SADAD TEAM

ورقة عمل

في النهايات المثلثية

Trigonometric Limits Worksheet

أهم التمارين و القواعد في النهايات المثلثية و دساتير التحويل

إعداد فريق سداد التعليمي

Prog : Ahmad HK

﴿ وَأَن لَّيْسَ لِلْإِنسَانِ إِلَّا مَا سَعَىٰ ﴾

تذكير.. أهم القواعد و النهايات الشهيرة

دساتير التحويل	
1.	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2.	$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
3.	$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
4.	$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
5.	$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

النهايات الشهيرة			
1.	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$	2.	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$
3.	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$	4.	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
5.	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$	6.	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}$
7.	$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin(x)}{x} = 0$	8.	$\lim_{x\to \infty}\frac{\cos(x)}{x} = 0$

ثانياً: القسم الأول ـــ التمارين (نسخة غير محلولة)

التمرين (1): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)}{\sin(8x)}$$

مساحة الحل:

التمرين (2): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+9}-3}$$

مساحة الحل:

التمرين (3): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x \cdot \sin(x)}$$

مساحة الحل:

التمرين (4): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{1-\cos(x)}$$

مساحة الحل:

التمرين (5): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin(\sqrt{2}x)}{x}$$

مساحة الحل:

التمرين (6): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$$

مساحة الحل:

التمرين (7): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 5} \frac{\tan(x-5)}{x^2-25}$$

مساحة الحل:

التمرين (8): أوجد نهاية التابع الآتي عند $x \to 0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-2\cos(x)}}{x} \quad , \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

مساحة الحل:

التمرين (9): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x \cdot \cos(x)}{2 \cdot \sin^2(\frac{x}{2})}$$

مساحة الحل:

التمرين (10): أوجد النهاية الآتية

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

مساحة الحل:

التمرين (11): أوجد نهاية التابع الآتي عند اللانهاية

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos(x)}{x^2 + 1} \ , \ x \to \infty$$

مساحة الحل:

التمرين (11 مكرر): أوجد نهاية التابع الآتي عند اللانهاية

$$f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{x} \ , \ x \to \infty$$

مساحة الحل:

التمرين (12): أوجد نهاية التابع الآتي عند اللانهاية

$$f(x) = \sin^2(x) \ , \ x \to \infty$$

مساحة الحل:

التمرين (13): أوجد نهاية التابع الآتي عند اللانهاية

$$f(x) = \frac{2\sin^2(x)}{x + 1} \ , \ x \to +\infty$$

مساحة الحل:

التمرين (14): أوجد نهاية التابع الآتي عند الصفر

$$f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \quad , \quad x \to 0$$

مساحة الحل:

التمرين (15): أوجد نهاية التابع الآتي عند اللانهاية

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot \tan(x)} \quad , \quad x \to \infty$$

مساحة الحل:

ثالثاً: القسم الثاني — التمارين مع الحلول التفصيلية

التمرين (1):

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)}{\sin(8x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot [2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x)]}{\sin(8x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin(4x)}{\sin(8x)} = 2 \cdot (\frac{4}{8}) = \boxed{1}$$

التمرين (2):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+9}-3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot (\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot (\sqrt{x+9}+3) = (1)(\sqrt{0+9}+3) = \boxed{6}$$

التمرين (3):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x \cdot \sin(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x \cdot \sin(x) \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = (1)(\frac{1}{2}) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

التمرين (4):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x)(1 + \cos(x))}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x)(1 + \cos(x))}{\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot (1 + \cos(x)) = (1)(1 + 1) = \mathbf{2}$$

التمرين (5):

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin(\sqrt{2}x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x} \cdot 2\sqrt{2} = (1)(2\sqrt{2}) = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

التمرين (6):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x} \cdot \sin(2x)}{2x} = 2\sqrt{0} \cdot (1) = \mathbf{0}$$

التمرين (7):

$$\lim_{x \to 5} \frac{\tan(x - 5)}{x^2 - 25}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\tan(x - 5)}{x - 5} \cdot \frac{1}{x + 5} = (1)\left(\frac{1}{5 + 5}\right) = \mathbf{\frac{1}{10} = 0.1}$$

التمرين (8):

$$\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(x)}}{x}}\ ,\ \mathbf{\lim_{x \to 0} f(x)}$$

$$\sqrt{2(1 - \cos(x))} = \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \mathbf{1}\ ,\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \mathbf{-1}$$

توضيح: النهايتان من اليمين واليسار مختلفتان، لذا النهاية عند الصفر غير موجودة بشكل عام.

التمرين (9):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x \cdot \cos(x)}{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - \cos(x))}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} x = \mathbf{0}$$

التمرين (10):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

Let $X = \frac{1}{x}$, as $x \to +\infty \Rightarrow X \to 0$: $\lim_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$

التمرين (11):

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos(x)}{x^2 + 1} \quad , \quad x \to \infty$$

$-1 \le \cos(x) \le 1 \Rightarrow \frac{-x}{x^2+1} \le \frac{x \cdot \cos(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

التمرين (11 مكرر):

$$f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{x} \quad , \quad x \to \infty$$

$-1 \le \cos(x) \le 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \le 1 + \frac{\cos(x)}{x} \le 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = 1 + 0 = 1$

التمرين (12):

$$f(x) = \sin^2(x) \quad , \quad x \to \infty$$

$0 \le \sin^2(x) \le 1 \Rightarrow$ النهاية غير موجودة

توضيح: التابع يتذبذب باستمرار بين 0 و 1 عند اقتراب x من اللانهاية، فلا تستقر قيمته عند عدد واحد.

التمرين (13):

$$f(x) = \frac{2\sin^2(x)}{x + 1} \quad , \quad x \to +\infty$$

$0 \le \sin^2(x) \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{2\sin^2(x)}{x+1} \le \frac{2}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

توضيح: بمبرهنة الإحاطة، نهاية الطرف الأيسر 0 ونهاية الطرف الأيمن 0 عند $x \to +\infty$.

التمرين (14):

$$f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \quad , \quad x \to 0$$

$-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{|1/x|} \le f(x) \le \frac{1}{|1/x|} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

التمرين (15):

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot \tan(x)} \quad , \quad x \to \infty$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)} = \frac{\cos(x)}{x} \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

توضيح: بمبرهنة الإحاطة، نهاية الطرفين عند $x \to +\infty$ تساوي 0.

SADAD TEAM

﴿وَأَنَّ سَعْيَهُ سَوْفَ يُرَىٰ﴾