b)أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x-1}}$

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}} \qquad x\to\infty \quad \therefore |x| = x$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1}-\mathbf{0}=\mathbf{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 4+0-0 = 4 > 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{4} = 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{1}{2}$$

تابع السؤال الأول :

(c) اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$
فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) **يساوي** 10
ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ **يساوي** 15
استخدم مستوى ثقة 95% **لإيجاد**
1) **هامش الخطأ**
2) **فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي** μ

الحل :

σ^2 **(غير معلوم)، و** $n \leq 30$

$$n = 25$$

درجات الحرية : $n - 1 = 25 - 1 = 24$

مستوى الثقة : $1 - \alpha = 95\%$

$$\therefore 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.050$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

1) **هامش الخطأ:**

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$$

∴ هامش الخطأ $E = 4.128$

2) **فترة الثقة:**

$$(\bar{x} - E\ , \bar{x} + E)$$

$$= (15 - 4.128\ ,\ 15 + 4.128)$$

$$= (10.872\ ,\ 19.128)$$

السؤال الثاني :

a) **لتكن** $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$

ابحث اتصال $g \circ f$ **عند** $x = -2$

الحل :

$f(x) = x^2 + 5$ دالة متصلة عند $x = -2$ (1)

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

$g(x) = \sqrt{x}$ دالة متصلة عند كل $x \in R^+$

g دالة متصلة عند $x = 9$

g دالة متصلة عند $x = f(-2)$ (2)

من 1 **و** 2 **نجد أن** $g \circ f$ **متصلة عند** $x = -2$

تابع السؤال الثاني : (b) لتكن الدالة :

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & : x \leq 1 \\ 3x-2 & : x > 1 \end{cases}$$

أوجد $g'(x)$ ان امكن .

الحل: $g(\mathbf{1}) = (\mathbf{1}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$

$$g'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x-2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 3 = 3$$

$$\begin{aligned} g'_-(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2)^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} (x-3) = 1-3 = -2 \end{aligned}$$

$$g'_+(1) \neq g'_-(1)$$

$g'(1)$ غير موجودة

السؤال الثالث :

(a) أوجد معادلة المماس ومعادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{x^2+4}$ عند النقطة $(2, 1)$

الحل:

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{-8(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$$

ومنه الميل : $f'(2) = \frac{-16(2)}{((2)^2+4)^2} = \frac{-1}{2}$

معادلة المماس : $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x-2)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

معادلة الناظم : $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x-2)$$

$\frac{-1}{f'(2)} =$ 2 ميل الناظم

$$y - 1 = 2(x-2)$$

$$y = 2x - 4 + 1$$

$$y = 2x - 3$$

تابع السؤال الثالث :

b) اذا كانت $y = x\ sin\ x$

اثبت أن $y'' + y - 2\ COS\ x = 0$

الحل :

$$y' = (1)(sinx) + (x)(cosx) = sinx + xcosx$$

$$y'' = cosx + (1)(cosx) + (x)(-sinx)$$

$$= 2cosx - xsinx$$

$$y'' + y - 2\ COS\ x =$$

$$(2cosx - xsinx) + (xsinx) - 2cosx$$

$$= 0$$

تابع السؤال الثالث :

(c) بين أن الدالة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية وفسر اجابتك .

الحل :

الدالة $f(x) = x^2 + 2x$ دالة كثيرة حدود متصلة على **R** ، فهي متصلة على الفترة $[-3, 1]$ ،

وقابلة للاشتقاق على $(-3, 1)$

شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة$[-3,1]$

إذن يوجد على الأقل $(-3, 1)$ $\in$ c بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

$$f(1) = (1)^2 + 2(1) = 3$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3$$

$$f'(c) = 2c + 2$$

$$2c + 2 = \frac{3 - 3}{1 - (-3)} = 0$$

$$2c = -2$$

$$c = -1 \in (-3,1)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين$(-3 , 3)$, $(1 , 3)$

السؤال الرابع :

(a) ادرس تغير الدالة $y = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل :

f دالة كثيرة الحدود مجالها R

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0 \to x = 0$$
$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$(0,1)$ نقطة حرجة

نكون جدول التغير لدراسة إشارة f'

$-\infty$		0		∞
إشارة f'	$---$		$---$	
سلوك الدالة f	متناقصة ↘		متناقصة ↘	

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

لا يوجد قيم قصوى محلية للدالة

نكون جدول لدراسة إشارة $f''(x)$

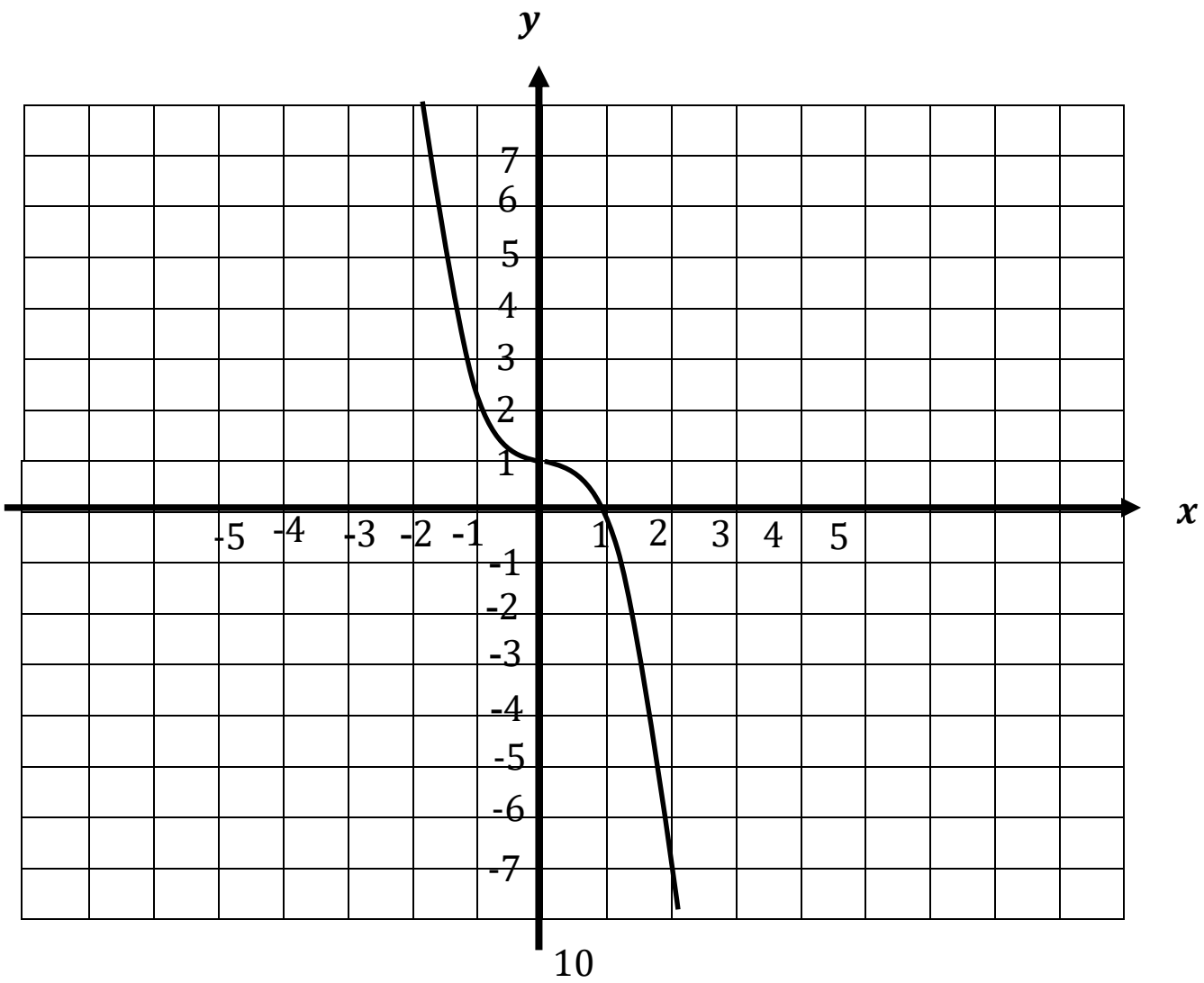
$$f''(x) = -6x$$
$$-6x = 0 \to x = 0$$

$-\infty$		0		∞
إشارة f''	$+++$		$---$	
التقعر	تقعر لأعلى ∨		تقعر لأسفل ∧	

منحني الدالة مقعر لاعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعر لاسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0,1)$ نقطة انعطاف

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7
	نقطة اضافية	نقطة اضافية	نقطة حرجة نقطة انعطاف	نقطة اضافية	نقطة اضافية



تابع السؤال الرابع :(b) أوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosxtanx-2xcosx}{3x}$$

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosxtanx}{3x}-\frac{2xcosx}{3x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosxtanx}{3x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2cosx}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx}{3}.\frac{tanx}{x}\right)-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}(cosx)$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(cosx).\lim_{x\to 0}\left(\frac{tanx}{x}\right)-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}(cosx)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)(1)(1)-\left(\frac{2}{3}\right)(1)$$

$$=\frac{-1}{3}$$

القسم الثاني : البنود الموضوعية

أولا في البنود (1 – 4) ظلل في ورقة الإجابة (a) اذا كانت العبارة صحيحة
وظلل (b) اذا كانت العبارة خطأ

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|2x-3|} = -\frac{1}{2}$ a b

2) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & : x < 4 \\ x^2-9 & : x > 4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 4$ a b

3) اذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\,.f(c))$ فإن $f''(c) = 0$ a b

4) ميل مماس منحني الدالة $y = x^2 + 2x$ عند $x = 3$ يساوي 11 a b

ثانيا في البنود من 5 الى 12 لكل بند اربع اختيارات واحد فقط منها صحيح
ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة

5) اذا كانت $f(x) = a\,x^2 - 25\,x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن a تساوي:

a 2 b 3 c 4 d 5

6) اذا كان $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

a $\cot x \csc x$ b $-\cot x \csc x$ c $\cos x$ d $-\cos x$

7) لتكن $f : f(x) = \sqrt{x^2+7}$ ، $g : g(x) = x^2 - 3$ فإن $(f \circ g)(0)$ يساوي :

a 4 b -4 c 1 d -1

8) في دراسة على عينة اسلاك معدنية حجمها $n = 64$
تبين ان المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\bar{x} = 360\ kg$ مع انحراف معياري $S = 50kg$
اذا كان المقياس الاحصائي لقوة تحمل كافة الاسلاك المعدنية المصنعة $Z = -2.4$
فإن المتوسط الحسابي μ هو :

a) 346 b) 396 c) 375 d) 326

9) اذا كانت : $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

a) $3(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$ b) $-3(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$

c) $-3(2x+1)^{\frac{-1}{2}}$ d) $3(2x+1)^{-1}$

10) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x = 4\ , x = -1$ b) متصلة على $(-\infty\ , 4\ ]$

c) متصلة على كل من $(-\infty\ , 4\ ) , (\ 4\ , \infty)$ d) ليس أي مما سبق

11) اذاكانت $y = sin^{-5}x - cos^{3}x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

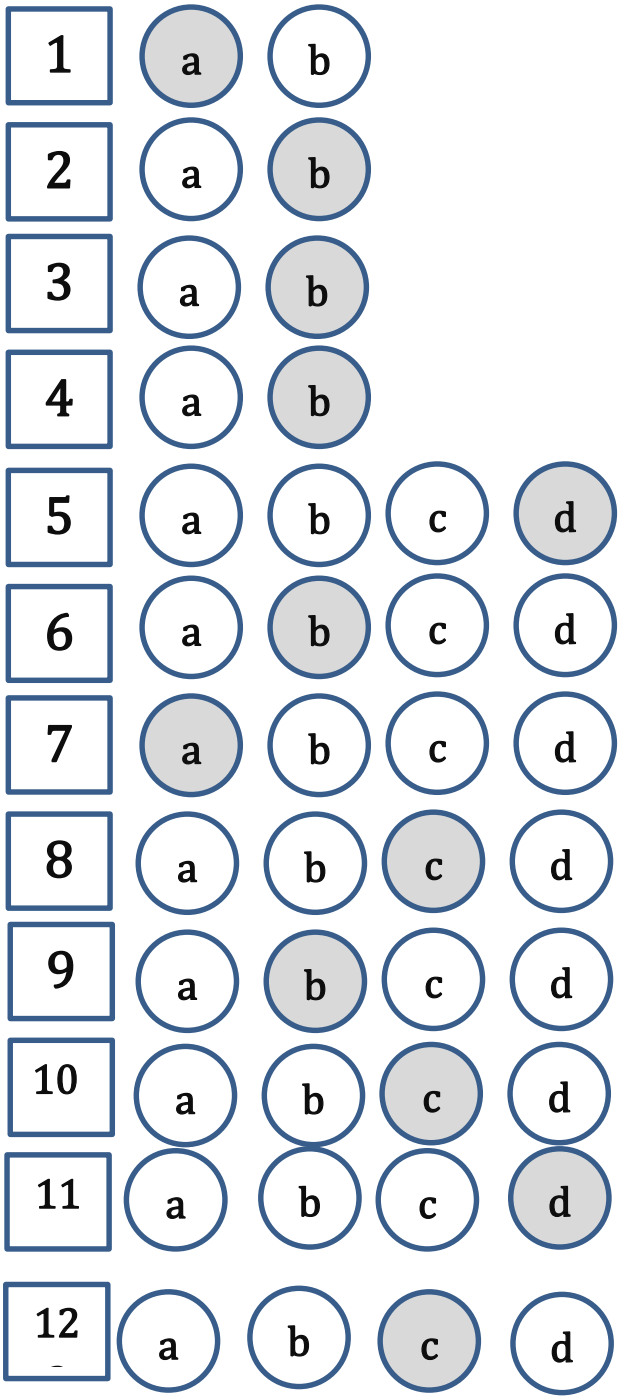
a) $5sin^{-6}xcosx + 3cos^{2}xsinx$ b) $5sin^{-6}xcosx - 3cos^{2}xsinx$

c) $-5sin^{-6}xcosx - 3cos^{2}xsinx$ d) $-5sin^{-6}xcosx + 3cos^{2}xsinx$

12) ميل المماس عند النقطة $A(1,1)$ على منحنى $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هو :

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

ورقة إجابة البنود الموضوعي



وزارة التربية	امتحان تجريبي الفصل الدراسي الأول	للعام الدراسي : 2026 / 2027
منطقة مبارك الكبير التعليمية	المادة : الرياضيات	الزمـــن : ساعتان و45 دقيقة
مراقبة التوجيه الفني للرياضيات	الصف الثاني عشر علمي	عدد الأوراق : (12)

نموذج الاجابة

12

أسئلة المقال

(تراعى الحلول الأخرى في جميع الأسئلة)

السؤال الأول:

a) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$$

الحل:

عند التعويض المباشر عن x ب -7 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x} = \frac{((x+4) - 3)((x+4) + 3)}{x(x+7)}$$

$$= \frac{(x+1)\cancel{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}} \qquad , x \neq -7$$

$$= \frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x} = \lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x}$$

شرط المقام:

$$\because \lim_{x \to -7} x = -7 \qquad , -7 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x} = \frac{\lim_{x \to -7} x + 1}{\lim_{x \to -7} x} = \frac{-7+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

تابع/ السؤال الأول:

b) أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

الحل:

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2})}}$$

$$=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\not{x}(1-\frac{2}{x})}{\not{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ عندما $x>0$ يكون $|x|=x$

$$=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ بشرط $x\neq 0$

شرط الجذر:

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=1+0-0=1 \quad ,1>0$$

شرط المقام:

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2})}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

السؤال الثاني:

a) لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1, 4]$، أوجد قيمة الثابتين a, b

الحل:

$\because f$ متصلة على $[1, 4]$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 1$ من اليمين ، ومتصلة عند $x = 4$ من اليسار

$\therefore f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$\therefore 5 = \lim_{x \to 1^+} (ax + b)$

$5 = a + b$

$\because a = 2$

$\therefore 5 = 2 + b$

$\therefore b = 3$

$\therefore f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$

$\therefore b + 8 = \lim_{x \to 4^-} (ax + b)$

$b + 8 = 4a + b$

$8 = 4a$

$\therefore a = 2$

تابع/ السؤال الثاني:

b) (1) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1, 2)$

الحل:

نوجد المشتقة:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

ومنه الميل:

$$f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$$

معادلة المماس:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 2$$

==========

(2) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته $x^2 - y^2 + xy - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

الحل:

بالاشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + (y + xy') = 0$$

$$-2yy' + xy' = -2x - y$$

$$y'(-2y + x) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

وبالتعويض ب $(1, 1)$

$$y' = \frac{-2 - 1}{-2 + 1} = 3$$

∴ ميل المماس = 3

السؤال الثالث:

12

a) لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & : \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

أوجد $f'(0)$

الحل:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x+2)}{x} = 2$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$ **(إن وجدت)**

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$$

$$\because f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 2$$

$$\therefore f'(0) = 2$$

تابع/ السؤال الثالث:

b) (1) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل:

بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

∴ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$$

$$g'(x) = 2x - 200 + 2x$$

$$g'(x) = 4x - 200$$

نضع $g'(x) = 0$

$$4x - 200 = 0 \implies x = 50$$

∴ توجد نقطة حرجة $(50, g(50))$

$$g''(x) = 4 \quad , \quad 4 > 0$$

∴ $g(50)$ **قيمة صغرى مطلقة عند** $x = 50$

العدد الأول هو: $x = 50$

العدد الثاني هو: $100 - x = 100 - 50 = 50$

∴ العددان هما $50 , 50$

==========

(2) لتكن : $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. **ابحث اتصال الدالة** $g \circ f$ **عند** $x = -2$

الحل:

f **دالة متصلة عند** $x = -2$ **(1)**

$$f(-2) = 9$$

g **دالة متصلة عند كل** $x \in \mathbb{R}^+$

∴ g **دالة متصلة عند** $x = 9$

أي أن g **دالة متصلة عند** $x = f(-2)$ **(2)**

من (1) ، (2) نجد أن $g \circ f$ **متصلة عند** $x = -2$

السؤال الرابع:

12

a) أدرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore (0, 1)$ نقطة حرجة

نكون جدول التغير لدراسة إشارة f' :

$-\infty$		0		∞
إشارة f'	− − −		− − −	
سلوك الدالة f	متناقصة ↘ ∞		متناقصة ↘ $-\infty$	

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

نكون جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$-\infty$		0		∞
إشارة f''	+ +		− −	
التقعر	تقعر لأعلى ∪		تقعر لأسفل ∩	

منحنى الدالة مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

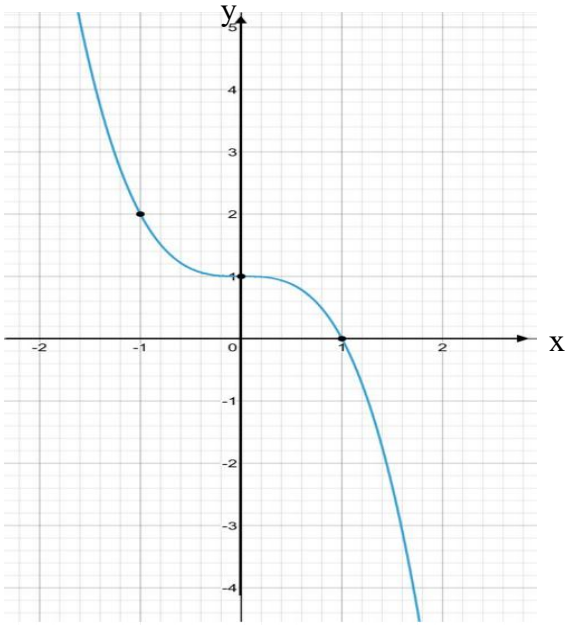
ومقعر لأسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0, 1)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f :



تابع/ السؤال الرابع:

b) عينة عشوائية حجمها 36 ، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 ،

باستخدام مستوى ثقة 95% :

1) أوجد هامش الخطأ

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

3) فسر فترة الثقة

الحل:

1) ∵ مستوى الثقة 95%

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

∵ σ^2 غير معلوم ، $n > 30$

$$\therefore E = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} = 1.3066$$

∴ هامش الخطأ ≈ 1.3067

1) فترة الثقة هي : $(\overline{x} - E \ , \overline{x} + E)$

$$= (60 - 1.3067 \, , 60 + 1.3067)$$

$$= (58.6933 \ , 61.3067)$$

2) التفسير: عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 36)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

الأسئلة الموضوعية

(جدول التظليل في الصفحة الأخيرة)

أولا : البنود (1–4) ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة، ظلل ⓑ إذا كانت العبارة غير صحيحة .

1	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\lvert x\rvert-3} = 2$
2	إذا كانت $y = 1 + x - cosx$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + sinx$
3	يكون مماس منحنى الدالة $f: f(x) = 4$ عند النقطة $(-1,4)$ موازياً لمحور السينات
4	منحنى الدالة $y = -3x^8$ فإن مقعرة للأعلى

==========

ثانياً : البنود (5–12) لكل بند أربع اختيارات ظلل في الورقة المخصصة للإجابة دائرة الاختيار الصحيح فقط :

5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96, 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

ⓐ 1.5 ⓑ -2.5

ⓒ 1.87 ⓓ -1.5

---

6) $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}$ تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 9

ⓒ 0 ⓓ ∞

---

7) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1, -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ -6 ⓑ -3

ⓒ 1 ⓓ 9

---

8) الدالة f : $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على :

ⓐ $(-\infty, \frac{1}{2}]$ ⓑ $(5, \infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$ ⓓ $(-5, 5)$

---

9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

ⓐ $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ⓑ $f(x) = \sqrt{3-x}$

ⓒ $f(x) = \begin{cases} 3x-1 : x \le 3 \\ 1 \quad : x > 3 \end{cases}$ ⓓ $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

---

10) إذا كانت $y = 1 - x + x^2 - x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $-1 + 2x - 3x^2$ ⓑ $2 - 3x$

ⓒ $-6x + 2$ ⓓ $1 - x$

---

11) إذا كانت : $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓑ $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓒ $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓓ $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

---

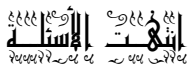
12) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0,2)$ هو:

ⓐ 3

ⓑ 2

ⓒ 1

ⓓ 0



جدول تظليل إجابات الاسئلة الموضوعية

السؤال	الإجابة			
(1)	ⓐ	ⓑ		
(2)	ⓐ	ⓑ		
(3)	ⓐ	ⓑ		
(4)	ⓐ	ⓑ		
(5)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(6)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(7)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(8)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(9)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(10)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(11)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(12)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

12

نموذج إجابة اختبار تجريبي الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي

للعام الدراسي 2026 – 2027م

المجال الدراسي : الرياضيات **الزمن : ساعتان و 45دقيقة** **الأسئلة في 11 صفحة**

القسم الأول : أسئلة المقال

أجب عن الأسئلة التالية موضحاً خطوات الحل في كل منها .

السؤال الأول:

12

(4 درجات)

(a) أوجد ان أمكن $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

الحل

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{-(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \lim_{x \to 9} (-(\sqrt{x}+3))$$

$$= \lim_{x \to 9} (-\sqrt{x}) + \lim_{x \to 9} (-3)$$

$$= -\sqrt{\lim_{x \to 9} x} + \lim_{x \to 9} (-3)$$

شرط ما تحت الجذر

$\lim\limits_{x \to 9} x = 9$

$9 > 0$

$$= -3 - 3$$

$$= -6$$

توجيه العاصمة

تابع السؤال الأول : (4 درجات)

(b) أوجد ان أمكن $\lim_{x \to 0} \frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}$

.....

الحل

1	$\lim_{x \to 0} \frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3\tan x}{5x} + \frac{x^2 \cos x}{5x} \right)$
1	$= \lim_{x \to 0} \frac{3\tan x}{5x} + \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{5}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} + \frac{1}{5} \left(\lim_{x \to 0} (x \cdot \cos x) \right)$
1	$= \frac{3}{5}(1) + \frac{1}{5} \left(\lim_{x \to 0} x \times \lim_{x \to 0} \cos x \right)$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{3}{5} + 0 = \frac{3}{5}$

(c) أوجد : $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$ (4 درجات)

.....

الحل نهاية المقام $\neq 0$

$\frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 3} (x - 2) = 3 - 2 = 1 \quad , 1 \neq 0$
	نهاية ما تحت الجذر > 0
$\frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2) = 3(3)^2 - 2 = 25 \quad , 25 > 0$
$\frac{1}{2} + 1$	$\lim_{x \to 3} \sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2)} = \sqrt{25} = 5$
$\frac{1}{2} + 1$	$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 3} \sqrt{3x^2 - 2}}{\lim_{x \to 3} (x - 2)} = \frac{5}{1} = 5$

12

السؤال الثاني:

(6 درجات)

(a) لتكن $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

.....

الحل

1 f دالة متصلة عند $x = -2$ ..... (1)

1 $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$

$g(x) = \sqrt{x+4}$

1 بفرض أن : $h(x) = x + 4$

h متصلة عند $x = 5$

1 $h(5) = 5 + 4 = 9$, $9 > 0$

1 أي أن g متصلة عند $x = f(-2)$ ..... (2)

من (1) , (2) ينتج أن

1 $g \circ f$ متصلة عند $x = 2$

توجيه العاصمة

تابع السؤال الثاني: **(6 درجات)**

(b) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x \le -1 \\ x^2-x-2 & : \ x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

.....

الحل f دالة متصلة عند $x=-1$

$\frac{1}{2}$ $f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$

1 $f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ (إن وجدت)

1 $f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+x-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x(x+1)}{x+1}$

$\frac{1}{2}$ $=\lim\limits_{x\to -1^-} x=-1$

$\therefore f'_-(-1)=-1$

$\frac{1}{2}$ $f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ (إن وجدت)

1 $f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}$

$\frac{1}{2}$ $=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-2)=-3$

$\therefore f'_+(-1)=-3$

1 $\because f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$

$f'(-1)$ غير موجودة

توجيه العلمية

12

السؤال الثالث :

(4 درجات)

(a) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة $(1,1)$.

الحل

$2x - 2yy' + y'x + 1y = 0$ (1)

$-2yy' + y'x = -2x - y$ (1/2)

$y'(-2y + x) = -2x - y$ (1/2)

$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$ (1/2)

$\frac{dy}{dx}|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - (1)}{-2(1) + (1)} = \frac{-3}{-1} = 3$ (1)

ميل المماس = 3 (1/2)

(4 درجات)

(b) لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \le 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

الحل

$f(3) = 7$ (1/2)

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 7 = 7$ (1/2)

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$ (1)

$= \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6$ (1/2)

$\because \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \longrightarrow \therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ ليست موجودة (1)

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$ (1/2)

تابع السؤال الثالث : **(4 درجات)**

(c) بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

.....

الحل $f(x) = x^3 + 1$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3,3]$

1 **قابلة للاشتقاق على $(-3,3)$**

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3,3]$

$\frac{1}{2}$ **∴ يوجد على الأقل $c \in (-3,3)$ بحيث :** $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$\frac{1}{2}$ $\because f(3) = 28 \quad , \quad f(-3) = -26$

$\frac{1}{2}$ $\because f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(c) = 3c^2$

$\frac{1}{2}$ $3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 - (-3)} = 9$

$c^2 = 3$

$\frac{1}{2}$ $c = \sqrt{3} \in (-3,3) \qquad c = -\sqrt{3} \in (-3,3)$

$\frac{1}{2}$ **التفسير :** **يوجد مماسان لمنحنى الدالة عند:** $x = -\sqrt{3}$ ، $x = \sqrt{3}$

يوازيان القاطع المار بالنقطتين $(-3, -26)$, $(3,28)$

12

السؤال الرابع :

(6 درجات)

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة .

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

.....

الحل

∵ f دالة كثيرة حدود ∴ f متصلة وقابلة للإشتقاق على R

1 $f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \qquad -3x^2 + 6x = 0$

$3x(-x + 2) = 0$

$x = 0 \longrightarrow f(0) = -4$

$x = 2 \longrightarrow f(2) = 0$

1 النقاط الحرجة هي $(0, -4)$, $(2, 0)$

2

	$-\infty$	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$	
سلوك الدالة f	↘	↗	↘	

$\frac{1}{2}$ الدالة f متزايدة على الفترة $(0, 2)$

$\frac{1}{2}$ الدالة f متناقصة على كل من الفترتين $(2, \infty)$, $(-\infty, 0)$

$\frac{1}{2}$ يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$, القيمة العظمى المحلية هي $f(2) = 0$

$\frac{1}{2}$ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$, القيمة الصغرى المحلية هي $f(0) = -4$

توجيه المعلمة

تابع السؤال الرابع: **(6 درجات)**

(b) متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $s = 120$.

يقول صاحب المصنع أن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع .

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\propto = 0.05$

.....

الحل $n = 100$ ‘ $\bar{x} = 1570$ ‘ $s = 120$

صياغة الفروض :

1 $H_0 : \mu = 1600$ مقابل $H_1 : \mu \neq 1600$

∵ σ غير معلومة , $n > 30$

∴ نستخدم المقياس الإحصائي Z $\frac{1}{2}$ $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

1 $Z = \dfrac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.5$

1 ∵ مستوى المعنوية $\propto = 0.05 \longleftarrow \frac{\propto}{2} = 0.025 \longleftarrow Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

1 منطقة القبول هي $(-1.96 , 1.96)$

$\frac{1}{2}$ ∵ $-2.5 \notin (-1.96 , 1.96)$

1 ∴ القرار : نرفض فرض العدم $\mu = 1600$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 1600$

القسم الثاني (البنود الموضوعية)

أولاً : في البنود من $(1 \ - \ 4)$ ظلّل في ورقة الإجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة

(b) إذا كانت العبارة خاطئة

.....

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \dfrac{3}{2}$ (a) (b)

---

(2) الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط .

(a) (b)

---

(3) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2) = -1$ فإن $f(-1) = 1$

(a) (b)

---

(4) الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ (a) (b)

ثانياً : في البنود من$(5 \ - \ 12)$ لكل بند أربع اختيارات واحد فقط منها صحيح

ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح .

.....

(5) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{1}{3}$

---

(6) للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

توجيه المعلمة

(7) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(8) إذا كانت الدالة f دالة كثيرة حدود , $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن :

(a) $\acute{f}(c) = 0$ (b) $\acute{f}(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $\acute{f}(c)$ غير موجودة

(9) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$ (b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ (d) $3(2x+1)^{-1}$

(10) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(11) مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي :

(a) $9\ cm, 4\ cm$ (b) $12\ cm, 3\ cm$

(c) $6\ cm, 6\ cm$ (d) $18\ cm, 2\ cm$

(12) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين , ومستوى ثقة 95% وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي :

(a) 65 (b) 62 (c) 8 (d) 26

جدول إجابة البنود الموضوعية

(1)	**(a)**	(b)		
(2)	(a)	**(b)**		
(3)	**(a)**	(b)		
(4)	(a)	**(b)**		
(5)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(6)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(7)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(8)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(9)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(10)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(11)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(12)	(a)	**(b)**	(c)	(d)

1

2

الدرجة : .....

دولة الكويت | **المجال الدراسي : الرياضيات**
وزارة التربية | **الزمن : ساعتان و ٣٠ دقيقة**
التوجيه الفني العام للرياضيات | **عدد الصفحات : ١١**

نموذج إجابة امتحان الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي للعام الدراسي : ٢٠٢٦ / ٢٠٢٧ م

القسم الأول ـ أسئلة المقال

(تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال)

السؤال الأول : (١٢ درجة)

(a) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$ **(٤ درجات)**

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بالعدد 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة :

نضرب البسط والمقام في مرافق البسط $\sqrt{x+8}+3$

$$\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\frac{(x-1)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$ **(١)**

$$\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\ ،\ x\neq 1$$ **(١)**

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to 1}(x+8)=9\ ،\ \ 9>0$

شرط المقام :

$$\lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)=\lim_{x\to 1}(x+1)\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}+3\right)=$$ **(١)**

$$\lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{\lim_{x\to 1}x+8}+\lim_{x\to 1}3\right)=2(3+3)=12\ ،\ \ 12\neq 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{9}+3\right)}=\frac{1}{12}$$ **(١)**

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد مشتقة الدالة f حيث $f(x) = \sec x \,.\, (1 + sinx)$ **(٤ درجات)**

الحل :

$f'(x) = (1 + sinx).(\sec x \,.\, \tan x) + \sec x \,.\, \cos x$ (٣)

$= \sec x \,.\, \tan x + \sec x \,.\, \tan x.\, sinx + \sec x \,.\, \cos x$ (١)

$= \sec x \,.\, \tan x + \sec x \,.\, \tan x.\, sinx + 1$

(c) يدّعي مصنع أن متوسط وزن العبوة التي ينتجها $\mu = 50$ g . **(٤ درجات)**
اختيرت عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي ،
فكان $\bar{x} = 53$ g ، $S = 5$ g . اختبر صحة ادعاء المصنع عند مستوى ثقة 95% .
(علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

الحل : $n = 25$, $\bar{x} = 53$, $S = 5$

١- صياغة الفروض : $H_0: \mu = 50$ مقابل $H_1: \mu \neq 50$

٢- σ غير معلومة ، $n < 30$

نستخدم المقياس الاحصائي t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{53 - 50}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = \frac{3}{1} = 3$$ (١)

٣- $n = 25$ ∵ درجات الحرية : $n - 1 = 25 - 1 = 24$ (١)

مستوى الثقة 95% ، $1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ (١)

من جدول توزيع t $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

٤- منطقة القبول $(2.064 \;،\; -2.064)$

٥- اتخاذ القرار الاحصائي : $3 \notin (2.064 \;،\; -2.064)$ (١)

القرار رفض فرض العدم $\mu = 50$

السؤال الثانى : (١٢ درجة)

(a) ادرس اتصال الدالة f عند $x = 3$ حيث: **(٤ درجات)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$$

الحل :

نحسب قيمة الدالة عند $x = 3$

$$f(3) = 7 \quad (١)$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 7 = 7 \quad (١)$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} (x+3) = 3 + 3 = 6 \quad (١)$$

$$\because \lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة (١)

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$

(b) بيّن أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$ ، ثم أوجد قيمة c الذي تنبيء به النظرية وفسّر إجابتك . **(٤ درجات)**

الحل :

الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة وقابلة للاشتقاق على (-3,1) (١)

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3,1]$

∴ يوجد على الأقل $c \in$ (-3,1) بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

(١) $\because \quad f(1) = (1)^2 + 2(1) = 3 \quad , \quad f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3$

$$f'(x) = 2x + 2 \quad , \quad f'(c) = 2c + 2$$

(١) $\therefore \ 2c + 2 = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - 3}{1 + 3} = 0$

$$\therefore C = -1 \in (-3 , 1)$$

(١) التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين (3 , 1) , (-3 , 3)

تابع السؤال الثانى :

(c) مستطيل محيطه 40 cm ، أوجد بُعديه بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن. **(٤ درجات)**

الحل :

ليكن الطول L والعرض W ،

$\because \quad 2L + 2W = 40$ (١)

$\therefore \quad W = 20 - L$

$A(L) = L(20 - L) = 20L - L^2$

$A'(L) = 20 - 2L$ (١)

$A'(L) = 0 \Rightarrow L = 10$

$20 - 2L = 0 \Rightarrow L = 10$

$\because A''(L) = -2 \quad , -2 < 0$ (١)

$\therefore$ قيمة عظمى مطلقة عند $L = 10$,

البعدين هما $L = 10$, $W = 20 - 10 = 10$.

وأكبر مساحة $100\ \text{cm}^2$, الشكل الذي يعطي أكبر مساحة هو مربع طول ضلعه 10 cm ، (١)

السؤال الثالث : (١٢ درجة)

(a) أوجد كلاً مما يلي:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4x}}{x-1}$$ **(٦ درجات)**

الحل :

(١) $$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+4x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2(9+\frac{4}{x})}}{x(1-\frac{1}{x})}$$

(١) $$= \frac{|x|\sqrt{9+\frac{4}{x}}}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{-x\sqrt{9+\frac{4}{x}}}{x(1-\frac{1}{x})}$$ عندما $x<0$ يكون $|x| = -x$

(١) $$= \frac{-\sqrt{9+\frac{4}{x}}}{(1-\frac{1}{x})}$$ بشرط $x \neq 0$

شرط المقام : $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 1-0 = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

شرط الجذر : $\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 9 + \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x} = 9+0 = 9 \quad , \quad 9>0$

(١) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{4}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9+\frac{4}{x}}}{\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})}$$

(١)

(١) $$= \frac{-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(9+\frac{4}{x})}}{\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})} = \frac{-\sqrt{9}}{1} = -3$$

تابع السؤال الثالث :

(b) أوجد معادلتي المماس والخط العمودي على المماس لمنحنى الدالة الذي معادلته $x^3 + y^3 = 9xy$ عند النقطة $(2, 4)$. **(٦ درجات)**

الحل :

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x مع اعتبار y دالة في x (الاشتقاق الضمني) :

$$3x^2 + 3y^2y' = 9y + 9xy'$$ (١)

$$3y^2y' - 9xy' = 9y - 3x^2$$

$$3y'(y^2 - 3x) = 3(3y - x^2)$$

$$y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$ (١)

ميل المماس عند $(2,4)$:

$$m = \frac{3(4) - 4}{16 - 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$ (١)

معادلة المماس : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{4}{5}\,x + \frac{12}{5}$$ (١)

ميل العمودي : $\frac{-1}{m} = \frac{-5}{4}$ (١)

معادلة العمودي: $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{-5}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-5}{4}\,x + \frac{13}{2}$$ (١)

السؤال الرابع : (١٢ درجة) **(٦ درجات)**

(a) ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

الحل :

(١)

$f(x)=x^2-3 \quad : x\in(1,3)$

$\forall\ c\in(1,3)$

$f(c)=c^2-3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x^2-3)=c^2-3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} f(c) \quad \forall\ c\in(1,3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,3)$ ....(1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=1$ من جهة اليمين

(٢)

$f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)=-2$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين .....(2)

(٢)

ندرس اتصال الدالة f عند $x=3$ من جهة اليسار

$f(3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)=6$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار .....(3)

من 1,2,3

(١)

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,3]$

تابع السؤال الرابع :

(b) لتكن الدالة $f: f(x) = x^3 - 3x + 4$ ، أوجد: **(٦ درجات)**

(1) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها، والقيم القصوى المحلية.

(2) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة f .

الحل :

∵ f دالة كثيرة حدود ∴ f متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \Re$ ،

نوجد النقاط الحرجة: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$ (١)

$f'(x) = 0$

$3(x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,\ x = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2\ , \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$

∴ النقاط الحرجة هي : $(1\ ,\ 2)\ ,\ (-1\ ,\ 6)$ (١)

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' وسلوك الدالة :

	$-\infty$	-1	1	∞
الفترة	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f'	+++	---	+++	
سلوك $f(x)$	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗	

(١)

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(1, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1,1)$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$,وقيمة صغرى عند $x = 1$

القيمة العظمى المحلية هي : $f(-1) = 6$

القيمةالصغرى المحلية هي : $f(1) = 2$ (١)

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 4$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f''

	$-\infty$	0	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	
إشارة f''	---	+++	
التقعر	∩	∪	

(١)

منحنى الدالة مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعر لأعلى على الفترة$(0,\infty)$

نقاط الانعطاف هي : $(0,4)$ (١)

القسم الثانى : البنود الموضوعية (١٢ درجة)

أولاً : في البنود من (١) إلى (٤) عبارات ، ظلل في ورقة الإجابة ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة ،

ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة .

---

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$

---

(2) **إذا كانت** $f(x)=3x+xtanx$ **فإن** $f'(0)=1$

---

(3) **إذا كانت** $y=\sqrt{x^2+1}$ **فإن** $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

---

(4) **الدالة** f **:** $f(x)=x^2-x-3$ **متزايدة على الفترة** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

ثانياً : في البنود من (5) إلى (12) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

---

(5) **نقاط الدالة** f **:** $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ **التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي :**

ⓐ $-5\,,2$ ⓑ -2 ⓒ $-2\,,2$ ⓓ 2

---

(6) **لتكن الداله** f , $f(x)=\sqrt{x^2+7}$, $\mathbf{g}$ **:** $\mathbf{g}(x)=x^2-3$ **فإن** $(f\circ \mathbf{g})(0)$ **يساوي:**

ⓐ 4 ⓑ -4 ⓒ 1 ⓓ -1

---

(7) **الدالة** f: $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+25}}$ **متصلة على:**

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $(-5,5)$

ⓒ $(5\,,\infty)$ ⓓ $(-\infty,\frac{1}{2}]$

---

(8) **إذا كانت** $f(x)=(1+6x)^{\frac{2}{3}}$ **فإن** $f''(x)$ **تساوي :**

ⓐ $\frac{8}{27}(1+6x)^{\frac{-4}{3}}$ ⓑ $8(1+6x)^{\frac{-4}{3}}$ ⓒ $-8(1+6x)^{\frac{-4}{3}}$ ⓓ $-64(1+6x)^{\frac{-4}{3}}$

---

(9) إذا كانت $y = \cos 3x$ **فإن** $\frac{dy}{dx}$ **تساوي:**

ⓐ $3\sin 3x$ ⓑ $-3\sin 3x$ ⓒ $-3\cos 3x$ ⓓ $3\cos 3x$

---

(10) معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2$ **عند** $x = -1$ **هي:**

ⓐ $y = -2x - 1$ ⓑ $y = 2x + 1$

ⓒ $y = -2x + 1$ ⓓ $y = x - 1$

---

(11) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ **لها قيمة قصوى محلية عند** $x = \frac{5}{2}$ **فإن a تساوي:**

ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5

---

(12) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع ، مع هامش خطأ وحدتين، و مستوى ثقة 95% **وانحراف معياري للمجتمع** $\sigma = 8$ **تساوي :**

ⓐ 26 ⓑ 8 ⓒ 62 ⓓ 65

" انتهت الأسئلة "

ورقة إجابة البنود الموضوعية

السؤال	الإجابة			
(١)	ⓐ	ⓑ		
(٢)	ⓐ	ⓑ		
(٣)	ⓐ	ⓑ		
(٤)	ⓐ	ⓑ		
(٥)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(٦)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(٧)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(٨)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(٩)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(١٠)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(١١)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(١٢)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

لكل بند درجة واحدة فقط

١٢

دولة الكويت
وزارة التربية
إدارة التوجيه الفني للرياضيات

المجال الدراسي : الرياضيات
الزمن : ساعتان و45 دقيقة
عدد الصفحات : 12

نموذج إجابة نموذج امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر علمي
للعام الدراسي 2026-2027

القسم الأول – أسئلة المقال
تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (12 درجة)

(a) أوجد : $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ **(7 درجات)**

الحل:

عند التعويض عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2x-3)-1}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad : x\neq 2$$

نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 2}(2x-3) = 2(2)-3 = 1 \quad , \quad 1>0$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right) = \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+\lim_{x\to 2}1$$

$$= \sqrt{1}+1 = 2 \ , \quad 2\neq 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{\lim_{x\to 2}2}{\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

تابع السؤال الأول :

(b) لتكن : $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ **(5 درجات)**

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

الحل :

$$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)'(x^2+4)-(x^2+4)'(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+4)-2x(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'\big(g(x)\big)=\frac{16\sqrt{x}}{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+4\right)^2}=\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore (f\circ g)'(x)=\left(\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f\circ g)'(1)=\left(\frac{8}{(1+4)^2}\right)=\frac{8}{25}$$

السؤال الثاني : (12 درجة)

(a) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث : (7 درجات)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x}{-x} & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x(x+3)}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x(x+3)}{-x} & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & : x > 0 \\ -x - 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3 \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 3) = 0 + 3 = 3 \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x - 3) = 0 - 3 = -3 \qquad (3)$$

∴ من (1) و(2) و(3) نستنتج أن:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

∴ $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

∴ الدالة f غير متصلة عند $x = 0$

ولكن متصلة عند $x = 0$ من جهة اليسار لأن $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -3$

تابع السؤال الثاني :

(b) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟ (5 درجات)

الحل :

نفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

∴ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما $f(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$$f'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1) = 4x - 200$$

$$f'(x) = 0 \qquad 4x - 200 = 0$$

توجد نقطة حرجة $x = 50$ $\quad (50, f(50))$

$$f''(x) = 4 > 0$$
$$f''(50) = 4 > 0$$

∴ $f(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

∴ العدد الأول هو 50

∴ العدد الثاني هو $100 - 50 = 50$

∴ العددان هما 50 , 50

السؤال الثالث : (12 درجة)

(a) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس لمنحنى الدالة $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0$ عند النقطة $(-1, 0)$ **(5 درجات)**

الحل :

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$$12x + 3y + 3xy' - 6y^2y' - 7y' = 0$$

$$3xy' - 6y^2y' - 7y' = -12x - 3y$$

$$y'(3x - 6y^2 - 7) = -12x - 3y$$

$$\therefore \quad y' = \frac{-12x - 3y}{3x - 6y^2 - 7}$$

وبالتعويض بـ $(-1, 0)$

$$y' = \frac{-12(-1) - 3(0)}{3(-1) - 6(0)^2 - 7} = \frac{-6}{5}$$

∴ ميل المماس = $\frac{-6}{5}$

معادلة المماس : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - 0 = \frac{-6}{5}(x + 1)$$

$$y = \frac{-6}{5}x - \frac{6}{5}$$

ميل الخط العمودي (الناظم):

$$\frac{-1}{f'(a)} = \frac{5}{6}$$

معادلة الخط العمودي:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \qquad : f'(a) \neq 0$$

$$y - 0 = \frac{5}{6}(x + 1)$$

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$$

تابع السؤال الثالث :

(b) لتكن الدالة $f : f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ **(7 درجات)**

(1) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

(2) أوجد الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

(3) أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف.

(4) ارسم بيان الدالة.

الحل :

(1) f دالة كثيرة حدود مجالها R وقابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

نضع : $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies 3(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \ , \quad x = 3$$

$$f(1) = 0 \ , \quad f(3) = -4$$

$\therefore$ نقطتان حرجتان $(1, 0)$, $(3, -4)$

(2) نكوّن جدولاً لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	+++	−−−	+++
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, 1)$ والفترة $(3, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(1, 3)$

يوجد للدالة عند $x = 1$ قيمة عظمى محلية وهي: $f(1) = 0$

يوجد للدالة عند $x = 3$ قيمة صغرى محلية وهي: $f(3) = -4$

تابع السؤال الثالث (b) :

(3) $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

نضع : $f''(x) = 0$

$$6(x-2) = 0 \implies x = 2 \ , \qquad f(2) = -2$$

نكوّن جدولاً لدراسة إشارة f''

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f''	−−−	+++
التقعر	∩ مقعر لأسفل	∪ مقعر لأعلى

منحنى الدالة مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$ **ومقعر لأعلى على الفترة** $(2, \infty)$

∴ $(2, -2)$ **نقطة انعطاف**

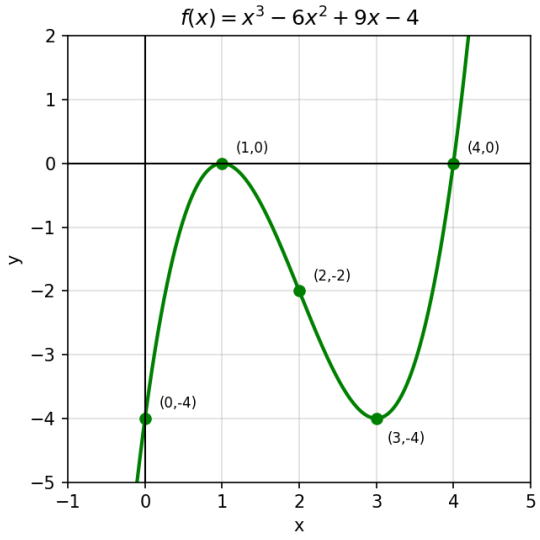
(4) النهايات عند الحدود المفتوحة :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

نقاط إضافية :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية



السؤال الرابع : (12 درجة)

(a) لتكن الدالة $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$: f **(6 درجات)**

أوجد D_f (مجال الدالة f) ، ثم ادرس اتصالها على $[0,4]$

الحل :

نفرض أن :

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \quad , \quad g(x)=-x^2+5x+6$$

$$D_f=\{x: g(x)\geq 0\}$$

$$-x^2+5x+6\geq 0$$

المعادلة المناظرة : $-x^2+5x+6=0$

بالضرب في (-1) $x^2-5x-6=0$

$$(x+1)(x-6)=0$$

$$x=-1 \ , \quad x=6$$

دراسة إشارة $g(x)$:

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,6)$	$(6,\infty)$
إشارة $g(x)$	−−−	+++	−−−

∴ مجال الدالة f هو $[-1,6]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[0,4]$ حيث

$$f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$$

$$g(x)\geq 0 \qquad \forall\, x\in[-1,6]$$

$[0,4]$ ∵ مجموعة جزئية من $[-1,6]$

$$\therefore\ g(x)\geq 0 \qquad \forall\, x\in[0,4] \qquad (1)$$

∵ الدالة g : $g(x)=-x^2+5x+6$ دالة متصلة على $[0,4]$ (2)

من (1) و(2) نجد أن :

f ∴ متصلة على $[0,4]$

تابع السؤال الرابع:

(b) تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي، إذا أُخذت عينة من 25 موظفاً، ووُجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 ديناراً كويتياً، (6 درجات)
فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 125$ (ديناراً) ، وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

الحل :

① **صياغة الفروض :**

$$H_0: \mu = 4000 \text{ مقابل } H_1: \mu \neq 4000$$

② $\sigma = 125$ ∵ (معلومة)

∴ نستخدم المقياس الإحصائي Z : $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$\because \ n = 25 \quad , \quad \bar{x} = 3950$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore \ Z = \frac{3950 - 4000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

③ ∵ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \ \alpha = 0.05 \ \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\therefore \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول هي $(-1.96 \ , \ 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي : $\because \ -2 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$

∴ القرار : نرفض فرض العدم $\mu = 4000$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4000$

ثانيا: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) إلى (3) عبارات ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة
ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة .

---

(1) الدالة $f : f(x) = x^2 + |x - 1|$ متصلة عند $x = 3$

---

(2) إذا كانت الدالة $f : |2 - x|(2 - x) = f(x)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق $\forall\ x \in \mathbb{R}$

---

(3) إذا كانت f دالة متصلة على (a, b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

---

(4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{4x^2-x+3}} = \frac{-3}{2}$

ثانيا : في البنود من (4) إلى (12) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

---

(5) $\lim_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\sin x}$ يساوي :

ⓐ 2 ⓑ -2 ⓒ 0 ⓓ ∞

---

(6) إذا كانت الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي :

ⓐ 4 ⓑ 9 ⓒ 16 ⓓ 25

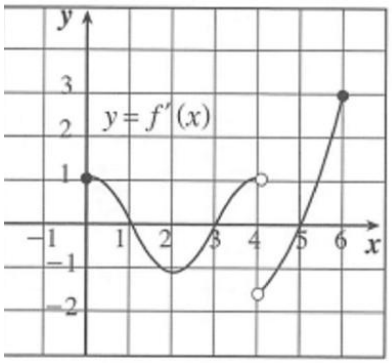
---

(7) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

ⓐ لها نقطتا انفصال عند $x=4$, $x=-1$ ⓑ متصلة على $[4,\infty)$

ⓒ متصلة على كل من $(4,\infty)$, $(-\infty,4)$ ⓓ ليس أي مما سبق

(8) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون :



ⓐ متزايدة على كل من $(4,5)$, $(1,3)$

ⓑ متناقصة على كل من $(4,5)$, $(1,3)$

ⓒ لها قيمة صغرى محلية عند $x=3$ فقط

ⓓ لها نقطة انعطاف عند كل من $x=4$, $x=2$

(9) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x}=2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $s=0.87$. إن فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي :

ⓐ $(2.1916, 3.3284)$ ⓑ $(1.6232, 3.8968)$

ⓒ $(2.1916, 3.8968)$ ⓓ $(2.0913, 3.4287)$

(10) لتكن الدالة f : $f(x)=(1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن $f''(x)$ تساوي :

ⓐ $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓑ $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓒ $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓓ $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(11) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y=3x^3-9x-4$ على الفترة $(0,2)$ هو :

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة : $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2,3)$ هو :

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $-\frac{1}{9}$

" انتهت الأسئلة "

ورقة إجابة البنود الموضوعية

السؤال	الإجابة			
(1)	ⓐ	ⓑ		
(2)	ⓐ	ⓑ		
(3)	ⓐ	ⓑ		
(4)	ⓐ	ⓑ		
(5)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(6)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(7)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(8)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(9)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(10)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(11)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(12)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ

لكل بند درجة واحدة فقط

12

أولاً : أسئلة المقال (تراعى الحلول الأخرى فى جميع أسئلة المقال)

12

السؤال الأول :

(a) أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x}$

الحل : عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط و المقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{\big((4+x)-4\big)\big((4+x)+4\big)}{x}$$

$$= \frac{(4+x-4)(4+x+4)}{x}$$

$$= \frac{x(x+8)}{x}$$

$$= x + 8 \qquad , \ x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = \lim_{x \to 0} (x + 8) = 0 + 8 = 8$$

تابع/ السؤال الأول :

(b) أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x-1}}$

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x-1}}=\frac{x\,(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}}$$

$$=\frac{x\ (1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} \qquad x\to\infty$$

$$\therefore |x|=x$$

$$=\frac{x\,(1-\frac{2}{x})}{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

(نهاية ما تحت الجذر)

$$\lim_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to\infty}4+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$=4+0-0=4 \quad , \quad 4>0$$

(نهاية المقام)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\sqrt{4}=2 \quad , \quad 2\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

12

السؤال الثاني :

(a) ادرس اتصال الدالة f على مجالها : $f(x)=\begin{cases} x+3 & : x\le -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x>-1 \end{cases}$

الحل :

مجال الدالة f هو $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها

ندرس اتصال الدالة دالة f عند $x=-1$ من جهة اليمين

$f(-1)=-1+3=2$

$\because \lim_{x\to -1^+}(x+3)=-1+3=2 \quad ,2\neq 0$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{4}{x+3}\right)$$

$$=\frac{\lim_{x\to -1^+}(4)}{\lim_{x\to -1^+}(x+3)}=\frac{4}{2}=2$$

$\because f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-1$ من جهة اليمين (3)

نفرض : $g(x)=x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=g(x) \qquad \forall x\in(-\infty,-1]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,-1]$ (1)

نفرض : $h(x)=\frac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة

لكل $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=h(x) \qquad \forall x\in(-1,\infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(-1,\infty)$ (2)

من (1), (2) , (3)

$\therefore f$ متصلة على الفترة $(-\infty,\infty)$

$\therefore f$ متصلة على $\mathbb{R}$

تابع/ السؤال الثاني:

(b) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = x + x^2 y^5$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + y^5 \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 \frac{dy^5}{dx}$$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1+2xy^5}{1-5x^2y^4}$$

السؤال الثالث :

12

(a) أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم عند النقطة (0 , 1) لمنحنى الدالة f

حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)' - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

معادلة الناظم :

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - 0 = -3(x-1)$$

$$y = -3x + 3$$

معادلة المماس :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

7

تابع/ السؤال الثالث:

(b) عددان موجبان مجموعهما 100 و مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن ، ما العددان ؟ .

الحل : بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$$

$$g'(x) = 2x - 200 + 2x$$

$$= 4x - 200$$

$$g'(x) = 0 \quad \rightarrow 4x - 200 = 0 \quad \rightarrow x = 50$$

∴ توجد نقطة حرجة (50 , g(50))

$$g''(x) = 4 \qquad , 4 > 0$$

∴ $g(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

∴ العدد الأول هو: $x = 50$

∴ العدد الثاني هو : $100 - x = 100 - 50 = 50$

∴ العددان هما 50 ، 50

12

السؤال الرابع :

(a) لتكن الدالة $f(x) = x^3 - 12x - 5$ ، أوجد كلا مما يلي :

1) النقاط الحرجة للدالة .

2) الفترات التي يكون الدالة متزايدة أو متناقصة عليها.

3) القيم القصوى المحلية.

الحل : f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

نضع : $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \times (-2) - 5 = 11 \quad , \quad f(2) = 2^3 - 12 \times 2 - 5 = -21$$

$\therefore$ $(-2, 11)$, $(2, -21)$ نقاط حرجة .

نكون جدول التغير لدراسة إشارة f' :

	$-\infty$		-2		2		∞
إشارة f'		+++		- - -		+++	
سلوك النهاية f		متزايدة		متناقصة		متزايدة	

الدالة متناقصة على الفترة $(-2, 2)$

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$

للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ هي $f(-2) = 11$ و قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -21$

تابع/ السؤال الرابع:

(*b*) إذا كانت $S = 1.79$ ، $\bar{x} = 37.2$ ، $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل :

- صياغة الفروض :

$H_0 : \mu = 37$ مقابل $H_1 : \mu \neq 37$

- $\because \sigma$ غير معلوم , $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

- مستوى المعنوية α : $\because \alpha = 0.05 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$\therefore Z_{0.025} = 1.96$

- منطقة القبول هي (-1.96 , 1.96)
- اتخاذ القرار الإحصائي : $\because 0.999 \in (-1.96 , 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

ثانياً: البنود الموضوعية

أولا : في البنود من (1-4) عبارات ظلل في ورقة الاجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة ,
(b) إذا كانت العبارة صحيحة

1	إذا كانت $y = 5\cot(\frac{2}{x})$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\ csc^2(\frac{2}{x})$
2	إذا كانت $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$
3	الدالة : $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$
4	الدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0\ ,1]$

ثانيا: في البنود من (5-12) لكل بند أربعة اختيارات واحدة فقط منها صحيح , ظلل في ورقة الإجابة دائرة الرمز الدال على الاجابة الصحيحة .

5	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$ (a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞
6	عدد النقاط الحرجة للدالة $y= 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة : $(0\ ,2)$ هو : (a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0
7	إذا كانت g دالة متصلة عند $x = 2$ فإن الدالة المتصلة عند $x = 2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي : (a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$ (c) $\frac{g(x)}{x-2}$ (d) $\lvert g(x)\rvert$
8	إن الدالة $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو : (a) ناب (b) ركن (c) مماس عمودي (d) غير متصل

9	إذا كانت f دالة كثيرة حدود ، $(c\ ,f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن : **a** $f"(c)=0$ **b** $f'(c)=0$ **c** $f(c)=0$ **d** $f''(c)$ موجودة غير
10	إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96,6% هي : **a** 2.12 **b** 2.17 **c** 21.2 **d** 21%
11	إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ و كانت $\lim_{x\to-2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي : **a** 3 **b** 5 **c** 9 **d** 11
12	إذا كانت $f(x)=3x+x\ tanx$ فإن $f'(0)$ يساوي : **a** -3 **b** 0 **c** 1 **d** 3

انتهت الأسئلة

إجابة الأسئلة الموضوعية

1	**a**	b		
2	a	**b**		
3	**a**	b		
4	**a**	b		
5	**a**	b	c	d
6	a	b	**c**	d
7	a	b	c	**d**
8	a	**b**	c	d
9	**a**	b	c	d
10	**a**	b	c	d
11	**a**	b	c	d
12	a	b	c	**d**

12